Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática - IM
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PGMAT
Dissertação de Mestrado

O radical de Jacobson generalizado

Vinicius Souza Bittencourt

Salvador-Bahia

Fevereiro de 2010

O radical de Jacobson generalizado

Vinicius Souza Bittencourt

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Thierry Corrêa Petit Lobão.

Salvador-Bahia
Fevereiro de 2010

Bittencourt, Vinicius Souza.

O radical de Jacobson generalizado / Vinicius Souza Bittencourt. – Salvador, 2009.

91 f. Orientador: Thierry Corrêa Petit Lobão.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2009.

Referências bibliográficas.

1. Álgebra. 2. Anéis associativos. 3. Teoria dos radicais. I. Petit Lobão, Thierry Corrêa. II. Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática. III. Título.

CDU : 512.552

O radical de Jacobson generalizado

Vinicius Souza Bittencourt

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 22 de fevereiro de 2010.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Thierry Corrêa Petit Lobão
UFBA

Prof. Dr. Raul Antonio Ferraz
USP

Profa. Dra. Lucia Satie Ikemoto Murakami
USP

A Luiz Marcio Santos Farias, um grande amigo e professor.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, os senhores Lourival Bittencourt e Lícia Bittencourt, pelos ensinamentos básicos empreendidos sobre a minha pessoa. Por sempre acreditarem em mim, por investirem e acreditarem num sonho um tanto "indecifrável" aos seus olhos. A honradez e a virtude que adquiri com vocês é o que mais tenho de precioso a levar por essa vida.

Agradeço a minha irmã, Viviane, por sempre ser uma amiga e ajudadora leal, pela confiança e pelos doces gostosos que sempre animaram uma tarde árdua de estudos.

Agradeço aos meus familiares, por serem alicerces em minha vida.

Agradeço ao meu orientador, o divino e misericordioso Thierry Corrêa Petit Lobão, pelo incentivo e pela longanimidade dispensados à minha pessoa, bem como pelos ensinamentos que adquiri com ele durante meu curso, desde a graduação.

Agradeço aos professores Raul Antonio Ferraz e Lucia Satie Ikemoto Murakami, por terem aceitado o convite de serem membros da banca examinadora desta dissertação de mestrado.

Agradeço aos demais professores dessa casa chamada Instituto de Matemática (IM) da UFBA: pra mim foi uma grande honra ter conhecido tantas "figuras" desse instituto, os quais procuraram exercer a docência com profissionalismo, entusiasmo e dedicação. Sem desmerecer os demais professores, eu gostaria de citar: Elinalva Vergasta, pela boa vontade em iniciar os alunos de graduação na pesquisa matemática através do projeto do Laboratório de Ensino da Matemática (LEMA - UFBA); Vilton Pinheiro e Enaldo Vergasta, os coordenadores do programa de pós-graduação em Matemática da UFBA; Samuel Silva e Armando Castro, os professores mais empolgados e dedicados do IM - UFBA, em minha opinião; mais uma vez ao Thierry Lobão, que foi um dos principais professores a incentivar a iniciação científica entre os alunos de graduação, através de projetos institucionais (PIBIC e SEMEP, por exemplo).

Agradeço aos funcionários do IM - UFBA, por serem solícitos no cumprimento dos seus deveres. Gostaria de citar Tania Espinola, por exercer o secretariado da pós-graduação em Matemática do IM - UFBA com competência e dedicação.

Agradeço aos meus professores "não matemáticos", porque suas lições me inspiraram em todos os aspectos, inclusive com respeito à Matemática. Citações especiais a Agripino Meneses, Antônio Carlos Barbosa, Átila Brandão, Pedro Salustiano, João Figuer, Djalma Thürler, Dêvid Gonçalves, Nala Colares, Manassés Moreira, Hilton Mendes e Luiz Marcio Farias.

Agradeço aos meus amigos, que em momentos difíceis foram como irmãos! E em momentos de bonança, foram grandes multiplicadores de alegria.

Agradeço a todos os meus colegas do curso, na graduação e no mestrado, pelos estudos em grupo, por se permitirem questionar e consensualizar o conhecimento e pelos momentos de descontração (muito úteis depois de um dia estafante de estudos)! Gostaria de citar meus colegas de mestrado, que pra mim foram como uma segunda família: Ângela Soldatelli, Elaís Malheiro, Roberto Ribeiro, Robério Rocha (que não continuou sua caminhada conosco, mas sempre será da nossa patota), Teles Fernandes (o próximo senador da Bahia), Wendell Prates (meu fã incondicional) e João Paulo de Jesus (o garoto do LaTeX: auxílio constante na diagramação e organização das dissertações de mestrado da pós-graduação em Matemática, além de ser um grande amigo).

Finalmente, agradeço às instituições CAPES e CNPq, pelo apoio financeiro dado a minha pessoa, durante o mestrado (bolsa de mestrado) e a graduação (bolsa de iniciação científica), e a referida instituição de ensino.

On ne voit bien qu'avec le cœur. L'essentiel est invisible pour les yeux.

Saint-Exupéry

Resumo

Generalizamos o conceito de quaserregularidade da seguinte forma: um elemento x de um anel A é k-quaserregular se existir y em A tal que $x + y + kxy = 0$ e um anel é k-quaserregular se todos os seus elementos são k-quaserregulares. Pode-se provar que a classe $\mathfrak{J}_k$ de todos os anéis k-quaserregulares é também uma classe radical. Em nosso trabalho, estabelecemos uma catalogação do radical $\mathfrak{J}_k(A)$ de um anel A arbitrário através de conjuntos equivalentes, tal como Szász fez para o radical de Jacobson $\mathfrak{J}(A)$. Como radical, $\mathfrak{J}_k$ é muito parecido com $\mathfrak{J}$: ele é hereditário à direita e à esquerda, forte à direita e à esquerda, especial, matricialmente extensível e fechado para somas diretas completas. Estabelecemos um teorema de estrutura com respeito ao anel quociente $A/\mathfrak{J}_k(A)$ e provamos que os anéis k-primitivos desse teorema de estrututa são isomorfos a anéis k-densos de tranformações lineares sobre espaços vetoriais sobre anéis de divisão. A k-densidade, por outro lado, determina que esses anéis de divisão não podem ter característica k. Estudamos a coleção $\mathbb{J}$ de todos os radicais $\mathfrak{J}_k$, com k variando em $\mathbb{Z}$, bem como o reticulado radical por ela determinado, e provamos que os reticulados $\mathbb{J}$ (a ordem usada é contigência de classes) e $\mathbb{N}$ (a ordem é a divisão) são isomorfos. Por fim, o radical $\mathfrak{J}_\infty$, o supremo dos radicais $\mathfrak{J}_k$, é um radical matricialmente extensível, hereditário, mas não é fechado para somas diretas completas.

Palavras-chave: Anel associativo; Radical; k-Quaserregularidade.

Abstract

We have generalized the concept of quasi-regularity as follow: an element x of a ring A is k-quasi-regular if there exists a y in A such that $x+y+kxy=0$ and a ring is k-quasi-regular if all elements are k-quasi-regular. In [And09] and [MCSt98], it was proved the class $\mathfrak{J}_k$ of all k-quasi-regular rings is a radical. In this work, we have established a catalogation of the radical $\mathfrak{J}_k(A)$, A is an arbitrary ring, through alternative definitions, such as Szász, in [Sza81], has built for the Jacobson radical $\mathfrak{J}(A)$. The radicals $\mathfrak{J}_k$ and $\mathfrak{J}$ are similars: they are left and right hereditary, left and right strong, special, matric-extensible and closed for complete direct sums. Also, we have established a structure theorem to respect to the quociente ring $A/\mathfrak{J}_k(A)$ and we have proved the k-primitive rings are isomorphic to k-dense rings of linear transformations on vector spaces over division rings. In other hand, the k-density determines that these division rings haven't characteristic k. We have described the lattice of the collection $\mathbb{J}=\{\mathfrak{J}_k;\ k\in Z, k\neq 0\}$, by proving the lattices $(\mathbb{J},\leq)$ and $(\mathbb{N},|)$ are isomorphic. Finally, the radical $\mathfrak{J}_\infty=\bigvee\{\mathfrak{J}_k;\ k\in Z, k\neq 0\}$ is matric-extensible, hereditary, but it isn't closed for complete direct sums.

Keywords: Associative ring; Radical; k-Quasi-regularity.

Sumário

Introdução

Uma prática comum entre os matemáticos é tentar imitar um resultado de uma estrutura mais "forte" (no sentido de ter algumas particularidades) dentro de uma estrutura mais geral, de forma que para a estrutura mais "forte" tal resultado acabe se tornando um caso particular do que foi provado para o caso geral. Num espaço vetorial V (estrutura matemática bastante conhecida e "forte") de dimensão finita n sabe-se que $V = \oplus_{i=1}^{n}\langle v_i\rangle$, em que $\{v_1, ..., v_n\}$ é uma base de V. Surge a seguinte questão: é possível que um anel A seja escrito como soma direta de ideais adequados?

Wedderburn, Artin e Koethe obtiveram os primeiros resultados para o que hoje chamamos de *Teoria de Radicais*. Os resultados de Wedderburn e Artin foram obtidos em álgebras de dimensão finita e anéis com *condição de cadeia ascendente* ($A.C.C.$), a partir de seus elementos nilpotentes. Eles perceberam que se, num anel, a soma de ideais nilpotentes fosse também nilpotente (em anéis com $A.C.C.$, por exemplo, isso acontece), era possível obter um ideal maximal W que contivesse todos os demais. Nessa situação, para um anel A, o quociente A/W poderia ser escrito como soma direta de anéis de matrizes sobre anéis de divisão. O ideal maximal W acima descrito é conhecido na literatura como o *radical de Wedderburn-Artin* ou o *radical clássico*. Todavia, tais resultados são muito particulares, pois nem todos os anéis ou álgebras possuem condições de finitude. Algum tempo depois, Jacobson procurou obter o mesmo resultado, retirando a hipótese de o anel possuir $A.C.C.$: ele considerou a intersecção J (que mais tarde ficou conhecida como *radical de Jacobson*) de todos os anuladores de A-módulos irredutíveis à esquerda e concluiu que A/J poderia ser escrito como uma soma subdireta de anéis densos de transformações lineares sobre anéis de divisão. Na prática, Jacobson "retirou" os *quaserregulares* de A (degenerou os quaserregulares à classe $\bar{0}$ através do anel quociente A/J).

Ora, Wedderburn e Artin "retiraram" os nilpotentes. Jacobson "retirou" os quaserregulares. O que há de comum nas ferramentas usadas por tais matemáticos? É possível que se encontre outros ideais com características semelhantes as dos radicais de Jacobson e Wedderburn-Artin? Em busca dessa resposta, teóricos como Amitsur, Baer e Kurosh propuseram o conceito de *propriedade radical*, apontando para o estudo de classes de anéis com certas propriedades, as quais serão chamadas de *classes radicais*.

Seja $\mathcal{P}$ uma propriedade (qualquer) que um anel possui. Diremos que A é um $\mathcal{P}$-*anel* caso ele possua a propriedade $\mathcal{P}$. Um ideal I de A é um $\mathcal{P}$-*ideal* se I é um $\mathcal{P}$-anel. Um anel A será chamado de $\mathcal{P}$-*semissimples* se ele não contiver nenhum $\mathcal{P}$-ideal.

Diremos que $\mathcal{R}$ é uma *propriedade radical* se satisfizer três condições:

$A)$ A imagem homomorfa de um $\mathcal{R}$-anel é um $\mathcal{R}$-anel.

$B)$ Qualquer anel A deve conter um $\mathcal{R}$-ideal S, o qual é maximal com respeito à $\mathcal{R}$.

$C)$ O anel quociente A/S é $\mathcal{R}$-semi-simples.

O $\mathcal{R}$-ideal maximal de um anel A, cuja existência é imposta pela condição $B)$, é chamado de $\mathcal{R}$-*radical* de A.

Com essa definição, as propriedades para anéis "todos os elementos são nilpotentes" e "todos os elementos são quaserregulares" são exemplos de propriedades radicais. Ainda de acordo com a mesma, pode-se provar que a propriedade "o anel é nilpotente" não é uma propriedade radical.

Seguindo esse tipo de construção, outros radicais surgem na literatura, com uma proposta diferente dos radicais de Jacobson e de Koethe. Alguns deles são:

- $\mathfrak{L}$: [Levitzki] classe radical inferior determinada por todos os anéis localmente nilpotentes.
- $\mathcal{J}$: [Jacobson] classe dos anéis quaserregulares.
- $\mathcal{G}$: [Brown-McCoy] classe radical superior determinada por todos os anéis simples com unidade.
- $\mathcal{T}$: classe radical superior determinada por todos os anéis de matrizes sobre anéis de divisão.

Um elemento $x \in A$ é dito k-*quaserregular* se existem $y = y(x) \in A$ e $k \in \mathbb{Z}$ tais que $x + y + kxy = 0 = x + y + kyx$ e um anel é dito k-*quaserregular* se todos os seus elementos são k-*quaserregulares*.

Em um estudo recente, o orientador deste projeto provou que a quaserregularidade generalizada (indexada por um inteiro k) também determina uma propriedade radical e, por conseguinte, o k-radical de Jacobson generalizado, denominado $\mathcal{J}_k$. Em se tratando dos radicais acima expostos, obtemos a seguinte relação:

$$\mathfrak{L} \leq \mathcal{J} \leq \mathcal{G} \leq \mathcal{T},$$

em que "$\leq$" é a ordem usual de classes. Além disso, prova-se que $\mathcal{J} \leq \mathcal{J}_k$, para todo k inteiro.

Esta dissertação é composta de cinco capítulos. No capítulo 1, abordamos alguns aspectos da Teoria Geral de Anéis, de maneira sucinta, no sentido de tornar esse capítulo um "banco de preliminares" para um leitor não acostumado às notações ou à linguagem da Álgebra. Nele, introduzimos a noção de anel, ideal, homomorfismo de anéis e módulos. Listamos também alguns teoremas clássicos da Teoria de Anéis, os teoremas de isomorfismo, por exemplo, e alguns resultados básicos sobre números ordinais.

No capítulo 2, introduzimos o conceito de classe radical, radical superior, radical inferior e fazemos algumas construções básicas para a Teoria de Radicais. Depois, começamos o estudo de radicais concretos: o radical nil (Koethe), o radical localmente nilpotentes (Levitzki), o radical quaserregular (Jacobson) e o radical $\mathcal{G}$-regular (Brown-McCoy). Nessa mesma linha, destacamos o radical de Wedderburn-Artin, que foi um dos principais fomentadores para a noção atual de radical de um anel. Apresentamos também alguns conceitos radicais, como hereditariedade, força, extensibilidade matricial e especialidade.

Com os resultados e definições apresentados nos capítulos 1 e 2, partimos para o nosso objeto de estudo: o k-radical de Jacobson generalizado. O capítulo 3 começa tratando da operação de Perlis generalizada, a qual sugere a definição de "elemento k-quaserregular". Nesse sentido, mostramos que, tal como a quaserregularidade, a k-quaserregularidade determina uma classe radical, denotada por $\mathcal{J}_k$. Tendo por inspiração a catalogação por Szász de algumas equivalências para o radical quaserregular $\mathcal{J}(A)$ de um anel A qualquer, obtivemos um resultado que estabelece algumas formulações equivalentes do radical k-quaserregular $\mathcal{J}_k(A)$ de um anel A qualquer, além de verificarmos que muitas caracterizações do radical $\mathcal{J}$ continuam preservadas no radical $\mathcal{J}_k$.

O capítulo 4 apresenta uma versão melhorada do teorema da densidade de Jacobson, através da k-densidade. Nele é feita a construção usual de espaços vetoriais sobre anéis de divisão por intermédio dos anéis k-primitivos $-$ esses últimos podem ser entendidos como uma generalização dos anéis primitivos.

No capítulo 5, investigamos o reticulado da família $\{\mathcal{J}_k;\ k \in Z,\ k \neq 0\}$, comparando cada um dos radicais $\mathcal{J}_k$ entre si, tendo por ponto de partida as propostas feitas por Leavitt e Snider. O reticulado da família $\{\mathcal{J}_k;\ k \in Z,\ k \neq 0\}$ tem a mesma estrutura de $(N, |)$, um dos reticulados mais conhecidos da literatura, em que "$|$" denota a divisão. Estudamos também o radical $\mathcal{J}_\infty = \bigvee\{\mathcal{J}_k;\ k \in Z, k \neq 0\}$. Em quais aspectos o radical $\mathcal{J}_\infty$ difere dos demais k-radicais de Jacobson generalizados?

Capítulo 1

Conceitos e resultados básicos em Teoria de Anéis

Neste capítulo serão listados alguns resultados básicos da teoria de anéis. Para um leitor não familiarizado com o assunto, recomendamos a leitura de [Hung74] e [Lang02].

1.1 Definições

Definição 1.1.1 (Operação)**.** Seja X um conjunto não vazio. Uma *operação binária fechada* ou, simplesmente, uma *operação* sobre X é uma aplicação cujo domínio é $X \times X$ e cujo contradomínio é X.

Sejam " $\cdot$ " uma operação definida sobre um conjunto não vazio X e $x, y \in X$. Ora, $\cdot(x, y) = z \in X$ e utilizaremos a seguinte notação (que é o padrão usual):

$$x \cdot y := \cdot(x, y) = z.$$

Diremos que a operação " $\cdot$ " é *associativa* se $\cdot(\cdot(x, y), z) = \cdot(x, \cdot(y, z))$, ou, mudando a notação, $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, e que ela é *comutativa* se $\cdot(x, y) = \cdot(y, x)$, ou $x \cdot y = y \cdot x$, para quaisquer $x, y, z \in X$.

