Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática - IM
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PGMAT
Dissertação de Mestrado

SOLUÇÕES DE EINSTEIN EM ALGUMAS VARIEDADES BANDEIRA

Wendell Otero Prates

Salvador-Bahia

Abril de 2010

SOLUÇÕES DE EINSTEIN EM ALGUMAS VARIEDADES BANDEIRA

Wendell Otero Prates

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José N. Bastos Barbosa.
Co-orientador: Prof. Dr. Evandro C. F. dos Santos.

Salvador-Bahia
Abril de 2010

Prates, Wendell Otero.

SOLUÇÕES DE EINSTEIN EM ALGUMAS VARIEDADES BANDEIRA / Wendell Otero Prates. – Salvador, 2010.

63 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. José N. Bastos Barbosa.

Co-Orientador: Prof. Dr. Evandro C. F. dos Santos.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2010.

Referências bibliográficas.

1. Andreas Arvanitoyeorgos. 2. (Colocar aqui 2º descritor oficial de conteúdo, se quiser). 3. (Colocar aqui 3º descritor oficial de conteúdo, se quiser). I. Barbosa, José N. Bastos. II. dos Santos, Evandro C. Ferreira. III. Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática. III. SOLUÇÕES DE EINSTEIN EM ALGUMAS VARIEDADES BANDEIRA.

CDU : 512.81

: 517.2

SOLUÇÕES DE EINSTEIN EM ALGUMAS VARIEDADES BANDEIRA

Wendell Otero Prates

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 16 de Abril de 2010.

Banca examinadora:

Prof. Dr. José Nelson Bastos Barbosa (Orientador)
UFBA

Prof. Dr. Evandro Carlos Ferreira dos Santos (Co-Orientador)
UFBA

Prof. Dr. Caio José Colletti Negreiros
IMECC-UNICAMP

Ao meu “pequeno” irmão,
Vitor Garcia.

Agradecimentos

Mesmo que a palavra “obrigado” signifique tanto, não expressará por inteiro o quanto estou agradecido. No entanto, não tendo outra forma de manisfestar minha gratidão, venho por meio deste, destacar as pessoas que tornaram possível a conclusão dessa etapa em minha vida.

Obrigado:

Ao meu co-orientador Evandro, pela paciência e dedicação;

Ao meu orientador Nelson, pelos conselhos acadêmicos;

Ao professor André, pela disponibilidade de ajudar;

A minha família, pelo acolhimento incondicional e principalmente à minha amada Camila, pela estabilidade emocional que ganhei depois que a conheci.

"Não me sinto obrigado a acreditar que o mesmo Deus que nos dotou de sentidos, razão e intelecto, pretenda que não os utilizemos. " (Galileu Galilei)

Resumo

Nosso trabalho tem como objetivo o estudo das soluções da Equação de Einstein em algumas variedades bandeira. Uma métrica Riemanniana é de Einstein quando a curvatura Ricci for proporcional à mesma.

Em variedades bandeira a equação de Einstein invariante se resume a um sistema de equações algébricas. O método usado aqui é baseado nas simetrias deste sistema algébrico. Existem vários resultados relacionados à equação de Einstein para variedades bandeira generalizadas, porém daremos mais atenção aos resultados referentes as variedades bandeira do tipo geométrico.

Palavras-chave: Equação de Einstein; Variedades bandeira; Curvatura Ricci.

Abstract

The objective of this work is to study solutions of Einstein's Equation in some flag manifolds. A Riemannian metric is Einstein when the Ricci curvature is proportional to the metric.

In flag manifolds the invariant Einstein equation becomes a system of algebraic equations. The method used is based on the symmetries of this algebraic system. There are several results about Einstein's equation for generalized flag manifolds, but we are mainly interested in results concerning algebraic flag manifolds.

Keywords: Einstein's Equation; Flag manifolds; Ricci Curvature.

Sumário

Introdução

A Gravitação Newtoniana não é compatível com a relatividade, pois supõe que a atração gravitacional seja uma força que atua à distância instantaneamente (logo com velocidade infinita, o que criaria problemas de causalidade mencionadas em Relatividade Especial). Logo era preciso alterar a Teoria da Gravitação.

Uma característica marcante da gravidade é que ela atrai todos os corpos da mesma maneira e a partir disso Einstein expandiu o postulado da equivalência dos referênciais inerciais para incluir também referênciais acelerados por um campo gravitacional constante.

A idéia é que se você acordasse de repente dentro de um elevador e percebesse que você e tudo o mais dentro do elevador estão flutuando sem peso, não teria como você saber se é porque o elevador está em queda livre ou se ele está no espaço sem gravidade. Com mais algumas considerações ele chegou à conclusão de que ao invés de pensarmos na gravidade como sendo uma força, o certo seria pensá-la como uma deformação no espaço-tempo, e supôr que os corpos simplesmente seguem as geodésicas do espaço-tempo. Um corpo cai em direção à Terra simplesmente porque a massa da Terra curva o espaço-tempo de forma tal que as geodésicas seguidas pelo corpo e pela Terra tendam a se aproximar.

Para descrever como exatamente a massa deforma o espaço-tempo, Einstein supôs que deveria haver alguma equação relacionando o tensor de curvatura R com a massa. Da Teoria da Relatividade Especial já se sabia que massa e energia eram relacionadas ($\mathrm{E} = \mathrm{mc}^2$), e que a distribuição de massa e energia em uma região era descrita por um tensor 2-covariante simétrico T (chamado de tensor energia-momento-stress). Como R é tensor do tipo (3,1) a relação não é tão imediata e o tensor de Ricci (Ric_g) é do mesmo tipo que T, foi natural para Einstein propôr que a equação fosse simplesmente

$$Ric_g = T. \tag{1}$$

Mas logo se percebeu que isso não estava correto, pois para haver conservação de energia e massa a divergência de T deve ser nula, o que não vale para Ric_g. Contudo, a divergência de Ric_g poderia ser cancelada subtraindo $\frac{1}{2}sg$ (onde s é a curvatura escalar e g a métrica), de modo que a equação foi corrigida para

$$Ric_g - \frac{1}{2}sg = T, \tag{2}$$

que é a Equação de Campo de Einstein.

No vácuo, isto é, na ausência de matéria ou energia, temos T = 0 e portanto $\frac{1}{2}sg = 0$. Como s é o traço de Ric_g, e $\text{tr}(g) = 4$ (em cada ponto g é equivalente à métrica do espaço de Minkowski), tomando o traço da equação toda, descobrimos que nesse caso $s = 0$. Assim, a Equação de Einstein no vácuo se reduz a

$$Ric_g = 0.$$

Uma outra versão da Equação de Einstein inclui um novo termo, com a chamada "constante cosmológica" λ:

$$Ric_g - \frac{1}{2}sg + \lambda g = T \tag{3}$$

Esse termo foi acrescentado porque naquela época se imaginava que o Universo como um todo devia ser estático, enquanto que as soluções de (1) tendiam a se expandir ou contrair. Já em (3) a expansão ou contração pode ser controlada ajustando o valor de λ, até se obter uma solução estática. Logo depois, observações astronômicas mostraram que o Universo estava realmente se expandindo, de modo que Einstein acabou descartando a constante cosmológica como tendo sido "o maior erro da sua vida".

Normalmente se explica essa expansão do Universo como tendo sido provocada por uma "grande explosão original" (o Big Bang). Contudo, a atração gravitacional deveria aos poucos ir freando essa expansão, sendo que se a quantidade total de matéria do Universo for grande o bastante, a expansão pode um dia parar completamente, para em seguida o Universo começar a contrair até finalmente terminar em um colapso final (o Big Crunch). No entanto, novas observações mostraram que, ao invés de estar freando, a expansão está na verdade ficando mais acelerada. Assim, a constante cosmológica voltou a ser usada, mas agora com seu valor ajustado para gerar uma expansão acelerada ao invés de uma solução estática.

Na verdade, do ponto de vista matemático a equaçãoo (3) é realmente melhor do que a (1), pois é possível provar ([Wey] [Car]) que o tensor $Ric_g + \frac{1}{2}sg + \lambda g$ que aparece nela é o tensor simétrico 2-covariante mais geral possível que pode ser construído a partir da métrica e de suas derivadas até segunda ordem, e que satisfaça a condição de ter divergência nula .

Para concluir esta parte, vamos considerar (3) no vácuo. Como antes, vamos pôr T $= 0$ e tirar o traço da equação toda, o que resulta em $s - \frac{1}{2}s \cdot 4 + 4\lambda = 0$, de modo que agora $s = 4\lambda$. Substituindo de volta na equação chegamos em

$$Ric_g = \lambda g,$$

que é justamente a equação das métricas de Einstein.

Nessa dissertação veremos essa equação no caso de variedades Riemannianas, e o espaço-tempo da Relatividade é uma variedade pseudo-Riemanniana. Em termos técnicos, no caso Riemanniano essa equação é de um tipo chamado de elíptico, enquanto no caso pseudo-Riemanniano ela passa a ser do tipo hiperbólico. Mais precisamente, iremos trabalhar com as variedades do tipo bandeira, que é um espaço homogêneo G/K onde G é um grupo de Lie semi-simples e compacto, e K o centralizador de um toro em G. Esses espaços homogêneos são compactos, simplesmente conexos e admitem uma estrutura Kähler.

As variedades bandeiras também são conhecidas como espaços C-Kählerianos.

Não são conhecidos métodos gerais de resolução da equação de Einstein. Nas variedades bandeira, por meio da teoria de Lie, as equações de Einstein se reduzem a um sistema algébrico de equações e, mesmo neste caso não são conhecidas técnicas gerais de resolução[Bes].

Este trabalho esta organizado da seguinte forma:

No capítulo 1 apresentamos a construção das variedades bandeira como espaços homogêneos, que denotaremos por F = G/K, bem como sua descrição via teoria de Lie. Também apresentamos conceitos e resultados básicos sobre a representação adjunta correspondente as variedades bandeira.

No capítulo 2 apresentamos uma pequena abordagem sobre métricas invariantes em variedades bandeira. Ainda nesse capítulo descrevemos o tensor de Ricci de uma métrica invariante e apresentamos a equação de Einstein.

Finalmente *No capítulo 3* aapresentamos explicitamente algumas soluções da equação de Einstein para $\mathbb{F}(n)$ $3 \leq n \leq 5$, do tipo Kähler, Normal, Arvanitoyeorgos, Senda e dos Santos.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Variedade Diferencial

Definição 1.1. *Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$ de abertos U_α de $\mathbb{R}_n$ em M tais que:*

1. $\bigcup\limits_{\alpha} x_\alpha(U_\alpha) = M$.

2. *Para todo par α, β, com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $x_\alpha^{-1}(W)$ e $x_\beta^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e as aplicações $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ são diferenciáveis.*

3. *A família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ é máxima relativamente às condições (1) e (2).*

O par (U_α, x_α) (ou a aplicação x_α) com $p \in x_\alpha(U_\alpha)$ é chamado uma parametrização (ou sistema de coordanadas) de M em p; $x_\alpha(U_\alpha)$ é então chamado uma vizinhança coordenada em p. Uma família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ satisfazendo (1) e (2) é chamada uma estrutura diferenciável em M.

A condição (3) comparece por razões puramente técnicas.

Definição 1.2. *Sejam M_1^n e M_2^n variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : M_1 \to M_2$ é diferenciável em $p \in M_1$ se dada uma parametrização $y : V \subset \mathbb{R}^m \to M_2$ em $\varphi(p)$ existe uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M_1$ em p tal que $\varphi(x(U)) \subset y(V)$ e a aplicação*

$$y^{-1} \circ \varphi \circ x : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \tag{1.1}$$

é diferenciável em $x^{-1}(p)$. φ é diferenciável em um aberto de M_1 se é diferenciável em todos os pontos deste aberto.

Decorre da condição (2) da Definição 1.1 que a definição dada é independente da escolha das parametrizações. A aplicação (1.1) é chamada a expressão de φ nas parametrizações x e y.

As considerações seguintes motivam a definição que daremos a seguir. Seja $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$ uma curva diferenciável de $\mathbb{R}^n$, com $\alpha(0) = p$. Escreva

$$\alpha(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)), t \in (-\epsilon, \epsilon), (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Então $\alpha'(0) = (x_1'(0), \ldots, x_n'(0)) = v \in \mathbb{R}^n$. Seja agora f uma função diferenciável definida em uma vizinhaça de p. Podemos restringir f à curva α e escrever a derivada direcional segundo o vetor $v \in \mathbb{R}^n$ como

$$\left.\frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\right|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{t=0} \left.\frac{dx_i}{dt}\right|_{t=0} = \left(\sum_i x_i'(0) \frac{\partial}{\partial x_i}\right) f.$$

Portanto a derivada direcional segundo v é um operador sobre funções diferenciáveis que depende unicamente de v. Esta é a propriedade característica que usaremos para definir vetor tangente em variedades.

Definição 1.3. *Seja M uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ é chamada uma curva (diferenciável) em M. Suponha que $\alpha(0) = p \in M$, e seja $\mathcal{D}$ o conjunto das funções de M diferenciáveis em p. O vetor tangente à curva α em $t = 0$ é a função $\alpha'(0) : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\alpha'(0) f = \left.\frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\right|_{t=0} \qquad f \in \mathcal{D}.$$

Um vetor tangente em p é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ com $\alpha(0) = p$. O conjunto dos vetores tangentes a M em p será indicado por T_pM.

O conjunto T_pM, com as operações usuais de funções, forma um espaço vetorial de dimensão n, e que a escolha de uma parametrização $x : U \to M$ determina uma base associada $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_0, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_0 \right\}$ em T_pM. É imediato que a estrutura linear em T_pM assim definida não depende da parametrização x. O espaço vetorial T_pM é chamado o espaço tangente de M em p.

Com a noção de espaço tangente podemos estender às variedades diferenciáveis a noção de diferencial de uma aplicação diferenciável.

Definição 1.4. *Seja $f : M \to N$ uma aplicação diferenciável. Então, para cada $p \in M$, a diferencial de f é a função*

$$df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$$

definida por

$$df_p(v)(g) = v(g \circ f)$$

para todo $v \in T_pM$ e $g \in \mathcal{F}(N)$.

Para cada ponto $p \in M$, a diferencial df_p é uma função linear entre os espaços tangentes.

A proposição seguinte fornece um método útil de calcular a diferencial de uma função.

Proposição 1.5. *Seja $f : M \to N$ uma aplicação diferenciável entre duas variedades, e seja $p \in M$ e $v \in T_pM$. Tome qualquer curva diferenciável $\alpha : I \to M$ com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Então, a diferencial de f em p é dada por*

$$df_p(v) = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)\bigg|_{t=0}.$$

Agora vamos para os campos vetoriais. Considere M^n uma variedade diferenciável e seja $TM = \{(p, v); p \in M, v \in T_pM\}$. O conjunto TM munido de uma estrutura diferenciável (de dimensão $2n$) é uma variedade a qual chamamos de fibrado tangente de M. Desse modo, temos que sendo um campo vetorial X em uma variedade M uma função que associa a cada ponto $p \in M$ um vetor tangente X_p a M em p. Logo, $X : M \to TM$ com $X_p \in T_pM$. Podemos pensar em X como uma coleção de setas, um em cada ponto de M. Se X é um campo vetorial em M e $f \in \mathcal{F}(M)$, então Xf denota uma função real em M dada por

$$Xf(p) = X_p(f) \quad \text{para todo } p \in M.$$

O campo vetorial X é chamado diferenciável se a função Xf acima é diferenciável para todo $f \in \mathcal{F}(M)$. Denotaremos por $\chi(M)$ o conjunto de todas os campos vetoriais diferenciáveis em uma variedade M.

Agora, a função definida acima pode ser vista como uma aplicação $X : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$ que leva f em Xf. Esta aplicação tem as propriedades de uma derivação, i.e., o que vem a seguir e satisfeito:

$$\begin{aligned} X(af + bg) &= aX(f) + bX(g) \qquad && a, b \in \mathbb{R}, \\ X(fg) &= X(f)g + fX(g) \qquad && \text{(rebgra de Leibniz).} \end{aligned}$$

Reciprocamente, qualquer derivação D em $\mathcal{F}(M)$ vem de um campo vetorial diferenciável. De fato, para cada $p \in M$ defina $X_p : \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$ por $X_p(f) = D(f)(p)$. Esta interpretação de campos vetoriais como derivações leva a uma operação importante de campos vetoriais.

Seja $X, Y \in \chi(M)$. Defina $[X, Y] = XY - YX$. Esta é uma função de $\mathcal{F}(M)$ em $\mathcal{F}(M)$ levando cada f a $X(Yf) - Y(Xf)$. Um cálculo fácil mostra que $[X, Y]$ é uma derivação em $\mathcal{F}(M)$, daí um campo vetorial diferenciável em M, que é chamado o colchete de X em Y. O colchete designa para cada $p \in M$ o vetor tangente $[X, Y]_p$ tal que

$$[X, Y]_p(f) = X_p(Yf) - Y_p(Xf).$$

Mais ainda, a operação colchete tem as seguintes propriedades:

(a) $[X, Y] = -[Y, X]$ (anti-simetria)

(b) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$,
$[Z, aX + bY] = a[Z, X] + b[Z, Y]$ ($\mathbb{R}$-bilinearidade),

(c) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ (identidade de Jacobi).

As propriedades acima dizem que o conjunto $\chi(M)$ com a operação "colchete"dos campos vetoriais é uma álgebra de Lie.

1.2 Grupos de Lie

Definição 1.6. *Seja G uma variedade diferenciável. Então G é um Grupo de Lie se:*

(a) G é um grupo.

(b) As operações de grupo $G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto xy$ e $G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$ são funções diferenciáveis.

Um grupo de Lie é um conjunto que tem, tanto estrutura de variedade, quanto estrutura de grupo, que são compatíveis. Logo, começaremos esta discursão com um exemplo que exibe estas propriedades.

Seja $M_n\mathbb{R}$ o conjunto de todas $n \times n$ matrizes reais. Associamos à matriz $A = (a_{ij})$ o ponto no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n^2}$ cujas coordenadas são $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}$. Daí, topologicamente, $M_n\mathbb{R}$ é simplismente o espaço Euclidiano n^2. Depois, definimos o *grupo linear geral* $\mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ como o grupo (sobre multiplicação de matriz usual) de todas matrizes reais $n \times n$ $A = (a_{ij})$ com determinante $\det A \neq 0$. Desde que $\det A$ é um polinomial de grau n nas coordenadas, é uma função suave em $M_n\mathbb{R}$. Mais ainda, desde que o conjunto $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ forma um conjunto aberto em $\mathbb{R}$, e desde que a imagem inversa de um conjunto aberto sobre uma aplicação contínua é aberta, o conjunto $\mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ é um conjunto aberto de $M_n\mathbb{R}$. Daí, topologicamente, $\mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ é um subconjunto de um espaço Euclidiano, e como tal é uma variedade n^2-dimensional, como veremos mais tarde. Isto cuida da estrutura de variedade e grupo de $\mathrm{GL}_n\mathbb{R}$. Permitamos agora ver como eles se interagem.

Desde que $(ab)_{ij} = \sum a_{ik}b_{kj}$, a matriz produto AB tem coordenadas que são funções suaves de coordenadas de A e B. Também, da fórmula para a inversa

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\mathrm{adj}A$$

(onde adj$A$ é a matriz cujas entradas são os cofatores asignados de cada uma das entradas a_{ij}), vemos que as coordenadas de A^{-1} são também funções suaves daquelas de A. Isto conclui a descrição do grupo linear geral $\mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ como uma variedade e como um grupo, com as operações de grupo da multiplicação e inversa sendo funções suaves. É um exemplo importante de um *grupo de Lie*. Veremos mais exemplos de grupos de Lie mais tarde, depois que fizermos uma breve revisão de várias definições, notações e resultados sobre variedades que serão usadas depois.

Teorema 1.7. *Se H é um subgrupo fechado de um grupo de Lie G, então H é uma subvariedade de G e daí um subgrupo de Lie de G. Em particular, H tem a topologia induzida.*

A demonstração desse teorema é visto em [War].

1.3 O espaço tangente de um grupo de Lie

Definição 1.8. *Uma Álgebra de Lie consiste de um espaço vetorial $\mathfrak{g}$ munido de um produto (colchete ou comutador)*

$$[\,,\,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

com as seguintes propriedades:

1. *é bilinear,*
2. *anti-simétrico, isto é, $[X, X] = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$ (o que implica $[X, Y] = -[Y, X]$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$ é equivalente se o corpo de escalares não é de característica dois) e*
3. *satisfaz a identidade de Jacobi, isto é, para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$,*

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0.$$

Esta igualdade pode ser reescrita alternativamente de uma das duas formas

   (a) $[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]]$

   (b) $[[X, Y], Z] = [[X, Z], Y] + [X, [Y, Z]]$.

No apêndice o leitor encontrará além de exemplos, alguns resultados sobre as álgebras de Lie, para uma leitura com mais detalhes recomendamos.[Mar-Bar]

Seja a um elemento do grupo de Lie G. Considere as seguintes aplicações:

$$L_a : G \to G, L_a(g) = ag \text{ e } R_a : G \to G, R_a(g) = ga$$

que são claramente diferenciáveis.

Proposição 1.9. *Qualquer grupo de Lie G é paralelizável, i.e. $TG \cong G \times T_eG$.*

Demonstração.

Seja X_g o valor de um campo vetorial X em um ponto $g \in G$. Então, a aplicação $X_g \mapsto (g, dL_{g^{-1}}(X_g))$ é o isomorfismo desejado.