Definição 1.1.2 (Grupo)**.** A dupla $(G, \cdot)$, em que G é um conjunto não vazio e " $\cdot$ " é uma operação sobre G, é dita ser um *grupo* se a operação " $\cdot$ " satisfizer as seguintes condições, quaisquer que sejam $x, y, z \in G$:

$G1)$ *(Associatividade)* $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$;

$G2)$ *(Existência do elemento neutro)* Existe $1 \in G$ tal que $1 \cdot x = x = x \cdot 1$;

$G3)$ *(Existência de inversos)* Existe $x^{-1} \in G$ tal que $x \cdot x^{-1} = 1 = x^{-1} \cdot x$.

Definição 1.1.3 (Grupo abeliano)**.** Um grupo $(G, \cdot)$ é dito ser *abeliano* ou *comutativo* se " $\cdot$ " é uma operação comutativa sobre G.

Denotaremos grupos abelianos com a notação "aditiva", isto é, $(G, +)$ é um grupo cuja operação " $+$ " é comutativa e seu elemento neutro é graficamente representado por "0".

Definição 1.1.4 (Anel)**.** A tripla $(A, +, \cdot)$, em que A é um conjunto não vazio e " $+$ " e " $\cdot$ " são operações sobre A, é dita ser um *anel* se $(A, +)$ é um grupo abeliano e " $\cdot$ " distribui " $+$ " à direita e à esquerda, isto é,

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

e

$$(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x,$$

quaisquer que sejam $x, y, z \in A$.

As operações " $+$ " e " $\cdot$ " são comumente chamadas de "adição" e "multiplicação", respectivamente. O elemento neutro da adição será chamado de *zero* do anel e denotado por "0". Quando as operações " $+$ " e " $\cdot$ " já estiverem claras no contexto corrente, o anel $(A, +, \cdot)$ será denotado apenas por anel A, para simplificar a notação. O elemento 0 também é chamado de *elemento absorvente* do anel A, pois $0 \cdot x = 0 = x \cdot 0$, qualquer que seja $x \in A$.

O conjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$, munido da adição e da multiplicação usuais dos inteiros, é um exemplo de anel (um dos exemplos mais famosos na literatura). Os conjuntos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, munidos das suas respectivas somas e produtos usuais, também são exemplos de anéis.

Definição 1.1.5 (Anel associativo)**.** Um anel A é dito ser *associativo* se a multiplicação " $\cdot$ " é uma operação associativa sobre A.

Definição 1.1.6 (Anel comutativo)**.** Um anel A é dito ser *comutativo* se a multiplicação " $\cdot$ " é uma operação comutativa sobre A.

Definição 1.1.7 (Anel unitário)**.** Um anel A é dito ser *unitário* caso exista o elemento neutro para a multiplicação.

De acordo com as definições anteriores, é importante que sejam feitas algumas observações. O neutro (ou elemento neutro ou, simplesmente, o zero) da adição, da maneira como é definido, é único em A. Da mesma forma, $-x$ é o único simétrico do elemento x. Não é necessário que a adição distribua a multiplicação, isto é, a equação

$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$, para quaisquer $x, y, z \in A$, não é, obrigatoriamente, válida. Também, é comum empregar as palavras "soma" para se referir à adição e "produto" para se referir à multiplicação. Para a multiplicação, o símbolo " $\cdot$ " é, normalmente supresso, isto é, $xy := x \cdot y$. Tal como para a adição, o elemento neutro da multiplicação, se existir, é único e, usualmente, é chamado de "um" ou "identidade" do anel. A identidade do anel será denotada por "1" ou "1_A" e valerá, em analogia à adição, $1 \cdot x = x = x \cdot 1$, para todo $x \in A$.

Definição 1.1.8 (Anel de divisão)**.** Um anel A é dito ser um *anel de divisão* se $(\ A_*\ ,\ \cdot\ )$ é um grupo, em que $A_* = A\backslash\{0\}$.

Definição 1.1.9 (Corpo)**.** Um anel A é dito ser um *corpo* se $(A_*, \cdot)$ é um grupo abeliano, em que $A_* = A\backslash\{0\}$.

Os anéis $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são exemplos de corpos.

Definição 1.1.10 (Característica de um anel)**.** Um anel A é dito de característica m se $mA = \{mx; x \in A\} = \{0\}$.

Definição 1.1.11 (Subanel)**.** Sejam A um anel e B um subconjunto não vazio de A. Dizemos que B é um subanel de A, se:

1. $0 \in B$;
2. Para quaisquer $x, y \in B$, tem-se $x - y \in B$;
3. Para quaisquer $x, y \in B$, tem-se $xy \in B$.

De forma resumida, um subanel B de A é um subconjunto não vazio que também tem estrutura de anel e cujas operações são as restrições

$$+\,|_{B\times B} : B \times B \to A$$

e

$$\cdot\,|_{B\times B} : B \times B \to A.$$

Daremos mais importância a uma família mais específica de subanéis: os *ideais.*

Definição 1.1.12 (Ideal à direita)**.** Sejam A um anel e I um subconjunto não vazio de A. Dizemos que I é um ideal à direita de A, se:

1. $0 \in I$;
2. Para quaisquer $x, y \in I$, tem-se $x - y \in I$;

3. Para quaisquer $i \in I$ e $x \in A$ temos que $ix \in I$.

Notação: $I \trianglelefteq_r A$.

Analogamente, podemos definir ideal à esquerda.

Definição 1.1.13 (Ideal à esquerda)**.** Sejam A um anel e I um subconjunto não vazio de A. Dizemos que I é um ideal à esquerda de A, se:

1. $0 \in I$;

2. Para quaisquer $x, y \in I$, tem-se $x - y \in I$;

3. Para quaisquer $i \in I$ e $x \in A$ temos que $xi \in I$.

Notação: $I \trianglelefteq_l A$.

Definição 1.1.14 (Ideal)**.** Sejam A um anel e I um subconjunto não vazio de A. Dizemos que I é um ideal bilateral ou, simplesmente, um ideal de A, se I é ideal à esquerda e ideal à direita de A. Notação: $I \trianglelefteq A$.

Note, pela definição acima, que $\{0\}$ e A são ideais do anel A e esses são denominados *ideais triviais* de um anel. Se $\{0\} \subsetneqq I \subsetneqq A$ é um ideal de A, então ele será chamado *ideal próprio* ou *ideal não trivial* de A.

Definição 1.1.15 (Anel simples)**.** Um anel A é dito ser simples se o seu único ideal não nulo é ele próprio, ou seja, se ele não admite ideais não triviais.

Corpos e anéis de divisão são exemplos de anéis simples.

É fácil verificar que a interseção de uma família de ideais de um anel A é também um ideal do anel A. Baseado nisso, a seguinte definição nos será útil.

Definição 1.1.16 (Ideal gerado)**.** Sejam A um anel e B um subconjunto de A. O ideal à direita (respec. à esquerda) gerado por B é o menor ideal à direita (à esquerda) que contém B, isto é, a interseção de todos os ideais à direita (à esquerda) contendo B. De maneira análoga, o ideal gerado por B é a interseção de todos os ideais contendo B. Notação: $\langle B\rangle_r$ ou $(B)_r$ denota o ideal à direita gerado por B; $\langle B\rangle_l$ ou $(B)_l$ denota o ideal à esquerda gerado por B; $\langle B\rangle$ ou (B) denota o ideal gerado por B. Convenciona-se que $\langle\emptyset\rangle = \{0\}$.

O anel nulo (o anel cujo único elemento é o "0") será denotado por (0) ou $\{0\}$. A mesma notação indicará o ideal nulo.

Definiremos, agora, algumas operações no conjunto de ideais de um anel A.

Definição 1.1.17. Seja $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ um conjunto qualquer de ideais de um anel A. Definiremos a soma desses ideais, denotada por $\sum I_\lambda$, como o conjunto de todas as somas $i_{\lambda_1} + i_{\lambda_2} + \cdots + i_{\lambda_n}$, em que i_{λ_k} está em I_{λ_k}, para $k \in \{1, ..., n\}$, isto é, todas as possíveis combinações de elementos $i_\lambda \in I_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, através da soma.

É fácil ver que a soma de ideais de um anel é também um ideal desse anel.

Definição 1.1.18. Sejam I, J ideais de um anel R. Definiremos o produto desses ideais como o conjunto de todas as combinações finitas de produtos através da soma; em outras palavras, $IJ = \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{m} i_r j_s$, com $i_r \in I$ e $j_s \in J$.

Definição 1.1.19 (Ideal primo)**.** Um ideal I de um anel A é dito ser primo se $CD \subseteq I$ implica em $C \subseteq I$ ou $D \subseteq I$, em que C e D são ideais do anel A.

Definição 1.1.20 (Anel primo)**.** Um anel A é dito ser primo se (0) é um de seus ideais primos, isto é, se C e D são ideais de A e $CD = (0)$, então $C = (0)$ ou $D = (0)$.

Note que a noção de *primalidade* de um anel equivale ao seguinte fato: um anel A é dito ser primo se dados C e D ideais não nulos de A, então $CD \neq (0)$.

Seja A um anel e consideremos o conjunto A_n como a seguir:

$$A_n = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} ;\ a_{ij} \in A,\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n \right\}.$$

O conjunto A_n será chamado de *anel de matrizes quadradas de ordem* n *sobre o anel* A ou, simplesmente, *anel de matrizes de ordem* n *sobre o anel* A.

Definição 1.1.21. Seja X um conjunto. Uma *relação de equivalência* E sobre X é um subconjunto de $X \times X$ satisfazendo:

$E1)$ *(Reflexividade)* $(x, x) \in E$, qualquer que seja $x \in X$;

$E2)$ *(Simetria)* $(x, y) \in E$ se, e somente se, $(y, x) \in E$, em que $x, y \in X$;

$E3)$ *(Transitividade)* Se (x, y) e (y, z) estão em E, então (x, z) está em E, em que $x, y, z \in X$.

É comum denotar relações de equivalência através do símbolo "$\equiv$". Dessa forma, uma maneira de se reescrever a definição de relação de equivalência é a seguinte:

Definição 1.1.22. Seja X um conjunto. Uma relação "$\equiv$" sobre X é dita ser *de equivalência* se ela satisfizer:

$E1)$ *(Reflexividade)* $x \equiv x$, qualquer que seja $x \in X$;

$E2)$ *(Simetria)* $x \equiv y$ se, e somente se, $y \equiv x$, em que $x, y \in X$;

$E3)$ *(Transitividade)* Se $x \equiv y$ e $y \equiv z$, então $x \equiv z$, em que $x, y, z \in X$.

Definição 1.1.23 (Classe de equivalência)**.** Sejam I um ideal de um anel A e x, y elementos de A. Dizemos que x é equivalente a y se, e somente se, $x - y \in I$. Notação: $x \equiv y$. Isso define uma relação de equivalência em A e denotaremos a classe de equivalência a qual x faz parte por

$$x + I = \bar{x} = \{x + a;\ a \in I\}.$$

O conjunto de todas essas classes será chamado de A/I.

Podemos definir operações (induzidas) no conjunto das classes a partir das operações do anel A, como a seguir:

1. $(x + I) + (y + I) = (x + y) + I$
2. $(x + I)(y + I) = xy + I$

Fica a cargo do leitor verificar que as operações acima estão bem definidas. Isso significa que A/I tem estrutura de anel, o qual será chamado *anel quociente A módulo I*.

Definição 1.1.24 (Homomorfismos de anéis)**.** Sejam $(A, +, \cdot)$ e $(B, \boxplus, \boxdot)$ anéis. Um homomorfismo de anéis é uma aplicação $\phi : A \to B$ tal que

$$\phi(x + y) = \phi(x) \boxplus \phi(y)$$

e

$$\phi(x \cdot y) = \phi(x) \boxdot \phi(y),$$

para quaisquer $x, y \in A$.

Se o homomorfismo é injetor, o chamaremos *monomorfismo*. Caso seja sobrejetor, será chamado de *epimorfismo*. Se o homomorfismo é, ao mesmo tempo, monomorfismo e epimorfismo, então será chamado *isomorfismo*. Se $\phi : A \to A$ é um homomorfismo, então ele é dito um *endomorfismo* e se, além disso, ele é isomorfismo, ele será chamado de *automorfismo*.

Definição 1.1.25 (Núcleo de um homomorfismo)**.** Sejam A e B anéis e $\phi : A \to B$ um homomorfismo de anéis. O conjunto $\ker(\phi) := \{x \in A;\ \phi(x) = 0\}$ é chamado de *núcleo* do homomorfismo ϕ e é um ideal do anel A.

Fica a cargo do leitor verificar que $\ker(\phi)$ é um ideal de A.

Definição 1.1.26 (Soma direta)**.** Seja A um anel e sejam $I_1, I_2, ..., I_n$ ideais de A. Se $A = \sum_{j=1}^{n} I_j$ e $I_j \cap I_l = (0)$, se $j \neq l$, então diremos que A é uma soma direta dos ideais $I_1, I_2, \ldots, I_n$. Notação: $A = I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots I_n = \displaystyle\bigoplus_{j=1}^{n} I_j$.

A intenção agora é generalizar a noção de soma direta, trabalhando com a noção de soma para uma família de anéis que pode ser infinita. Seja $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma coleção de anéis indexados pelo conjunto Λ. Consideremos o conjunto $S = \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ ("$\prod$" denota o produto cartesiano) munido das operações adição e multiplicação definidas coordenada a coordenada, isto é,

$$(a_\lambda)_\lambda + (b_\lambda)_\lambda = (a_\lambda + b_\lambda)_\lambda$$

e

$$(a_\lambda)_\lambda \cdot (b_\lambda)_\lambda = (a_\lambda \cdot b_\lambda)_\lambda.$$

Definido dessa forma (as operações em questão estão bem definidas), S é dito ser a *soma direta completa* dos anéis A_λ, $\lambda \in \Lambda$, e pode ser considerada como uma extensão da soma direta pois o conjunto dos elementos da forma

$$\begin{cases} a_\alpha, & \text{se } \lambda = \alpha \\ 0, & \text{se } \lambda \neq \alpha \end{cases} := (0\text{—}0, a_\alpha, 0\text{—}0), \quad \text{na } \alpha\text{-ésima posição},$$

é um ideal A'_α de S que é isomorfo a A_α e a aplicação

$$\begin{array}{ccc} S = \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda & \to & A'_\alpha \\ (a_\lambda)_\lambda & \mapsto & (0\text{—}0, a_\alpha, 0\text{—}0) \end{array} \quad (\alpha\text{-ésima posição})$$

é um epimorfismo de S em A'_α.

O subanel S_w de S que consiste de todos os elementos que possuem uma quantidade finita de entradas não nulas é chamado de *soma direta fraca* ou *soma direta discreta* da coleção $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Note que o homomorfismo natural definido acima, quando restrito a S_w, é uma sobrejeção de S_w em A'_α, qualquer que seja $\alpha \in \Lambda$. Diremos que um subanel S^* de S é uma *soma subdireta* da coleção $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ se o homomorfismo natural de S^* em A'_α,

$$(a_\lambda)_\lambda \quad \mapsto \quad (0\text{—}0, a_\alpha, 0\text{—}0),$$

é sobrejetivo, para todo $\alpha \in \Lambda$. Em particular, estamos dizendo que toda soma direta completa é uma soma subdireta.

Agora, faremos duas definições importantes para o desenvolvimento desse trabalho e se referem ao que chamamos de *condições de cadeia*. Sejam A um anel e $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma família enumerável (arbitrária) de ideais de A.

Definição 1.1.27 (Anel artiniano)**.** Um anel A é dito ser *artiniano à direita (à esquerda)* caso ele possua condição de cadeia descendente sobre ideais à direita (à esquerda), ou *D.C.C.* sobre ideais à direita (à esquerda) $-$ se qualquer sequência descendente de ideais à direita (à esquerda) $A \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq \cdots$ estaciona após um número finito de passos, isto é, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $I_N = I_{N+j},\ j \geq 1$. Um anel é dito ser *artiniano* se ele é artiniano à direita e à esquerda.

Definição 1.1.28 (Anel noetheriano)**.** Um anel A é dito ser *noetheriano à direita (à esquerda)* caso ele possua condição de cadeia ascendente sobre ideais à direita (à esquerda), ou *A.C.C.* sobre ideais à direita (à esquerda) $-$ se qualquer sequência ascendente de ideais à direita (à esquerda) $\{0\} \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq \cdots$ estaciona após um número finito de passos, isto é, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $I_N = I_{N+j},\ j \geq 1$. Um anel é dito ser *noetheriano* se ele é noetheriano à direita e à esquerda.

Definição 1.1.29 (A-módulo)**.** Sejam $(A, \boxplus, \boxdot)$ um anel e M um conjunto. Consideremos a operação " $+$ " sobre M e a aplicação " $\cdot$ " de $A \times M$ em M, tendo em mente a mesma notação já usada para grupos: $a \cdot m := \cdot(a, m)$, $a \in A$, $m \in M$. A tripla $(M, +, \cdot)$ é dita ser um *A-módulo à esquerda* se $(M, +)$ é um grupo abeliano e " $\cdot$ " satisfaz as seguintes condições:

$M1)$ $(a_1 \boxplus a_2) \cdot m = a_1 \cdot m + a_2 \cdot m$, para quaisquer $a_1, a_2 \in A$ e $m \in M$;

$M2)$ $(a_1 \boxdot a_2) \cdot m = a_1 \cdot (a_2 \cdot m)$, para quaisquer $a_1, a_2 \in A$ e $m \in M$;

$M3)$ $a \cdot (m_1 + m_2) = a \cdot m_1 + a \cdot m_2$, para quaisquer $m_1, m_2 \in M$ e $a \in A$;

$M4)$ $1 \cdot m = m$, para qualquer $m \in M$, caso o anel A seja unitário.