□

Definição 1.10. *Um campo vetorial X em um grupo G de Lie é invariante à esquerda se $X \circ L_a = dL_a(X)$ para todo $a \in G$, ou mais explicitamente $X_{ag} = (dL_a)_g(X_g)$ para todo $a, g \in G$.*

Um campo vetorial invariante à esquerda possui a importante propriedade que é determinado pelos valores nos elementos de identidade e no grupo de Lie, visto que $X_a = dL_a(X_e)$ para todo $a \in G$. Do mesmo modo, visto que a multiplicação em G é diferenciável, temos que o campo vetorial é invariante à esquerda.

Seja $\mathfrak{g}$ o conjunto de todos os campos vetoriais invariantes à esquerda de um grupo de Lie G. A adição usual de campo de vetores e a multiplicação escalar de números reais fazem de $\mathfrak{g}$ um espaço vetorial. Ademais, $\mathfrak{g}$ é fechado em relação a operação colchete nos campos vetoriais. Portanto, $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie e a sua dimensão é igual a dimensão de G por causa da seguinte proposição.

Proposição 1.11. *A função $X \mapsto X_e$ define um isomorfismo linear entre os espaços vetoriais $\mathfrak{g}$ e T_eG.*

Demonstração.

A função é, obviamente, linear, e é bijetora, desde que se $X_e = 0$, então $X_g = dL_g(X_e) = 0$ para todo $g \in G$. A função também é sobrejetora: Seja $v \in T_eG$ e defina o campo vetorial X^v por $X^v_e = (dL_g)_e(v)$ para todo $g \in G$. Então, X^v é invariante a esquerda e $X^v_e = v$.

□

Exemplo 1.12. *A álgebra de Lie de um grupo linear geral $GL_n\mathbb{R}$ é (canonicamente) isomorfo a $M_n\mathbb{R}$, o conjunto de todas as matrizes reais $n \times n$. Realmente, recorde que*

$GL_n\mathbb{R}$ herda sua estrutura de varidade como uma subvariedade aberta de $M_n\mathbb{R}$. Daí, obtemos os seguintes isomorfismos de espaços vetoriais canônicos

$$\text{Álgebra de Lie de } GL_n\mathbb{R} \cong T_e(GL_n\mathbb{R}) \cong T_e(M_n\mathbb{R}) \cong M_n\mathbb{R}$$

*onde **e** é a matriz identidade $n \times n$. O primeiro isomorfismo é obtido da Proposição 4.11, o segundo é a identificação de subvariedade aberta, e a terciera é a identificação de espaço vetorial canônico. Através de calculos no plano cartesiano vemos que os colchetes são preservados também. Analogamente, as álgebras de Lie de $GL_n\mathbb{C}$ e $GL_n\mathbb{H}$ são $M_n\mathbb{C}$ e $M_n\mathbb{H}$, respectivamente.*

1.4 Variedades das classes laterais

Dado um grupo de Lie G e um subgrupo fechado K, é possível construir uma estrutura de variedade diferenciável no conjunto $G/K = \{gK : g \in G\}$ de todos as classes laterais a esquerda de K em G. Além disso, há uma ação natural do grupo G em G/K, em que essa ação é transitiva, isto é, dados $gK, hK \in G/K$ o elemento gh^{-1} é tal que $gh^{-1}hK = gK$. Esta variedade com esta ação transitiva será chamada de espaço homogêneo. Os espaços do tipo G/K, formam uma classe de variedades com importancia especial na matemática e na física.

Considere o espaço das classes laterais G/K, e para uso posterior denote a classe lateral $eK = K$ por 0. Seja $\pi : G \to G/K$ a projeção que leva cada $g \in G$ à classe lateral gK. Também, para cada $a \in G$ seja $\tau_a : G/H \to G/H$ a translação (a esquerda) que leva cada gK a agK. Se $a, b \in G$, e L_a é a translação a esquerda em G, temos

$$\pi \circ L_a = \tau_a \circ \pi, \quad \tau_{ab} = \tau_a \circ \tau_b.$$

Proposição 1.13. *Seja G um gupo de Lie, e K um subgrupo fechado de G. Há uma única forma de tornar G/K uma variedade de forma que a projeção $\pi : G \to G/K$ seja uma submersão; isto é, $d\pi_g$ é sobrejetora para todo $g \in G$.*

Para a prova desta proposição, assim como de outros fatos nesta seção, referimos a [Br-Cl], [Ko-No], [War]. A variedade G/K construida nesta seção é chamada variedade de classe lateral. Frequentemente na literaura G/K é chamado de espaço homogêneo, porém as vezes este termo é usado para significar uma variedade M na qual um grupo de Lie G atua transitivamente, como veremos depois.

Definição 1.14. *Uma ação a esquerda de um grupo G em uma variedade M é uma aplicação diferenciável $\xi : G \times M \to M$ tal que $\xi(e, m) = m$ e $\xi(ab, m) = \xi(a, \xi(b, m))$ para todo $a, b \in G$ e $m \in M$.*

Denotaremos $\xi(a, m)$ por $a \cdot m$ ou simplesmente por am se não houver chance de confusão. Analogamente, podemos definir uma ação a direita. Um espaço M com uma ação de um grupo G é chamado de G-espaço. De agora em diante, G será um grupo de Lie e M uma variedade diferenciável.

Se ξ é uma ação de G em M, então para todo $a \in G$ a aplicação $\xi_a : M \to M$ dada por $\xi_a(m) = \xi(a, m)$ é um difeomorfismo ou transformações de M. Por esta razão o grupo de Lie G também é referenciado como um grupo de transformação de uma variedade M.

Definição 1.15.

(a) Uma ação é chamada transitiva se para todo $m, n \in M$ existe um $g \in G$ tal que $g \cdot m = n$.

(b) Seja $m \in M$. O conjunto $G_m = \{g \in G : g \cdot m = m\}$ é chamada de grupo isotropo ou subgrupo de isotropia em m.

(c) A órbita de um ponto $m \in M$ é o conjunto $G \cdot m = \{g \cdot m : g \in G\}$.

Seja G/K uma variedade de classe lateral. Então a aplicação $G \times G/K \to G/K$ que leva cada (a, gK) a agK é chamada ação natural de G em G/K. Esta ação é obviamente transitiva. Veremos que cada ação transitiva pode ser representada desta forma.

Proposição 1.16. *Seja $G \times M \to M$ uma ação transitiva de um grupo de Lie G em uma variedade M, e seja $K = G_m$ um subgrupo isotropo de um ponto m. Então:*

(a) O subgrupo K é um subgrupo fechado de G.

(b) A aplicação natural $j : G/K \to M$ dada por $j(gK) = g \cdot m$ é um difeomorfismo. (Em outras palavras, a órbita $G \cdot m$ é difeomorfo a G/K.)

(c) A dimensão de G/K é $\dim G - \dim K$.

Definição 1.17. *Um espaço homogêneo é uma variedade M com uma ação transitiva de um grupo de Lie G. Equivalentemente, é uma variedade da forma G/K, onde G é um grupo de Lie e K um subgrupo fechado de G.*

Agora, seja (M, g) uma variedade Riemanniana. O conjunto $I(M)$ de todas as isometrias $M \to M$ forma um grupo (com a composição de funções). Ele é chamado grupo de isometria de M, é um outro invariante geométrico de M.

Teorema 1.18 (Myers-Steenrod)**.** *O grupo de isometria de uma variedade Riemanniana é um grupo de Lie.*

Definição 1.19. *Um espaço homogêneo Riemaniano é uma variedade Riemanniana* (M, g) *na qual seu grupo de isometria* $I(M)$ *atua trasitivamente.*

Proposição 1.20. *Seja* M *uma variedade homogênea Riemanniana. Então o subgrupo de isotropia de um ponto dado é um subgrupo compacto de* $I(M)$*. Mais ainda,* $I(M)$ *é compacto se, e somente se* M *é compacto.*

Daí, um espaço homogêneo Riemaniano é difeomorfo à um espaço homogêneo G/K, onde $G = I(M)$ e K é o subgrupo isotropo de um ponto.

Exemplo 1.21. *Variedades de Grassmann. Seja* $G_{\tau_k}\mathbb{R}^n$ *o conjunto de todos os espaços k-dimensionais em* $\mathbb{R}^n$ *(tal espaço é chamado de k-plano). O grupo* $O(n)$ *atua naturalmente em* $G_{\tau_k}\mathbb{R}^n$ *pela multiplicação de matrizes. Esta ação é transitiva: Seja* V *o subespaço de* $\mathbb{R}^n$ *gerado pelos primeiros* k *vetores da base canônica* $e_1, \ldots, e_n$ *de* $\mathbb{R}^n$ *cujos primeiros* k *vetores geram* W*. Então, se* A *é uma matriz que corresponde a uma aplicação linear que leva cada* e_i *a* e_i'*, então* $A \in O(n)$ *e* $AV = W$*. O subgrupo isotropo do subespaço* V *consiste do conjunto de matrizes* $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ *com* $B \in O(k)$ *e* $C \in O(n-k)$*, portanto* $G_{\tau_k}\mathbb{R}^n = O(n)/O(k) \times O(n-k)$*. Além disso,* $SO(n)$ *também atua transitivamente em* $G_{\tau_k}\mathbb{R}^n$*, daí* $G_{\tau_k}\mathbb{R}^n = SO(n)/S(O(k) \times O(n-k))$*. Em particular,* $RP^n = SO(n+1)/S(O(n) \times O(1))$*. Aqui,* $S(O(k) \times O(l))$ *denota o subgrupo de* $SO(k+l)$ *consistindo de matrizes da forma* $h = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$*. e* $\det(h) = 1$*.*

Proposição 1.22. *Seja* G *um grupo de Lie e* H *um subgrupo fechado de* G*. Então o espaço quociente* G/H *admite uma estrutura de variedade analítica real de tal forma que a ação de* G *em* G/H *é analítica real, isto é, a aplicação* $G \times G/H \to G/H$ *que associa* (a, bH) *em* abH *é analitica real. Em particular, a projeção* $G \to G/H$ *é analítica real.*

Para a prova, veja [Ch].

Há uma outra classe de espaços quociente: Seja G um grupo abstrato atuando em um espaço topológico M pela direita como grupo de homeomorfismos. A atuação de G é chamada propriamente descontínua se satisfaz as seguintes condições:

1. Se dois pontos x e x' de M não são congruentes módulo G (i.e., $R_a x \neq x'$ para todo $a \in G$), então x e x' têm vinzinhanças U e U', respectivamente, tal que $R_a(U) \cap U'$ é vazio para todo $a \in G$;

2. Para cada $x \in G$, o grupo de isotropia $G_x = \{a \in G;\, R_a x = x\}$ é finito;

3. Cada $x \in M$ tem uma vizinhança U, estável por G_x, tal que $U \cap R_a(U)$ é vazio para todo $a \in G$ não contido em G_x.

Proposição 1.23. *Seja G um grupo descontínuo propriamente de transformações diferenciáveis (respectivamente, analítico real) agindo livremente em uma variedade M diferenciável (respectivamente, analítica real). Então, o espaço quociente M/G tem uma estrutura de variedade diferenciável (respectivamente, analítico real) tal que a projeção $\pi : M \to M/G$ é diferenciável (respectivamente, analítico real).*

Demonstração.

A condição (3) implica que cada ponto de M/G tem uma vizinhança V tal que π é um homeomorfismo de cada componente conexa de $\pi^{-1}(V)$ em V. Seja U uma componente conexa de $\pi^{-1}(V)$. Escolhendo V suficientemente pequeno, podemos assumir que há um mapa adimissível (U, φ), onde $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, para a variedade M. Introduza uma estrutura diferenciável (respectivamente, analítica real) em M/G tomando (V, ψ), onde ψ é a composição de $\pi^{-1} : V \to U$ e φ, tem um mapa admissivel.

□

Proposição 1.24. *Todo grupo discontínuo de G de isometrias de um espaço métrico M é propriamente discontínuo.*

Demonstração.

Primeiro, observe que, para cada $x \in M$, a órbita $xG = \{R_a x; \, a \in G\}$ é fechada em M. Dado um ponto x' fora da órbita xG, seja r um número positivo tal que $2r$ é menor que a distância entre x' e a órbita xG. Sejam U e U' as esferas abertas de raios r e centros x e x', respectivamente. Então, $R_a(U) \cap U'$ é vazio par todo $a \in G$, portanto provamos a condição (1). A condição (2) sempre é satisfeita por uma ação discontínua. Para provar (3), para cada $x \in M$, seja r um número positivo tal que $2r$ é menor que a distância entre x e o conjunto fechado $xG - \{x\}$. Basta levar a esfera aberta de raio r e centro x como U.

□

1.5 Variedades bandeira generalizadas

Uma classe importante de espaços homogêneos, é a classe de variedades bandeiras generalizadas. Estas são espaços homogêneos da forma $G/C(S)$, onde G é um grupo de Lie compacto, e $C(S)$ é o centralizador de um toro S em G. Equivalentimente, ele são precisamente as órbitas de representação adjunta de G em sua algebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Definição 1.25. *Seja G um grupo de Lie compacto com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, e seja $w \in \mathfrak{g}$. A orbita adjunta de w é o conjunto $M_w = \mathrm{Ad}(G)w = \{\mathrm{Ad}(g)w : \, g \in G\} \subset \mathfrak{g}$.*

Seja $K = K_w = \{g \in G : \mathrm{Ad}(g)w = w\}$ o subgrupo de isotropia de w. Então, M_w é difeomorfo ao espaço homogêneo G/K. O ponto w corresponde à classe lateral identidade $o = eK$.

Exemplo 1.26. *Seja $G = U(n)$ com $w = \mathrm{diag}(i\lambda_1, i\lambda_2, \ldots, i\lambda_n)$, onde $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = \lambda$, $\lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_n = \mu$ $(\lambda \neq \mu)$. Neste caso $K_w = U(k) \times U(n-k)$ e $\mathrm{Ad}(U(n))w \cong Gr_k\mathbb{C}^n$, as variedades Grassmann dos k-planos em $\mathbb{C}$ n.*

Proposição 1.27.

1. *O conjunto $S_w = \overline{\exp \mathbb{R}w}$ é um toro em G.*

2. *O subgrupo isotropo K_w é o centralizador do toro S_w, isto é*

$$K_w = C(S_w) = \{g \in G : ghg^{-1} = h \text{ para todo } h \in S_w\}.$$

3. *Se o toro S_w é um toro maximal em G, então $C(S_w) = S_w$.*

4. *A álgebra de Lie K_w é*

$$\mathfrak{k}_w = \{X \in g : [w, X] = 0\} = \ker \mathrm{ad}w.$$

Definição 1.28. *Uma variedade bandeira generalizada é um espaço homogêneo da forma $G/K = G/C(S)$, onde G é um grupo de Lie compacto e S é um toro em G. Se o toro S é um toro maximal em G, diga T, então G/T é chamado variedade bandeira maximal.*

A proposição 1.27 nos permite dar uma descrição simples do espaço tangente de M_w em w. Recordamos a decomposição redutiva $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}_w$ de $\mathfrak{g}$ com respeito a um produto interno Ad-invariante em $\mathfrak{g}$ (isto é, com respeito ao negativo da forma de Killing), onde $\mathfrak{m}_w = \mathfrak{k}_w^{\perp}$. Então,

$$T_w(M_w) \cong \mathfrak{m} = (\ker \mathrm{ad}w)^{\perp}.$$

Entretanto, devido ao mergulho $M_w \subset \mathfrak{g}$, há uma outra descrição de espaço tangente de M_w em w:

$$\begin{aligned} T_w(M_w) &= \{\frac{d}{dt}\mathrm{Ad}(\exp tX)w|_{t=0} : X \in \mathfrak{g}\} \\ &= \{\frac{d}{dt}(\exp tX)w(\exp(-tX))|_{t=0} : X \in \mathfrak{g}\} \\ &= \{Xw - wX : X \in \mathfrak{g}\} = \{[X, w] : X \in \mathfrak{g}\} \\ &= \mathrm{Im}\,\mathrm{ad}w \subset \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

1.6 Espaços homogêneos redutíveis

Seja G/K um espaço homogêneo e considere novamente a projeção $\pi : G \to G/K$, $\pi(g) = gK$. Calcularemos a diferencial $d\pi_e : \mathfrak{g} \to T_o(G/K)$, onde $o = \pi(e) = K$. Seja $X \in \mathfrak{g}$ e $\exp tX$ primeiro parâmetro do subgrupo correspondente. Então,

$$d\pi_e(X) = \frac{d}{dt}(\pi \circ \exp tX)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}((\exp tX)K)\Big|_{t=0}.$$

Disso obtemos que $d\pi_e(k) = 0$, isto é, $\ker d\pi_e = \mathfrak{k}$, daí desde que $d\pi$ é sobrejetora. (Proposição 1.4), temos o isomorfismo canônico

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{k} \cong T_o(G/K).$$

Em geral, para qualquer $X \in \mathfrak{g}$ podemos definir um campo vetorial X^* em G/K pela fórmula

$$X^*_{gK} = \frac{d}{dt}(\exp tX)gK\Big|_{t=0}.$$

Note que a fórmula $[X^*, Y^*] = -[X, Y]^*$.

Agora, consideraremos o seguinte caso importante. Seja $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{k}$ as álgebras de Lie de G e K, respectivamente.

Definição 1.29. *Um espaço homogêneo é chamado redutível se há um subespaço* $\mathfrak{m}$ *de* $\mathfrak{g}$=*Lie*(G) *tal que* $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ *e* $\mathrm{Ad}(k)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$ *para todo* $k \in K$*, isto é,* $\mathfrak{m}$ *é* $\mathrm{Ad}(K)$*-invariante.*

A condição $\mathrm{Ad}(k)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$ implica que $[\mathfrak{k}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$. A volta é verdadeira se K é conexo. Note que $\mathfrak{m}$ não precisa ser fechado sobre colchetes, como $\mathfrak{k}$ precisa. Daí, como consequencia do isomorfismo acima, se G/K é redutível, temos a isomorfismo canõnico

$$\mathfrak{m} \cong T_o(G/K).$$

1.7 Descrição de uma variedade bandeira generalizada, via teoria de Lie.

Seja G/K uma variedade bandeira. Assumimos que G é semi-simples e compacto, por exemplo G é a forma real compacta de um grupo de Lie semi-simples complexo[?], logo a forma Killing é definida negativa em $\mathfrak{g}$, portanto torna possível a decomposição redutiva $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$. Como descrito na seção anterior, K é o centralizador do toro S em C. Seja T o toro maximal em G contendo S. Então, $T \subset C(S) = K$. Seja $\mathfrak{h}$ a álgebra de Lie de T e $\mathfrak{h}^C$ sua complexificação. Seja R o sistema de raízes de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ em relação a $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ e

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \oplus \sum_{\alpha \in R} \mathfrak{g}^{\alpha} = \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \oplus \sum_{\alpha \in R} \mathbb{C}E_{\alpha}$$

sua decomposição do espaço de raíz. Desde que $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ contém $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$, há um subconjunto R_K de R tal que

$$\mathfrak{k}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \oplus \sum_{\alpha \in R_K} \mathbb{C}E_\alpha.$$

Daí, obtemos

$$\mathfrak{m}^{\mathbb{C}} = \sum_{\alpha \in R_M} \mathbb{C}E_\alpha,$$

Onde $R_M = R/R_K$. Isto é chamado de conjunto das raízes complementares. Portanto, obtemos que $R = R_K \cup R_M$, e finalmente, que

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{k}^{C} \oplus \mathfrak{m}^{\mathbb{C}}.$$

O conjunto $\{E_\alpha : \alpha \in R_M\}$ é uma base do espaço $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$. A álgebra de Lie real $\mathfrak{g}$ é o conjunto de pontos fixados da involução padrão de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \to \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ que associa E_α a $-E_{-\alpha}$. Então, $\{i(E_\alpha + E_{-\alpha}), E_\alpha - E_{-\alpha}\}$ gera $\mathfrak{g} \cup (\mathfrak{g}^\alpha \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha})$.

Capítulo 2

Métricas invariantes e as Equações de Einstein

Uma métrica g em uma variedade Riemaniana M é chamada de *métrica de Einstein* se $Ric(g) = cg$, onde $\mathrm{Ric}(g)$ é o tensor de Ricci da métrica g, e c é uma constante. A metodologia que usaremos será a da redução da equação de Einstein a um sistema algébrico através de uma descrição teórica de Lie da curvatura de Ricci ($\mathrm{Ric}(g)$) e a métrica G-invariante g. Sejam $\mathbf{g}$ e $\mathbf{k}$ as álgebras de Lie de G e K repectivamente, e $\mathbf{h}$ uma sub-álgebra de Cartan fixada de $\mathbf{k}$.

2.1 Métricas Riemanniana G-invariantes

Recordemos que se $M = G/K$ é uma espaço homogêneo, então qualquer métrica G-invariante em M é determinada por um produto escalar $\mathrm{Ad}^{G/K}$-invariante em $\mathfrak{m}$. Seja G semi-simples e compacto, isto é, a forma Killing em $\mathfrak{g}$ é definida negativa. Seja $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \cdots \mathfrak{m}_s$ a decomposição da representação isotropica em submódulos irredutíveis. Uma métrica Riemanniana G-invariante é chamada diagonal, se o correspondente produto escalar $\mathrm{Ad}^{G/K}$-invariante $\langle\, , \rangle$ em $\mathfrak{m}$ pode ser expresso como

$$\langle\, , \rangle = x_1(-B)|_{\mathfrak{m}} + \cdots + x_s(-B)|_{\mathfrak{m}_s} \tag{2.1}$$

onde $x_1, \ldots, x_s$ são constantes positivas.

Em particular, o operador B-simétrico $A : \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$ que determina o produto escalar, e é dada por

$$A = x_1 \mathrm{Id}_{\mathfrak{m}_1} + \cdots + x_s \mathrm{Id}_{\mathfrak{m}_s}.$$

Se os $\mathfrak{m}$'s são representações inequivalentes em pares, então a decomposição de $\mathfrak{m}$ é única, e 2.1 representa todas as métricas invariantes em G/K. Do contrário, precisamos não apenas de uma variável positiva x_i para cada submódulo irredutível $\mathfrak{m}_i$, mas também de uma parametrização do espaço de todas aplicações $\mathrm{Ad}^{G/K}$-equivariante entre cada par de representações equivalentes.

Agora, seja $M = G/K$ uma variedade bandeira generalizada. Então, os submódulos $\mathfrak{m}_i$ são inequivalente, daí a expressão 2.1 descreve todas métricas G-invariante em M. Cada uma destas métrica depedem de s parâmetros positivos $x_1, \dots, x_s$.

Abusaremos da notação e extenderemos $\langle\ ,\ \rangle$ sem qualquer mudança na notação de $\mathfrak{m}$ à complexificação $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ pela linearidade complexa. Daí, uma métrica G-invariante em M pode ser descrita por um produto escalar $\mathrm{ad}(\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}) - invariante$ g em $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$.

Seja $\{\omega^\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\}$ uma base do espaço vetorial em $(\mathfrak{m}^{\mathbb{C}})^*$, que é dual à base $\{E_\alpha : \alpha \in R_M\}$ $(\omega^\alpha(E_\beta) = \delta^\alpha_\beta)$. Fixamos um sistema de raízes positivas $R^+ = R^+_K \cap R^K_M$, e seja $R^+_T = \kappa(R^+)$.

Proposição 2.1 (Alek-Pe). *Qualquer produto escalar* $\mathrm{ad}(t^{\mathbb{C}})$*-invariante real* g *em* $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ *tem a forma*

$$g = \sum_{\alpha \in R^+_M} g_\alpha \omega^\alpha \vee \omega^{-\alpha} = \sum_{\xi \in R^+_T} g_\xi \sum_{\alpha \in \kappa^{-1}(\xi)} \omega^\alpha \vee \omega^{-\alpha},$$

onde $\omega \vee \rho = \frac{1}{2}(\omega \otimes \rho + \rho \otimes \omega)$*, e os* g_α *são constantes positivas tais que* $g_\alpha = g_\beta$ *se* $\alpha|_T = \beta|_T$*. Portanto, uma métrica* G*-invariante em uma variedade bandeira generalizada depende (módulo um fator escalar) de* R^+_T *parâmetros.*

2.2 Estruturas complexas G-invariantes

Nesta seção exploraremos a existência de uma extrutura complexa e uma métrica Kähler em uma variedade bandeira generalizada.

Uma *estrutura quase complexa* em uma variedade Riemanniana M é um $(1,1)$-tensor J em M satisfazendo $J^2 = -\mathrm{Id}$, onde J é pensado como uma transformação J_p em cada espaço tangente $T_p(M)$. Denotamos com a mesma letra sua extensão à complexificação $T_pM^{\mathbb{C}}$. Se colocarmos

$$T^{(1,0)}_pM = \{X \in T_pM^{\mathbb{C}} : J_pX = iX\} \text{ e}$$
$$T^{(0,1)}_pM = \{X \in T_pM^{\mathbb{C}} : J_pX = -iX\}$$

então obtemos que $T_pM^{\mathbb{C}} = T^{(1,0)}_pM \oplus T^{(0,1)}_pM$.

Uma estrutura quase complexa J é chamada de *estrutura complexa* ou *estrutura complex integrável* se $\nabla_X J = 0$, onde ∇ é a conexão Riemanniana de M. Uma estrutura complexa significa que a variedade tem coordenadas que são complexa-avaliadas e com funções transição holomórficas. Quer dizer, elas localmente parecem como $\mathbb{C}^n$, tanto geometricamente e analiticamente. Se $M = G/K$ é um espaço homogênio com decomposição redutiva $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ e $o = eK$, então uma estrutura quase complexa é chamada *G-invariante* se J_o comuta com a representação isotrópica de G/K; isto é,

$$J_o(\mathrm{Ad}^{G/K}(k)X) = \mathrm{Ad}^{G/K}(k)J_oX, \text{ para todo } k \in \mathfrak{k}, X \in \mathfrak{m}.$$

Agora, seja $M = G/K$ uma variedade bandeira generalizada com decomposição de espaço de raíz $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \oplus \sum\limits_{\alpha \in R_K} \mathfrak{g}^{\alpha} \oplus \sum\limits_{\alpha \in R_M} \mathfrak{g}^{\alpha}$. Escolhemos um subconjunto R_M^+ de R_M que satisfaz as condições:

1. $R = R_K \cup R_M^+ \cup R_M^-$, onde $R_M^- = \{-\alpha : \alpha \in R_M^+\}$,
2. se $\alpha \in R_K \cup R_M^+$, $\beta \in R_M^+$ e $\alpha + \beta \in R$, então $\alpha + \beta \in R_M^+$.

A condição 1 define uma ordenação em R_M, e ambas as condições 1 e 2 definem uma *ordenação invariante* R_M^+ em R_M.

Proposição 2.2. *Há uma correspondência injetora entre estruturas complexas G-invariantes em M e ordenações invariantes R_M^+ em R_M dada por*

$$J_oE_{\pm\alpha} = \pm iE_{\alpha} \quad (\alpha \in R_M^+).$$

Para uma prova e outras discussões em estruturas complexas G-invariantes em variedades bandeiras generalizadas referimos a [Alek-Pe], [B-H], [B-F-R], [Frö], [Nis], [Wg].

2.3 Forma Kähler

Definição 2.3. *Uma estrutura quase complexa em uma variedade bandeira $\mathbb{F}$ é um campo tensorial J que em cada ponto $x \in \mathbb{F}$ é uma estrutura complexa em $T_x\mathbb{F}$, ou seja é um endomorfismo $J_x : T_x\mathbb{F} \to T_x\mathbb{F}$ tal que $(J_x)^2 = -Id$.*

Seja $\mathbb{F}$ uma variedade bandeira munida de uma métrica invariante g e uma estrutura quase complexa J. Computando $g(JX, JY)$ na base de Weyl escolhida, é fácil ver que g é *quase Hermitiana* com respeito a J, isto é, $g(JX, JY) = g(X, Y)$.

Denotaremos por $\Omega = \Omega_{J,\Lambda}$ a 2-forma fundamental de Kähler correspondente:

$$\Omega(X, Y) = g(X, JY) = -(\Lambda X, JY), \quad X, Y \in \mathfrak{m}. \tag{2.2}$$

Definição 2.4. *Uma variedade Hermitiana M é chamada Kähler se sua 2-forma fundamental é fechada, isto é, $d\Omega = 0$.*

Como é comum, continuaremos denotando por Ω, sua extensão natural a uma 2-forma invariante em $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$. Calculando o valor de Ω na base de Weyl $\{X_\alpha, \alpha \in \mathbb{R}_M\}$, temos

$$\Omega(X_\alpha, X_\beta) = -(\Lambda X_\alpha, JX_\beta) = -i\lambda_{\bar{\alpha}}\epsilon_{\bar{\beta}}(X_\alpha X_\beta) = \begin{cases} -i\epsilon_{\bar{\alpha}}\lambda_{\bar{\alpha}} & \text{se } \beta = -\alpha \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde $\bar{\alpha} = k(\alpha)$, $\bar{\beta} = k(\beta)$ são as t-raízes correspondentes a α e β respectivamente.

Portanto, considerando a decomposição

$$\mathfrak{m}^C = \mathfrak{m}_1^C \oplus \cdots \oplus \mathfrak{m}_{2s}^C$$

em submódulos ad($\mathfrak{k}$)-invariantes irredutíveis e inequivalentes, concluímos que Ω é uma 2-forma dada por

$$\Omega(\cdot,\cdot) = \sum_{\alpha\in\mathbb{R}_M} i\epsilon_\alpha\lambda_\alpha(\cdot,\cdot)|_{\mathfrak{g}_\alpha^{\mathbb{C}}\times\mathfrak{g}_{-\alpha}^{\mathbb{C}}} = \sum_{\delta\in\mathbb{R}_{\mathfrak{t}}}\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{R}_M\\ \bar{\alpha}=\bar{\delta}}} i\epsilon_\delta\lambda_\delta(\cdot,\cdot)|_{\mathfrak{g}_\alpha^{\mathbb{C}}\times\mathfrak{g}_{-\alpha}^{\mathbb{C}}} = \sum_{\delta\in\mathbb{R}_{\mathfrak{t}}^+} i\epsilon_\delta\lambda_\delta(\cdot,\cdot)|_{\mathfrak{m}_\delta^{\mathbb{C}}\times\mathfrak{m}_{-\delta}^{\mathbb{C}}}.$$

Pela invariância de Ω a diferencial exterior $d\Omega$ é dada por

$$3d\Omega(X,Y,Z) = -\Omega([X,Y],Z) + \Omega([X,Z],Y) - \Omega([Y,Z],X)$$

para todos campos de vetores $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$ em $\mathbb{F}$, veja [Ko-No]. O próximo resultado foi obtido em [Sil].

Proposição 2.5. *Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in R_M$ então $d\Omega(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma)$ é nulo, exceto quando $\alpha + \beta + \gamma$=0. Neste caso*

$$d\Omega(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma)\text{=-}3iN_{\alpha,\beta}(\varepsilon_\alpha\lambda_\alpha + \varepsilon_\beta\lambda_\beta + \varepsilon_\gamma\lambda_\gamma)$$

Podemos obter um resultado análogo à proposiçãoo anterior usando t-raízes. Para isto precisamos do seguinte resultado.

Lema 2.6. *([Alek-Pe], Lema 4) Sejam ξ, η, ζ t-raízes tais que $\xi + \eta + \zeta = 0$. Então existem raízes $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_M$ com $k(\alpha) = \xi$, $k(\beta) = \eta$, $k(\gamma) = \zeta$, e tais que $\alpha + \beta + \gamma = 0$.*

Se $\delta, \zeta, \eta \in \mathbb{R}_{\mathfrak{t}}$ são tais que $\delta+\zeta+\eta = 0$ diremos que a tripla (δ, ζ, η) é uma triplas soma zero de t-raízes.

Proposição 2.7. *Sejam $\delta, \zeta, \eta \in \mathbb{R}_{\mathfrak{t}}$ então $d\Omega(\mathfrak{m}_\delta^C, \mathfrak{m}_\zeta^C, \mathfrak{m}_\eta^C) = \{0\}$, exceto quando $\delta + \zeta + \eta = 0$. Neste caso*

$$d\Omega(X,Y,Z) = -3iN(\epsilon_\delta\lambda_\delta + \epsilon_\zeta\lambda_\zeta + \epsilon_\eta\lambda_\eta).$$

onde $N \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ e X, Y, Z pertencem a $\mathfrak{m}_\delta^C$, $\mathfrak{m}_\zeta^C$ e $\mathfrak{m}_\eta^C$, respectivamente.

Demonstração. Se $\alpha, \beta, \gamma \in \Pi_M$ são tais que $\alpha + \beta + \gamma = 0$ então $\delta + \zeta + \eta = 0$, quando $k(\alpha) = \delta$, $k(\beta) = \zeta$ e $k(\gamma) = \eta$.

Reciprocamente, se $\delta, \zeta, \eta \in \mathbb{R}_{\mathfrak{t}}$ tão tais que $\delta + \zeta + \eta = 0$ então, pelo Lema 2.6 existem $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_M$ com $k(\alpha) = \delta$, $k(\beta) = \zeta$, $k(\gamma) = \eta$, e tais que $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

Assim pela Proposição 2.5 e pela caracterização de métricas invariante e estruturas quase complexas invariantes temos

$$d\Omega(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) = -3iN_{\alpha,\beta}(\epsilon_\alpha \lambda_\alpha + \epsilon_\beta \lambda_\beta + \epsilon_\gamma \lambda_\gamma) = -3iN_{\alpha,\beta}(\epsilon_\delta \lambda_\delta + \epsilon_\zeta \lambda_\zeta + \epsilon_\eta \lambda_\eta).$$

Observe ainda que se $\alpha', \beta', \gamma' \in \mathbb{R}_M$ são tais que $k(\alpha') = \delta$,$k(\beta') = \zeta$, $k(\gamma') = \eta$ e $\alpha' + \beta' + \gamma' = 0$ então

$$d\Omega(X_{\alpha'}, X_{\beta'}, X_{\gamma'}) = -3iN_{\alpha',\beta'}(\epsilon_\delta \lambda_\delta + \epsilon_\zeta \lambda_\zeta + \epsilon_\eta \lambda_\eta).$$

□

Uma variedade quase Hermitiana $(M, \Lambda, \{\epsilon_\delta\})$ é dita ser $(1,2)$-simplética (ou quase Kähler) se

$$d\Omega(X, Y, Z) = 0$$

quando um dos vetores X, Y, Z é dito do tipo $(1,0)$ e os outros dois são do tipo $(0,1)$.

A Proposição 2.7 fornece um critério, em termos de triplas soma zero de t-raízes, para uma estrutura (Λ, J) sobre $\mathbb{F}$ ser $(1,2)$-simplética.

Definição 2.8. *Seja $J = \{\epsilon, \delta \in \mathbb{R}_{\mathfrak{t}}\}$ uma equação sobre $\mathbb{F}$. Uma tripla soma zero de t-raízes (δ, ζ, η) é dita ser uma $\{0,3\}$-tripla de t-raízes se $\epsilon_\delta = \epsilon_\zeta = \epsilon_\eta$ e uma $\{1,2\}$-tripla de t-raízes caso contrário.*

Uma métrica invariante Λ é $(1,2)$-simplética com respeito a J se o par (Λ, J) é $(1,2)$-simplética. Uma equação J é $(1,2)$-admissível se existe Λ tal que o par (Λ, J) é $(1,2)$-simplético.

Uma variedade quase Hermitiana é dita ser *quase Kähler* se Ω é simplética, isto é, $d\Omega = 0$. Quando $d\Omega = 0$ e J é integrável dizemos que a variedade é Kähler, [Ko-No].

Consideremos o tensor de Nijenhuis (invariante) sobre $\mathbb{F}$, dado por:

$$-\frac{1}{2}N(X,Y) = -[JX, JY] + [X, Y] + J[X, JY] + J[JX, Y], \quad X, Y \in \mathfrak{m}^{\mathbb{C}}.$$

Seja $J = \{\epsilon_\delta, \delta \in \mathbb{R}_{\mathfrak{t}}\}$ uma eqci sobre $\mathbb{F}$. O tensor de Nijenhuis calculado na base $\{X_\alpha, \alpha \in \mathbb{R}_M\}$ de $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ é dado por

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}N(X_\alpha, X_\beta) &= -[JX_\alpha, JX_\beta] + [X_\alpha, X_\beta] + J[X_\alpha, JX_\beta] + J[X_\alpha, X_\beta] \\ &= N_{\alpha,\beta}\epsilon_{k(\alpha)}\epsilon_{k(\beta)}X_{\alpha+\beta} + N_{\alpha,\beta}X_{\alpha+\beta} \\ &- N_{\alpha,\beta}\epsilon_{k(\beta)}\epsilon_{k(\alpha)+k(\beta)}X_{\alpha+\beta} - N_{\alpha,\beta}\epsilon_{k(\alpha)}\epsilon_{k(\alpha)+k(\beta)}X_{\alpha+\beta} \\ &= N_{\alpha,\beta}\left(\epsilon_{k(\alpha)} + \epsilon_{k(\beta)}\right)\left(\epsilon_{k(\beta)} - \epsilon_{k(\alpha)+k(\beta)}\right)X_{\alpha+\beta} \end{aligned} \tag{2.3}$$

onde $k(\alpha), k(\beta) \in \mathbb{R}_{\mathfrak{t}}$.

Proposição 2.9. *([San-Neg], [Sil]) Uma estrutura quase Hermitiana sobre $\mathbb{F}$ é quase Kähler se e somente se é Kähler.*

Demonstração. Notamos que um par (Λ, J) quase Kähler não pode admitir $\{0,3\}$-triplas de t-raízes. Pois, se admitisse uma $\{0,3\}$-tripla (δ, ζ, η) em $\mathbb{R}_{\mathfrak{t}}$, como $d\Omega = 0$, pela Proposição 2.7 teríamos a igualdade

$$\lambda_\delta + \lambda_\zeta + \lambda_\eta = 0$$

o que é impossível, já que $\lambda_\delta, \lambda_\zeta, \lambda_\eta > 0$. Assim a eqci J admite apenas $\{1,2\}$-triplas e nesse caso, por 2.3, é fácil ver que o tensor de Nijenhuis é nulo, logo J é integrável. Portanto o par (Λ, J) é Kähler. A recíproca é imediata. □

Pelas Proposições 2.7 e 2.9 obtemos um critério para uma métrica ser Kähler.

Proposição 2.10. *([Alek-Arv], [Arv]) Dada uma estrutura complexa invariante J sobre $\mathbb{F}$, uma métrica invarinate Λ é Kähler (com respeito a J) se e somente se satisfaz*

$$\lambda_{\delta+\eta} = \lambda_\delta + \lambda_\eta \text{ para todo } \delta, \eta \in R_{\mathfrak{t}}^+.$$

2.4 O tensor de Ricci e a equação de Einstein

Nesta seção apresentaremos o tensor de Ricci de uma métrica invariante sobre uma variedade bandeira e exibiremos a equação de Einstein associada.

Definição 2.11. *Uma variedade Riemaniana (M^n, g) é Einstein, se a métrica cumprir* $\mathrm{Ric}(g) = cg$. *Quando $n \geq 3$, c será chamada de constante de Einstein, ou seja, uma métrica Riemaniana é de Einstein se o tensor de Ricci for proporcional a métrica g.*

Logo uma métrica Riemaniana é de Einstien se, e somente se (M, g) possuir curvatura de Ricci constante. Começamos estudando o tensor de Ricci de uma métrica invariante em um espaço homogêneo qualquer.

Apresentaremos também o tensor de Ricci e consequentemente a equação de Einstein nos próximos lemas para uma variedade bandeira maximal. O primeiro Lema pode ser encontrado em [Sak] ou [Mut] e fornece as componentes do tensor de Ricci de uma métrica invariante sobre o espaço homogêneo $M = U/K$. Começamos com uma notação introduzida por Wang-Ziller em [Wan-Zil].

Considere $\{e_\alpha\}$ uma base β-ortonormal adaptada a decomposição de $\mathfrak{m} = \bigoplus_{k=1}^{l} \mathfrak{m}_k$. Em outras palavras, $e_\alpha \in \mathfrak{m}_i$ para algum $i \in \{1, \cdots, l\}$ e $\alpha < \beta$ se $i < j$ com $e_\alpha \in \mathfrak{m}_i$, $e_\beta \in \mathfrak{m}_j$. Defina como em [Wan-Zil],

$$A_{\alpha,\beta}^{\gamma} = ([e_\alpha, e_\beta], e_\gamma)_{CK}, \tag{2.4}$$

isto é,

$$[e_\alpha, e_\beta] = \sum_\gamma A^\gamma_{\alpha\beta} e_\gamma \text{ e } \sum (A^\gamma_{\alpha\beta})^2 = \begin{bmatrix} & k & \\ i & & j \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

As somas acima 2.5 são tomadas sobre todos os índices α, β, γ com $e_\alpha \in \mathfrak{m}_i$, $e_\beta \in \mathfrak{m}_j$, $e_\gamma \in \mathfrak{m}_k$. Um ponto importante é que $\begin{bmatrix} & k & \\ i & & j \end{bmatrix}$ independe do referencial ortonormal escolhido para $\mathfrak{m}_i$, $\mathfrak{m}_j$, $\mathfrak{m}_k$ e

$$\begin{bmatrix} & k & \\ i & & j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & k & \\ j & & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & j & \\ k & & i \end{bmatrix}. \tag{2.6}$$

Além disso se w é um elemento do grupo de Weyl então:

$$\begin{bmatrix} & w(\gamma) & \\ w(\alpha) & & w(\gamma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \gamma & \\ \alpha & & \beta \end{bmatrix}. \tag{2.7}$$

Usaremos as notações acima nos próximos lemas.

Lema 2.12. *As componentes r_k do tensor de Ricci de uma métrica U-invariante sobre $M = U/K$ são dadas por:*

$$r_k = \frac{1}{2\lambda_k} + \frac{1}{4d_k} \sum_{i,j=1}^{l} \frac{\lambda_k}{\lambda_i \lambda_j} \begin{bmatrix} & k & \\ i & & j \end{bmatrix} - \frac{1}{2d_k} \sum_{i,j=1}^{l} \frac{\lambda_k}{\lambda_i \lambda_j} \begin{bmatrix} & j & \\ k & & i \end{bmatrix} \quad (k = 1, \cdots, l) \tag{2.8}$$

onde, $\mathfrak{m} = \bigoplus_{k=1}^{l} \mathfrak{m}_k$ $d_k = \dim \mathfrak{m}_k$.