Considerando-se agora a aplicação " $\cdot$ " de $M \times A$ em M, define-se, analogamente, um *A-módulo à direita*. Quando as operações do anel A e do A-módulo à esquerda M já estiverem claras no contexto, escreveremos apenas ${}_AM$, para indicar que M é um A-módulo à esquerda. Analogamente, M_A indicará um A-módulo à direita. Caso M seja um A-módulo à esquerda e um B-módulo à direita, ele será dito um *bimódulo* e denotado por ${}_AM_B$. Se os anéis A e B forem isomorfos, M será, simplesmente, denominado *A-módulo.*

As operações " $+$ " e " $\cdot$ " são comumente chamadas de "adição" e "multiplicação por escalar", respectivamente. O elemento neutro da adição será chamado de *zero* do módulo e denotado por "0". Para a multiplicação por escalar, o símbolo " $\cdot$ " é, normalmente supresso, isto é, $am := a \cdot m$, $a \in A$, $m \in M$.

Definição 1.1.30 (A-submódulo)**.** Seja $(M, +, \cdot)$ um A-módulo à esquerda. Um subconjunto não vazio N de M é dito ser um *A-submódulo* de M ou, simplesmente, um *submódulo* de M, se ele é um A-módulo à esquerda com as operações induzidas de M, isto é, se as restrições " $+$ " e " $\cdot$ " sobre $N \times N$ e $A \times N$, respectivamente, são fechadas em N; em outras palavras: $n_1 + (-n_2) \in N$, para quaisquer $n_1, n_2 \in N$, e $an \in N$, para quaisquer $a \in A$ e $n \in N$. Analogamente, definimos submódulos para A-módulos à direita.

É fácil ver que o conjunto unitário cujo elemento é $0 \in M$ se constitui um submódulo de um A-módulo à esquerda (à direita) M e será denotado por (0) ou $\{0\}$. Também note que o próprio M é um submódulo de si mesmo. Tais conjuntos são chamados de *submódulos triviais* do A-módulo à esquerda (à direita) M.

Definição 1.1.31 (A-módulo simples)**.** Um A-módulo M à esquerda (à direita) é dito ser *simples* se os seus únicos submódulos são ele mesmo e o (0), ou seja, se ele admite apenas os submódulos triviais.

Definição 1.1.32 (A-módulo cíclico)**.** Um A-módulo à esquerda M é dito ser cíclico se $M = Am = \{am; a \in A\}$, para algum $m \in M$. Analogamente, N é dito ser A-módulo à direita cíclico se $N = nA = \{na; a \in A\}$, para algum $n \in N$.

Definição 1.1.33 (A-módulo irredutível)**.** Um A-módulo M à esquerda é dito ser *irredutível* se ele é simples e, além disso, $AM = \bigcup\{Am;\ m \in M\} \neq \{0\}$. Analogamente, um A-módulo M à direita é dito ser *irredutível* se ele é simples e, além disso, $MA = \bigcup\{mA;\ m \in M\} \neq \{0\}$.

Definição 1.1.34. Seja X um conjunto. Uma *relação de ordem* O sobre X é um subconjunto de $X \times X$ satisfazendo:

$O1)$ *(Reflexividade)* $(x, x) \in O$, qualquer que seja $x \in X$;

$O2)$ *(Antissimetria)* Se (x, y) e (y, x) estão em O, então $x = y$, em que $x, y \in X$;

$O3)$ *(Transitividade)* Se (x, y) e (y, z) estão em O, então (x, z) está em O, em que $x, y, z \in X$.

Um exemplo de relação ordem é a ordem usual sobre os reais, isto é, $a \leq b$ se $b - a$ é um real não negativo, $a, b \in \mathbb{R}$. Outro exemplo de ordem é a divisão "$|$" sobre os números naturais, da seguinte forma: $n \leq m$ se $n|m$ ("$n|m$" significa "n divide m", isto é, existe um natural r tal que $m = rn$).

É comum denotar relações de ordem através do símbolo "$\leq$". Dessa forma, uma maneira de se reescrever a definição de relação de ordem é a seguinte:

Definição 1.1.35. Seja X um conjunto. Uma relação "$\leq$" sobre X é dita ser *de ordem* se ela satisfizer:

$O1)$ *(Reflexividade)* $x \leq x$, qualquer que seja $x \in X$;

$O2)$ *(Antissimetria)* Se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$, em que $x, y \in X$;

$O3)$ *(Transitividade)* Se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$, em que $x, y, z \in X$.

A relação "$\leq$" sobre um conjunto X é comumente chamada de *ordem parcial* (porque nem todos os elementos são comparáveis) ou, simplesmente, *ordem*. Dessa forma, $(X, \leq)$ é dito ser *um conjunto parcialmente ordenado* e se x e y em X são comparáveis, usaremos a notação usual dos números. Por exemplo, se $x \leq y$, então escreveremos "x é menor ou igual a y" ou "y é maior ou igual a x" para representar esse fato.

Definição 1.1.36 (Supremos e ínfimos)**.** Seja $(X, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado e seja $Y \subseteq X$. O *supremo* de Y, se existir, é o menor elemento de X que é maior ou igual a cada elemento de Y. De maneira análoga, o *ínfimo* de Y, se existir, é o maior elemento de X que é menor ou igual a cada elemento de Y. Notação: $\vee Y$ denota o supremo de Y e $\wedge Y$ denota o ínfimo de Y.

Definição 1.1.37 (Reticulado)**.** Um conjunto parcialmente ordenado $(X, \leq)$ em que quaisquer dois elementos (ou, equivalentemente, qualquer subconjunto binário) possuírem supremo e ínfimo é dito ser um *reticulado.* Notação: $(X, \vee, \wedge)$.

O menor elemento de um reticulado $(X, \leq)$ será denotado por $\perp$.

Definição 1.1.38 (Reticulado completo)**.** Um reticulado $(X, \vee, \wedge)$ é dito ser *completo* se qualquer subconjunto de X admite supremo e ínfimo.

1.2 Resultados preliminares

Lema 1.2.1. *A soma de um conjunto qualquer de ideais (à esquerda, à direita, bilateral) de um anel A é ainda um ideal (à esquerda, à direita, bilateral) do anel A.*

Teorema 1.2.2 (Primeiro Teorema do Isomorfismo)**.** *Se $\varphi : A \to B$ é um homomorfismo de anéis, então $\ker \varphi = \{x \in A;\ \varphi(x) = 0\}$ é um ideal de A e, além disso, $A/\ker \varphi \cong \varphi(A)$.*

Teorema 1.2.3 (Segundo Teorema do Isomorfismo)**.** *Se B é um subanel e I é um ideal do anel do anel A, então $B \cap I$ é um ideal em B e*

$$B/(B \cap I) \cong (B + I)/I.$$

Teorema 1.2.4 (Terceiro Teorema do Isomorfismo). *Seja $\varphi : A \to B$ um homomorfismo de anéis. Sejam K um ideal de $\varphi(A)$ e I a pré-imagem $\varphi^{-1}(K)$ de K em A pelo homomorfismo φ. O conjunto I é um ideal de A, $\ker\varphi$ é um ideal de I e, além disso, vale a seguinte relação:*

$$A/I \cong \varphi(A)/K \cong (A/\ker\varphi)/(I/\ker\varphi).$$

Teorema 1.2.5. *Se A é um anel e I um ideal de A, então existe uma correspondência biunívoca entre os ideais de A/I e os ideais de A que contêm I. Ademais, a imagem de A por um homomorfismo é isomorfa ao anel quociente A/L, para um ideal (adequado) L de A.*

Teorema 1.2.6. *Um anel A é isomorfo a uma soma subdireta de anéis A_i se, e somente se, A contiver um conjunto de ideais B_i tais que $\cap B_i = (0)$ e $A/B_i \cong A_i$.*

Teorema 1.2.7. *Se M é um A-módulo irredutível, então M é cíclico.*

Lema 1.2.8 (Andrunakievic). *Sejam A um anel e $C \trianglelefteq B \trianglelefteq A$. Se C_A o ideal de A gerado por C, então $C_A^3 \subseteq C$.*

1.3 Alguns fatos sobre números ordinais e cardinais

Esta seção exibirá uma lista de alguns resultados acerca dos números ordinais e cardinais. Um leitor interessado poderá consultar [Jec03] para maiores informações.

Proposição 1.3.1. *Para todo conjunto X, o cardinal do conjunto de todos os subconjuntos de X é maior que o cardinal do próprio X.*

Proposição 1.3.2. *Para todo conjunto de cardinais W existe um cardinal que é maior que todos os cardinais em W.*

Proposição 1.3.3. *Se um conjunto ordenado é similar a um conjunto bem-ordenado, então esse conjunto é bem-ordenado.*

Proposição 1.3.4. *Para quaisquer dois números ordinais u e v, apenas uma dessas três condições deve ocorrer: $u < v$, $u = v$, $u > v$.*

Proposição 1.3.5. *Se C_u é o conjunto de todos os ordinais menores que o ordinal u e se C_u é ordenado de acordo com a "pertinência", então C_u é bem-ordenado.*

Proposição 1.3.6. *Todo conjunto de ordinais, se ordenado de acordo com a pertinência, é um conjunto bem-ordenado.*

Proposição 1.3.7. *Para todo ordinal* u*, existe um ordinal sucessor* $u+1$*, tal que* $u < u+1$ *e, além disso, não existe um ordinal* v *com* $u < v < u + 1$*.*

Proposição 1.3.8. *Para todo conjunto* W *de ordinais existe um ordinal que é maior que todos os ordinais em* W*.*

Proposição 1.3.9 (Indução transfinita)**.** *Se uma afirmação é verdadeira para o ordinal* 1 *e se tal afirmação também é verdadeira para o ordinal* u *sempre que é verdadeira para todos os ordinais menores (estritamente) que* u*, então essa afirmação é verdadeira para todos os ordinais.*

Capítulo 2

Classes Radicais

Nesse capítulo, introduziremos o conceito de *radical*. A noção de radical usada aqui deriva dos conceitos "classe radical", "propriedade radical" e "radical de um anel". As principais referências utilizadas nesse trabalho são [Div64] e [GW04].

2.1 Definições

Seja $\mathcal{C}$ uma classe[1] não vazia qualquer de anéis. Diremos que A é um $\mathcal{C}$-*anel* caso ele seja um elemento de $\mathcal{C}$. Um ideal I de um anel A é um $\mathcal{C}$-*ideal* de A se I estiver em $\mathcal{C}$.

Definição 2.1.1 (Anel semissimples)**.** Um anel A é dito $\mathcal{C}$-*semissimples* se ele não contiver nenhum $\mathcal{C}$-ideal não nulo, em que $\mathcal{C}$ é uma classe não vazia de anéis.

Se $\mathcal{C}$ é uma classe não vazia de anéis, a classe de todos os anéis $\mathcal{C}$-semissimples será denotada por $\mathcal{S}(\mathcal{C})$ ou $\mathcal{S}_{\mathcal{C}}$.

Note que, até agora, classes de anéis, que são *a priori* objetos meramente formais, são coleções bastante abstratas e inclusive não estão obrigatoriamente relacionadas com as propriedades algébricas dos seus elementos. Poderíamos ter, por exemplo, anéis isomorfos em classes de anéis distintas. Entretanto, nos interessará um determinado tipo de classe de anéis muito específico: as *classes radicais*.

Definição 2.1.2 (Classe radical)**.** Uma classe não vazia $\mathcal{R}$ de anéis associativos é dita ser *radical* se ela satisfizer as seguintes condições:

$R1)$ $\mathcal{R}$ é homorficamente fechada;

$R2)$ $\mathcal{R}(A) = \sum\{J; J \trianglelefteq A \text{ e } J \in \mathcal{R}\} \in \mathcal{R}$, A é um anel associativo;

$R3)$ $\mathcal{R}(A/\mathcal{R}(A)) = (0)$, para qualquer anel A.

[1] É importante nos lembrarmos de que a coleção de todos os anéis não é um conjunto (consulte [Jec03]).

A condição $R1)$ é clara: se φ é um homomorfismo (de anéis) qualquer definido sobre $A \in \mathcal{R}$, então $\varphi(A) \in \mathcal{R}$. Tendo em mente a correspondência entre ideais e imagens homomorfas de um anel, isso é o mesmo que dizer que se $I \trianglelefteq A$ e $A \in \mathcal{R}$, então $A/I \in \mathcal{R}$. Em particular, se $A \in \mathcal{R}$ e A é isomorfo ao anel B, então $B \in \mathcal{R}$. O ideal $\mathcal{R}(A)$, que existe para qualquer anel A, é chamado de *radical do anel* A. Uma classe radical será chamada simplesmente de *radical* e, em virtude da observação anterior, note que "radical" e "radical de um anel" são conceitos bastante distintos, pois "radical" é uma classe de anéis satisfazendo certas propriedades, ao passo que o "radical de um anel" (anel associativo) é um ideal do anel que pertence a uma certa classe radical (quando esse mesmo ideal passa a ser visto como um anel). A menos que se especifique o contrário, uma classe de anéis, nesse trabalho, é uma classe não vazia de anéis associativos $-$ um radical é uma classe de anéis associativos satisfazendo $R1)$, $R2)$ e $R3)$ $-$ e um anel é um anel associativo.

Se $\mathcal{R}$ é um radical, o anel A é dito ser $\mathcal{R}$-*radical* ou $\mathcal{R}$-*anel* se $\mathcal{R}(A) = A$, ou, equivalentemente, se $A \in \mathcal{R}$. Um ideal I de A é um $\mathcal{R}$-*ideal* se $\mathcal{R}(I) = I$, ou, equivalentemente, se $I \in \mathcal{R}$. Por sua vez, retomando a definição 2.1.1, o anel A é dito ser $\mathcal{R}$-*semissimples* se $\mathcal{R}(A) = (0)$. De igual forma, a classe de todos os anéis $\mathcal{R}$-semissimples será denotada por $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ ou $\mathcal{S}_{\mathcal{R}}$.

A soma de uma família ideais $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ será aqui denotada pelo conjunto de todas as somas $\sum_{\lambda\in\Lambda} i_\lambda$, com $i_\lambda \in I_\lambda$, nas quais apenas uma quantidade finita dos i_λ são diferentes de zero (veja a definição 1.1.17).

Feita esta observação, o lema 1.2.1, da teoria básica de anéis, nos será útil.

A soma de um conjunto qualquer de ideais à direita (à esquerda, bilaterais) é também um ideal à direita (à esquerda, bilateral).

$\blacksquare$

Esse lema nos diz, em particular, que uma família de ideais de um anel A admite um maximal e esse maximal é, exatamente, a soma desses ideais. A condição $R2)$ afirma que qualquer anel A deve conter um $\mathcal{R}$-ideal, o qual é maximal entre $\mathcal{R}$-ideais do anel A e esse ideal é, exatamente, a soma dos $\mathcal{R}$-ideais do anel. A condição $R3)$ diz que $A/\mathcal{R}(A)$ é um anel $\mathcal{R}$-semissimples.

A propriedade $R2)$ também determina que o anel nulo é um $\mathcal{R}$-anel. A definição de anel $\mathcal{R}$-radical já estava implícita na definição 2.1.2, mas aqui consideraremos que $\mathcal{R}$-ideais de um anel A são ideais diferentes do próprio anel A, a menos que se diga o contrário. É óbvio que o anel nulo é o único anel que é, ao mesmo tempo, um anel $\mathcal{R}$-radical e $\mathcal{R}$-semissimples.

Note também que um radical $\mathcal{R}$ atua como um operador definido na classe $\mathbb{A}$ de todos os anéis da seguinte forma:

$$\mathcal{R} : A \mapsto \mathcal{R}(A),$$

em que $A \in \mathbb{A}$ é um anel arbitrário.

O próximo teorema é uma maneira menos intuitiva de se definir uma classe radical. Entretanto, é uma forma equivalente da definição 2.1.2 e bastante útil na prova de alguns resultados sobre radicais.

Teorema 2.1.3. *A classe de anéis $\mathcal{R}$ é radical se, e somente se, ela satisfizer:*

$R1)$ *$\mathcal{R}$ é homorficamente fechada;*

$R4)$ *Se toda imagem homomorfa não nula de um anel A contém um $\mathcal{R}$-ideal não nulo, então A está em $\mathcal{R}$.*

Demonstração: Suponha que $\mathcal{R}$ seja um radical. Vejamos que $R2)$ e $R3)$ implicam $R4)$: façamos por contraposição. Seja A um anel não nulo que não está em $\mathcal{R}$. Por $R2)$, existe um $\mathcal{R}$-ideal maximal $\mathcal{R}(A) \neq A$ contido em A. Ademais, $A/\mathcal{R}(A)$ é uma imagem epimorfa não nula de A. Por $R3)$, $A/\mathcal{R}(A)$ não deve conter um $\mathcal{R}$-ideal não nulo. Concluímos, portanto, que existe uma imagem homomorfa não nula de A que não contém nenhum $\mathcal{R}$-ideal.