Demonstração. O tensor de Ricci de uma métrica invariante sobre uma variedade homogênea é dado por [Bes]:

$$\mathrm{Ric}(g)(X, X) = -\frac{1}{2} \sum_i \|[X, X_i]_\mathfrak{m}\|^2 + \frac{1}{2}(X, X)_{C-K} + \frac{1}{4} \sum_{i,j} \langle [X_i, X_j]_\mathfrak{m}, X \rangle^2. \tag{2.9}$$

Considere $\{e^k_a\}$ uam base ortonormal de $\mathfrak{m}_k$ em relação a $(\cdot, \cdot)_{CK}$.

Considere também os vetores $X^k_a = \dfrac{e^k_a}{\sqrt{\lambda_k}}$. Estes vetores X^k_a formam uma g base ortonormal para $\mathfrak{m}_k$. Como o tensor de Ricci de uma métrica invariante é dao por 2.9, temos:

$$\begin{aligned} r_k = \mathrm{Ric}(g)(X^k_a, X^k_a) &= \\ &- \frac{1}{2} \textstyle\sum_{i,j} \dfrac{\lambda_j}{\lambda_i \lambda_k} \textstyle\sum_s ([e^k_a, e^i_s]_{\mathfrak{m}_j}, [e^k_a, e^i_s]_{\mathfrak{m}_j}) \\ &+ \frac{1}{2\lambda_k} + \frac{1}{4} \textstyle\sum_{i,j} \dfrac{\lambda_k}{\lambda_i \lambda_j} \textstyle\sum_{t,s} ([e^j_t, e^i_s]_{\mathfrak{m}_k}, e^k_a). \end{aligned}$$

Portanto decorre de 2.4 e 2.5 que,

$$d_k r_k = \sum_{a=1}^{d_k} \mathrm{Ric}(g)(X_a^k, X_a^k) = \frac{d_k}{2\lambda_k} - \frac{1}{2}\sum_{i,j} \frac{\lambda_i}{\lambda_k \lambda_i} \begin{bmatrix} & j & \\ k & & i \end{bmatrix} + \frac{1}{4}\sum_{i,j} \frac{\lambda_k}{\lambda_j \lambda_i} \begin{bmatrix} & k & \\ j & & i \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

O que prova o lema.

$\square$

Considere agora, $M = U/T$ uma variedade bandeira maximal equipada com uma métrica invariante $(\Lambda)_{\alpha \in \mathbb{R}_M^+} = \{\lambda_\alpha > 0\}$.

Lema 2.13. *As componentes r_α do tensor de Ricci de uma métrica U-invariante sobre uma variedade bandeira maximal $M = U/T$ são dadas por:*

$$r_\alpha = \frac{1}{2\lambda_\alpha} + \frac{1}{8} \sum_{\substack{\beta,\gamma \in \mathbb{R}_M^+ \\ \beta+\gamma \in \mathbb{R}_M^+}} \frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\beta \lambda_\gamma} \begin{bmatrix} & \alpha & \\ \beta & & \gamma \end{bmatrix} - \frac{1}{4} \sum_{\substack{\beta,\gamma \in \mathbb{R}_M^+ \\ \beta+\gamma \in \mathbb{R}_M^+}} \frac{\lambda_\gamma}{\lambda_\alpha \lambda_\beta} \begin{bmatrix} & \gamma & \\ \alpha & & \beta \end{bmatrix} \quad (\alpha \in \mathbb{R}_M^+) \quad (2.11)$$

Demonstração. Basta aplicar o lema anterior em uma variedade bandeira $M = U/T$, trocando $\mathfrak{m}$ por $\bigoplus_{\alpha \in \mathbb{R}_M^+} \mathfrak{u}_\alpha$. Neste caso, $d_\alpha = \dim \mathfrak{u}_\alpha = 2$.

$\square$

Nesta dissertação alguns reultados são aplicáveis a todas as variedades bandeiras, mas como encontramos soluções para a equação de Einstein apenas no caso A_l, concentraremos nossa atenção às variedades deste tipo.

Uma subálgebra de Cartan para complexificação de $\mathfrak{su}(n)$, é formada pelas matrizes diagonais

$$\mathfrak{h}^{\mathbb{C}} = \{\mathrm{diag}(\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n) \quad \epsilon_i \in \mathbb{C}, \quad \sum_{i=1}^{n} = 0\}. \quad (2.12)$$

O sistema de raízes tem a forma $R = \{\epsilon_i - \epsilon_j,\, i \neq j\}$, consequentemente as raízes positivas podem ser escolhidas como $R^+ = \{\epsilon_i - \epsilon_j,\, i < j\}$.

A forma de Cartan-Killing de $SU(n)$ é $(X, Y) = 2n\,\mathrm{tr}XY$ temos $(\alpha, \alpha) = \dfrac{1}{n}$ para todas as raízes α e os vetores X_α que satisfazem $(X_\alpha, X_{-\alpha}) = 1$ são da forma $X^{ij} = \dfrac{X_{\epsilon_i - \epsilon_j}}{\sqrt{2n}}$ onde $X_{\epsilon_i - \epsilon_j}$ é o vetor associado à raíz $\epsilon_i - \epsilon_j$. As constantes de estrutura são todas iguais a $\dfrac{1}{\sqrt{2n}}$.

Agora podemos escrever, as componentes do tensor de Ricci de uma métrica invariante sobre uma variedade bandeira maximal do tipo A_l. Este é o conteúdo do próximo Lema.

Lema 2.14. *[Sak] Sobre as variedades $\mathbb{F}(n)$, $n \geq 3$, as componentes do tensor de Ricci de uma métrica $U(n)$-invariante $(\Lambda)_{\alpha\in\mathbb{R}^+}$ são dadas por:*

$$r_{ij} = \frac{1}{2\lambda_{ij}} + \frac{1}{4n}\sum_{k\neq i,j}\left(\frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{ik}\lambda_{kj}} - \frac{\lambda_{ik}}{\lambda_{ij}\lambda_{kj}} - \frac{\lambda_{kj}}{\lambda_{ij}\lambda_{ik}}\right) \tag{2.13}$$

Demonstração. Pela lema anterior 2.13, as componentes do tensor de Ricci de uma métrica invariante $g(\cdot,\cdot) = \bigoplus_{\alpha\in\Pi^+} \lambda_\alpha \mathcal{B}|_{\mathfrak{m}_\alpha}$ são dadas por

$$\begin{aligned} r_\alpha \;&=\; \frac{1}{2\lambda_\alpha} + \frac{8}{\sum_{\beta,\gamma\in\Pi^+}}\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\beta\lambda_\gamma}\begin{bmatrix} & \alpha & \\ \beta & & \gamma \end{bmatrix} \\ &-\; \frac{1}{4}\sum\nolimits_{\beta,\gamma\in\Pi^+}\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\beta\lambda_\gamma}\begin{bmatrix} & \gamma & \\ \alpha & & \beta \end{bmatrix} \end{aligned}. \tag{2.14}$$

Mas, para $\mathbb{F}(n)$, $n \geq 3$, temos:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} & \epsilon_i - \epsilon_j & \\ \epsilon_i - \epsilon_k & & \epsilon_k - \epsilon_j \end{bmatrix} & = \dfrac{1}{n} \quad (k \neq i,j) \\ \text{caso contrário} & \quad 0. \end{cases}$$

Para concluir a demonstração do lema, basta observar as simetrias dos termos envolvidos nos dois somatórios em 2.14 e que, conforme já mencionamos, pela definição de $A_{\alpha\beta}^{\gamma}$ temos que:

$$\begin{bmatrix} & \gamma & \\ \alpha & & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \beta & \\ \gamma & & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \alpha & \\ \beta & & \gamma \end{bmatrix}.$$

$\square$

Veremos a seguir um exemplo para o caso de $n = 3$, ou seja, um método para a solução da equação de Einstein em $\mathbb{F}(3)$:

Na variedade mencionada, equação de Einstein é dada por

$$\begin{aligned} r'_{11} &= \frac{1}{2\lambda_{12}} + \frac{1}{12}\left(\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{13}\lambda_{23}} - \frac{\lambda_{13}}{\lambda_{12}\lambda_{23}} - \frac{\lambda_{23}}{\lambda_{12}\lambda_{13}}\right) = c \\ r'_{13} &= \frac{1}{2\lambda_{13}} + \frac{1}{12}\left(\frac{\lambda_{13}}{\lambda_{12}\lambda_{23}} - \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{13}\lambda_{23}} - \frac{\lambda_{23}}{\lambda_{12}\lambda_{13}}\right) = c\ . \\ r'_{23} &= \frac{1}{2\lambda_{13}} + \frac{1}{12}\left(\frac{\lambda_{13}}{\lambda_{12}\lambda_{23}} - \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}\lambda_{13}} - \frac{\lambda_{13}}{\lambda_{23}\lambda_{12}}\right) = c \end{aligned} \tag{2.15}$$

Aplicando $S_2 = \langle(1,2)\rangle < S_3$ nas equações, notamos que ainda se trata da mesma equação. No entanto, usando as condiões da métrica ser Kähleriana para que as mesmas sejam de Einstein, chegamos a $\lambda_{13} = \lambda_{23}$.

Logo, a equação 2.15 se reduz a

$$
\begin{aligned}
r'_{12} &= \frac{1}{2\lambda_{12}} + \frac{1}{12}\left(\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{13}^2} - \frac{1}{\lambda_{12}} - \frac{1}{\lambda_{12}}\right) = c \\
r'_{13} &= r'_{23} = \frac{1}{2\lambda_{13}} + \frac{1}{12}\left(\frac{-\lambda_{12}}{\lambda_{13}^2}\right) = c
\end{aligned}
$$

Como estamos interessados em econtrar a solução sem nos importarmos com o volume (por enquanto), podemos ajustar o volume da variedade de forma que $\lambda_{13} = 1$. Desse modo, segue de imediato que $\lambda_{12}^2 - 3\lambda_{12} + 2 = 0$, e com isso $\lambda_{12} = 1$ ou $\lambda_{12} = 2$.

Portanto, a métrica dada por

$$
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

são métricas de Einstein.

Capítulo 3

Soluções da Equação de Einstein

3.1 Métricas Käkler-Einstein

A existência de uma métrica Einstein, conforme já mencionamos, nem sempre é garantida. Sobre as variedades bandeira $M = G/K$ equipadas com uma estrutura complexa invariante J mostraremos, seguindo os trabalhos de Matsushima [Mat], Koszul [Kos] e principalmente Borel [Bor], a existência de uma métrica de Einstein distinguida, isto é, a existência de uma métrica de Kähler-Einstein. Esta métrica é única, a menos de transformações holomorfas, [Mat].

Considere (M, J, g) uma variedade bandeira equipada com um por Kähler invariante $(J, g = \Lambda_\alpha)$, veremos que o tensor de Ricci ou equivalentimente a forma Ricci neste contexto independe da métrica invariante.

Sobre uma variedade Hermitiana podemos construir uma 2-forma fundamental também chamada de forma Kähler fazendo

$$\Omega(X, Y) = g(JX, Y) \tag{3.1}$$

Diremos que M é Kähler se $d\Omega = 0$. A forma Ricci é a 2-forma $\rho(X, Y) = \mathrm{Ric}(JX, Y)$. Desse modo uma métrica invariante é Einstein se, e somente se $\rho(X, Y) = c\Omega(X, Y)$, para alguma constante c. Segue daí que uma métrica Kähler invariante é Einstein se a forma Ricci for proporcional a forma Kähler, ou seja, se

$$\rho(X, Y) = cg(JX, Y).$$

Considere agora M = G/K, uma variedade bandeira com a decomposição $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$. Uma estrutura complexa G-invariante J, e uma 2-forma podem ser identificadas com uma Ad(K)-invariante transformação linear $J_\circ$ sobre $\mathfrak{m}$ satisfazendo J^2=-1 e uma Ad(K)-invariante não-degenerada forma anti-simétrica $\Omega_\circ$ sobre $\mathfrak{m}$. O mesmo pode ser feito com o tensor de Ricci e a forma Ricci ρ. É usual estender a métrica g , a estrutura quase complexa J e a forma Kähler a $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$, sem qualquer mudança de notação. O ponto central é que como $J_\circ^2$=-Id logo a complexificação de $J_\circ$ possui autovalores $\pm$ i.

Seja (M, J,Λ) uma variedade banceira equipada com uma estrutura complexa J e uma métrica invariante (Λ). O tensor de curvatura é dado por $R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \forall X, Y, Z$ onde ∇ denota a conexão Riemanniana associada a métrica ds^2_Λ. Para variedades Kähler a forma Ricci pode ser escrita como [Ko-No]

$$\rho(X,Y) = \frac{1}{2}tr(JR(X,Y)). \tag{3.2}$$

No contexto invariante, o tensor de curvatura é dado por

$$R_\circ(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]_\mathfrak{m}}Z - [[X,Y]_\mathfrak{t}, Z] \tag{3.3}$$

Como a estrutura complexa é G-invariante, e satisfaz $\nabla_X J$=0, temos que para X,Y $\in \mathfrak{m}$

$$[X, JY]_{\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}} = J[X,Y]_{\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}} \qquad \nabla_X(JY) = J\nabla_X Y. \tag{3.4}$$

Segue daí que $tr(J_\circ\nabla(X)\nabla(Y)) = tr(\nabla(X)J_\circ\nabla(Y)) = tr(J_\circ\nabla(Y)\nabla(X))$.

Isto significa que os dois primeiros termos de 3.3 não deverão ser considerados para o cálculo da forma Ricci. Além disso, pela invariância da forma Ricci vemos que é suficiente calculá-la para $X = X_\alpha$ e $Y = X_{-\alpha}$. Mas,

$$[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha \in \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$$

Portanto do exposto acima e de 3.3,

$$\rho(X_\alpha, X_{-\alpha}) = \frac{1}{2}tr(J_\circ ad(H_\alpha)). \tag{3.5}$$

Por outro lado sobre $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ os vetores X_α, $\alpha \in R$, são autovetores, tanto de $J_\circ$ como de $ad(H_\alpha)$ com autovalores $\pm$i e $\alpha(H)$, respectivamente.

Portanto,

$$\begin{aligned}
\rho_\circ(X_\alpha, X_{-\alpha}) &= \frac{i}{2}\sum_{\beta\in R}\epsilon_\beta\beta(H_\alpha) \\
&= \frac{i}{2}(\sum_{\beta\in R+}\beta(H_\alpha) - \sum_{\beta\in R-}\beta(H_\alpha)) \\
&= i\sum_{\beta\in R+}\beta(H_\alpha) \\
&= i\sum_{\beta\in R+}\alpha(H_\beta) \\
&= i\alpha\sum_{\beta\in R+}H_\beta
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Onde $\delta = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in R+}\alpha$. A partir dos fatos acima, descreveremos como construir uma métrica Kähler-Einstein sobre uma variedade bandeira maximal M = G/B = U/T. Denotaremos por $\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}$ e por $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ as complexificadas das álgebra de Lie de $\mathfrak{u}$ e $\mathfrak{m}$ respectivamente. Temos portanto uma decomposição de $\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}$ em espaços de raízes:

$$\mathfrak{u}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} \oplus \sum_{\alpha\in R}(\mathfrak{u}_\alpha \oplus \mathfrak{u}_{-\alpha})$$

Até o final desta seção, $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha\in R+}\mathfrak{g}_\alpha$ denotará a subálgebra de Borel de $\mathfrak{g}$ enquanto que B denotará o subgrupo de Borel de G correspondente a $\mathfrak{b}$, e T = G∩B será o toro maximal de U.

O sistema simples de raízes de $\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}$, $\Sigma = \{\alpha_1, \cdots \alpha_n\}$ estará associado aos funcionais $\sum^* = \{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$ de $(\mathfrak{u}^{\mathbb{C}})^*$ da seguinte forma:

$$\frac{2(\varphi_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha j)} = \delta_{ij} \qquad (1 \leq i < j \leq n) \tag{3.7}$$

Podemos identificar uma raíz de $\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}$ com um elemento de $\sqrt{-1}\mathfrak{t}$, através da dualidade decorrente da forma Cartan-Killing β. Lembramos, que o fato de $\mathfrak{u}$ ser semi-simples assegura que a forma Killing é não-degenerada. Em outras palavras, identificamos H_α com α, onde $H_\alpha \in \sqrt{-1}\mathfrak{t}$ é definido como $\beta(H_\alpha, H) = \alpha(H)$ para $H \in \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$.

Desse modo $\sqrt{-1}\mathfrak{t} = \sum_{i=1}^n \mathbb{R}_{\varphi_i}$. Defina a câmara positiva com respeito a escolha de $\sum$ como $c_+ = \{\lambda \in \sqrt{-1}\mathfrak{t}; \beta(\lambda, \alpha_i) > 0, i = 1, \cdots, n\}$ e denote por $\delta = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in R+}\alpha$, a soma das raízes positivas.

Podemos escrever, $\delta = \varphi_1 + \cdots + \varphi_n$ e portanto $\delta \in c_+$. A demonstração do lema abaixo pode ser encontrada em [B-H].

Lema 3.1. *[B-H] Existe uma correspondência 1-1 entre as métricas Kähler U-invariantes sobre $M = G/B = U/T$ e elementos de c_+. Portanto, para uma métrica Kähler U-invariante sobre M correspondente a $\lambda \in c_+$, o tensor de Ricci é também uma métrica*

Kähler U-invariante sobre M que corresponde a $\delta \in c_+$. A métrica Kähler que corresponde a δ é Kähler-Einstein.

Observe que de acordo com a equação 3.6 a métrica Kähler-Einstein U-invariante sobre U/T correspondente a δ é dada por $g_\delta = \{\lambda_\alpha = \sum_{\alpha \in R+} \beta(\varphi_1 + \cdots + \varphi_n, \alpha)\}$.

Podemos escrever cada raíz positiva α de forma única como $\alpha = \sum_{i=1}^{l} m_i(\alpha)\alpha_i$ onde $m_i(\alpha)$ são inteiros não-negativos. Utilizando a expressão 3.7 podemos escrever:

$$g_\delta = \{\lambda_\alpha = \sum_{i=1}^{n} m_i(\alpha)\mathcal{B}(\alpha_i, \alpha_i)\}. \tag{3.8}$$

A expressão acima 3.8 fornece, a menos de escalar, os coeficientes da métrica Kähler-Einstein sobre $M = U/T$.

Exemplo 3.2. *Sobre $\mathbb{F}(3)$ a métrica Kähler-Einstein de Matsushima [Mat] associada a estrutura complexa canônica* $\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} & -\sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & -\sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$ *é a menos de escalar dada por:*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3.3. *De uma forma mais geral, a métrica Kähler-Einstein [Mat], sobre $\mathbb{F}(n)$ associada a estrutura complexa canônica é a menos de escalar dada por:*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{n-1}{2n} \\ \frac{1}{2n} & 0 & \frac{1}{2n} & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{2n} & 0 & \ddots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2n} \\ \frac{n-1}{2n} & \cdots & \frac{1}{n} & \frac{1}{2n} & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, sobre $\mathbb{F}(n)$, ≥ 3, uma vez fixada uma estrutura complexa, existe uma única métrica Kähler-Einstein [Mat].

3.2 A métrica Normal-Einstein

Nesta seção estudaremos a condição Einstein, para a métrica normal. Sejam G um grupo de Lie compacto, conexo, semi-simples e H um subgrupo fechado conexo de G. Considere $M = G/H$ pelas propriedades de G e H, M é um espaço homogêneo compacto e simplesmente conexo. Seguiremos a notação de [Wa-Zi].

Qualquer métrica bi-invariante sobre $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}G$, induz uma decomposição $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$. Podemos identificar $\mathfrak{m}$ com $T_{eH}(M)$, a restrição da métrica bi-invarinate a $\mathfrak{m}$ induz, por translações à esquerda, uma métrica G-invariante sobre M. Tal métrica é usualmente, chamada de métrica normal. A escolha canônica para a métrica bi-invariante sobre $\mathfrak{g}$ é negativo da forma Cartan-Killing, chamaremos tal escolha de $\mathcal{B}$, a métrica invariante induzida será denotada por $g_{\mathcal{B}}$.

No estudo da condição Einstein, para a métrica $g_{\mathcal{B}}$, a representação isotrópica desempenha um papel central.

Um elemento $h \in H$ age sobre M por translações à esquerda, e a classe eH é estável para a ação. A diferencial de h, dh é a diferencial da translação à esquerda gerada por h, ou seja, $dh = dL_h$, dh é um automorfismo de $\mathfrak{m} = T_{eH}M$. A representação isotrópica χ é dada por $h \mapsto dh$.

A representação χ induz uma representação de $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{m}$, que ainda será denotada por χ, usando a identificação de $\mathfrak{m}$ com $T_{eH}(M)$ essas represntações serão dadas por: $\chi(h) = \mathrm{Ad}_{\mathfrak{m}}(h)$, para $h \in H$, e para $X \in \mathfrak{h}$ e $Y \in \mathfrak{m}$ temos que $\chi(X)Y = [X, Y]$.

Sejam $X, Y \in \mathfrak{m}$, defina

$$A(X,Y) = -\sum_i \mathcal{B}([X,[y,Z_i]],Z_i) = -\sum_i \mathcal{B}([Z_i,[Z_i,X]],Y), \tag{3.9}$$

pois $\mathcal{B}$ é $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$-invariante. Wang-Ziller provaram em [Wa-Zi] a seguinte proposição:

Proposição 3.4. $\mathrm{Ric}(g_{\mathcal{B}}) = \dfrac{1}{4}\mathcal{B} + \dfrac{1}{2}A$

Demonstração. Seja $X \in \mathfrak{m}$ um vetor unitário. Sabemos ([35] Teorema X) que

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(R(X,X_i)X_i,X) &= \frac{1}{4}\mathcal{B}([X,X_i]_{\mathfrak{m}},[X,X_i]_{\mathfrak{m}}) + \mathcal{B}([X,X_i]_{\mathfrak{l}},[X,X_i]_{\mathfrak{l}}) \\ &= -\frac{3}{4}\mathcal{B}([X,X_i]_{\mathfrak{m}},[X,X_i]_{\mathfrak{m}}) + \mathcal{B}([X,X_i],[X,X_i]), \end{aligned}$$

onde $\{X_i\}$ é uma $\mathcal{B}$-base ortonormal de $\mathfrak{m}$ e $X = X_1$. Portanto,

$$\mathrm{Ric}(g_{\mathcal{B}})(X,X) = \frac{3}{4}\mathrm{tr}_{\mathfrak{m}}(\mathrm{pr}_{\mathfrak{m}} \circ \mathrm{ad}X)^2 + \mathcal{B}(X,X) - A(X,X) \tag{3.10}$$

Como $[\mathfrak{m}, \mathfrak{l}] \subset \mathfrak{m}$, e $\mathcal{B}$ é $\mathrm{ad}\mathfrak{g}$-invariante, a matriz de $\mathrm{ad}X$ com respeito a $\{Z_i, X_j\}$ possui a seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & a(X) \\ -a(X)^t & b(X) \end{pmatrix}.$$

Daí,

$$\mathrm{tr}_{\mathfrak{m}}(\mathrm{pr}_{\mathfrak{m}} \circ \mathrm{ad}X)^2 = \mathrm{tr}(b(X)^2) = -\mathcal{B}(X,X) + 2\mathrm{tr}(a(X)a(X)^t) = -\mathcal{B}(X,X) + 2A(X,X)$$

. Então usando agora 3.10, e a desigualdade acima temos:

$\mathrm{Ric}(g_{\mathcal{B}})(X,X) = \dfrac{1}{4}\mathcal{B}(X,X) + \dfrac{1}{2}A(X,X)$, conforme afirmado.

□

O operador A pode ser relacionado ao operador de Casimir [31] da representação isotrópica. O operador de Casimir da representação isotrópica χ de $\mathfrak{h}$ com relação a $\langle\cdot,\cdot\rangle = \mathcal{B}|_{\mathfrak{h}}$ é definido por:

$$C_{\chi,\langle\cdot,\cdot\rangle} = -\sum_i \chi(X_i)\chi(Y_i), \tag{3.11}$$

onde, $\{X_i\}, \{Y_i\}$ são bases de $\mathfrak{h}$ duais com relação à $\langle\cdot,\cdot\rangle$, ou seja, $\langle X_i, Y_j\rangle = \delta_{ij}$.

Portanto por 3.9 e 3.11

$$A(X,Y) = \mathcal{B}(C_{\chi\langle\cdot,\cdot\rangle}X, Y) \tag{3.12}$$

Combinando 3.4 com 3.12 Wang-Ziller obtiveram:

Corolário 3.5. *Se escrevermos o tensor de Ricci como um endomorfismo simétrico de $\mathfrak{m}$ então*

$$\mathrm{Ric}(g_{\mathcal{B}}) = \frac{1}{4}Id + \frac{1}{2}C_{\chi B|_{\mathfrak{h}}}$$

Portanto $g_{\mathcal{B}}$ é Einstein se, e somente se $C_{\chi B|_{\mathfrak{h}}} = aId$.

O resultado acima, e outros obtidos a partir deste, permitiram a Wang-Ziller classificarem todos os espaços homogêneos de grupos de Lie simples sobre os quais a métrica normal é Einstein [Wa-Zi] p.577-80.

Sabemos que sobre $M = \mathbb{F}(n)$, $n \geq 3$, a métrica normal é Einstein [Wa-Zi].

3.3 Métricas Arvanitoyeorgos-Einstein

Arvanitoyeorgos em [Arv] descreveu várias soluções para a equação de Einstein invariante sobre as variedades $\mathbb{F}(n)$, $n \geq 4$. Ele provou o seguinte Teorema:

Teorema 3.6 (Arvanitoyeorgos)**.** *As variedades $\mathbb{F}(n)$, $n \geq 4$ admitem, a menos da ação do grupo de Weyl, pelo menos 3 classes de métricas de Einstein invariantes. A métrica normal, a métricas Kähler-Einstein que totalizam, $\dfrac{n!}{2}$ e a classe dada por:*

$$\lambda_{si} = \lambda_{sj} = n-1, \quad i \neq s,\, j \neq s$$

$$\lambda_{kl} = n+1, \quad k,l \neq s\,(1 \leq s \leq n)$$

Antes de provar esse teorema, Considere a matriz da métrica invariante $\Lambda = (\lambda_\alpha)$. Posto que a matriz Λ é simétrica basta considerar λ_α com $\alpha \in \mathrm{R}_M^+$, ou seja, consideraremos a parte triangular superior e considere o conjunto das t-raízes positivas R_M^+. Podemos escrever $R_M^+ = R_1 \cup R_2 \cup \ldots \cup R_k$, com $R_i's$ disjuntos. Com a decomposição acima podemos descrever a seguinte classe de métricas invariantes

$$\lambda_\alpha = a_i > 0, \alpha \in R_i.$$

Note que a métrica normal pertence a essa classe.

Agora podemos enunciar o Lema, que nos será útil na busca por soluções da equação de Einstein.

Lema 3.7. *Se sobre o espaço homogêneo G/K a métrica normal g_β é Einstein, então todo decomposição do conjunto dos coeficientes da métrica invariante é do tipo*

$$\lambda_\alpha = a_i > 0, \alpha \in R_i,$$

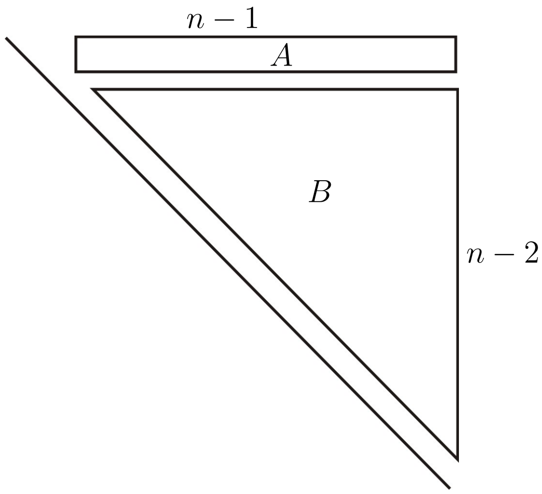
gera pelo menos uma solução da equação de Einstein.

Depois de apresentado o lema anterior a demonstração do Terorema 3.5 ficará mais natural, pois a idéia é reduzir o número de incógnitas da equação de Einstein aplicando uma redução sugerida no Lema 3.6.

Demonstração. (Teorema 3.5) Usando o Lema 3.6 temos

$$\begin{aligned} \lambda_{1i} &= \lambda_{12} \quad (i = 2, 3, \cdots, n) \\ \lambda_{jk} &= \lambda_{23} \quad (2 \leq j < k \leq n) \end{aligned} \tag{3.13}$$

A figura abaixo ilustra esta situação. Os coeficientes da métrica invariante que pertencem a uma região delimitada na figura serão tomados iguais. Este processo reduz consideravelmente o número de incógnitas da equação de Einstein.



Após este processo as equações de Einstein serão dadas por:

$$\begin{aligned} r_{12} &= \frac{1}{2\lambda_{12}} + \frac{n-2}{4n}\left(\frac{-\lambda_{23}}{\lambda_{12}^2}\right) &= c \\ r_{23} &= \frac{1}{2\lambda_{23}} + \frac{1}{4n}\left(\frac{\lambda_{23}}{\lambda_{12}^2} - \frac{2}{\lambda_{23}} - \frac{n-3}{\lambda_{23}}\right) &= c \end{aligned} \tag{3.14}$$

A condição Einstein é dada por $r_{12} = \cdots = r_{1n} = \cdots = r_{n-1n}$. Com as condições 3.13 mostramos que a equação de Einstein 3.14 admite uma solução diferente da solução normal.

Façamos $r_{12} = r_{23}$ esta igualdade é equivalente a:

$$((n-1)\lambda_{23} - (n+1)\lambda_{12})(\lambda_{12} - \lambda_{23}) = 0 \tag{3.15}$$

Observe que $\lambda_{12} = n - 1$ e $\lambda_{23} = n + 1$ é solução da equação acima. Podemos considerar também outras reduções equivalentes a esta, fazendo os elementos do grupo simétrico S_n, $n \geq 4$, agirem sobre as restrições. Como o grupo simétrico é gerado por transporsições basta verificar o efeito destas sobre as restrições 3.13, por exemplo se fizermos a transposição (1 3) agir sobre 3.13 obteremos as condições:

$$\begin{aligned} \lambda_{3i} &= \lambda_{13} \quad (i = 2, 3, \cdots, n) \\ \lambda_{jk} &= \lambda_{12} \quad (1 \leq j < k \leq n) \quad j, k \neq 3 \end{aligned}$$

As condições acima nos conduzem, a menos de permutação, às mesmas soluções do caso anterior e se continuarmos procedendo desta maneira, ou seja, considerando após este outro conjunto de restrições obtido através da ação da transposição (1 4) em 3.13, obteremos todas as n soluções.

Uma maneira direta de encotrar as demais soluções, é escrever a matriz da primeira métrica obtida e aplicar as transposições geradoras de S_n diretamente nesta matriz. Assim teremos ao todo n soluções não-Kähler, para a equação de Einstein sobre $\mathbb{F}(n)$, $n \geq 4$ ([Arv] p.991). Estas métricas não são isométricas à métrica normal. O que prova o Teorema.

$\square$

Para $n = 4$, Sakane provou que não existem, outras métricas de Einstein invariantes sobre $\mathbb{F}(4)$ [Sak]. Sakane fez uso de recursos computacionais para obter tal resultado.

É importante salientar que no cálculo acima 3.15, não foi levado em consideração se a métrica em questão possui volume unitário ou não.

Para ilustrar, veremos em $\mathbb{F}(4)$, de maneira análoga ao que fizemos com $\mathbb{F}(3)$ no capítulo anterior, mas agora utilizando o subgrupo de permutações $S_3 < S_4$. A equação de Einstein se reduzirá a

$$\begin{aligned} r'_{12} = r'_{13} = r'_{14} &= \frac{1}{2\lambda_{12}} + \frac{1}{16}\left(\frac{-2\lambda_{23}}{\lambda_{12}^2}\right) = c \\ r'_{23} = r'_{24} = r'_{14} &= \frac{1}{2\lambda_{23}} + \frac{1}{16}\left(\frac{\lambda_{23}}{\lambda_{12}^2} - \frac{3}{\lambda_{23}}\right) = c \end{aligned}$$

Comparando as equações e multiplicando-a por $16\lambda_{12}^2\lambda_{23}$, temos

$$8\lambda_{12}\lambda_{23} - 2\lambda_{23}^2 = 8\lambda_{12}^2 + \lambda_{23}^2 - 3\lambda_{12}^2 \quad \Rightarrow \quad -3\lambda_{23}^2 - 5\lambda_{12}^2 + 8\lambda_{12}\lambda_{23} = 0.$$

Novamente, ajustando o volume da variedade de modo que $\lambda_{23} = 1$, segue que $\lambda_{12} = 1$ ou $\lambda_{12} = 3/5$.

Portanto as métricas dadas por

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

são métricas de Einstein.

3.4 Métricas Senda-Einstein

Sakane e Senda descreveram soluções diferentes das soluções obtidas por Arvanitoyeorgos para a equação de Einstein invariante sobre as variedades $\mathbb{F}(2m)$, $m \geq 3$. Este é o conteúdo do próximo resultado.

Teorema 3.8 (Sakane-Senda)**.** *[Sak] As variedades $\mathbb{F}(2m)$, $m \geq 3$, admitem pelo menos 4 classes de métricas de Einstein invariantes.*

1. *A classe formada pelas métrics Kähler que contém ao todo $\frac{(2m)!}{2}$ métricas,*

2. *A classe descrita por Arvanitoyeorgos, que contém ao todo $2m$ métricas,*

3. *A classe formada pela métrica normal e*

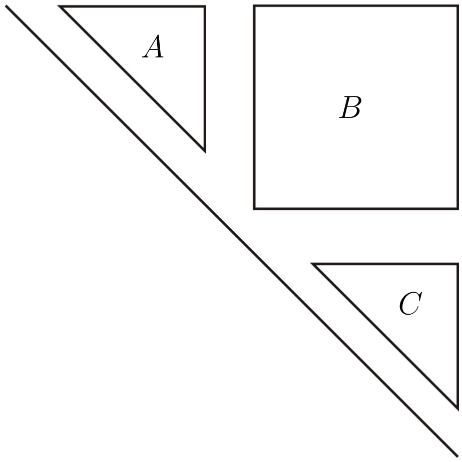
4. *a classe de métricas Einstein não-Kähler, que chamaremos de metricas de Senda, dadas por:*

$$\begin{array}{rcll} \lambda_{ij} & = & m+2 & (1 \leq i < j \leq m) \\ \lambda_{ij} & = & 3m-2 & (i \leq m < j) \\ \lambda_{ij} & = & m+2 & (m < i < j \leq 2m) \end{array} . \tag{3.16}$$

Demonstração. Observe que sobre estes espaços a métrica normal é Einstein. Portanto pelo Lema 3.6 todo e qualquer conjunto de restrições produz pelo menos uma solução. Neste caso:

$$\begin{array}{rcll} \lambda_{ij} & = & A & (1 \leq i < j \leq m) \\ \lambda_{ij} & = & B & (i \leq m < j) \\ \lambda_{ij} & = & C & (m < i < j \leq 2m) \end{array} . \tag{3.17}$$

A figura abaixo ilustra esta situação. Os coeficientes da métrica invariante que pertencem a uma região delimitada na figura serão tomados iguais. Este processo reduz consideravelmente o número de incógnitas da equação de Einstein.



As equações de Einstein são dadas por:

$$\begin{aligned} r_{12} &= \tfrac{1}{2\lambda_{12}} + \tfrac{1}{8m}\left(\tfrac{2-m}{\lambda_{12}} + m\left(\tfrac{-2}{\lambda_{12}} + \tfrac{\lambda_{12}}{\lambda_{1n}^2}\right)\right) = c \\ r_{1n} &= \tfrac{1}{n\lambda_{12}} + \tfrac{1}{8m}\left(\tfrac{(1-m)\lambda_{12}}{\lambda_{1n}^2} + m\left(\tfrac{(1-m)\lambda_{n-1n}}{\lambda_{12}}\right)\right) = c \\ r_{n-1n} &= \tfrac{1}{2\lambda_{n-1n}} + \tfrac{1}{8m}\left(\tfrac{2-m}{\lambda_{n-1n}} + m\left(\tfrac{-2}{\lambda_{n-1n}} + \tfrac{\lambda_{n-1n}}{\lambda_{1n}^2}\right)\right) = c \end{aligned} \tag{3.18}$$

Uma métrica Riemanniana é de Einstein se, e somente se $r_{12} = \cdots = r_{1n} = \cdots = r_{n-1n}$. Mostraremos que, com as condições acima 3.17, a equação de Einstein 3.18 admite solução diferente da métrica normal. Com as codições acima devemos buscar soluções para, $r_{12} = r_{1n} = r_{n-1n}$. Façamos inicialmente, $r_{12} = r_{n-1n}$. Esta igualdade é equivalente a

$$(\lambda_{n-1n} - \lambda_{12})(\lambda_{1n}^2(m+2) + m\lambda_{12}\lambda_{n-1n}) = 0 \tag{3.19}$$

Observe que $\lambda_{12} = \lambda_{n-1n}$ é solução da equação acima. Precisamos encontrar λ_{1n} de tal modo que $r_{12} = r_{1n}$. Podemos considerar que, a menos de escala, a métrica Einstein procurada possui $\lambda_{12} = \lambda_{n-1n} = 1$. Desse modo $r_{12} = r_{1n}$ é equivalente a

$$(m+2)\lambda_{1n}^2 - 4m\lambda_{1n} - 2 + 3m = 0. \tag{3.20}$$

A equação acima admite, para $m \geq 2$ a solução $\lambda_{1n} = 1$, e a outra solução é dada fazendo $\lambda_{1n} = \frac{3m-2}{m+2}$. Multiplicando por $m+2$, obtemos $\lambda_{12} = \lambda_{n-1n} = m+2$ e $\lambda_{1n} = 3m-2$. Observe que para $m = 2$ obtemos sobre $\mathbb{F}(4)$, a menos de escala, a métrica normal.

Para verificar que essas métricas são de fato diferentes das demais métricas de Einstein, vamos calcular a constante de Einstein. Calculando a constante de Einstein, diretamente de qualquer uma das equações 3.18 temos:

$$c = \frac{m^3 + 4m^2 + 7m - 2}{8m(3m-2)} \quad m \geq 3. \tag{3.21}$$

Precisamos porém obter o valor da constante de Einstein impondo a condição de volume unitário. Sabemos que o volume de uma métrica invariante sobre M é dado por [Arv], [Kim]:

$$V = \left(\frac{n+4}{2}\right)^{\frac{n(n-2)}{2}} \cdot \left(\frac{3n-4}{2}\right)^{\frac{n^2}{2}}. \tag{3.22}$$

Desse modo a constante de Einstein da métrica normalizada é dada por:

$$c_{Senda} = \frac{(\frac{n^3}{8} + n^2 + \frac{7n}{2} - 2)\sqrt[2n-2]{(\frac{n+4}{2})^{n(n-2)} \cdot (\frac{3n-4}{2})^{n^2}}}{2n(3n-4)} \tag{3.23}$$

Comparando com a constante e Einstein das demais métricas de Einstein não-Kähler podemos concluir que elas não são isométricas. O que encerra a demonstração.

$\square$

Exemplo 3.9. *A métrica de Senda sobre* $\mathbb{F}(6)$ *é:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & 7 & 7 & 7 \\ 5 & 0 & 5 & 7 & 7 & 7 \\ 5 & 5 & 0 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 0 & 5 & 5 \\ 7 & 7 & 7 & 5 & 0 & 5 \\ 7 & 7 & 7 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Na tentativa de entender a construção das métricas de Sakane-Senda calculamos a seguinte métrica invariante sobre $\mathbb{F}(5)$, que além das soluções normal, Kähler e de Arvanitoyeorgos obtidas por métodos já apresentados nessa dissertação, surgiu um outro método dado por Evandro Santos e Caio Negreiros, que é o que foi usado tanto para o cálculo das métricas em $\mathbb{F}(3)$ e $\mathbb{F}(4)$, como visto em anteriormente, que é o uso da ação do grupo de permutação na equação de Einstein. No caso de $\mathbb{F}(5)$ usaremos o subgrupo $S = \langle(1,2)\circ(4,5),(1,4)\circ(2,5)\rangle < S_4$ e, usando as condições necessárias de simetrias para que a equação seja Einstein chega-se a $\lambda_{12} = \lambda_{13} = \lambda_{23}$, $\lambda_{14} = \lambda_{15} = \lambda_{24} = \lambda_{25}$ e $\lambda_{34} = \lambda_{35} = \lambda_{45}$.