Assuma agora que $\mathcal{R}$ cumpre as condições $R1)$ e $R4)$. Observemos que (0) é um $\mathcal{R}$-ideal, por argumento de vacuidade com respeito à condição $R4)$. Para estabelecer $R2)$, seja J a soma de todos os $\mathcal{R}$-ideais de um anel A. Mostraremos que J é um $\mathcal{R}$-ideal de A. Se $J = (0)$, segue-se o fato trivialmente. Se $J \neq (0)$, seja J/K um anel quociente não nulo qualquer. Como $K \subsetneq J$, deve existir em A um $\mathcal{R}$-ideal W tal que W não está contido em K (pois se assim não fosse, K seria o maximal dos $\mathcal{R}$-ideais). Pelo segundo teorema do isomorfismo

$$(W + K)/K \cong W/(W \cap K).$$

O lado esquerdo desse isomorfismo é um ideal não nulo de J/K, enquanto o lado direito é uma imagem homomorfa do $\mathcal{R}$-anel W e, por $R1)$, é também um $\mathcal{R}$-anel. Portanto, toda imagem homomorfa não nula de J contém um $\mathcal{R}$-ideal não nulo. Por $R4)$, J é um $\mathcal{R}$-anel. Isso estabelece $R2)$.

Finalmente, devemos estabelecer $R3)$. Seja A um anel qualquer. Sabemos que A tem um $\mathcal{R}$-radical $\mathcal{R}(A)$, pois $R2)$ já é estabelecido. Suponha que $A/\mathcal{R}(A)$ não seja um anel $\mathcal{R}$-semissimples e seja $\mathcal{R}(A/\mathcal{R}(A)) = M/\mathcal{R}(A) \neq (0)$. Ora, M é um ideal de A e M contém propriamente $\mathcal{R}(A)$. Seja M/N um anel quociente (arbitrário) de M. Se $N \supseteq \mathcal{R}(A)$, então $\mathcal{R}(A)$ é um ideal de N e, pelo terceiro teorema do isomorfismo,

$$M/N \cong (M/\mathcal{R}(A)) \,/\, (N/\mathcal{R}(A))$$

e, por $R1$), M/N é um $\mathcal{R}$-anel. Entretanto, se $N \not\supseteq \mathcal{R}(A)$, então $\mathcal{R}(A) \cap N \subset \mathcal{R}(A)$ e, pelo segundo teorema do isomorfismo,

$$(N + \mathcal{R}(A))/N \cong \mathcal{R}(A)/(\mathcal{R}(A) \cap N).$$

O lado esquerdo desse isomorfismo é um ideal não nulo de M/N, enquanto o lado direito é uma imagem homomorfa de $\mathcal{R}(A)$ e, por $R1$), é também está em $\mathcal{R}$. Portanto, toda imagem homomorfa não nula de M contém um $\mathcal{R}$-ideal não nulo e, por $R4$), M é um $\mathcal{R}$-anel, pela qual concluímos que M deve estar contido em $\mathcal{R}(A)$: contradição! Isso estabelece $R3$) e encerra a prova.

■

Exibiremos outra forma equivalente de se definirem classes radicais, usando aquilo que chamamos de *fecho por extensão*.

Teorema 2.1.4. *A classe de anéis $\mathcal{R}$ é radical se, e somente se, ela satisfizer as condições abaixo:*

$R1$) *$\mathcal{R}$ é homomorfamente fechada;*

$R2$) $\mathcal{R}(A) = \sum\{J; J \trianglelefteq A \text{ e } J \in \mathcal{R}\} \in \mathcal{R}$, *para qualquer anel A;*

$R5$) *(Fecho por extensões) Se $I \trianglelefteq A$ e $I, A/I \in \mathcal{R}$, então $A \in \mathcal{R}$.*

Demonstração: Assuma que $\mathcal{R}$ é radical. Sejam A um anel arbitrário e I um ideal de A tais que I e A/I estejam em $\mathcal{R}$, isto é, $\mathcal{R}(I) = I$ e $\mathcal{R}(A/I) = A/I$. É claro que $\mathcal{R}(I) \subseteq \mathcal{R}(A)$, para qualquer anel A e, nesse caso, como I é um $\mathcal{R}$-ideal de A, isso significa que I é ideal de $\mathcal{R}(A)$. Ademais,

$$\frac{A/I}{\mathcal{R}(A)/I} \cong A/\mathcal{R}(A),$$

logo

$$\frac{\mathcal{R}\,(A/I)}{\mathcal{R}(A)/I} = \mathcal{R}\left(\frac{A/I}{\mathcal{R}(A)/I}\right) = \mathcal{R}\,(A/\mathcal{R}(A)) = (0)$$

e significa que $\mathcal{R}\,(A/I) = \mathcal{R}(A)/I$. Portanto,

$$A/I = \mathcal{R}\,(A/I) = \mathcal{R}(A)/I,$$

implicando que $A = \mathcal{R}(A)$ ou, equivalentemente, $A \in \mathcal{R}$, pela qual concluímos que $\mathcal{R}$ satisfaz a condição $R5$). Reciprocamente, suponha que $\mathcal{R}$ satisfaça as condições $R1$), $R2$) e $R5$). Se $A \in \mathcal{R}$, então é óbvio que $A/\mathcal{R}(A) = A/A = (0)$. Seja então um anel $A \notin \mathcal{R}$. Pela contraposição da condição $R5$), $A/\mathcal{R}(A) \notin \mathcal{R}$. Suponha agora que $\mathcal{R}(A/\mathcal{R}(A)) \neq (0)$, digamos $\mathcal{R}(A/\mathcal{R}(A)) = M/\mathcal{R}(A)$. Logo, M é um $\mathcal{R}$-ideal próprio de A, pois $\mathcal{R}$ satisfaz

$R5)$, contendo propriamente $\mathcal{R}(A)$, contradizendo a maximalidade de $\mathcal{R}(A)$ e, portanto, a condição $R2)$. Logo, $\mathcal{R}(A/\mathcal{R}(A)) = (0)$, para um anel A arbitrário, implicando no fato de que $\mathcal{R}$ cumpre as condições $R1)$, $R2)$ e $R3)$; portanto $\mathcal{R}$ é radical.

■

Outra caracterização para classes radicais é a seguinte:

Teorema 2.1.5. *A classe de anéis $\mathcal{R}$ é radical se, e somente se, ela satisfizer as condições abaixo:*

$R1)$ *$\mathcal{R}$ é homomorfamente fechada;*

$R6)$ *(Propriedade indutiva) $\mathcal{R}$ contém todas as uniões de cadeias de $\mathcal{R}$-ideais de um anel A arbitrário;*

$R5)$ *(Fecho por extensões) Se $I \trianglelefteq A$ e $I, A/I \in \mathcal{R}$, então $A \in \mathcal{R}$.*

Demonstração: Consulte [GW04].

■

Observação 2.1.6. Note que teorema 2.1.5 sugere a definição de radical em outros tipos de estruturas matemáticas, possivelmente não algébricas.

O próximo lema nos permite afirmar quando um anel é $\mathcal{R}$-radical ou não usando a $\mathcal{R}$-semissimplicidade.

Lema Técnico 2.1.7. *Seja $\mathcal{R}$ um radical. A é um anel $\mathcal{R}$-radical se, e somente se, A não pode ser sobrejetado homomorfamente num anel $\mathcal{R}$-semissimples não nulo.*

Demonstração: Se A é um anel $\mathcal{R}$-radical, então, por $R1)$, toda imagem homomorfa não nula de A é também um anel $\mathcal{R}$-radical e, portanto, não é $\mathcal{R}$-semissimples. Para provar a recíproca, suponha que A não seja um anel $\mathcal{R}$-radical. Por $R2)$, existe o $\mathcal{R}$-radical $\mathcal{R}(A) \neq A$. Logo, A pode ser sobrejetado homorficamente no anel $A/\mathcal{R}(A)$, o qual, por $R3)$, é $\mathcal{R}$-semissimples .

■

Esse lema afirma que anéis $\mathcal{R}$-radicais e $\mathcal{R}$-semissimples são bastante distintos com respeito às suas propriedades algébricas. Mais adiante, entenderemos com mais clareza essa "distinção radical" entre os anéis de $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}(\mathcal{R})$.

2.2 Construção dos radicais superior e inferior

No decorrer desse capítulo, obteremos radicais a partir de quaisquer classes não radicais de anéis associativos. Interessará-nos construir dois tipos de radicais importantes para essa teoria: os radicais *superior* e *inferior*. Gardner, em [GW04], propõe a construção dos mesmos através de *ínfimos* e *supremos* de classes radicais. As técnicas apresentadas aqui podem ser vistas em [Div64] e [GW04].

Teorema 2.2.1. *A classe $\mathcal{M}$ é a classe de todos os anéis $\mathcal{R}$-semissimples não nulos com respeito a um certo radical $\mathcal{R}$ se, e somente se, $\mathcal{M}$ satisfizer as seguintes condições:*

$S1)$ *Todo ideal não nulo de um anel pertencente a $\mathcal{M}$ pode ser sobrejetado homomorfamente nalgum anel de $\mathcal{M}$.*

$S2)$ *Se todo ideal não nulo de um anel A pode ser sobrejetado homomorfamente nalgum anel não nulo de $\mathcal{M}$, então o anel A pertence a $\mathcal{M}$.*

Demonstração: Suponha que tenhamos um radical $\mathcal{R}$ fixado e que $\mathcal{M}$ é classe de todos os anéis $\mathcal{R}$-semissimples. Sejam $A \in \mathcal{M}$ e I um ideal de A. Como A está em $\mathcal{S}(\mathcal{R})$, I não está em $\mathcal{R}$. Pelo lema técnico 2.1.7, I pode ser sobrejetado homomorfamente num anel $\mathcal{R}$-semissimples, isto é, um anel de $\mathcal{M}$. Logo, $\mathcal{M}$ satisfaz a propriedade $S1$). Seja A um anel que não é $\mathcal{R}$-semissimples. Logo, A tem um $\mathcal{R}$-radical não nulo $\mathcal{R}(A)$. O ideal $\mathcal{R}(A)$ não pode ser sobrejetado homomorfamente num anel $\mathcal{R}$-semissimples, por causa do lema técnico 2.1.7. Isso estabelece $S2$).

Reciprocamente, suponha que $\mathcal{M}$ tenha as propriedades $S1$) e $S2$). Tendo por inspiração o lema técnico 2.1.7, definamos a classe $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ como a seguir:

$\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ é a classe de todos os anéis que não podem ser sobrejetados homomorfamente em algum anel não nulo de $\mathcal{M}$.

Mostraremos que a classe $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ cumpre as condições $R1$) e $R4$): portanto é um radical. A condição $R1$) é imediata, porque se uma imagem homomorfa de A pode ser sobrejetada homomorfamente num anel de $\mathcal{M}$, então A pode sobrejetado homomorfamente num anel de $\mathcal{M}$. Nesse caso, A não é um $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$-anel e isso valida $R1$). Para mostrar que $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ tem a propriedade $R4$), seja A um anel tal que toda imagem homomorfa não nula de A tem um $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$-ideal não nulo. Se A não é um $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$-anel, então ele pode ser sobrejetado homorficamente num anel não nulo A' de $\mathcal{M}$ e A' deve ter um $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$-ideal não nulo I. Por $S1$), I pode ser sobrejetado homomorfamente num anel não nulo de $\mathcal{M}$, contradizendo o fato de I ser um $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$-anel. Portanto, A tem de ser um $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$-anel e $R4$) é válida. Logo, $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ é um radical.

Resta provar que $\mathcal{M}$ é exatamente a classe de todos os anéis $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$-semissimples. Se $A \in \mathcal{M}$, então A não pode ser $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$-anel, por $S1$). Em contrapartida, seja A um anel $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$-semissimples. Consequentemente, todo ideal não nulo de A não é um $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$-anel, portanto pode ser sobrejetado homomorfamente em um anel não nulo de $\mathcal{M}$. Por $S2$), $A \in \mathcal{M}$. Logo, $\mathcal{M}$ é precisamente a classe de todos os anéis $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$-semissimples.

■

Pela forma como foi demonstrado o teorema 2.2.1, a classe de anéis $\mathcal{M}$ precisa apenas da propriedade $S1$) para que todos os seus elementos sejam $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$-semissimples e que $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ seja um radical. Com essa observação, podemos exigir menos da classe $\mathcal{M}$ para construir o radical $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$.

Lema 2.2.2. *Se uma classe de anéis $\mathcal{M}$ satisfaz a propriedade $S1$) e se a classe $\overline{\mathcal{M}}$ é definida por todos os anéis A tais que todo ideal não nulo de A pode ser sobrejetado homomorfamente nalgum anel de $\mathcal{M}$, então a classe $\overline{\mathcal{M}}$ tem as propriedades $S1$) e $S2$).*

Demonstração: Observe que $\mathcal{M} \leq \overline{\mathcal{M}}$ ("$\leq$" denotará a ordem usual de classes: a contingência), pois $\mathcal{M}$ satisfaz a propriedade $S1$). Se $A \in \overline{\mathcal{M}}$, então todo ideal não nulo de A pode ser levado homomorfamente sobre um anel não nulo de $\mathcal{M}$, portanto sobre um anel não nulo de $\overline{\mathcal{M}}$. Logo, $\overline{\mathcal{M}}$ tem a propriedade $S1$). Seja A um anel tal que cada ideal não nulo possa ser sobrejetado homomorfamente num anel de $\overline{\mathcal{M}}$. Pela definição de $\overline{\mathcal{M}}$, esse anel pode ser sobrejetado homomorfamente num anel não nulo de $\mathcal{M}$, logo A está em $\overline{\mathcal{M}}$. Portanto, $\overline{\mathcal{M}}$ tem $S2$).

■

O que podemos perceber nesse teorema é que todas as classes que satisfazem a propriedade $S1$) determinam um radical, o qual denotamos por $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ ou $\mathcal{U}(\mathcal{M})$. Dessa forma, para a coleção de classes $\{\mathcal{M};\ \mathcal{M}$ satisfaz a propriedade $S1)\}$, podemos definir o operador radical $\mathcal{U}$, de forma que $\mathcal{M} \mapsto \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$. O radical $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ é chamado de *radical superior determinado por* $\mathcal{M}$. Os anéis em $\overline{\mathcal{M}}$ são (exatamente) todos os anéis $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$-semissimples e, como $\mathcal{M} \leq \overline{\mathcal{M}}$, isso torna todos os elementos de $\mathcal{M}$ anéis $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$-semissimples.

Sejam $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ dois radicais. Dizer que $\mathcal{R}_1 \leq \mathcal{R}_2$ (todo anel $\mathcal{R}_1$-radical é $\mathcal{R}_2$-radical) é o mesmo que dizer que todo anel $\mathcal{R}_2$-semissimples é $\mathcal{R}_1$-semissimples, $\mathcal{S}(\mathcal{R}_2) \leq \mathcal{S}(\mathcal{R}_1)$, em virtude do lema 2.1.7. Isso também equivale a dizer que num anel A arbitrário tem-se $\mathcal{R}_1(A) \subseteq \mathcal{R}_2(A)$. A justificativa da palavra "superior" é o próximo resultado:

Lema 2.2.3. *Se $\mathcal{M}$ é uma classe de anéis que tem $S1$) e se $\mathcal{R}$ é um radical para o qual todos os anéis em $\mathcal{M}$ são $\mathcal{R}$-semissimples, então $\mathcal{R}$ é menor ou igual ao radical superior determinado por $\mathcal{M}$.*

Demonstração: Como a classe $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ satisfaz a propriedade $S2$), pelo teorema 2.2.1, ela contém todos os anéis de $\overline{\mathcal{M}}$ implicando em $\mathcal{S}(\mathcal{R}) \geq \mathcal{S}(\mathcal{U}(\mathcal{M}))$, o que equivale a dizer $\mathcal{R} \leq \mathcal{U}(\mathcal{M})$.

■

Agora construiremos um radical que contenha uma classe $\mathcal{N}$, ou seja, um radical $\mathcal{R}$ para o qual todos os anéis em $\mathcal{N}$ sejam anéis $\mathcal{R}$-radicais. Essa construção é transfinita e requererá do leitor algum conhecimento sobre números ordinais (um leitor não familiarizado com esse assunto pode recorrer à seção 1.3 do capítulo 1).

Seja $\mathcal{N}$ uma classe qualquer de anéis associativos. Um anel A é dito ser de primeiro grau (ou de grau 1) sobre $\mathcal{N}$ se ele é o anel nulo ou imagem homomorfa de algum anel em $\mathcal{N}$. É óbvio que os próprios anéis de $\mathcal{N}$ são de grau 1 sobre $\mathcal{N}$ e que todo anel quociente obtido a partir de anel qualquer em $\mathcal{N}$ também está em $\mathcal{N}$. Um anel A é dito ser de segundo grau (ou de grau 2) sobre $\mathcal{N}$ se toda imagem homomorfa não nula de A contém um ideal não nulo que é de primeiro grau sobre $\mathcal{N}$. Para um ordinal $\beta > 1$, se β não é limite, um anel A é dito de grau β sobre $\mathcal{N}$ se toda imagem homomorfa não nula de A contém um ideal não nulo de grau $\beta - 1$ sobre $\mathcal{N}$. Se β é um ordinal limite, então A é de grau β sobre $\mathcal{N}$ se ele é de grau α sobre $\mathcal{N}$ para algum $\alpha < \beta$. Caso não exista um ordinal $\alpha \neq 0$ tal que um anel A seja de grau α sobre $\mathcal{N}$, A será dito um anel de grau zero sobre $\mathcal{N}$.