Desse modo as equações da equação de Einstein se reduz a 3. Dadas por

$$r'_{12}=r'_{13}=r'_{23}=\frac{1}{2\lambda_{12}}+$$
$$+\frac{1}{20}\left(\underbrace{\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{13}\lambda_{23}}-\frac{\lambda_{13}}{\lambda_{12}\lambda_{23}}-\frac{\lambda_{23}}{\lambda_{13}\lambda_{12}}}_{k=3}+\underbrace{\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{14}\lambda_{24}}-\frac{\lambda_{14}}{\lambda_{12}\lambda_{24}}-\frac{\lambda_{24}}{\lambda_{14}\lambda_{12}}}_{k=4}+\underbrace{\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{15}\lambda_{25}}-\frac{\lambda_{15}}{\lambda_{12}\lambda_{25}}-\frac{\lambda_{25}}{\lambda_{15}\lambda_{12}}}_{k=5}\right),$$
$$r'_{14}=r'_{15}=r'_{24}=r'_{25}=\frac{1}{2\lambda_{14}}+$$
$$+\frac{1}{20}\left(\underbrace{\frac{\lambda_{14}}{\lambda_{12}\lambda_{24}}-\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{14}\lambda_{24}}-\frac{\lambda_{24}}{\lambda_{12}\lambda_{14}}}_{k=2}+\underbrace{\frac{\lambda_{14}}{\lambda_{13}\lambda_{34}}-\frac{\lambda_{13}}{\lambda_{14}\lambda_{34}}-\frac{\lambda_{34}}{\lambda_{13}\lambda_{14}}}_{k=3}+\underbrace{\frac{\lambda_{14}}{\lambda_{15}\lambda_{45}}-\frac{\lambda_{15}}{\lambda_{14}\lambda_{45}}-\frac{\lambda_{45}}{\lambda_{15}\lambda_{14}}}_{k=5}\right),$$
$$r'_{34}=r'_{35}=r'_{45}=\frac{1}{2\lambda_{34}}+$$
$$+\frac{1}{20}\left(\underbrace{\frac{\lambda_{34}}{\lambda_{13}\lambda_{14}}-\frac{\lambda_{13}}{\lambda_{34}\lambda_{14}}-\frac{\lambda_{14}}{\lambda_{13}\lambda_{34}}}_{k=1}+\underbrace{\frac{\lambda_{34}}{\lambda_{23}\lambda_{24}}-\frac{\lambda_{23}}{\lambda_{34}\lambda_{24}}-\frac{\lambda_{24}}{\lambda_{23}\lambda_{34}}}_{k=2}+\underbrace{\frac{\lambda_{34}}{\lambda_{35}\lambda_{45}}-\frac{\lambda_{35}}{\lambda_{34}\lambda_{45}}-\frac{\lambda_{45}}{\lambda_{35}\lambda_{34}}}_{k=5}\right)$$

e usando as relações obtidas pelo subgrupo de permutações S, temos

$$\frac{1}{2\lambda_{12}}+\frac{1}{20}\left(\frac{2\lambda_{12}}{\lambda_{14}^2}-\frac{5}{\lambda_{12}}\right)=c \qquad \text{(I)}$$
$$\frac{1}{2\lambda_{14}}+\frac{1}{20}\left(\frac{\lambda_{14}}{\lambda_{13}\lambda_{34}}-\frac{\lambda_{13}}{\lambda_{14}\lambda_{34}}-\frac{\lambda_{34}}{\lambda_{13}\lambda_{14}}-\frac{(\lambda_{12}+\lambda_{45})}{\lambda_{14}^2}\right)=c \qquad \text{(II)}$$
$$\frac{1}{2\lambda_{34}}+\frac{1}{20}\left(\frac{\lambda_{34}}{\lambda_{13}\lambda_{14}}-\frac{\lambda_{13}}{\lambda_{34}\lambda_{14}}-\frac{\lambda_{14}}{\lambda_{13}\lambda_{14}}+\frac{\lambda_{34}}{\lambda_{23}\lambda_{24}}-\frac{\lambda_{23}}{\lambda_{34}\lambda_{24}}-\frac{\lambda_{24}}{\lambda_{23}\lambda_{34}}-\frac{1}{\lambda_{34}}\right)=c \qquad \text{(III)}$$

Fazendo (I)=(II), (I)=(III), (II)=(III) e ajustando o volume da variedade de forma que $\lambda_{34}=1$, obtemos as seguintes equações

(i) $-\lambda_{14}^3+5\lambda_{14}^2+\lambda_{14}\lambda_{12}^2-10\lambda_{14}\lambda_{12}+\lambda_{14}+4\lambda_{12}=0$

(ii) $2\lambda_{14}^3+5\lambda_{14}^2+2\lambda_{12}^2-9\lambda_{14}^2\lambda_{12}+2\lambda_{14}\lambda_{12}^2-2\lambda_{14}=0$

(iii) $3\lambda_{14}^3-\lambda_{12}^2-9\lambda_{14}^2\lambda_{12}+\lambda_{14}\lambda_{12}^2+10\lambda_{14}\lambda_{12}-3\lambda_{14}-\lambda_{12}=0$

Subtraindo as 2 primeiras, somando com a terceira chegamos a $\lambda_{12}=0$ ou $\lambda_{12}=1$ e, como $\lambda_{12}>0$, temos

$$-\lambda_{14}^3+5\lambda_{14}^2-8\lambda_{14}+4=0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_{14}=1 \text{ ou } \lambda_{14}=2$$

Portanto, para todos os casos, a métrica de Einstein que ainda não havia sido mencionanda é a dada por $\lambda_{14} = 2$, ou seja,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Normalizando o volume obtemos $c_5 = \frac{11\sqrt[5]{4}}{40}$. Como podemos perceber, esta métrica é não-Kähler e não é isométrica a nenhuma das demais métricas de Einstein descritas sobre $\mathbb{F}(5)$ em [Arv].

Acreditamos que, além desta, não existam, a menos de isometrias e de escala, outras métricas de Einstein invairnates sobre $\mathbb{F}(5)$.

3.5 Novas métricas de Einstein

Nesta seção descreveremos soluções obtidas nesta tese, para a equação de Einstein invarinate sobre as variedaddes $\mathbb{F}(2m+2)$, $m \geq 5$ e $\mathbb{F}(2m+1)$, $m \geq 6$. Começamos com $\mathbb{F}(2m+2)$, $m \geq 5$.

Teorema 3.10. *As variedades $\mathbb{F}(2m+2)$, $m \geq 5$, admitem pelo menos 5 classes de métricas de Einstein invariantes.*

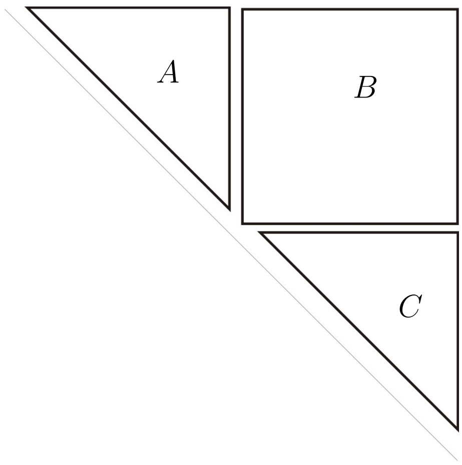
1. *A classe formada pelas métricas Kähler que contém ao todo $\frac{(2m+2)!}{2}$ métricas,*
2. *A classe descrita por Arvanitoyeorgos [Arv], que contém ao todo $2m+2$ métricas,*
3. *A classe descrita por Senda 3.16,*
4. *A classe formada pela métrica normal e,*
5. *a classe:*

$$\begin{aligned} \lambda_{ij} &= m+6 \quad (1 \leq i < j \leq m+1) \\ \lambda_{ij} &= 3m-2 \quad (i \leq m+1 < j) \\ \lambda_{ij} &= m+6 \quad (m+2 \leq i < j \leq 2m+2) \end{aligned} \tag{3.24}$$

Demonstração. Como a métrica normal é Einstein, todo e qualquer conjunto de restrições produz pelo menos uma solução. Neste caso propomos as seguintes restrições:

$$\begin{array}{rcll} \lambda_{ij} & = & A & (1 \leq i < j \leq m+1) \\ \lambda_{ij} & = & B & (i \leq m+1 < j) \\ \lambda_{ij} & = & C & (m+2 \leq i < j \leq 2m+2) \end{array} . \tag{3.25}$$

A figura abaixo representa as condições acima. Os coeficientes que pertencem a uma mesma região serão tomados iguais. Assim o número de incógnitas da equação de Einstein, reduz consideravelmente.



Após essas restriões as equações de Einstein são dadas por:

$$\begin{array}{rcl} r_{12} & = & \frac{1}{2\lambda_{12}} + \frac{1}{8m+8}\left(\frac{2-m}{\lambda_{12}} + m\left(\frac{-2}{\lambda_{12}} + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{1n}^2}\right)\right) = c \\ r_{1n} & = & \frac{1}{n\lambda_{12}} + \frac{1}{8m+8}\left(\frac{(1-m)\lambda_{12}}{\lambda_{1n}^2} + m\left(\frac{(1-m)\lambda_{n-1n}}{\lambda_{12}}\right)\right) = c \\ r_{n-1n} & = & \frac{1}{2\lambda_{n-1n}} + \frac{1}{8m+8}\left(\frac{2-m}{\lambda_{n-1n}} + m\left(\frac{-2}{\lambda_{n-1n}} + \frac{\lambda_{n-1n}}{\lambda_{1n}^2}\right)\right) = c \end{array} . \tag{3.26}$$

Uma métrica Riemanniana é de Einstein se, e somente se a curvatura de Ricci for constante, isto é, $r_{12} = \cdots = r_{1n} = \cdots = r_{n-1n}$. Mostraremos que, com as restrições acima 3.25, a equação de Einstein 3.26 admite uma solução diferente da métrica normal. Com as codições acima devemos buscar soluções para, $r_{12} = r_{1n} = r_{n-1n}$. Façamos inicialmente, $r_{12} = r_{n-1n}$. Esta igualdade é equivalente a

$$(\lambda_{n-1n} - \lambda_{12})((m+6)\lambda_{1n}^2 - m\lambda_{12}\lambda_{n-1n}) = 0 \tag{3.27}$$

Observe que $\lambda_{12} = \lambda_{n-1n}$ é solução da equação acima. Precisamos encontrar λ_{1n} de tal modo que $r_{12} = r_{1n}$. Podemos supor que, a menos de escala, a solução procurada é tal que $\lambda_{12} = \lambda_{n-1n} = 1$. Assim $r_{12} = r_{1n}$ é equivalente a

$$(m+6)\lambda_{1n}^2 - (4m+4)\lambda_{1n} - 2 + 3m = 0. \tag{3.28}$$

A equação 3.28 admite, para $m \geq 4$ a solução $\lambda_{1n} = 1$, a outra solução é dada por $\lambda_{1n} = \frac{3m-2}{m+6}$. Observe que para $m = 4$ obtemos, a menos de escala, sobre $\mathbb{F}(10)$ a métrica normal.

Por fim, a menos de escala, obtemos para $m \geq 5$ $\lambda_{12} = \lambda_{n-1n} = m + 6$ $\lambda_{1n} = 3m - 2$.

Essas métricas não são isométricas à nenhuma das métricas de Einstein conhecidas.

Verificaremos este fato analisando suas constantes de Einstein. De fato, substituindo os coeficientes da métrica em qualquer uma das equações 3.26 obtemos

$$c = \frac{2(2m+2)(3m-2)^2 - (3m-2)^3 = m(m+6)^2}{4(2m+2)(3m-2)^2} = \frac{5m^3 + 27m^2 - 4m + 12}{2(2m+2)(3m-2)^2}. \quad (3.29)$$

Escrevendo $m = \frac{n-2}{2}$, a expressão 3.29 pode ser reescrita como:

$$c = \frac{5(n-2)^3 + 54(n-2)^2 - 16(n-2) + 96}{8n(3n-6)}. \quad (3.30)$$

Precisamos porém, obter o valor da constante de Einstein impondo a condição de volume unitário. O volume é dado por 3.22. Assim,

$$V = \sqrt{\left(\frac{n+10}{2}\right)^{n(n-2)} \cdot \left(\frac{3n-10}{2}\right)^{(n-2)^2}}. \quad (3.31)$$

Desse modo a constante de Einstein de métrica normalizada é dada por

$$c_{\text{par}} = \frac{(5(n-2)^3 + 54(n-2)^2 - 16(n-2) + 96)\sqrt[2n(n-1)]{\left(\frac{n+10}{2}\right)^{n(n-2)} \cdot \left(\frac{3n-10}{2}\right)^{(n-2)^2}}}{8n(3n-6)} \quad (3.32)$$

Comparando com a constante de Einstein das demais métricas de Einstein não-Kähler podemos concluir que elas não são isométricas, isso encerra a demonstração. □

Finalmente, podemos tratar da equação de Einstein sobre as variedades $\mathbb{F}(2m+1)$, $m \geq 6$, enunciando o seguinte.

Teorema 3.11. *As variedades $\mathbb{F}(2m+1)$, $m \geq 6$, admitem pelo menos 5 classes de métricas de Einstein invariantes.*

1. *A classe formada pelas métricas Kähler-Einstein que contém ao todo $\frac{(2m+1)!}{2}$ métricas,*

2. *A classe descrita por Arvanitoyeorgos[5], que contém ao todo $2m+1$ métricas,*

3. *A classe formada pela métrica normal e as classes:*

$$\begin{aligned} \lambda_{ij} &= 1 & (1 \leq i < j \leq m+1) \\ \lambda_{ij} &= \frac{(m+2) + \sqrt{m^2 - 8m + 12}}{2} & (i < m+1 < j) \\ \lambda_{ij} &= 1 & (m+1 \leq i < j \leq 2m+1), \end{aligned} \quad (3.33)$$

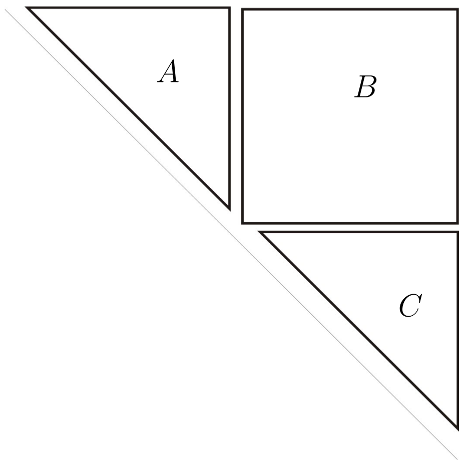
4.

$$\begin{aligned} \lambda_{ij} &= 1 && (1 \leq i < j \leq m+1) \\ \lambda_{ij} &= \frac{(m+2) + \sqrt{m^2 - 8m + 12}}{2} && (i < m+1 < j) \\ \lambda_{ij} &= 1 && (m+1 \leq i < j \leq 2m+1), \end{aligned} \tag{3.34}$$

Demonstração. Considere o conjunto de restrições:

$$\begin{aligned} \lambda_{ij} &= A \quad (1 \leq i < j \leq m+1) \\ \lambda_{ij} &= B \quad (i < m+1 < j) \\ \lambda_{ij} &= C \quad (m+1 \leq i < j). \end{aligned} \tag{3.35}$$

A figura abaixo representa as reduções acima. Os coeficientes da métrica invariante, que pertencem a uma mesma região tomados iguais. Novamente vemos que este processo reduz consideravelmente o número de incógnitas da equação de Einstein.



As equações de Einstein nesta situação 3.35 são dadas por:

$$\begin{aligned} r_{12} &= \tfrac{1}{2\lambda_{12}} + \tfrac{1}{8m+4}\left(\tfrac{1-m}{\lambda_{12}} + m\left(\tfrac{-2}{\lambda_{12}} + \tfrac{\lambda_{12}}{\lambda_{1n}^2}\right)\right) = c \\ r_{1n} &= \tfrac{1}{n\lambda_{12}} + \tfrac{1}{8m+4}\left(\tfrac{(1-m)\lambda_{12}}{\lambda_{1n}^2} + \left(\tfrac{(1-m)\lambda_{n-1n}}{\lambda_{1n}^2} + \tfrac{\lambda_{1n}}{\lambda_{12}\lambda n - 1n} - \tfrac{\lambda_{12}}{\lambda_{1n}\lambda n-1n} - \tfrac{\lambda_{n-1n}}{\lambda_{1n}\lambda 12}\right)\right) = c \\ r_{n-1n} &= \tfrac{1}{2\lambda_{n-1n}} + \tfrac{1}{8m+4}\left(\tfrac{m\lambda_{n-1n}}{\lambda_{1n}^2} - \left(\tfrac{(3m-1)}{\lambda_{n-1n}}\right)\right) = c. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Com as condições acima devemos buscar soluções para, $r_{12} = r_{1n} = r_{n-1n}$. Dividiremos a condição Einstein em duas partes. A primeira parte da condição de Einstein será, $r_{12} = r_{n-1n}$ e ela é equivalente a $(\lambda_{n-1n} - \lambda_{12})[(m+3)\lambda_{1n}^2 - m\lambda_{12}\lambda_{n-1n}] = 0$.

Observe que $\lambda_{n-1n} = \lambda_{12}$ é solução da igualdade acima. Mostraremos que existem soluções para a segunda parte da condição de Einstein: $r_{12} = r_{1n}$. Podemos supor que a menos de escala as soluções são $\lambda_{n-1n} = \lambda_{12} = 1$, desse modo $r_{12} = r_{1n}$ se e somente se $\lambda_{1n} = 1$ ou λ_{1n} satisfaz a equação $\lambda_{1n}^2 - (m+2)\lambda_{1n} + (3m-2) = 0$, cujas soluções são:

$$\lambda_{1n} = \frac{(2+m) \pm \sqrt{m^2 - 8m + 12}}{2}, \quad m \geq 6.$$

Substituindo os coeficientes das métricas acima em qualquer uma das equações 3.36 e fazendo $m = \frac{n-1}{2}$, temos que as constantes de Einstein destas métricas, são dadas por:

$$c_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4n}\left(\frac{2n-2}{\left(\frac{n+3}{2}\right) - \sqrt{(n-1)^2 - 4n + 16}}\right)^2.$$

□

Capítulo 4

Apêndice da dissertação

Definição 4.1. *Uma Álgebra de Lie consiste de um espaço vetorial* $\mathfrak{g}$ *munido de um produto (colchete ou comutador)*

$$[\,,\,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

com as seguintes propriedades:

1. *é bilinear,*

2. *anti-simétrico, isto é,* $[X, X] = 0$ *para todo* $X \in \mathfrak{g}$ *(o que implica* $[X, Y] = -[Y, X]$ *para todo* $X, Y \in \mathfrak{g}$ *é equivalente se o corpo de escalares não é de característica dois) e*

3. *satisfaz a identidade de Jacobi, isto é, para todo* $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$,

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0.$$

   Esta igualdade pode ser reescrita alternativamente de uma das duas formas

   (a) $[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]]$

   (b) $[[X, Y], Z] = [[X, Z], Y] + [X, [Y, Z]]$.

Definição 4.2. *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie. Uma subálgebra de* $\mathfrak{g}$ *é um subespaço vetorial* $\mathfrak{h}$ *de* $\mathfrak{g}$ *que é fechado pelo colchete, isto é,* $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ *se* $X, Y \in \mathfrak{h}$.

Definição 4.3. *Uma transformação linear* $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ *(com* $\mathfrak{g}$ *e* $\mathfrak{h}$ *álgebras de Lie) é um*

- *homomorfismo se* $\psi[X, Y] = [\psi X, \psi Y]$*;*
- *isomorfismo se for um homomorfismo inversível;*
- *automorfismo se é um isomorfismo e* $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$*.*

As álgebras $\mathfrak{g}$ *e* $\mathfrak{h}$ *são isomorfismo se existe um isomorfismo* $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$*.*

Definição 4.4. *Um subespaço* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ *é um ideal se*

$$\forall Y \in \mathfrak{h}, X \in \mathfrak{g}, \quad [X, Y] \in \mathfrak{h},$$

isto é,

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] = \{[X, Y] : X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{h}\} \subset \mathfrak{h}.$$

4.1 Teoremas de isomorfismos

Definição 4.5. *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie e* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ *um ideal. No espaço vetorial quociente* $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$*, defina*

$$[\overline{X}, \overline{Y}] = \overline{[X, Y]}$$

onde $\overline{X}$ *denota a classe* $X + \mathfrak{h}$*.*

Teorema 4.6. *Seja* $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ *um homomorfismo. Então,*

$$\mathfrak{g}/\ker \psi \approx \operatorname{im} \psi.$$

O isomorfismo é dado por $X \in \mathfrak{g}/\ker \psi \mapsto \psi(X) \in \operatorname{im} \psi$*. A demosntração desse teorema é a usual.*

Teorema 4.7. *Sejam* $\mathfrak{g}$ *álgebra de Lie e* $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{g}$ *ideais de* $\mathfrak{g}$*. Então,*

$$(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2)/\mathfrak{h}_1 \approx \mathfrak{h}_2/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2.$$

O isomorfismo é obtido passando ao quociente o homomorfismo

$$x_1 + x_2 \in \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2 \mapsto \overline{x}_2 \in \mathfrak{h}_2/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2.$$

Definição 4.8. *Sejam* $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_n$ *álgebras de Lie e*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$$

sua soma direta como espaço vetoriais. Isto é, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \cdots \times \mathfrak{g}_n$ *com a estrutura vetorial protudo. Para* $X = (X_1, \ldots, X_n)$ *e* $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$*, a expressão*

$$[X, Y] = ([X_1, Y_1], \ldots, [X_n, Y_n])$$

define em $\mathfrak{g}$ *uma estrutura de álgebra de Lie em que a i-ésima componente é um ideal isomorfo a* $\mathfrak{g}_i$

4.2 Representações

Seja V um espaço vetorial e $\mathfrak{gl}(V)$ a álgebra de Lie das transformações lineares de V. Seja também $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie (sobre o mesmo corpo de escalares de V). Uma representação de $\mathfrak{g}$ em V é um homomorfismo

$$\rho : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{gl}(V).$$

Na terminologia usual, V se denomina o espaço da representação enquanto que sua dimensão é a dimensão da representação. Uma representação é dita fiel se $\ker \rho = \{0\}$.

Para um elemento X na álgebta de Lie $\mathfrak{g}$, considere a transformação linear

$$\text{ad}(X){:}\mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}$$

definida por $\text{ad}(X)(Y){=}[X, Y]$. A aplicação

$$\text{ad}{:}\mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

define uma representação de $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{g}$, denominada representação adjunta. O núcleo da representação adjunta é denominado centro de $\mathfrak{g}$ e é denotado por $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$:

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}){=}\{X \in \mathfrak{g}{:}\text{ad}(X)(Y){=}\ [X, Y] = 0 \text{ para todo } Y \in \mathfrak{g}\}$$

Isto é, o centro de uma álgebra de Lie é o conjunto de seus elementos que comutam com todos os seus elementos.

De forma mais geral, o centralizador de um subconjunto $A \subset \mathfrak{g}$ é definido como sendo

$$\mathfrak{z}(A){=}\{Y \in \mathfrak{g} : \forall X \in A, [X, Y] = 0\}.$$

Dada uma representação ρ de $\mathfrak{g}$ em V, pode-se tomar a representação ρ^* de $\mathfrak{g}$ no dual V^* de V dada pela fómula

$$\rho^*(X)(\lambda) = -\lambda \circ \rho(X) \quad \lambda \in V^*$$

A verificação de que ρ^* definida desta forma é, de fato, uma representação, é imediata. O sinal negativo que aparece nessa definição é necessário para que os colchetes apareçam na ordem certa.

A representação ad^* em $\mathfrak{g}^*$ dual da representação adjunta é denominada representação co-adjunta.