Afirmação 2.2.4. *As seguintes assertivas são verdadeiras, nas quais A é um anel arbitrário e α e β são ordinais:*

1) *Toda imagem homomorfa de um anel de grau $0 \neq \alpha$ sobre $\mathcal{N}$ é também de grau α sobre $\mathcal{N}$.*

2) *Se um anel é de grau α sobre $\mathcal{N}$, com $0 \neq \alpha < \beta$, então ele é também de grau β sobre $\mathcal{N}$.*

Demonstração: Provemos 1). Primeiro, note que tal afirmação é verdadeira para $\alpha = 1$. Tome $\alpha > 1$ um ordinal que não é limite. Se A é de grau α sobre $\mathcal{N}$ e se A' é uma imagem homomorfa qualquer de A, então toda imagem homomorfa não nula A'' de A' é também imagem homomorfa de A, portanto A'' contém um ideal não nulo de grau $\alpha - 1$ sobre $\mathcal{N}$. Logo, A' é de grau α sobre $\mathcal{N}$. Suponha agora que α é um ordinal limite. Dessa forma, A é de algum grau α' sobre $\mathcal{N}$, com $\alpha' < \alpha$. Seja α'' o ordinal minimal tal que A é de grau α'' sobre $\mathcal{N}$ (pois o ínfimo de ordinais é um ordinal). É claro que α'' não é um ordinal limite. Aplicando o resultado anterior, toda imagem homomorfa de A é de grau α'' sobre $\mathcal{N}$, portanto de grau α sobre $\mathcal{N}$. Isso prova 1).

Para estabelecer 2), note que não há o que provar se $\beta = 1$. Analogamente ao primeiro caso, assuma que β não é um ordinal limite. Se A é de grau $\beta - 1$ sobre $\mathcal{N}$, então toda imagem homomorfa de A é também de grau $\beta - 1$ sobre $\mathcal{N}$, por 1). Portanto, A satisfaz a condição de ser de grau β sobre $\mathcal{N}$ e, por recursão, 2) é válida sempre que tenhamos $\alpha \leq \beta - 1 < \beta$. Finalmente, se β é um ordinal limite e A é de grau α sobre $\mathcal{N}$, com $\alpha < \beta$, então segue-se da definição que A é de grau β sobre $\mathcal{N}$.

□

Seja $\mathcal{L}(\mathcal{N})$ a classe de todos os anéis que são de algum grau sobre $\mathcal{N}$. Claramente, $\mathcal{N} \leq \mathcal{L}(\mathcal{N})$. Mostraremos que $\mathcal{L}(\mathcal{N})$ satisfaz $R1$) e $R4$).

Teorema 2.2.5. *A classe $\mathcal{L}(\mathcal{N})$ é radical.*

Demonstração: De imediato $R1$) é válida, por causa da afirmação 2.2.4. Para estabelecer $R4$), seja A um anel tal que toda imagem homomorfa $\varphi(A)$ tenha um ideal não nulo $I_\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{N})$, isto é, I_φ é um anel de grau α_φ sobre $\mathcal{N}$. Ora, sabemos que $\sup\{\alpha_\varphi\}$ é também um ordinal, digamos β. Usando novamente a afirmação 2.2.4, todos os ideais I_φ também são de grau β sobre $\mathcal{N}$. Logo, A é de grau $\beta + 1$ sobre $\mathcal{N}$, consequentemente $A \in \mathcal{L}(\mathcal{N})$. $\mathcal{L}(\mathcal{N})$ satisfaz as propriedades e $R1$) e $R4$), portanto $\mathcal{L}(\mathcal{N})$ é um radical.

■

O radical $\mathcal{L}(\mathcal{N})$ (também podendo ser denotado por $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}$) construído a partir da classe $\mathcal{N}$ é chamado de *radical inferior determinado por $\mathcal{N}$*. Todos os anéis em $\mathcal{N}$ são $\mathcal{L}(\mathcal{N})$-radicais. Observe também, tal qual $\mathcal{U}$, que $\mathcal{L}$ funciona como um operador radical de classes de anéis, isto é, se $\mathbb{B}$ é uma classe qualquer de anéis, $\mathbb{B} \mapsto \mathcal{L}(\mathbb{B})$ e $\mathcal{L}(\mathbb{B})$ é um radical. O próximo lema justifica o uso da palavra "inferior".

Lema 2.2.6. *Se $\mathcal{T}$ é um radical e todo anel em $\mathcal{N}$ é $\mathcal{T}$-radical, então o radical inferior determinado por $\mathcal{N}$ é menor ou igual a $\mathcal{T}$.*

Demonstração: A classe dos anéis $\mathcal{T}$-radicais tem as propriedades $R1$) e $R4$). Por $R1$), todos os anéis de primeiro grau sobre $\mathcal{N}$ são $\mathcal{T}$-radicais. Usaremos a indução transfinita. Assuma que todos os anéis de grau $\alpha < \beta$ são $\mathcal{T}$-radicais. Seja A um anel de grau β. Se β é um ordinal limite, então A é de grau α para algum $\alpha < \beta$, logo A é $\mathcal{T}$-radical. Se β não é um ordinal limite, então $\beta - 1$ existe e toda imagem homomorfa não nula de A possui um ideal de grau $\beta - 1$ e, portanto, é $\mathcal{T}$-radical. Por $R4$), A é um anel $\mathcal{T}$-radical. Logo, a classe de todos os anéis $\mathcal{T}$-radicais contém todos os anéis $\mathcal{L}(\mathcal{N})$-radicais e isso significa que $\mathcal{L}(\mathcal{N}) \leq \mathcal{T}$.

■

2.3 Partições dos anéis simples

Aqui serão usadas as duas construções radicais da seção anterior. Considere a classe de todos os anéis simples. Se $\mathcal{R}$ é um radical e A é um anel simples não nulo, então só existem duas possibilidades para A: ou $\mathcal{R}(A) = A$ ou $\mathcal{R}(A) = (0)$. Portanto, um radical $\mathcal{R}$ particiona a classe dos anéis simples em duas classes disjuntas: a classe dos anéis que são $\mathcal{R}$-semissimples, chamada de *classe superior*, e a classe dos anéis que são $\mathcal{R}$-radicais, chamada de *classe inferior*. Nós dizemos que o radical $\mathcal{R}$ corresponde a essa partição. Logo, se tivermos um radical $\mathcal{R}$ obtemos uma partição na classe dos anéis simples. Em contrapartida, uma partição na classe dos simples determina um radical? O próximo teorema diz que a resposta a essa pergunta é afirmativa.

Teorema 2.3.1. *Se uma dada partição dos anéis simples em duas classes disjuntas (com anéis isomorfos na mesma classe) é tal que uma delas é chamada de classe superior e a outra é chamada de classe inferior, então existe ao menos uma propriedade radical que corresponde a esta partição.*

Demonstração: Nós usaremos as duas construções e exibiremos dois radicais que correspondem à partição dada.

Seja P_1 a classe superior. Como os elementos de P_1 são anéis simples, ela satisfaz a condição $S1$), portanto determina o radical superior $\mathcal{U}_{P_1}$. Além disso, todos os anéis em P_1 são $\mathcal{U}_{P_1}$-semissimples. Se A é simples e $\mathcal{U}_{P_1}$-semissimples, então, pela definição de propriedade radical superior $\mathcal{U}_{P_1}$ determinada por P_1, A pode ser sobrejetado homomorfamente em algum anel de $\overline{P}_1$; portanto, A deve ser levado homomorfamente sobre algum anel em P_1. Entretanto, como A é simples, A deve ser isomorfo a algum anel em P_1 e portanto A está em P_1. Logo, todos os anéis não nulos que não estão em P_1 são $\mathcal{U}_{P_1}$-radicais, isto é, estão na classe inferior P_2 e $\mathcal{U}_{P_1}$ corresponde a esta partição. Isso encerra a prova, mas será exibido outro radical que corresponde a esta partição.

Seja P_2 a classe inferior da partição dada e seja $\mathcal{L}_{P_2}$ a propriedade radical inferior determinada por P_2. Dessa forma, todos os anéis em P_2 são $\mathcal{L}_{P_2}$-radicais. Se A é um anel simples não nulo e $\mathcal{L}_{P_2}$-radical, então A é de um grau α sobre P_2. Seja β o menor ordinal tal que A é de grau β sobre P_2. Claramente, β não um ordinal limite. Se $\beta > 1$, então A deve possuir um ideal não nulo de grau $\beta - 1$ sobre P_2. Como A é simples, A deve ser também de grau $\beta - 1$ sobre P_2, contradizendo minimalidade de β, ao menos que se tenha $\beta = 1$. Entretanto, se $\beta = 1$, A é imagem homomorfa de algum A' em P_2. Como A' é simples, A' é isomorfo a A e, portanto, $A \in P_2$. Isso significa que todos os anéis não nulos na classe superior P_1 não são $\mathcal{L}_{P_2}$-radicais, logo são $\mathcal{L}_{P_2}$-semissimples, pelo qual concluímos que $\mathcal{L}_{P_2}$ corresponde a esta partição.

■

Por causa dos lemas 2.2.3 e 2.2.6, tem-se $\mathcal{L}_{P_2} \leq \mathcal{U}_{P_1}$. Está claro também que $\mathcal{R}$ é um radical correspondente à partição $[P_1|P_2]$ na classe dos anéis simples se, e somente se, $\mathcal{L}_{P_2} \leq \mathcal{R} \leq \mathcal{U}_{P_1}$.

O que desejamos saber é se esse resultado não trivializa, isto é, se $\mathcal{L}_{P_2} \neq \mathcal{U}_{P_1}$, ou quando se tem $\mathcal{L}_{P_2} = \mathcal{U}_{P_1}$ (se o último caso ocorre, então existe apenas um radical associado à partição $[P_1|P_2]$). Outro caso "patológico" é quando a classe inferior P_2 é a vazia; nesse caso, o único anel $\mathcal{L}_{P_2}$-radical é o anel nulo e todos os demais anéis são

$\mathcal{L}_{P_2}$-semissimples. Isso, obviamente, se constitui num problema, já que a classe de todos os anéis é uma classe radical, a menos que os radicais superior e inferior associados à partição $[P_1|P_2]$ estejam bem definidos. Mostraremos que o radical superior $\mathcal{U}_{P_1}$ é não trivial, isto é, ainda que todos os anéis simples sejam $\mathcal{U}_{P_1}$-semissimples, existem anéis $\mathcal{U}_{P_1}$-radicais não nulos. Os próximos dois exemplos ajudarão a mostrar que os radicais superior e inferior associados a uma partição $[P_1|P_2]$ na classe dos anéis simples não são triviais, isto é, tem-se sempre $\mathcal{L}_{P_2} \neq \mathcal{U}_{P_1}$.

Exemplo 2.3.2. *O anel-zero sobre o grupo aditivo p^∞.*

Seja p um primo fixado e considere o conjunto W de todos os números racionais que são da forma a/p^n, em que a é um inteiro e n é um inteiro não negativo qualquer. Definido dessa forma, W é um grupo aditivo e W contém todos os inteiros − denotemos o conjunto dos inteiros por $\mathbb{Z}$. O grupo aditivo p^∞ é definido como o grupo $W/\mathbb{Z}$.

Defina agora em p^∞ um produto trivial, isto é, $a \cdot b = 0$ para quaisquer $a, b \in p^\infty$. O anel $(p^\infty \,,\, + \,,\, \cdot)$ assim definido será chamado de *anel-zero*[2] sobre p^∞. Um ideal do anel-zero p^∞ é meramente um subgrupo do grupo p^∞ e note que p^∞ não é um grupo simples. Um detalhe: não há muitos subgrupos do grupo p^∞. Se H é um ideal próprio não nulo do anel-zero p^∞, isto é, um subgrupo próprio não nulo do grupo p^∞, então existe ao menos um elemento de p^∞ que não está em H. Considere o conjunto dos elementos de p^∞ que não estão em H. Cada um deles tem certa potência positiva de p no seu denominador. Considere o conjunto dessas potências inteiras positivas e seja m o minimal de tais potências. Logo, existe um número c/p^m, com $(c, p) = 1$, que não está em H, mas todos os números da forma d/p^r, com $r < m$, estão em H. Portanto, todos os números

$$0, \frac{1}{p^{m-1}}, \frac{2}{p^{m-1}}, \ldots, \frac{p^{m-1}-1}{p^{m-1}}$$

estão em H, e mostraremos que não há outros números em H. Como c/p^m não está em H, é claro que $1/p^m$ não está em H. Agora, suponha que s/p^t esteja em H, para algum $t \geq m$, e que $\mathrm{mdc}(s, p) = 1$. Logo,

$$\frac{p^{t-m}s}{p^t} = \frac{s}{p^m}$$

está em H. Como $\mathrm{mdc}(s, p) = 1$, existem inteiros a, b tais que $as + bp = 1$. Ademais,

$$\frac{as}{p^m} \quad \text{e} \quad \frac{b}{p^{m-1}} = \frac{bp}{p^m}$$

estão em H, logo

$$\frac{as + bp}{p^m} = \frac{1}{p^m}$$

[2] Um anel A é dito *anel-zero* se todos os produtos em A são zero, mas o próprio A é não nulo.

está em H, uma contradição. Isso significa que s/p^t, para $t \geq m$, não pode estar em H, pelo qual concluímos que H é descrito exatamente da seguinte forma:

$$H = \left\{0, \frac{1}{p^{m-1}}, \frac{2}{p^{m-1}}, \ldots, \frac{p^{m-1}-1}{p^{m-1}}\right\}.$$

Esse subgrupo será denotado por H_{m-1}. Logo, os ideais do anel-zero p^∞ são, exatamente, os da seguinte cadeia

$$0 = H_1 \subset H_2 \subset \cdots \subset H_n \subset \cdots \subset p^\infty \,.$$

Cada H_i, $i \in \mathbb{N}$, é um ideal próprio contendo apenas um número finito de elementos, mas o próprio anel-zero p^∞ tem uma quantidade infinita de elementos. Portanto, o anel p^∞ não possui nenhum ideal maximal próprio.

O anel-zero p^∞ será usado no próximo teorema e consideraremos as imagens homomorfas não nulas de p^∞. Cada uma delas é da forma p^∞/H_n, para algum n. Um resultado interessante desta construção é que p^∞ é isomorfo a cada uma de suas imagens homomorfas não nulas. Basta fazer $1/p \mapsto 1/p^{n+1}$, preservando as operações de ambos os anéis, e isso nos fornece uma correspondência biunívoca entre p^∞ e p^∞/H_n.

Exemplo 2.3.3. *O anel-zero sobre o grupo aditivo cíclico infinito.*

Seja C^∞ o grupo aditivo cíclico infinito $\{0,\ \pm a,\ \pm 2a,\ ..., \pm na,\ ...\}$. Tal como na construção anterior, definimos esse anel admitindo todos os produtos iguais a zero. Seja I um ideal não nulo de C^∞. Seja m o menor inteiro positivo tal que ma está em I e I é um subgrupo de C^∞ cujos elementos são $\{0,\ \pm ma,\ \pm 2ma,\ ...,\ \pm nma,\ ...\}$. Ademais, I é isomorfo a C^∞. Portanto, o anel-zero sobre C^∞ tem a propriedade de ser isomorfo a todos os seus ideais próprios.

Agora, podemos demonstrar a não trivialidade entre os radicais superior e inferior de uma dada partição.

Teorema 2.3.4. *Para toda partição $[P_1|P_2]$ na classe dos anéis simples tem-se $\mathcal{L}_{P_2} < \mathcal{U}_{P_1}$.*

Demonstração: Sejam P_1 e P_2, respectivamente, as classes superior e inferior de uma dada partição. Assuma que P_1 não contenha um anel no qual todos os produtos são zero. Um anel-zero simples deve ser necessariamente um grupo aditivo cíclico de ordem prima, para que ele não contenha subgrupos próprios. Nesse caso mostraremos que o anel-zero sobre C^∞ é um anel $\mathcal{U}_{P_1}$-radical e um anel $\mathcal{L}_{P_2}$-semissimples, pelo qual estabeleceremos $\mathcal{L}_{P_2} < \mathcal{U}_{P_1}$.

Para vermos que C^∞ é $\mathcal{U}_{P_1}$-radical, mostraremos que ele não pode ser sobrejetado homomorfamente num anel não nulo de $\overline{P}_1$. Se tal fato acontecesse, então ele poderia ser sobrejetado homomorfamente num anel não nulo de P_1, pois todo anel em $\overline{P_1}$ tem a propriedade que todo ideal não nulo (em particular, o próprio anel) pode ser sobrejetado homomorfamente num anel não nulo de P_1. Entretanto, C^∞ não pode ser sobrejetado homomorfamente sobre um anel de P_1, pois as únicas imagens homomorfas simples de C^∞ são anéis simples nos quais todos os produtos são zero e assumimos que P_1 não contém nenhum desses. Logo, C^∞ é $\mathcal{U}_{P_1}$-radical. Suponha que C^∞ não seja $\mathcal{L}_{P_2}$-semissimples. Com essa assunção, ele contém um $\mathcal{L}_{P_2}$-ideal não nulo. Como C^∞ é isomorfo a cada um de seus ideais não nulos, C^∞ tem de ser um anel $\mathcal{L}_{P_2}$-radical. Portanto, ele deve ser de algum grau sobre P_2. Seja α o ordinal minimal tal que C^∞ é de grau α sobre P_2. Claramente, α não é um ordinal limite. Se $\alpha > 1$, então C^∞ deve ter um ideal não nulo de grau $\alpha - 1$ sobre P_2. Mas C^∞ é isomorfo a esse ideal, logo C^∞ deve ter grau $\alpha - 1$ sobre P_2, contradizendo a minimalidade de α. Portanto, se $\alpha > 1$, C^∞ não é de grau α sobre P_2, logo C^∞ é de grau 1 sobre P_2. Mas isso significa que C^∞ é simples, uma contradição. Portanto, C^∞ é $\mathcal{L}_{P_2}$-semissimples.

Agora assuma que P_1 contenha um anel simples no qual todos os produtos são zero, um anel de ordem prima p. Mostraremos que o anel-zero sobre p^∞ é um anel $\mathcal{U}_{P_1}$-radical e um anel $\mathcal{L}_{P_2}$-semissimples.

Para vermos que p^∞ é $\mathcal{U}_{P_1}$-radical, mostraremos que ele não pode ser sobrejetado homomorfamente um anel não nulo de $\overline{P}_1$. Tal como para C^∞, isso acontece apenas se p^∞ não pode ser sobrejetado num anel não nulo de P_1. Mas isso é óbvio, pois toda imagem homomorfa de p^∞ é isomorfa a p^∞. Como p^∞ não é simples, ele não pode ser isomorfo a um anel em P_1.

Finalmente, mostraremos que p^∞ é um anel $\mathcal{L}_{P_2}$-semissimples. Seja H_n um dos ideais próprios não nulos de p^∞. Perceba que H_n/H_{n-1} é um anel de ordem prima p no qual todos os produtos são zero, isto é, tal anel está em P_1. Logo, H_n pode ser sobrejetado homomorfamente num anel não nulo de P_1, ou seja, ele é um anel $\mathcal{L}_{P_2}$-semissimples. Logo, pelo lema técnico 2.1.7, H_n não pode ser um anel $\mathcal{L}_{P_2}$-radical e, dessa forma, qualquer ideal $H_n \neq (0)$ pode ser sobrejetado homomorfamente num anel $\mathcal{L}_{P_2}$-semissimples, portanto H_n é sobrejetado homomorfamente em algum anel não nulo de P_2. Ademais, se p^∞ tiver um $\mathcal{L}_{P_2}$-ideal não nulo, tal ideal deve ser o próprio p^∞. Se p^∞ é $\mathcal{L}_{P_2}$-radical, então p^∞ é de algum grau sobre P_2 e considere α o ordinal minimal tal que p^∞ é de grau α sobre P_2. De igual forma, α não é um ordinal limite. Se $\alpha > 1$, então p^∞ tem um ideal não nulo de grau $\alpha - 1$ sobre P_2. Entretanto, cada um dos ideais próprios de p^∞ são $\mathcal{L}_{P_2}$-semissimples, logo, eles não possuem nenhum grau sobre P_2 e, portanto, p^∞ deve ter grau $\alpha - 1$ sobre P_2, contradizendo a minimalidade de α, a menos que se tenha $\alpha = 1$. Mas também não se pode ter $\alpha = 1$, pois p^∞ não é simples, logo não pode ser imagem homomorfa de um anel simples. Logo, p^∞ não é um anel $\mathcal{L}_{P_2}$-radical e, repetindo o mesmo raciocínio anterior, qualquer ideal não nulo de p^∞ pode ser sobrejetado num anel não nulo de P_2, portanto

p^∞ está em $\overline{P_2}$ (que satisfaz $S2$)), pelo qual inferimos que p^∞ é $\mathcal{L}_{P_2}$-semissimples e isso encerra a prova.

■

Esse último teorema é um "gerador de radicais", pois para cada partição na classe dos anéis simples nós obtemos ao menos dois radicais distintos.

2.4 Os conceitos radicais de hereditariedade, força e extensibilidade matricial

Alguns radicais têm a propriedade de abarcar todos os ideais dos anéis que os compõem. Essa ideia aponta para o conceito de *hereditariedade* no sentido geral: se um determinado tipo de objeto matemático tem certa propriedade, então essa propriedade também é satisfeita por todos os seus sub-objetos. A hereditariedade de classes de anéis é descrita da seguinte forma:

Definição 2.4.1 (Hereditariedade)**.** Uma classe de anéis $\mathcal{C}$ é dita *hereditária à direita (à esquerda)* se para qualquer $A \in \mathcal{C}$ e para qualquer I ideal à direita (à esquerda) de A tem-se $I \in \mathcal{C}$. Uma classe é *hereditária* se ela for hereditária com respeito aos ideais bilaterais.

O próximo resultado nos dará uma condição equivalente de hereditariedade para classes radicais.

Teorema 2.4.2. *Um radical $\mathcal{R}$ é hereditário se, e somente se, para qualquer ideal I de um anel A arbitrário tem-se $\mathcal{R}(I) = I \cap \mathcal{R}(A)$.*

Demonstração: Suponha que para qualquer ideal I de um anel A arbitrário tem-se $\mathcal{R}(I) = I \cap \mathcal{R}(A)$. Se $A \in \mathcal{R}$, então $\mathcal{R}(A) = A$, logo,

$$\mathcal{R}(I) = I \cap \mathcal{R}(A) = I \cap A = I,$$

portanto $I \in \mathcal{R}$ e isso significa que $\mathcal{R}$ é hereditário.

Reciprocamente, suponha que $\mathcal{R}$ seja hereditário à direita. Se $\mathcal{R}(A) = A$, então $\mathcal{R}(I) = I$, qualquer que seja I ideal de A, logo

$$\mathcal{R}(I) = I = I \cap A = I \cap \mathcal{R}(A).$$

■

Definição 2.4.3 (Força)**.** Um radical $\mathcal{R}$ é dito ser *forte à direita (à esquerda)* se

$$I \in \mathcal{R} \Longrightarrow I \subseteq \mathcal{R}(A),$$

qualquer que seja I ideal à direita (à esquerda) de $A \in \mathcal{R}$. Um radical é *forte* se ele é forte à direita e à esquerda.

Observe que, em virtude do teorema 2.4.2, se um anel A é comutativo, então a hereditariedade implica na força. Se $I = \mathcal{R}(I)$ é um ideal unilateral (mas não bilateral), não necessariamente $I \subseteq \mathcal{R}(A)$, pois $\mathcal{R}(A)$ contém todos os $\mathcal{R}$-ideais (redundantemente, todos os $\mathcal{R}$-ideais bilaterais) de A, mas nada se pode dizer a respeito dos $\mathcal{R}$-ideais à direita ou à esquerda. A força e a hereditariedade servirão, mais adiante, na caracterização radical para o que chamamos de *normalidade*.

A *extensibilidade matricial*, conforme o próprio nome sugere, ocorre quando um radical contém os anéis de matrizes determinados sobre seus elementos. Para um anel A arbitrário, A_n denotará o anel de todas as matrizes quadradas de ordem n, $n \in \mathbb{N}$, com entradas no anel A. A próxima definição deixará claro o conceito de *extensibilidade matricial*.

Definição 2.4.4 (Extensibilidade matricial)**.** Uma classe de anéis $\mathcal{C}$ é dita ser *matricialmente extensível* se ela satisfizer a condição

$$A \in \mathcal{C} \Leftrightarrow A_n \in \mathcal{C}, \quad \text{para qualquer natural } n.$$

Podemos obter um resultado do mesmo tipo do teorema 2.4.2 para classes radicais matricialmente extensíveis.

Teorema 2.4.5. *Um radical $\mathcal{R}$ é matricialmente extensível se, e somente se, para qualquer anel A tem-se $\mathcal{R}(A_n) = (\mathcal{R}(A))_n$.*

Demonstração: Poderá ser encontrada em [GW04].

■

2.5 Anéis nilpotentes, localmente nilpotentes e nil

Os resultados de Wedderburn, Artin e Koethe foram os fomentadores da noção de *radical de um anel*, isto é, de encontrar dentro de um anel A um ideal I para o qual A/I tivesse uma estrutura "interessante". As primeiras investigações nessa linha de pesquisa começaram com o estudo dos elementos nilpotentes de um anel.

Seja A um anel. Um elemento $x \in A$ é dito ser *nilpotente* se existe um inteiro positivo n tal que $x^n = 0$. O anel A é dito ser *nil* se todos os seus elementos são nilpotentes, isto é, qualquer que seja $x \in A$, existe $n = n(x)$ tal que $x^n = 0$. Como já é sabido, o produto $I \cdot J$ de dois subanéis de A são todas as somas finitas $\sum i_m j_m$, com $i_m \in I$ e $j_m \in J$. Em particular, nós podemos falar de $A^2 = A \cdot A$ e, por indução finita,

A^s, para algum inteiro positivo s. Diremos, então, que um anel A é *nilpotente* se existe um inteiro positivo m tal que $A^m = 0$. Claramente, se o anel A é nilpotente, então A é nil. A recíproca nem sempre é verdadeira, como veremos mais adiante. Isso significa que a classe dos anéis nilpotentes está contida na classe dos anéis nil.

Aqui denotaremos por $\mathcal{N}$ a classe de todos os anéis nil. Mostraremos que $\mathcal{N}$ é um radical.

Lema 2.5.1. *Se A é um anel nil, assim serão todos os subanéis de A e todas as imagens homomorfas de A. Ademais, se A é um ideal de um anel A' e, ambos, A e A'/A são nil, então o é A'.*

Demonstração: A primeira parte desse lema é óbvia, em virtude das definições anteriores. Se A'/A é nil, então para qualquer elemento x de A' existe um natural $n = n(x)$ tal que $x^n \in A$. Mas A também é nil, logo existe $m = m(x^n)$ tal que $0 = (x^n)^m = x^{nm}$ e isso significa que todo elemento de A' é nilpotente, logo A' é nil.

■

Está claro que a classe $\mathcal{N}$ satisfaz $R1$) e $R5$). Em breve, mostraremos que $\mathcal{N}$ também satisfaz $R2$), pelo que, em virtude do teorema 2.1.4, concluiremos que $\mathcal{N}$ é um radical. Para estabelecer $R2$), demonstraremos os seguintes lemas:

Lema 2.5.2. *A soma de dois ideais nil de um anel A é também um ideal nil.*

Demonstração: Sejam I_1, I_2 dois ideais nil de um anel A. Pelo segundo teorema do isomorfismo tem-se $(I_1+I_2)/I_2 \cong I_1/(I_1 \cap I_2)$, isto é, o lado direito é imagem homomorfa do ideal nil I_1, portanto, ele é também um anel nil, pelo lema anterior. Como I_2 e $(I_1 + I_2)/I_2$ são nil, $I_1 + I_2$ também é nil, em virtude do mesmo lema.

■

Corolário 2.5.3. *A soma de uma quantidade finita de ideais nil de um anel A é também um ideal nil.*

Demonstração: Basta usar indução finita.

■

Lema Técnico 2.5.4. *A soma de todos os ideais nil de um anel A é também um ideal nil.*

Demonstração: Seja W a soma de todos os ideais nil de A. Se $x \in W$, então x está em uma soma finita de ideais nil e, em virtude do corolário 2.5.3, x é nilpotente. Logo, W é nil.

■

Observação 2.5.5. O lema técnico 2.5.4 poderia ser reescrito também na versão unilateral, isto é, a soma de todos os ideais à direita (à esquerda) nil de um anel A é também um ideal à direita (à esquerda) nil.

Resumindo, obtivemos o seguinte resultado:

Teorema 2.5.6. *A classe* $\mathcal{N}$ *de todos os anéis nil é uma classe radical.*

O ideal W do anel A construído no teorema 2.5.4 é conhecido como o *radical nil* ou o *radical de Koethe* do anel A. A notação das seções anteriores será mantida, ou seja, a soma de todos os ideais nil de um anel A arbitrário será denotado por $\mathcal{N}(A)$.

Os próximos lemas são meras adaptações dos resultados que já tínhamos para a classe nil, entretanto o contexto agora é o da *nilpotência*.

Lema 2.5.7. *Se A é um anel nilpotente, assim serão todos os subanéis de A e todas as imagens homomorfas de A. Se A é um ideal do anel A' e, ambos, A e A'/A são nilpotentes, então o é A'.*

$\blacksquare$

Com esse resultado, provamos que a classe dos anéis nilpotentes satisfaz $R1$) e $R5$). Resta-nos verificar se a propriedade $R2$) é satisfeita.

Lema 2.5.8. *A soma de dois ideais nilpotentes de um anel A é também um ideal nilpotente.*

$\blacksquare$

Corolário 2.5.9. *A soma de uma quantidade finita de ideais nilpotentes de um anel A é também um ideal nilpotente.*

$\blacksquare$

Lema 2.5.10. *A soma de todos os ideais nilpotentes de um anel A é um ideal nil.*

Demonstração: Note que todo anel nilpotente é um anel nil. O resultado segue de imediato do lema técnico 2.5.4.

$\blacksquare$

Agora, chegamos num ponto crucial: não é possível garantir que a soma de todos os ideais nilpotentes de um anel A seja ainda um ideal nilpotente de A. O próximo exemplo é uma mostra de que nem sempre a soma de ideais nilpotentes é um ideal nilpotente.

Exemplo 2.5.11. Considere o conjunto dos símbolos x_α, em que α é um número real, $0 < \alpha < 1$. Seja F um corpo e seja A uma álgebra comutativa[3] sobre F para a qual $\{x_\alpha\}_\alpha$ é uma base. A multiplicação dos elementos da base é definida como a seguir:

$$x_\alpha x_\beta = \begin{cases} x_{\alpha+\beta}, & \text{se } \alpha + \beta < 1 \\ 0, & \text{se } \alpha + \beta \geq 1. \end{cases}$$

Seja A o conjunto de todas as somas finitas $\sum a_\alpha x_\alpha$, em que $a_\alpha \in F$, para todo α. A adição é definida artificialmente, $a_\alpha x_\alpha + a_\beta x_\beta$, se $x_\alpha \neq x_\beta$; se $x_\alpha = x_\beta$, então $a_\alpha x_\alpha + a'_\alpha x_\alpha = (a_\alpha + a'_\alpha)x_\alpha$. A multiplicação é definida da mesma forma como na definição acima. Com essas operações, o anel A é comutativo. Entretanto, A não é nilpotente, pois $x_{1/3} \cdot x_{1/9} \cdot x_{1/27} \cdots x_{1/3^n} \cdots \neq 0$.

Seja agora x_α um elemento qualquer da base e considere o ideal (α) gerado por ele. Ele é um ideal nilpotente, pois $(x_\alpha)^n = (0)$ para qualquer inteiro $n > 1/\alpha$. Ademais, $\sum_\alpha (x_\alpha) = A$, portanto a soma dos ideias nilpotentes de A não é um ideal nilpotente.

Com esse exemplo, mostramos que não é possível encontrar um ideal nilpotente maximal (com respeito à nilpotência) em um anel A arbitrário. Dessa forma, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.5.12. *A classe dos anéis nilpotentes não é uma classe radical.*

■

Embora desprovidos da concepção atual de "radical" e "radical de um anel", os resultados de Wedderburn, Koethe e Artin acerca dos ideais nil e nilpotentes de um anel são o marco inicial da Teoria de Radicais. É sabido que um espaço vetorial de dimensão finita pode ser decomposto numa soma direta de subespaços unidimensionais. Buscou-se generalizar esse resultado para anéis, isto é, quais anéis podem ser decompostos em soma direta de alguns de seus ideais. Percebeu-se que os elementos nilpotentes de um anel eram um entrave a esse tipo de decomposição, pois anéis que não possuíssem ideais nilpotentes poderiam ser decompostos numa soma direta de certos ideais.

Nessa linha de estudo, surge um resultado interessante:

Teorema 2.5.13 (Wedderburn-Artin)**.** *Sejam $\{I_\rho\}_{\rho \in R}$ a família de todos os ideais à direita nilpotentes de um anel A, $\{J_\lambda\}_{\lambda \in L}$ a família de todos os ideais à esquerda nilpotentes em A e $\{K_\mu\}_{\mu \in M}$ a família de todos os ideais nilpotentes de A. Definamos*

$$W_r = \sum_{\rho \in R} I_\rho$$

$$W_l = \sum_{\lambda \in L} J_\lambda$$

[3]Para ver a definição de *álgebra*, bem como algumas de suas propriedades, consulte [Lang02].

e

$$W = \sum_{\mu \in M} K_\mu.$$

Nessas condições, $W_r = W_l = W$, para qualquer anel A.

Esse resultado foi bastante útil para anéis com alguma condição de finitude.

Teorema 2.5.14. *Se um anel A é noetheriano à direita (à esquerda), então W é nilpotente.*

Teorema 2.5.15. *Se um anel A é artiniano à direita (à esquerda), então todo ideal à direita (à esquerda) nil é nilpotente.*

Corolário 2.5.16. *Se A é um anel artiniano à direita (à esquerda), então W é nilpotente.*

Sempre que W for nilpotente (independentemente do anel possuir condições de cadeia) ele será chamado de *radical de Wedderburn-Artin* (ou *radical clássico*) do anel A e denotado por $\mathcal{W}(A)$.

Os seguintes resultados apontam para a noção de semissimplicidade:

Teorema 2.5.17. *Seja A um anel e suponha que exista o seu radical de Wedderburn-Artin $\mathcal{W}(A)$. O anel $A/\mathcal{W}(A)$ não possui ideais nilpotentes não nulos.*

Corolário 2.5.18. *Se A é um anel artiniano ou noetheriano à direita (à esquerda), então $A/\mathcal{W}(A)$ não possui ideais nilpotentes não nulos.*

Conforme mencionado, a ideia inicial de "radical de um anel" estava associada ao fato de encontrar um ideal $I(A)$ de um anel A tal que $A/I(A)$ tivesse uma estrutura razoavelmente interessante. O próximo resultado é uma mostra do que se era pretendido com aquilo se chamava de "radical" (o radical de um anel):

Teorema 2.5.19 (Wedderburn-Artin)**.** *Seja A um anel artiniano. Nessas condições,*

$$A/\mathcal{W}(A) \cong D_{n_1}^{1)} \oplus D_{n_2}^{2)} \oplus \cdots D_{n_k}^{(k)},$$

em que $D_{n_i}^{(i)}$ é o anel das matrizes quadradas sobre o anel de divisão $D^{(i)}$, para todo $i \in \{1, ..., k\}$.

Conforme o enunciado do teorema, além de $A/\mathcal{W}(A) = \oplus_{i=1}^{k} I^{(k)}$ ser decomposto como soma direta de alguns de seus ideais, foi provado que cada ideal $I^{(k)}$ de $A/\mathcal{W}(A)$ era isomorfo a um anel de matrizes quadradas sobre um anel de divisão!