4.3 Derivações

Definição 4.9. *Uma aplicação linear $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ é uma derivação da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se satisfaz*

$$D[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY] \qquad \textit{para todo } X, Y \in \mathfrak{g}$$

De forma mais geral, uma derivação de uma álgebra é uma transformação linear que satisfaz a regra de Leibniz de derivada de um produto $D(xy) = D(x)y + xD(y)$.

Um tipo de derivação que aparece com freqüência na teoria são as adjuntas dos elementos de $\mathfrak{g}$. Derivações desse tipo são denominadas derivações internas.

Proposição 4.10. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie real de dimensão finita e $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ uma transformação linear. Então, D é uma derivação se e só se para todo $t \in \mathbb{R}$, e^{tD} é automorfismo de $\mathfrak{g}$.*

Demonstração.

Suponha que para todo real t, e^{tD} seja automorfismo, isto é,

$$e^{tD}[X, Y] = [e^{tD}X, e^{tD}Y] \qquad \text{para todo } X, Y \in \mathfrak{g}.$$

A derivada desta igualdade, como função de t, se escreve

$$De^{tD}[X, Y] = [De^{tD}X, e^{tD}Y] + [e^{tD}X, De^{tD}Y]$$

que, avaliada em $t = 0$, mostra que

$$D[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY],$$

isto é, D é derivação. Por outro lado, assumindo que D é derivação, sejam as curvas em $\mathfrak{g}$ dadas por

$$\alpha(t) = e^{tD}[X,Y]$$
$$\beta(t) = [e^{tD}X, e^{tD}Y].$$

Tem-se $\alpha(0) = [X,Y] = \beta(0)$,

$$\alpha'(t) = De^{tD}[X,Y] = D\alpha(t)$$

e

$$\beta'(t) = [De^{tD}X, e^{tD}Y] + [e^{tD}X, De^{tD}Y] = D[e^{tD}X, e^{tD}Y] = D\beta(t),$$

pois D é derivação. Portanto, α e β satisfazem a mesma equação diferencial linear e têm as mesmas condições iniciais e daí que $\alpha = \beta$.

□

4.4 Séries

Tomando como sempre, $\mathfrak{g}$ como sendo uma álgebra de Lie, para dois subconjuntos A e B de $\mathfrak{g}$ será usada a notação $[A,B]$ para indicar o subespaço gerado por

$$\{[X,Y] : X \in A, Y \in B\}.$$

Define-se por indução, os seguintes subespaços de $\mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^{(0)} &= \mathfrak{g} \\ \mathfrak{g}' &= [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \\ &\vdots \\ \mathfrak{g}^{(k)} &= [\mathfrak{g}^{k-1},\mathfrak{g}^{k-1}]. \end{aligned}$$

Essa seqüência de ideais é conhecida por série derivada.

Esses subespaços são claramente ideiais de $\mathfrak{g}$.

Proposição 4.11. *O quociente $\mathfrak{g}^{(k-1)}/\mathfrak{g}^{(k)}$ é uma álgebra abeliana.*

De fato, para todo $X, Y \in \mathfrak{g}^{(k-1)}$, $[X,Y] \in \mathfrak{g}^{(k)}$.

Esse resultado, também vale para as séries com a seguinte definição:

Definição 4.12. *A série central descendente da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é definida, por indução, como*

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^1 &= \mathfrak{g} \\ \mathfrak{g}^2 &= [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}' \\ &\vdots \\ \mathfrak{g}^k &= [\mathfrak{g},\mathfrak{g}^{k-1}]. \end{aligned}$$

Proposição 4.13.

1. $[\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^j] \subset \mathfrak{g}^{i+j}$.

2. $\mathfrak{g}^k$ *é o subespaço gerado por todos os possíveis produtos (colchetes) envolvendo* k *elementos de* $\mathfrak{g} : [X_1, \ldots, [X_{k-1}, X_k] \ldots]$.

Demonstração.

1. Por indução sobre j. Para $j = 1$ a inclusão é a definição de $\mathfrak{g}^{i+1}$. Assumindo o resultado para j,

$$\begin{aligned}
[\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^{j+1}] &= [\mathfrak{g}^i, [\mathfrak{g}^j, \mathfrak{g}]] \subset [[\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^j], \mathfrak{g}] + [\mathfrak{g}^j, [\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}]] \\
&\subset [\mathfrak{g}^{i+j}, \mathfrak{g}] + [\mathfrak{g}^j, \mathfrak{g}^{i+1}] \\
&\subset \mathfrak{g}^{i+j+1}
\end{aligned}$$

2. Para $k = 1$ ou 2, é imediato a partir da definição. Para $k \geq 2$, usa-se indução sobre k. Assuma o resultado para $k - 1$. Os elementos de $\mathfrak{g}^{k-1}$ são então da forma $\sum_i Z_i$ com Z_i produto de $k - 1$ elementos de $\mathfrak{g}$. Daí que $\mathfrak{g}^k$ é gerado por elementos da forma

$$\sum_i [X_i, Z_i],$$

isto é, por produtos de k elementos.

Vice-versa, todo elemento de $\mathfrak{g}$ que pode ser escrito como produto de k elementos está em $\mathfrak{g}^k$ como segue do item anterior.

$\square$

Proposição 4.14. *A série derivada decresce mais rápido que a série central descendente:*

$$\mathfrak{g}^{(k)} \subset \mathfrak{g}^{k+1}$$

Demonstração.

Por indução. Supondo $\mathfrak{g}^{(k)} \subset \mathfrak{g}^{k+1}$, então

$$\mathfrak{g}^{(k+1)} = [\mathfrak{g}^{(k)}, \mathfrak{g}^{(k)}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k+1}] = \mathfrak{g}^{k+2},$$

o que mostra o passo de indução.

$\square$

4.5 Álgebras solúveis

Definição 4.15. *Uma álgebra é solúvel se alguma de suas álgebras derivadas se anula, isto é,*

$$\mathfrak{g}^{(k_0)} = 0$$

para algum $k_0 \geq 1$ (e, portanto, $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$ para todo $k \geq k_0$).

Definição 4.16. *Uma álgebra de Lie é nilpotente se sua série central descendente se anula em algum momento, isto é,*

$$\mathfrak{g}^{k_0} = \{0\}$$

para algum $k_0 \geq 1$ (e, portanto, $\mathfrak{g}_k = 0$ para todo $k \geq k_0$).

Proposição 4.17. *Se $\mathfrak{g}$ é solúvel e $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é subálgebra, então $\mathfrak{h}$ também é solúvel.*

Demonstração.

As álgebras derivdas sucessivas de $\mathfrak{h}$ estão contidas nas corspondentes álgebras derivadas de $\mathfrak{g}$. Portanto, $\mathfrak{h}$ é solúvel se $\mathfrak{g}$ o for.

□

Proposição 4.18. *Se $\mathfrak{g}$ é solúvel e $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é um ideal, então $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ também é solúvel.*

Demonstração.

Como $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(k)} = \pi(\mathfrak{g}^{(k)})$, se alguma álgebra derivada de $\mathfrak{g}$ se anula, o mesmo ocorre com a álgebra derivada correspondente de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

□

Proposição 4.19. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ um ideal. Suponha que tanto $\mathfrak{h}$ quanto $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ sejam solúveis. Então, $\mathfrak{g}$ é solúvel.*

Demonstração.

Seja k_1 tal que $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(k_1)} = \{0\}$. Por $\pi(\mathfrak{g}^{(k)}) = (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(k)}$, tem-se que $\pi(\mathfrak{g}^{(k_1)}) = 0$. Isso significa que $\mathfrak{g}^{(k_1)} \subset \mathfrak{h}$. Como $\mathfrak{h}$ é solúvel, existe k_2 tal que $\mathfrak{h}^{(k_2)} = \{0\}$. Daí que

$$\mathfrak{g}^{(k_1+k_2)} = (\mathfrak{g}^{(k_1)})^{(k_2)} \subset \mathfrak{h}^{(k_2)} = \{0\}.$$

Portanto, $\mathfrak{g}$ é solúvel.

□

Observação 4.20. *O mesmo vale para álgebras nilpotentes.*

4.6 Radicais solúveis

Proposição 4.21. *Seja $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie de dimensão finita. Então, existe em $\mathfrak{g}$ um único ideal solúvel $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{g}$ que contém todos os ideais solúveis de $\mathfrak{g}$.*

Demonstração.

Denote por n o máximo das dimensões dos ideais solúveis de $\mathfrak{g}$ e seja $\mathfrak{r}$ um ideal solúvel com $\dim \mathfrak{r} = n$. Então, todo ideal solúvel de $\mathfrak{g}$ está contido em $\mathfrak{r}$. De fato, se $\mathfrak{h}$ é ideal solúvel, $\mathfrak{r} + \mathfrak{h}$ também é. Pela maximalidade da dimensão, $\dim(\mathfrak{r} + \mathfrak{h}) = \dim \mathfrak{r}$ e daí que $\mathfrak{r} + \mathfrak{h} \subset \mathfrak{r}$ e $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{r}$. Portanto, $\mathfrak{r}$ contém todos os ideais solúveis e ele é evidentemente o único.

□

Definição 4.22. *O ideal $\mathfrak{r}$ da proposição anterior é chamado de radical solúvel (ou simplismente radical) de $\mathfrak{g}$. Para o radical de $\mathfrak{g}$ será utilizada a notação $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$.*

4.7 Álgebras simples e álgebras semi-simples

Definição 4.23. *Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é semi-simples se*

$$\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = 0$$

(isto é, não contém ideais solúveis além de 0).

Definição 4.24. *Uma álgebra $\mathfrak{g}$ é simples se*

1. *os únicos ideais de $\mathfrak{g}$ são 0 e $\mathfrak{g}$*
2. $\dim \mathfrak{g} \neq 1$

Proposição 4.25. *Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie que não é solúvel e $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ um ideal solúvel. Então, $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ é semi-simples se e só se $\mathfrak{h} = \mathfrak{r}(\mathfrak{g})$.*

Demonstração.

Suponha que $\mathfrak{h} = \mathfrak{r}(\mathfrak{g})$. Seja $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ o homomorfismo canônico e tome um ideal solúvel $i \subset \mathfrak{g}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$. Então, $\pi^{-1}(i)$ é um ideal que contém $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ e $i = \pi^{-1}(i)/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$. Daí que $\pi^{-1}(i)$ é solúvel e, portanto, está contido em $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$, isto é, $i = 0$, o que mostra que $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ é semi-simples. Reciprocamente, se $\mathfrak{h}$ é ideal solúvel, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ e $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})/\mathfrak{h}$ é um ideal solúvel de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. A hipótese de que $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ é semi-simples implica, então, que $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})/\mathfrak{h} = 0$, isto é, $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{h}$.

□

4.8 Teorema de Engel

Definição 4.26. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Uma representação ρ de $\mathfrak{g}$ no espaço vetorial V é uma representação nilpotente ou uma nil-representação se $\rho(X)$ é nilpotente para todo $X \in \mathfrak{g}$. Isto significa que, dado X, existe um inteiro positivo k (dependente de X) tal que $\rho(X)^k = 0$.*

Teorema 4.27. *Seja $V \neq 0$ um espaço vetorial de dimensão finita e $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ uma subálgebra. Suponha que todo $X \in \mathfrak{g}$ é nilpotente. Então, existe $v \in V$, $v \neq 0$ tal que $Xv = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$.*

Demonstração.

É por indução sobre a dimensão de $\mathfrak{g}$. Se $\dim \mathfrak{g} = 1$, seja $X \in \mathfrak{g}$, $X \neq 0$. Como X é nilpotente, existe $k \geq 1$ tal que $X^k = 0$ e $X^{k-1} \neq 0$. Seja $w \in V$ tal que $X^{k-1}w \neq 0$ e tome $v = X^{k-1}w$. Então, $v \neq 0$ e $Xv = 0$, o que mostra o resultado para álgebras de dimensão um.

Para mostrar o passo de indução, suponha que $\dim \mathfrak{g} > 1$ e que o resultado vale para toda álgebra com dimensão estritamente menor que $\dim \mathfrak{g}$. Com essa hipótese, a primeira coisa que se mostra é que existe um ideal $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ de codimensão um. De fato, $\mathfrak{g}$ admite subálgebras não-triviais, isto é, diferentes de 0 e $\mathfrak{g}$, pois subespaços de dimensão um são subálgebras. Seja então uma subálgebra $\mathfrak{h}$ não-trivial cuja dimensão é máxima entre as dimensões das subálgebras não-triviais. Então, $\mathfrak{h}$ é um ideal de codimensão um de $\mathfrak{g}$. Para ver isso, considere o espaço vetorial $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Como $\mathrm{ad}(X)$ para $X \in \mathfrak{h}$ deixa $\mathfrak{h}$ invariante, a representação adjunta de $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{g}$ induz uma representação ρ de $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Pela proposição anterior, $ad(X)$, $X \in \mathfrak{h}$, é nilpotente em $\mathfrak{gl}(V)$ e, portanto, sua restrição a $\mathfrak{g}$ também é nilpotente, o que implica que ρ é uma nil-representação. Então, $\rho(\mathfrak{h})$ é uma álgebra que satisfaz as hipóteses do teorema e tem dimensão estritamente menor que $\mathfrak{g}$. O teorema vale, portanto, para $\rho(\mathfrak{h})$ e daí que existe $w \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, $w \neq 0$ tal que $\rho(\mathfrak{h})w = 0$. Essa última afirmação significa que existe $X_0 \in \mathfrak{g} - \mathfrak{h}$ tal que $[X_0, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$, o que mostra que $\mathfrak{h}$ é de codimensão um, pois o subespaço gerado por $X_0 \notin \mathfrak{h}$ é uma subálgebra de dimensão estritamente maior que a dimensão de $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{h}$ foi escolhido de dimensão máxima entre as subálgebras não-triviais. Além do mais, como $X_0 \notin \mathfrak{h}$, $[X_0, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ e $\mathfrak{h}$ é de codimensão um, $\mathfrak{h}$ é na verdade um ideal de $\mathfrak{g}$.

Agora, aplicando a hipótese e indução para $\mathfrak{h}$ como subálgebra de $\mathfrak{gl}(V)$, o subespaço

$$W = \{v \in V : Xv = 0 \text{ para todo } X \in \mathfrak{h}\}$$

é não-nulo. Como os elementos de W se anulam pelos elementos de $\mathfrak{h}$, para concluir a demonstração do teorema é suficiente mostrar que existe $v \in W$, $v \neq 0$ tal que $X_0 v = 0$ com X_0 como acima. Para isso, observa-se que W é invariante por X_0, já que se $X \in \mathfrak{h}$ e $w \in W$, então

$$\begin{aligned} X X_0 w &= [X, X_0]w + X_0 X w \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois $X, [X, X_0] \in \mathfrak{h}$. Isso mostra que $X_0 w \in W$ e que W é invariante por X_0. No entanto, X_0 é nilpotente e, portanto, sua restrição a W também é nilpotente e daí que o argumento usado no caso em $\dim \mathfrak{g} = 1$ permite concluir a demonstração do teorema.

□

Teorema 4.28. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ uma subálgebra tal que todo $X \in \mathfrak{g}$ é invariante. Então, existem subespaços*

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

tal que $XV_i \subset V_{i-1}$, $i = 1, \ldots, n$. Esses subespaços podem ser definidos indutivamente por

$$\begin{aligned} V_0 &= 0 \\ V_i &= \{v \in V : Xv \in V_{i-1} \textit{ para todo } X \in \mathfrak{g}\}. \end{aligned}$$

Em particular, estendendo sucessivamente bases dos subespaços V_i, chega-se uma base β de V tal que a matriz de X em relação a β é triangular superior com zeros na diagonal para todo $X \in \mathfrak{g}$.

Demonstração.

Defina $V_1 = \{v \in V : Xv = 0 \text{ para todo } X \in \mathfrak{g}\}$. Pelo teorema anterior, $V_1 \neq 0$. Além do mais, V_1 é claramente $\mathfrak{g}$-invariante. Portanto, a representação canônica de $\mathfrak{g}$ em V passa ao quociente definindo uma representação ρ de $\mathfrak{g}$ em V/V_1. Como cada $X \in \mathfrak{g}$ é nilpotente, ρ é uma nil-representação e o teorema anterior se aplica a ρ. Existe, portanto, $w \in V/V_1$, $w \neq 0$ tal que $\rho(X)w = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$. Isso significa que existe $v \in V - V_1$ tal que $Xv \in V_1$ para todo $X \in \mathfrak{g}$, o que garante que o subespaço

$$V_2 = \{v \in V : Xv \in V_1 \text{ para todo } X \in \mathfrak{g}\}$$

contém V_1, e é distinto de V_1. O mesmo argumento permite construir, sucessivamente,

$$V_i = \{v \in V : Xv \in V_{i-1} \text{ para todo } X \in \mathfrak{g}\}$$

que contém e é diferente de V_{i-1}. Como $\dim V < \infty$, algum $V_i = V$, mostrando a primeira parte do teorema. Quanto à segunda parte, tome a base

$$\beta\{v_1, \ldots, v_{i_1}, v_{i_1+1}, \ldots, v_{i_2}, \ldots, v_{i_{n-1}+1}, \ldots, v_{i_n}\}$$

com $v_{i_j+1}, \ldots, v_{i_{j+1}} \in V_{j+1}$, $j = 0, \ldots, n-1$. Em relação a esta base, os elementos de $\mathfrak{g}$ se representam todos como matrizes triangulares superiores com zeros nos blocos diagonais correspondentes às dimensões dos subespaços V_i.

□

Corolário 4.29. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ uma subálgebra tal que todo $X \in \mathfrak{g}$ é nilpotente. Então, $\mathfrak{g}$ é nilpotente. Em particular, $\rho(\mathfrak{h})$ é uma álgebra nilpotente se ρ é uma nil-representação de álgebra $\mathfrak{h}$ em V.*

Demonstração.

Para mostrar que nessa situação $\mathfrak{h}$ é nilpotente, convém introduzir a série central ascendente de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, que é definida indutivamente como

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_0 &= 0 \\ \mathfrak{g}_i &= \{X \in \mathfrak{g} : [Y, X] \in \mathfrak{g}_{i-1} \text{ para todo } Y \in \mathfrak{g}\}. \end{aligned}$$

Os termos dessa série são ideais de $\mathfrak{g}$, pois, como segue da definição, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_i] \subset \mathfrak{g}_i$ para todo i. Em geral, pode ocorrer que, a partir de algum termo, a série centra ascendente se estabilize num ideal próprio de $\mathfrak{g}$. Isso não ocorre se a representação adjunta de uma álgebra de dimensão finita é nilpotente. De fato, a sequência de subespaços V_i do teorema anterior coincide, no caso de uma representação adjunta, com a série central ascendente. Dessa forma, se a representação adjunta é nilpotente, a série central ascendente termina em $\mathfrak{g}$. Isso mostra o corolário.

□

Corolário 4.30. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita e suponha que* ad *é uma nil-representação. Então, a série central ascendente satisfaz*

$$0 = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$$

para algum n.

Teorema 4.31. *(**Engel**) Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita e suponha que, para todo $X \in \mathfrak{g}$,* $\mathrm{ad}(X)$ *é nilpotente. Então, $\mathfrak{g}$ é nilpotente.*

Demonstração.

Pela corolário anterior, a série central ascendente termina em $\mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$. Dessa forma, procedento por indução e usando o fato de que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_i] \subset \mathfrak{g}_{i-1}$, mostra-se que a série central descendente está contida na ascendente

$$\mathfrak{g}^i \subset \mathfrak{g}_{n-i+1}.$$

Daí que $\mathfrak{g}^{n+1} = 0$ e, portanto, $\mathfrak{g}$ é nilpotente.

□

4.9 Teorema de decomposição

Definição 4.32. *Seja $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie e ρ uma representação de $\mathfrak{g}$ em V. Um peso de ρ é um funcional linear $\lambda : \mathfrak{g} \to \mathbb{K}$ tal que o subespaço V_λ de V definido por*

$$V_\lambda = \{v \in V : \forall X \in \mathfrak{g}, \exists n \geq 1, (\rho(X) - \lambda(X))^n(v) = 0\}$$

satisfaz $V_\lambda \neq 0$. O subespaço V_λ é chamado subespaço de pesos associados a λ. A dimensão de V_λ é chamada de multiplicidade de λ.

Teorema 4.33. *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado e $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ uma álgebra solúvel. Então, existe uma base $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V e funcionais lineares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n : \mathfrak{g} \to \mathbb{K}$ tal que, em relação a β, $X \in \mathfrak{g}$ se escreve como*

$$X = \begin{pmatrix} \lambda_1(X) & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n(X) \end{pmatrix}.$$

Demonstração. Seja v_1 autovetor comum aos elementos de $\mathfrak{g}$ com autovalor $\lambda_1(X)$. Como foi visto, λ_1 é um funcional linear. Seja V_1 o subespaço gerado por v_1. Então, $\mathfrak{g}$ deixa V_1 invariante e, portanto, se representa em V/V_1. Como $\mathfrak{g}$ é solúvel, existe $w \in V/V_1$ que é autovetor comum para os elementos da representação de $\mathfrak{g}$ com autovalor dado pelo funcional linear λ_2. Tomando v_2 como representante de w em V, tem-se que $Xv_2 = \lambda_2(X)v_2 + u$ com $u \in V_1$. Como $w \neq 0$ em V/V_1, $\{v_1, v_2\}$ é linearmente independente. Esse procedimento pode ser repetido sucessivamente até ober a base e os pesos requeridos. □

Proposição 4.34. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita. Então, $\mathfrak{g}$ é solúvel se e só se a álgebra derivada $\mathfrak{g}'$ é nilpotente.*

Demonstração.

Se $\mathfrak{g}'$ é nilpotente, ela é, em particular, solúvel. Como $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$ é sempre abeliana e, portanto, solúvel, segue-se que $\mathfrak{g}$ é solúvel.

Reciprocamente, assumindo $\mathfrak{g}$ solúvel, para mostrar que $\mathfrak{g}'$ é nilpotente, pode-se supor, sem perda de generalidade, que os escalares estão num corpo algebricamente fechado. De fato, a extensão algébrica do derivado é o derivado da extensão algébrica e uma álgebra é nilpotente se e só se suas extensões são nilpotentes.

Assumindo o corpo como sendo algebricamente fechado, a representação adjunta de $\mathfrak{g}$ se escreve, em alguma base, como matrizes triangulares superiores. Como o colchete de matrizes triangulares superiores é trianglar superior com zeros na diagonal, os elementos de $\mathfrak{g}'$, na representação adjunta, se escrevem como matrizes triangulares superiores com diagonal nula. Eles são portanto, nilpotentes. Conclui-se então que a representação adjunta de $\mathfrak{g}'$ em $\mathfrak{g}$ é nilpotente. Por restrição, tem-se então que a representão adjunta de $\mathfrak{g}'$ é também nilpotente. O que mostra, juntamente com o teorema de Engel, que $\mathfrak{g}'$ é nilpotente. $\square$

4.10 Critérios de Cartan

A forma Cartan-Killing de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensão finita é a forma bilinear definida $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y))$. Os critérios de Cartan-Killing são condições necessárias e suficientes, em termos dessa forma bilinear, para que $\mathfrak{g}$ seja semi-simples ou solúvel.

Teorema 4.35. *Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita e D uma derivação de $\mathfrak{g}$. Suponha que para toda derivação M de $\mathfrak{g}$ se tenha*

$$\mathrm{tr}(DM) = 0.$$

Então, D é nilpotente.

Demonstração. Pode-se assumir, sem perda de generalidade, que o corpo de escalres é algebricamente fechado. Assumindo isso, seja $D = S + N$ a decomposição de D em compenentes semi-seimples (S) e nilpotente (N) que comutam entre si. Pretende-se mostrar $S = 0$. Como foi visto acima, S é uma derivação e com a hipótese de que o corpo é algebricamente fechado, $S = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ em alguma base de $\mathfrak{g}$. Evidentimente, mostrar que $S = 0$ é equivalente a mostrar que $\lambda_i = 0$ para $i = 1, \ldots, k$. Isso será feito construindo-se uma quantidade suficiente de seqüências que imitam $\lambda = (\lambda_1 ldots, \lambda_k)$.

Como o corpo de escalares $\mathbb{K}$ é de característica zero, ele contém os racionais $\mathbb{Q}$ e é um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$. Seja $V \subset \mathbb{K}$ o subespaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$ gerado pelos autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. É claro que V é de dimensão finita.

Seja $\psi : V \to \mathbb{Q}$ um funcional linear em V, e defina

$$\mu_i = \psi(\lambda_i) \qquad \mu = (mu_i, \ldots, \mu_k).$$

A seqüencia μ imita λ pois se $\lambda_{i_1} + \lambda_{i_2} = \lambda_{i_3}$ então $\mu_{i_1} + \mu_{i_2} = \psi(\lambda_{i_1} + \lambda_{i_2}) = \mu_{i_3}$. Para essa seqüência μ, seja T_μ como na proposição anterior. Então, T_μ é derivação e, por hipótese,

$$0 = \mathrm{tr}(DT_\mu) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \psi(\lambda_i).$$

Essa última expressão é uma combinação linear sobre $\mathbb{Q}$ de $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Aplicando ψ a esta combinação linear, obtém-se

$$0 == \sum_{i=0}^{k} \psi(\lambda_i)^2.$$

e como esta é uma soma de racionais positivos, conclui-se que $\psi(\lambda_i) = 0$ para todo i. Como ψ é um funcional linear arbitrário e V é de dimensão finita, tem-se que $\lambda_i = 0$ para todo i, o que mostra o teorema. □

Proposição 4.36. *Suponha que o corpo de escalares seja algebricamente fechado e seja* $\Gamma \subset \mathfrak{gl}(V)$ *um subconjunto irredutível. Então, o centralizador*

$$\mathfrak{z}(\Gamma) = \{A \in \mathfrak{gl}(V) : [A, X] = 0 \text{ para todo } X \in \Gamma\}$$

é o subespaço das transformações múltiplas da identidade.

Demonstração.

Se duas transformações lineares comutam, os auto-espaços e os auto-espaços generalizados de uma são invariantes pela outra. Dessa forma, se $A \in \mathfrak{z}(\Gamma)$ então seus auto-espaços generalizados são invariantes por toda $X \in \Gamma$ e daí que A tem um único autovalor pois, caso contrário, existiriam subespaços próprios invarinates pelos elementos de Γ. Como os auto-espaços de A são também invariantes por Γ, A é diagonalizável e, portanto, é múltipla da identidade.

□

Dada uma representação ρ de dimensão finita da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, define-se em $\mathfrak{g}$ a forma traço β_ρ que é a forma bilinear simétrica dada por

$$\beta_\rho(X, Y) = \mathrm{tr}(\rho(X)\rho(Y)).$$

Essa forma, juntamente com a forma quadrática $\beta_\rho(X, X)$ associada, desempenhará um papel central no desenvolvimento da teoria principalmente no caso das representações adjuntas. Para essas representações, a forma traço é denominada de forma de Cartan-Killing da álgebra e será denotada de maneira mais simples por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ou por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{g}}$ quando se quiser ressaltar a álgebra de $\mathfrak{g}$.

Proposição 4.37.

1. *As adjuntas dos elementos da álgebra são anti-simétricas em relação a β_ρ, isto é,*

$$\beta_\rho([X, Y], Z) + \beta_\rho(Y, [X, Z]) = 0$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

2. *Já no caso específico da forma de Cartan-Killing, tem-se*

   (a) $\langle \phi X, \phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle$ *se* ϕ *é um automorfismo de* $\mathfrak{g}$.

   (b) $\langle DX, Y \rangle + \langle X, DY \rangle = 0$ *se* D *é uma derivação de* $\mathfrak{g}$.

Demonstração.

A igualdade (1) é consequência imediata de que o traço de um comutador se anula. Quanto às igualdades correspondentes à forma de Cartan-Killing, a primeira é devido a que $\mathrm{ad}(\phi X) = \phi \mathrm{ad}(X) \phi$, se ϕ é um automorfismo. Já a segunda segue do fato de que

$$\mathrm{ad}(DX) = [D, \mathrm{ad}(X)]$$

para uma derivação D qualquer.

□

Lema 4.38. *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie de dimensão finita e suponha que sua forma de Cartan-Killing seja identicamente nula. Então,* $\mathfrak{g}$ *é solúvel.*

Demonstração.

Para mostrar que $\mathfrak{g}$ é solúvel, será mostrado que sua álgebra derivada $\mathfrak{g}'$ é nilpotente. Para isso, seja $X \in \mathfrak{g}'$. Então, X se escreve como

$$X = \sum_i [Y_i, Z_i]$$

como $Y_i, Z_i \in \mathfrak{g}$. Agora, para uma derivação D de $\mathfrak{g}$, $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X)D) = 0$. De fato,

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X)D) &= \sum_i \mathrm{tr}([\mathrm{ad}\, Y_i, \mathrm{ad}\, Z_i]D) \\
&= \sum_i \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, Y_i \mathrm{ad}\, Z_i D - \mathrm{ad}\, Y_i \mathrm{ad} Z_i D) \\
&= \sum_i \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, Z_i D \mathrm{ad}\, Y_i - \mathrm{ad}\, Z_i \mathrm{ad}\, Y_i D) \\
&= \sum_i \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, Z_i [D, \mathrm{ad}\, Y_i]) \\
&= \sum_i \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, Z_i \mathrm{ad}(DY_i)) \\
&= \sum_i \langle Z_i, DY_i \rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

pois, por hipótese, a forma de Cartan-Killing é identicamente nula. Esta igualdade, juntamente com o teorema 3.4, mostra que $\mathrm{ad}(X)$ é nilpotente, pois a derivação D foi tomada de maneira arbitrária. Portanto, a representação adjunta de $\mathfrak{g}'$ é nilpotente o que acarreta, pelo teorema de Engel, que $\mathfrak{g}'$ é nilpotente, concluindo a demonstração do lema.

□

Teorema 4.39. *Denotando por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a forma de Cartan-Killing da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensão finita, tem-se que $\mathfrak{g}$ é solúvel se e só se*

$$\langle X, Y \rangle = 0$$

para todo $X \in \mathfrak{g}'$ e $Y \in \mathfrak{g}$.

Demonstração.

A condição é necessária pelo teorema de Lie. Por outro lado, a condição garante, em particular, que a forma de Cartan-Killing é identicamente nula em $\mathfrak{g}'$. Como $\mathfrak{g}'$ é um ideal, os comentários acima garantem então que a forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{g}'$ é identicamente nula. Pelo lema anterior, conclui-se que $\mathfrak{g}'$ é solúvel o que mostra, como se desejava, que $\mathfrak{g}$ é solúvel.

$\square$

Teorema 4.40. *A forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{g}$ não é degenerada se e só se $\mathfrak{g}$ é semi-simples.*

Demonstração.

Supondo, em primeiro lugar,que $\mathfrak{g}$ não é semi-simples, tem-se que $\mathfrak{g}$ admite um ideal abeliano i não-trivial. Isso porque $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})\neq 0$ e portanto $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})^{(k)}$ é um ideal abeliano não-nulo para algum k. Seja $X \in \imath$. Então, para todo $Y \in \mathfrak{g}$, a imagem de $\mathrm{ad}(Y)\mathrm{ad}(X)$ está contida em i pois i é ideal. Por essa razão o traço de $\mathrm{ad}(Y)\mathrm{ad}(X)$coincide com o traço de sua restrição a i. Mas $\mathrm{ad}(Y)\mathrm{ad}(X)|_i = 0$ pois i é abeliano. Conseqüentemente,

$$\langle Y, X \rangle = 0$$

para todo $X \in i$ e $Y \in \mathfrak{g}$. Isso mostra que as álgebras que têm forma Cartan-killing não-degeneradas são semi-simples.

Reciprocamente, assumindo que $\mathfrak{g}$ é semi-simples, seja $\mathfrak{g}^{\perp}$ o subespaço de $\mathfrak{g}$ definido por

$$\mathfrak{g}^{\perp} = \{X \in \mathfrak{g} : \langle X, Y \rangle = 0 \text{ para todo } Y \in \mathfrak{g}\}$$

Então, $\mathfrak{g}^{\perp}$ é um ideal pois

$$\langle [Z, X], Y \rangle = -\langle X, [Z, Y] \rangle = 0$$

se $X \in \mathfrak{g}^{\perp}$ e Y, Z são arbitrários. Como a restrição de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $\mathfrak{g}^{\perp}$ é identicamente nula, e esta coincide com sua forma de Cartan-killing, conclui-se, a partir do teorema anterior, que $\mathfrak{g}^{\perp}$ é solúvel. O fato de $\mathfrak{g}$ ser semi-simples implica então que $\mathfrak{g}^{\perp} = 0$. Mas dizer isso é o mesmo que dizer que a forma de Cartan-killing de $\mathfrak{g}$ é não degenerada, concluindo a demonstração do teorema.

$\square$

Teorema 4.41. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra semi-simples. Então, $\mathfrak{g}$ se decompõe em soma direta*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_s \tag{4.1}$$

com $\mathfrak{g}_i$, $i = 1, \ldots, s$, ideais simples. Nessa decomposição $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = 0$ se $i \neq j$. Além do mais,

1. *o ortogonal $\mathfrak{g}_i^\perp$ de uma componente simples, em relação à forma de Cartan-Killing, é a soma das demais componentes,*
2. *os ideais de $\mathfrak{g}$ são somas de algumas dessas componentes e*
3. *a decomposição é única (a menos de permutação dos índices).*

Demonstração.

A decomposição em componentes simples foi mostrada acima. Para mostrar os itens seguintes, suponha que $\mathfrak{g}$ se decomponha como soma de dois ideais

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2.$$

Então, o complementar ortogonal de um dos ideais é o outro. De fato, $\mathfrak{h}_1^\perp$ complementa $\mathfrak{h}_1$ e, portanto, tem a mesma dimensão que $\mathfrak{h}_2$. Por outro lado, os ideais são ortogonais em relação à forma de Cartan-Killing, pois se $X \in \mathfrak{h}_1$ e $Y \in \mathfrak{h}_2$, então

$$\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)$$

se anula em $\mathfrak{h}_1$ e em $\mathfrak{h}_2$. Tomando então uma base de $\mathfrak{g}$ cujos elementos estão contidos ou em $\mathfrak{h}_1$, ou em $\mathfrak{h}_2$, vê-se que $\langle X, Y \rangle = 0$. Portanto, $\mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{h}_1^\perp$ e essa inclusão é uma igualdade, pois as dimensões coincidem.

Seja agora $\mathfrak{g}_i$ uma componente simples e denote por $\mathfrak{c}_i$ a soma das demais componentes simples. Então $\mathfrak{c}_i$ é um ideal, pois o colchete entre componentes simples diferentes se anula. Pela que foi dito acima, $\mathfrak{c}_i$ coincide com o complementar ortogonal de $\mathfrak{g}_i$ o que mostra 1. Para ver o item 2, seja $\mathfrak{h}$ um ideal de $\mathfrak{g}$. Então ou $\mathfrak{h}$ contém $\mathfrak{g}_i$ ou $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_i = 0$ pois $\mathfrak{g}_i$ é simples. No primeiro caso, $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{c}_i$ é um ideal que se for não-nulo, um argumento por indução permite mostrar que ele é soma de componentes simples, o mesmo ocorrendo com $\mathfrak{h}$. Já se $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_i = 0$ então $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{c}_i$, pois se $X \in \mathfrak{g}_i$ e $Y \in \mathfrak{h}$ então $\mathrm{ad}(X)$ se anula em $\mathfrak{c}_i$ e $\mathrm{ad}(Y)$ se anula em $\mathfrak{g}_i$, o que garante que

$$\langle X, Y \rangle = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)) = 0,$$

mostrando que $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_i^\perp = \mathfrak{c}_i$. Usando novamente um argumento de indução, conclui-se que $\mathfrak{h}$ é soma de componentes simples da decomposição (4.1). Por fim, o item 3 decorre do item anterior que garante que $\mathfrak{g}_i$, $i = 1, \ldots, s$ são os únicos ideais simples de $\mathfrak{g}$.

□

Corolário 4.42. *Se* $\mathfrak{g}$ *é semi-simples, então* $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$.

Demonstração. Como $\mathfrak{g}'$ é um ideal de $\mathfrak{g}$, a proposição garante que existe um ideal i que complementa $\mathfrak{g}'$. Dados $X, Y \in i$, tem-se que $[X, Y] \in \mathfrak{g}' \cap i$, isto é, i é um ideal abeliano e, portanto, $i = 0$. Isso mostra que $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$. □

Proposição 4.43. *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra semi-simples e* ρ *uma representação de* $\mathfrak{g}$ *em* V*. Então,*

$$V = \bigcap_{X \in \mathfrak{g}} \ker \rho(X) + \sum_{X \in \mathfrak{g}} \operatorname{im} \rho(X).$$

Demonstração. Por indução sobre a dimensão de V. Se $\dim V = 1$, então a representação é identicamente nula e o primeiro termo do segundo membro coincide com o espaço da representação. Para dimensões maiores que 1, existem duas possibilidades. Uma delas é que a imagem de $\mathfrak{g}$ por ρ seja nula. Nesse caso, V coincide com o primeiro termo do segundo membro. Caso contrário, a imagem de $\mathfrak{g}$ por ρ é uma álgebra semi-simples de $\mathfrak{gl}(V)$, pois é o quociente de $\mathfrak{g}$ por um ideal. Dessa forma, pode-se assumir, sem perda de generalidade, que $\mathfrak{g}$ é uma subálgebra semi-semiples de $\mathfrak{gl}(V)$. Sendo assim, seja Γ elemento de Casimir Γ de $\mathfrak{g}$. Então, V se decompõe como

$$V = V_0 \oplus V_1$$

com V_0 o auto-espaço generalizado associado ao autovalor 0 de Γ, e V_1 a soma dos demais auto-espaços generalizados. Esses subespaços são $\mathfrak{g}$-invariantes pois Γ comuta com os elementos de $\mathfrak{g}$ e se os dois não se anulam, pode-se aplicar o passo de indução substituindo V por V_0 e V_1 e $\mathfrak{g}$ pelas suas restrições, obtendo a decomposição desses subespaços e, portanto, de V.

Agora, se um dos subespaços V_0 ou V_1 se anula, esse é necessariamente V_0, pois Γ é nilpotente em V_0 e, no entanto,

$$\operatorname{tr} \Gamma = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{tr}(Y_i X_i) n,$$

o que mostra que Γ não é nilpotente em V. Mas se $V_0 = 0$, Γ é inversível e, portanto, $V = \operatorname{im} \Gamma$ e, como um elemento na imagem de Γ é uma soma de elementos das imagens de Y_i, $i = 1, \ldots, n$, isso mostra que $V = \sum_{X \in \mathfrak{g}} \operatorname{im} X$, concluindo a demonstração da proposição. □

Referências

[Alek-Arv] D. V. Alekseevsky and A. Arvanitoyeorgos, *Riemannian Flag manifolds with homogeneous geodesics*, Trans. Amer. Math. Soc. 359 (2007), 3769-3789.

[Alek-Pe] D. V. Alekseevsky and A. M. Perelomov. *Invariant Kähler-Einstein metrics on compact homogeneous spaces*, Funct. Anal. Appl. 20 (3) (1986), 171-182.

[Arv] A. Arvanitoyeorgos, *New Invariant Einstein metrics on generalized flag manifolds*, Trans. AMS, vol.337, (2), 981-995.

[Bes] A. Besse, *Einstein Manifolds*, Springer Verlag, 1987.

[B-F-R] M. Bordeman, M. Forger and H. Römer. *Homogeneous Kähler mainfolds: paving the way towards new supersymmetric sigma models*, Comm. Math. Phys. 102 (1986), 605-647.

[Bor] A. Borel. *K¨ahlerian coset spaces of semi-simple Lie Groups*, Proc.Nat. Acad. USA, nº 12,(1954), 40, 1147-1151.

[B-H] A. Borel. Hirzebruch, F.. *Characteristic classes and homogeneous spaces I, II, III*, Amer. J. Math. 80 (1958), 48-538; 81 (1959), 315-382; 82 (1960), 491-504.

[Br-Cl] F. Brickell and R. S. Clark. *Differenctiable Manifolds*, Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1970.

[Car] E. Cartan. *Sur les 'equations de la gravitation d'Einstein*, Jour. de Math. 1, 141-203 (1922)

[Ch] C. Chevalley. *Theory of Lie Groups*, Priceton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1946.

[Frö] A. Fröhlicher. *Zur Differential geometric der komplexen structuren*, Math. Ann. 129 (1955), 50-95.

[Kim] M. Kimura, *Homogeneous Einstein Metrics on Certain Kähler C-spaces*, Advanced Studies in Pure Mathematics, nº 18-I, 1990. Recent Topics in Differential and Analytic Geometry,(1986) 303-320.

[Ko-No] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry*, Wiley (Interscience), New York, Vol. 1, 1963; Vol. II, 1969.

[Kos] J.L. Koszul, *Sur la forme Hermitiene canonique des espaces homog‘enes complexes*, Can. Journal of Math., 7, (1955), 562-576.

[Mar-Bar] L. A. B. San Martin. *Álgebras de Lie*, ed. (São Paulo): Editora da Unicamp, 1999.

[San-Neg] L. A. B. San Martin and C. J. C. Negreiros, *Invariant almost Hermitian structures on flag manifolds*, Advances in Math., 178, 2003.

[Mat] Y. Matsushima. *Remarks on K¨ahler-Einstein Manifolds*, Nagoya Math.Journal, 46, (1972), 161-173.

[Mut] Y. Mutö. *On Einstein metrics*, Journal of Differential geometry, 9, (1974), 521-530.

[Nis] M. Nishiyana. *Classification of invariant complex strutures on irreducible compact simply connected coset spaces*,Osaka J. Math. 21 (1984), 39-58.

[Sak] Y. Sakane. *Homogeneous Einstein metrics on flag manifolds*, obatchevskii Journal of Mathematics, vol.4, (1999), 71-87.

[Sil] R. de C. de J. Silva. *Estruturas quase Hermitianas invariantes em espaços homogêneos de grupos semi-simples*, Tese de Doutorado, Universidade de Campinas, 2003.

[Wa-Zi] M. Wang and W. Ziller, *On normal homogeneous Einstein metrics*, Ann. Sci. Ecole Norm.Sup., 18, (1985), 563-633.

[Wan-Zil] M. Wang and W. Ziller, *Existense and Non-Existence of Homogeneous Einstein Metrics*, Invent. math., 84, (1986), 177-194.

[War] F. Warner. *Foundations of Differential Manifolds and Lie Groups*, Springer-Verlag, New York, 1963.

[Wey] H. Weyl. *Space-Time-Matter*, Dover, New York, (1922), 4th ed.

[Wo-Gr] J. A. Wolf and A. Gray. *Homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms II* J. Differencial Geom. 2 (1968), 115-159.