Apesar de ser um resultado bastante interessante, o teorema de Wedderburn-Artin é restrito a anéis artinianos. Sabe-se que, para um anel A qualquer, $A/\mathcal{N}(A)$ não tem ideais nil não nulos, pois $\mathcal{N}$ é um radical. Mas, para um anel A arbitrário, o que é o anel $A/\mathcal{N}(A)$? Uma possível resposta seria fortalecer o conceito de nil, mas de forma que esse "fortalecimento" ainda continuasse mais fraco que o conceito de nilpotência (já que a classe dos anéis nilpotentes não é radical). Dessa forma, os anéis *localmente nilpotentes* passaram a ser objeto de estudo da Teoria de Radicais.

Definição 2.5.20 (Nilpotência local)**.** Um anel A é dito ser localmente nilpotente se qualquer conjunto finito de elementos de A gera um subanel que é nilpotente.

Da definição anterior podemos concluir que todo anel nilpotente é localmente nilpotente e que todo anel localmente nilpotente é nil. Dizemos que um ideal I de um anel A é localmente nilpotente se I, visto como anel, é localmente nilpotente.

Lema 2.5.21. *Se um ideal I do anel A é localmente nilpotente e A/I é localmente nilpotente, então o é A. Se A é um anel localmente nilpotente, assim serão todos os subanéis de A e toda imagem homomorfa de A.*

Demonstração: Seja $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ um conjunto finito arbitrário de A e seja S o subanel gerado por esses elementos. Seja então A/I e consideremos as classes $x_1 + I$, $x_2 + I$, ..., $x_n + I$. Como A/I é localmente nilpotente, o subanel $\bar{S}$ gerado pelas classes $x_1 + I$, $x_2 + I$, ..., $x_n + I$ é nilpotente, digamos $\bar{S}^k = \bar{0}$, para algum inteiro positivo k, em A/I. Portanto, $S^k \subseteq I$. Ora, S^k é gerado por um conjunto finito de elementos logo, como I é localmente nilpotente, S^k tem de ser nilpotente, digamos $S^{kr} = 0$. Portanto S é nilpotente e, por se tratar de um subanel gerado por uma quantidade finita de elementos arbitrários, isso prova que A é localmente nilpotente. As outras assertivas desse enunciado são imediatas.

■

Lema 2.5.22. *A soma de dois ideais localmente nilpotentes de um anel A é também um ideal localmente nilpotente.*

Demonstração: Sejam I_1 e I_2 dois ideais localmente nilpotentes de A. Como $(I_1 + I_2)/I_2 \cong I_1/(I_1 \cap I_2)$ e o lado direito é imagem homomorfa do ideal localmente nilpotente I_1, ele é também um anel localmente nilpotente, pelo lema 2.5.21. Portanto, I_2 (por hipótese) e $(I_1 + I_2)/I_2$ (o lado esquerdo dessa equação) são localmente nilpotentes, logo $I_1 + I_2$ também é localmente nilpotente, em virtude do mesmo lema.

■

Corolário 2.5.23. *A soma de uma quantidade finita de ideais localmente nilpotentes de um anel A é também um ideal localmente nilpotente.*

Demonstração: Usar indução finita no lema 2.5.22.

■

Lema 2.5.24. *A soma de todos os ideais localmente nilpotentes de um anel A é um ideal localmente nilpotente.*

Demonstração: Designemos por L a soma de todos os ideais localmente nilpotentes de um anel A. Seja $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ um conjunto finito qualquer de elementos de L. Cada x_i é oriundo de uma soma de um número finito de ideais localmente nilpotentes. Logo, $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ está todo ele contido num conjunto finito de ideais localmente nilpotentes. Pelo corolário 2.5.23, a soma desse conjunto finito de ideais localmente nilpotentes é um ideal localmente nilpotente. Como ele contém os elementos $x_1, x_2, ..., x_n$, o conjunto $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ deve gerar um subanel nilpotente. Portanto, L é localmente nilpotente.

■

Denotemos por $\mathfrak{L}$ a classe dos anéis localmente nilpotentes. Pondo em ordem os lemas anteriores, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 2.5.25. *A classe $\mathfrak{L}$ dos anéis localmente nilpotentes é uma classe radical.*

Demonstração: As propriedades $R1)$ e $R5)$ seguem do lema 2.5.21 e a propriedade $R2)$ segue do lema 2.5.24.

■

Mantendo a notação anterior, a soma L de todos ideais localmente nilpotentes do anel A será denotada por $\mathfrak{L}(A)$ e denominada *radical localmente nilpotente* ou *radical de Levitzki* do anel A.

Um resultado interessante acerca do radical de Levitzki $\mathfrak{L}(A)$ de um anel A é que ele contém todos os ideais à direita e à esquerda localmente nilpotentes − lembremo-nos que ele já continha todos os ideais localmente nilpotentes do anel A, pela sua própria construção. Em outras palavras, provou-se que o radical é *forte*. Essa prova não será exibida aqui mas poderá ser encontrada em [Div64].

A estrutura dos anéis semissimples segundo a nilpotência local é a seguinte:

Teorema 2.5.26. *Todo anel $\mathfrak{L}$-semissimples é isomorfo a uma soma subdireta de anéis $\mathfrak{L}$-semissimples e primos.*

Demonstração: Poderá ser encontrada em [Div64].

■

Apenas uma nota: essa decomposição foi encontrada cerca de 15 anos depois de Levitzki ter apresentado o radical localmente nilpotente.

Contemporâneo a esse "boom" na Teoria de Radicais, N. Jacobson propôs o estudo de radicais de um anel através da Teoria de Módulos, mas esse assunto deixaremos pra outra sessão.

Outro fato que se pôde verificar com respeito aos radicais de Wedderburn-Artin e o de Levitzki (posteriormente, com o de Jacobson) é que, além de conter todos os ideais nilpotentes de um anel (no caso do radical de Wedderburn-Artin, o anel tinha certas restrições e esse fato já foi discutido anteriormente), tais radicais eram *hereditários*, isto é, se um anel era radical, então todos os seus ideais também eram radicais. Nesse sentido, o estudo dos anéis cuja interseção de seus ideais não nulos fosse também não nula e o entendimento dos radicais que contivessem todos os anéis nilpotentes e que fossem hereditários se tornaram mais um modo de estruturar a Teoria de Radicais.

Definição 2.5.27 (Coração de um anel)**.** A interseção de todos os ideais não nulos de um anel A é chamada de *coração* do anel A.

Definição 2.5.28 (Anel subdiretamente irredutível)**.** Um anel é dito ser *subdiretamente irredutível* se o seu coração é não nulo.

Definição 2.5.29 (Radical hipernilpotente)**.** Um radical é dito ser *hipernilpotente* se ele contiver o radical inferior determinado pela classe de todos os anéis nilpotentes[4].

O conceito de hipernilpotência radical é posterior ao conceito de hipernilpotência para classes de anéis, de maneira geral: uma classe de anéis é dita ser hipernilpotente se ela contiver a classe de todos os anéis nilpotentes. No caso em que a classe de anéis é radical, em virtude do lema 2.2.6, ela contém o radical inferior determinado pela classe de todos os anéis nilpotentes e isso é a definição 2.5.29.

Definição 2.5.30 (Radical supernilpotente)**.** Um radical é dito ser *supernilpotente* se ele é hipernilpotente e hereditário.

Façamos, pois, uma construção radical generalizada baseada nos conceitos estudados nessa seção.

Seja M a classe de todos os anéis subdiretamente irredutíveis com corações idempotentes tal que cada coração está numa classe de anéis ϕ, em que ϕ é uma classe de anéis algébrica (preserva o isomorfismo de anéis) arbitrária porém fixada. Denotaremos tal classe por M_ϕ. Nós queremos associar M_ϕ a uma partição na classe dos simples para a qual os anéis-zeros simples estão na classe inferior (é o mesmo que dizer que os anéis da classe inferior são todos os anéis simples e nilpotentes) e M_ϕ é a classe de todos os anéis subdiretamente irredutíveis cujos corações são isomorfos aos anéis simples da classe superior (os anéis da classe superior dessa partição são todos anéis simples e idempotentes).

Lema 2.5.31. *Todo ideal não nulo de um anel subdiretamente irredutível com coração idempotente é ainda subdiretamente irredutível como o mesmo coração.*

[4]Na literatura, esse radical é conhecido como *radical de Baer* ou *radical inferior de Baer*.

Demonstração: Seja B um ideal não nulo de um anel subdiretamente irredutível K. Seja $H = H^2$ o coração de K. Seja C um ideal arbitrário não nulo de B. Nessas condições, $BC \neq (0)$. Vejamos isso: se $BC = (0)$, então $BC' = (0)$, em que C' é o ideal de K gerado por C. Mas $H \subseteq B$ e $H \subseteq C'$, portanto $H^2 \subseteq BC' = (0)$; mas $C^2 = C \neq (0)$, pelo qual concluímos que $BC \neq 0$. Analogamente, $BC \cdot B \neq (0)$. Agora BCB é um ideal de K e, portanto, $H \subseteq BCB$. Mas $BCB \subseteq C$. Logo $H \subseteq C$ e B é subdiretamente irredutível com coração H.

■

Corolário 2.5.32. *Todo ideal não nulo de um anel em M_ϕ também está em M_ϕ.*

■

Esse corolário afirma que a classe M_ϕ satisfaz a condição $S1$), portanto ela determina o radical superior $\mathcal{U}_{M_\phi}$, para o qual todos os anéis em M_ϕ são $\mathcal{U}_{M_\phi}$-semissimples. Um anel em $\mathcal{U}_{M_\phi}$ é tal que ele não pode ser sobrejetado homomorfamente num anel não nulo de M_ϕ. Se W é um anel nilpotente, então cada um de seus ideais é nilpotente, logo W não pode ser sobrejetado homomorfamente num anel subdiretamente irredutível com coração idempotente. Em particular, W não pode ser sobrejetado homomorfamente num anel de M_ϕ, portanto W é $\mathcal{U}_{M_\phi}$-radical. Consequentemente, temos o seguinte resultado:

Corolário 2.5.33. *O radical $\mathcal{U}_{M_\phi}$ é hipernilpotente.*

Demonstração: Em virtude da observação anterior, a classe dos anéis nilpotentes está contida na classe radical $\mathcal{U}_{M_\phi}$ e isso significa que $\mathcal{U}_{M_\phi}$ contém o radical inferior determinado por todos os ideais nilpotentes, isto é, $\mathcal{U}_{M_\phi}$ é hipernilpotente.

■

Lema 2.5.34. *Se $B \neq (0)$ é um anel subdiretamente irredutível com coração idempotente H e se B é um ideal do anel K, então K/B^* é um anel subdiretamente irredutível cujo coração é isomorfo a H, em que $B^* = \{x \in K;\ xB = Bx = (0)\}$.*

Demonstração: Como $H^2 = H$, H também deve ser um ideal de K, pois

$$HK = H \cdot HK \subseteq HB \subseteq H \ \text{ e } \ KH = KH \cdot H \subseteq BH \subseteq H.$$

Portanto, H é um ideal minimal de K. Mais ainda, $H \cap B^* = (0)$, pois se $H \cap B^* \neq (0)$ então ele é um ideal contido em H e, como H é minimal, $H = H \cap B^*$. Logo $H \subseteq B^*$ e, portanto, $H^2 \subseteq BB^* = (0)$. Mas $H^2 = H \neq (0)$, pelo qual concluímos que $H \cap B^* = (0)$. Dessa forma,

$$\frac{(H + B^*)}{B^*} \cong \frac{H}{H \cap B^*} \cong H.$$

A demonstração do lema será feita em torno desse fato: mostraremos que K/B^* é subdiretamente irredutível e seu coração é $(H + B^*)/B^*$.

Comecemos mostrando que o anel K/B^* é um anel primo. Dizer que K/B^* é um anel primo equivale a dizer que B^* é um ideal primo de K. Suponha que U, V são ideais de K tais que $U \cdot V \subseteq B^*$. Ademais,

$$BU \cdot VB \subseteq BB^*B = (0).$$

Entretanto, BU e BV são ideais de B; caso ambos os ideais sejam não nulos, eles deverão conter H, logo $H = H^2 = BU \cdot VB = (0)$, uma contradição, pelo qual concluímos que $BU = (0)$ ou $VB = (0)$. Suponha que $BU = (0)$. Nesse caso, $UB \cdot UB = (0)$. Se $UB \neq (0)$, então, como no raciocínio anterior, obtemos $H = (0)$, uma contradição, pelo qual concluímos que $UB = (0)$. Isso significa que $U \subseteq B^*$. De maneira similar, se $VB = (0)$ concluiremos que $V \subseteq B^*$. Portanto B^* é um ideal primo de K ou, equivalentemente, K/B^* é um anel primo.

Se T/B^* um ideal qualquer não nulo de K/B^*, então

$$TH/B^* = (T/B^*) \cdot [(H + B^*)/B^*] \neq (0),$$

pois K/B^* é um anel primo. Isso significa que $TH \not\subseteq B^*$ e, em particular, $TH \neq (0)$. Como $TH \subseteq T \cap H$, concluímos que $T \cap H \neq (0)$. Como H é minimal em K e $T \cap H \subseteq H$, devemos ter $T \cap H = H$ ou $H \subseteq T$. Portanto $(H + B^*)/B^* \subseteq T/B^*$, qualquer que seja T/B^* um ideal não nulo de K/B^* e isso significa que K/B^* é subdiretamente irredutível, cujo coração é $(H + B^*)/B^* \cong H$.

■

Lema 2.5.35. *O radical $\mathcal{U}_{M_\phi}$ é hereditário.*

Demonstração: Sejam K um anel $\mathcal{U}_{M_\phi}$-radical e $B \neq (0)$ um ideal de K. Suponha que $B \notin \mathcal{U}_{M_\phi}$. Isso significa que B pode ser sobrejetado em algum anel de M_ϕ, ou seja, sobrejetado homomorfamente num anel subdiretamente irredutível com coração idempotente e pertencendo a M_ϕ, em que ϕ é uma classe de anéis algébrica. Portanto, deve existir um ideal I de B tal que B/I é subdiretamente irredutível com coração idempotente H/I.

O ideal I de B, nessas condições, é também um ideal de K. Para que validemos essa assertiva, note que $IK \subseteq BK \subseteq B$ e $IK \cdot B \subseteq IB \subseteq I$. Se $IK \not\subseteq I$, então $(IK + I)/I$ é um ideal não nulo de B/I, portanto contém o ideal H/I. Além disso, $(IK + I)/I \cdot B/I = (\bar{0})$, pois $IKB \subseteq I$. Dessa forma,

$$H/I = H/I \cdot H/I \subseteq (IK + I)/I \cdot B/I = (\bar{0}),$$

uma contradição! Concluímos, pois, que I é um ideal de K.

Consideremos agora o anel quociente K/I. Ele contém o ideal B/I, que é um anel subdiretamente irredutível não nulo com coração idempotente H/I. Pelo lema 2.5.34,

$(K/I)/(B/I)^*$ é um anel subdiretamente irredutível com coração idempotente isomorfo a H/I, ou seja, K/I pode ser sobrejetado num anel de M_ϕ. Entretanto, assumimos que K é um $\mathcal{U}_{M_\phi}$-radical, ou seja, K não pode ser sobrejetado homomorfamente num anel de M_ϕ, uma contradição. Isso prova que todo ideal de K também está em $\mathcal{U}_{M_\phi}$, portanto, $\mathcal{U}_{M_\phi}$ é hereditário.

■

Por causa do corolário 2.5.33 e do lema 2.5.35, obtemos o seguinte resultado:

Corolário 2.5.36. *O radical $\mathcal{U}_{M_\phi}$ é supernilpotente.*

■

Durante a demonstração do lema 2.5.34, procuramos provar a primalidade do anel candidato a ser subdiretamente irredutível com coração idempotente. O resultado a seguir mostra a relação entre tais propriedades.

Lema 2.5.37. *Todo anel subdiretamente irredutível com coração idempotente é primo.*

Demonstração: Se H é o coração idempotente de um anel subdiretamente irredutível K, então $H^2 = H$. Sejam B, C dois ideais de K, tais que $B \cdot C = (0)$. Se $B \neq (0)$ ou $C \neq (0)$, então $H \subseteq B$ e $H \subseteq C$; logo $H = H^2 \subseteq BC = (0)$, uma contradição. Portanto, K é um anel primo.

■

Corolário 2.5.38. *Todo anel em M_ϕ é um anel primo.*

■

O radical $\mathcal{U}_{M_\phi}$ pode ser usado como ferramenta pra estudar os radicais de Levitzki e de Jacobson, por exemplo, e mais adiante será usado para classificar certos tipos de radicais, os *radicais especiais*. Mas antes, abordaremos um dos radicais mais famosos na literatura: o *radical de Jacobson*.

2.6 O Radical de Jacobson e a quaserregularidade

Os resultados radicais de Wedderburn, Artin e Koethe, conforme visto na seção anterior, oferecem uma resposta muito interessante com respeito ao entendimento das estruturas de anéis, mas eles não são verdadeiros num anel arbitrário.

Nesse curso, N. Jacobson apresenta o conjunto *interseção J_A de todos os anuladores de A-módulos irredutíveis de um anel A. Faça-se $J_A = A$, caso o anel A não possua A-módulos irredutíveis*[5]. Definido dessa forma, J_A é um radical (de um anel A qualquer):

[5]Mais adiante, mostraremos que existem outras formas equivalentes de se definir o radical de Jacobson. Essa definição de "radical de Jacobson" pode ser encontrada em [Jac56] e, por isso, será chamada de *radical de Jacobson original*.

i) J_A contém os ideais nilpotentes do anel;

ii) J_A está definido para qualquer anel A;

iii) A/J_A é isomorfo a uma soma subdireta de matrizes infinitas sobre anéis de divisão.

Seja A um anel. Diremos que um elemento x de A é *quaserregular à direita* se existe um elemento y em A tal que:

$$x + y + xy = 0.$$

O elemento y da definição anterior é dito ser o *quase-inverso à direita* de x em A. *Mutatis mutandis*, podemos definir quaserregularidade à esquerda.

Definição 2.6.1 (Elemento quaserregular)**.** Um elemento x de A é *quaserregular* se existe um elemento x' em A tal que:

$$x + x' + xx' = 0 = x + x' + x'x.$$

Em outras palavras, um elemento é quaserregular se ele é quaserregular à direita e à esquerda e, além disso, seus quase-inversos à direita e à esquerda coincidem.

Um anel A será dito *quaserregular à direita (à esquerda)* se todos os seus elementos são quaserregulares à direita (à esquerda).

Definição 2.6.2 (Anel quaserregular)**.** Um anel A é dito ser *quaserregular* se todos os seus elementos são quaserregulares.

Sejam A um anel e I um ideal de A. Diremos que I é um ideal à direita (à esquerda, bilateral) quaserregular à direita, no caso em que I, analisado como um anel, seja quaserregular à direita. Note que A não é necessariamente quaserregular à direita. Mais adiante veremos que, para o estudo do radical de Jacobson, essa distinção lateral (quaserregularidade à direita, quaserregularidade à esquerda, quaserregularidade) é irrelevante.

A relação entre "anéis quaserregulares" e "radical de Jacobson" é muito simples: o radical de Jacobson de um anel arbitrário é um anel quaserregular. Na verdade, a interseção de todos os anuladores de A-módulos irredutíveis de um anel A e o ideal maximal quaserregular de A são, exatamente, o mesmo ideal, pois essa é uma das equivalências a serem verificadas durante esse trabalho.

O conceito de quaserregularidade é uma forma de se generalizar o conceito de nilpotência.

Lema 2.6.3. *Todo elemento nilpotente é quaserregular.*

Demonstração: Se x um elemento nilpotente de um anel A, então existe n, inteiro positivo, tal que $x^n = 0$. Seja $y = -x + x^2 - x^3 + \cdots \pm x^{n-1}$. Logo:

$$x + y + xy = x - x + x^2 - x^3 + \cdots \pm x^{n-1} - x^2 + x^3 + \cdots \mp x^{n-1} \pm x^n = \pm x^n = 0.$$

Com o mesmo cálculo, pode-se verificar que $x + y + yx = 0$ e isso encerra a prova.

■

Isso nos diz, em particular, que os anéis nil são quaserregulares. Denotaremos a classe de todos os anéis quaserregulares por $\mathcal{J}$. Em virtude do lema 2.6.3, $\mathcal{J}$ contém a classe $\mathcal{N}$. Entretanto, $\mathcal{N}$ contém a classe de todos os anéis nilpotentes e isso significa que $\mathcal{J}$ é uma classe de anéis que contém todos os anéis nilpotentes. Provaremos que a classe $\mathcal{J}$ é radical, mas antes utilizaremos duas classes auxiliares, as classes $\mathcal{J}_r$, a coleção de todos os anéis quaserregulares à direita, e $\mathcal{J}_l$, a coleção de todos os anéis quaserregulares à esquerda.

Comecemos estudando a classe $\mathcal{J}_r$ de todos os anéis quaserregulares à direita. Para estabelecermos que a quaserregularidade à direita é uma propriedade radical, mostraremos (tal como no radical clássico) que todo anel possui um ideal quaserregular à direita maximal. A maneira mais direta de se encontrar esse maximal é através da soma de todos os ideais quaserregulares à direita. Os enunciados e provas que se seguirão, até o fim dessa seção, levarão em conta um anel A (qualquer), seus elementos e seus ideais.

Lema 2.6.4. *Se x é quaserregular à direita e se y pertence a um ideal à direita quaserregular à direita I, então $x + y$ é quaserregular à direita.*

Demonstração: Essa demonstração será feita próximo capítulo, para o caso generalizado.

■

Corolário 2.6.5. *A soma de dois ideais à direita quaserregulares à direita é também um ideal à direita quaserregular à direita. Usando a indução finita, isso significa que a soma de uma quantidade finita de ideais à direita quaserregulares à direita é também um ideal à direita quaserregular à direita.*

■

Seja $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ a família de todos os ideais à direita quaserregulares à direita de A. Definamos

$$J = \sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda.$$

Construído dessa forma, $J \in \{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, ou seja, J é um ideal à direita quaserregular à direita, e, além disso, J é o maximal do conjunto $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$.

Poderíamos também, em análogo, fazer a mesma prova para ideais à esquerda ou bilaterais. Assim, acabamos de provar o seguinte lema:

Lema 2.6.6. *Qualquer anel A admite um ideal à direita (à esquerda, bilateral) quaserregular à direita maximal com respeito à quaserregularidade à direita.*

■

Agora mostraremos o resultado que nos interessa para a Teoria de Radicais.

Teorema 2.6.7. *A classe $\mathfrak{J}_r$ é uma classe radical.*

Demonstração: Pelo lema 2.6.6, a condição $R2$) está garantida. A condição $R1$) é imediata, pois um morfismo de anéis preserva as operações do anel que é o domínio desse morfismo. De fato, sejam A e C anéis e $\varphi : A \to C$ um morfismo, com $A' = \varphi(A)$. Se $x, y \in A$ são tais que $x + y + xy = 0$, então

$$0 = \varphi(0) = \varphi(x + y + xy) = \varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(x)\varphi(y),$$

donde concluímos que $\varphi(x)$ é quaserregular à direita em A'. Logo, se A é quaserregular à direita, então A' também o será.

A fim de garantir a condição $R3$), ou seja, que A/J não tenha ideais quaserregulares à direita não nulos (semissimplicidade com respeito à quaserregularidade à direita), suponhamos que A/J tenha um ideal quaserregular à direita B/J e tomemos $x+J$ um elemento de B/J. Logo, existe uma classe $y+J$ tal que $x+y+xy+J = J \Longrightarrow x+y+xy \in J$, e, portanto, deve existir um elemento $z \in A$ tal que

$$0 = (x + y + xy) + z + (x + y + xy)z = x + (y + z + yz) + x(y + z + yz).$$

Isso mostra que x é quaserregular à direita em A. Consequentemente, todo elemento na classe $x + J$ é quaserregular à direita, pelo lema 2.6.4. Logo, todo elemento em B é quaserregular à direita, o que significa B é um ideal quaserregular à direita de A, portanto tem-se $B \subseteq J$, pois J é ideal quaserregular à direita maximal, e concluímos que $B = J = (\bar{0})$ em A/J. Segue que A/J é semissimples com respeito à quaserregularidade à direita.

■

Os últimos resultados poderiam ser enunciados e provados, com as devidas adaptações, para a quaserregularidade à esquerda, ou seja, todo anel tem um radical J' com respeito à quaserregularidade à esquerda. Interessará-nos a quaserregularidade, embora muitos dos resultados que foram apresentados não necessitem da quaserregularidade dos dois lados.

Usando a mesma ideia do teorema 2.6.7

Teorema 2.6.8. *A classe $\mathfrak{J}$ é radical.*

Demonstração: Poderá sem encontrada em [Div64], [GW04] e [Jac56], mas ela será detalhada, mais adiante, no estudo do radical generalizado.

■

A generalização do radical de Jacobson é o principal interesse desse trabalho. N. McCoy propôs outro tipo de generalização para o radical de Jacobson inspirado, por sua vez, na *regularidade* (um fenômeno associado ao radical de Jacobson – o discutiremos para o caso generalizado), ao estudar um fenômeno que ele chamou de $\mathcal{G}$-*regularidade.*

2.7 O Radical de Brown-McCoy

Com respeito à quaserregularidade à direita, dado um anel A, podemos levar em consideração o ideal à direita $\{ar+r\}$, com r variando em A, associado ao elemento $a \in A$ e pode-se provar que a é quaserregular se, e somente se, $\{ar+r\} = A$. Consideraremos agora o ideal bilateral gerado por esse ideal à direita e nos interessará saber quais os elementos do anel A que tornam esse ideal bilateral todo o anel A. Ora, os quaserregulares já têm essa propriedade. Interessante seria descobrir todos os elementos, não necessariamente quaserregulares, cujo ideal bilateral acima descrito gera todo o A. Seja $a \in A$ e consideremos o ideal gerado pelo ideal à direita $\{ar+r\}$. Esse ideal pode ser formulado como a seguir:

$$\langle \{ar + r \ ; \ r \in A\} \rangle = \left\{ ar + r + \sum_{i=1}^{n<\omega} x_i a y_i + x_i y_i \ ; \ x_i, y_i, r \in A \right\} =: \mathcal{G}(a).$$

Definição 2.7.1 ($\mathcal{G}$-regularidade)**.** Seja A um anel. Dizemos que o elemento $a \in A$ é $\mathcal{G}$-*regular* se $a \in \mathcal{G}(a)$. Um anel A é dito ser $\mathcal{G}$-regular se todos os seus elementos são $\mathcal{G}$-regulares e $\mathcal{G}$ denotará a classe de todos os anéis $\mathcal{G}$-regulares.

Ora, se $a \in \mathcal{G}(a)$, então $ar \in \mathcal{G}(a)$ e, como $ar + r \in \mathcal{G}(a)$, r também está em $\mathcal{G}(a)$, para todo $r \in A$. Em outras palavras, se um elemento a é $\mathcal{G}$-regular, então $\mathcal{G}(a) = A$. A recíproca é imediata, pois se $\mathcal{G}(a) = A$, então $a \in A = \mathcal{G}(a)$, logo a é $\mathcal{G}$-regular.

Um ideal I de um anel A (qualquer) é dito ser $\mathcal{G}$-regular se ele, visto como anel, é $\mathcal{G}$-regular. Para as próximas demonstrações, estaremos levando em consideração um anel arbitrário A (a menos que se diga o contrário), seus elementos e seus ideais.

Lema 2.7.2. *A soma de dois ideais $\mathcal{G}$-regulares é também um ideal $\mathcal{G}$-regular.*

Demonstração: Sejam I_1 e I_2 dois ideais $\mathcal{G}$-regulares e suponha $a \in I_1$ e $b \in I_2$. Já que $a \in \mathcal{G}(a)$, existem r, x_i, y_i tais que

$$a = ar + r + \sum x_i a y_i + x_i y_i.$$

Com os mesmos elementos r, x_i, y_i acima, considere agora o elemento $c \in \mathcal{G}(a+b)$:

$$c = (a+b)r + r + \sum x_i\left((a+b)y_i + x_iy_i\right).$$

Agora,

$$\begin{aligned} a+b-c &= b + ar + r + \sum(x_iay_i + x_iy_i) - ar - br - r \\ &\quad - \sum\left(x_i(a+b)y_i + x_iy_i\right) \\ &= b - br - \sum x_iby_i. \end{aligned}$$

Como b está no ideal I_2, temos que $b - br - \sum x_iby_i$ está em I_2, ou seja, $a+b-c$ é $\mathcal{G}$-regular. Logo, existem $w, u_i, v_i \in A$ tais que

$$a+b-c = (a+b-c)w - w + \sum\left(u_i(a+b-c)v_i + u_iv_i\right).$$

Logo,

$$a+b = (a+b)w + w + \sum\left(u_i(a+b)v_i + u_iv_i\right) + c - cw - \sum u_icv_i\,. \tag{2.1}$$

Como $c \in \mathcal{G}(a+b)$, então $c - cw - \sum u_icv_i$ também está em $\mathcal{G}(a+b)$. Mais ainda,

$$(a+b)w + w + \sum\left(u_i(a+b)v_i + u_iv_i\right) \in \mathcal{G}(a+b),$$

portanto o lado direito da equação (2.1) também está em $\mathcal{G}(a+b)$, isto é, $a+b \in \mathcal{G}(a+b)$ e $a+b$ é $\mathcal{G}$-regular.

■

Corolário 2.7.3. *A soma de um conjunto finito de ideais $\mathcal{G}$-regulares é $\mathcal{G}$-regular.*

■

Teorema 2.7.4. *A classe $\mathcal{G}$ é uma classe radical.*

Demonstração: Provaremos que a $\mathcal{G}$ satisfaz as propriedades $R1$), $R2$) e $R3$). A propriedade $R1$) é facilmente verificada, pois um morfismo de anéis $\varphi : A \to B$ preserva as operações do anel A. De fato, sejam A um anel $\mathcal{G}$-regular e $a \in A$. Dessa forma, existem r, x_i, y_i tais que

$$a - ar - r - \sum(x_iay_i + x_iy_i) = 0 \in A.$$

Logo,

$$\varphi(a) - \varphi(a)\varphi(r) - \varphi(r) - \sum(\varphi(x_i)\varphi(a)\varphi(y_i) + \varphi(x_i)\varphi(y_i)) = \varphi(0) = 0 \in \varphi(A),$$

o que significa que $\varphi(a) \in \mathcal{G}(\varphi(a))$, para todo $a \in A$. Portanto $\varphi(A)$ é $\mathcal{G}$-regular.

A propriedade $R2$) também é facilmente demonstrável. Seja $\mathcal{G}(A)$ a soma de todos os ideais $\mathcal{G}$-regulares de um anel A arbitrário. Como todo elemento em $\mathcal{G}(A)$ está numa soma de uma quantidade finita de ideais $\mathcal{G}$-regulares, então, de acordo com o corolário 2.7.3, cada elemento de $\mathcal{G}(A)$ é $\mathcal{G}$-regular.

Resta-nos provar que $\mathcal{G}$ tem a propriedade $R3$). Seja $T/\mathcal{G}(A)$ um ideal $\mathcal{G}$-regular de $A/\mathcal{G}(A)$. Seja $\bar{t} = t + \mathcal{G}(A)$ em $T/\mathcal{G}(A)$. Então, existe certos $\bar{r}, \bar{x}_i, \bar{y}_i$ em $A/\mathcal{G}(A)$ tais que

$$\bar{t} - \bar{t}\bar{r} - \bar{r} - \sum(\bar{x}_i\bar{t}\bar{y}_i + \bar{x}_i\bar{y}_i) = \bar{0},$$

ou seja, existem certos $r, x_i, y_i \in A$ tais que

$$t - tr - r - \sum(x_ity_i + x_iy_i) \in \mathcal{G}(A).$$

Ponhamos

$$tr + r + \sum(x_ity_i + x_iy_i) = c.$$

Logo, $t - c$ está em $\mathcal{G}(A)$, portanto é $\mathcal{G}$-regular. Consequentemente, existem elementos w, u_i, v_i em A tais que

$$t - c = (t - c)w + w + \sum[u_i(t - c)v_i + u_iv_i].$$

Desse modo,

$$t = tw + w + \sum[u_itv_i + u_iv_i] + c - cw - \sum u_icv_i.$$

Como $c \in \mathcal{G}(t)$ temos que $c - cw - \sum u_icv_i$ também está em $\mathcal{G}(t)$. Em particular, $tw + w + \sum[u_itv_i + u_iv_i]$ também está em $\mathcal{G}(t)$. Portanto, $t \in \mathcal{G}(t)$, isto é, t é $\mathcal{G}$-regular. Como $t \in T$ é arbitrário, concluímos que todo elemento de T é $\mathcal{G}$-regular, ou seja, T é um ideal $\mathcal{G}$-regular. Como $\mathcal{G}(A)$ é o ideal $\mathcal{G}$-regular maximal de A, tem-se $T = \mathcal{G}(A)$, o que significa $T/\mathcal{G}(A) = 0$. Portanto, o único ideal $\mathcal{G}$-regular em $A/\mathcal{G}(A)$ é o ideal nulo e isso prova que $A/\mathcal{G}(A)$ é semissimples com respeito à $\mathcal{G}$-regularidade.

■

Um leitor atento pode está perguntando se as classes $\mathcal{J}$ e $\mathcal{G}$ coincidem. Pode-se provar que $\mathcal{J} \leq \mathcal{G}$ e, de fato, $\mathcal{J} < \mathcal{G}$, isto é, existe um anel $\mathcal{G}$-regular que não é quaserregular. Tais exemplos podem ser encontrados em [GW04] e [Div64].

2.8 Radicais especiais

Tendo como ponto de partida a classe M_ϕ mencionada na seção 2.5 e os resultados dos lemas 2.5.31, 2.5.34 e 2.5.37, nosso objetivo nessa seção é generalizar todas as caracterizações radicais encontradas na classe de todos os anéis subdiretamente irredutíveis.

Definição 2.8.1 (Classe especial)**.** Diremos que uma classe algébrica[6] $\mathcal{M}$ de anéis é uma *classe especial* se ela satisfizer as seguintes condições:

$SP1$) Todo anel na classe $\mathcal{M}$ é um anel primo.

$SP2$) Todo ideal não nulo de um anel $\mathcal{M}$ é um anel que também está em $\mathcal{M}$.

$SP3$) Se A é um anel $\mathcal{M}$ e A é um ideal de anel K, então K/A^* está em $\mathcal{M}$, em que $A^* = \{x \in K \ ; \ xA = Ax = 0\}$.

Imediatamente, dessa definição, segue-se que M_ϕ é uma classe especial. Uma classe especial, de maneira geral, poderia não conter anéis que não são subdiretamente irredutíveis. Dessa forma, a noção de "classe especial" generaliza a ideia de M_ϕ. O surpreendente dessa generalização é que muitas das caracterizações radicais obtidas pra M_ϕ são preservadas.

Se $\mathcal{M}$ é uma classe especial de anéis, então, por $SP2$), ela tem a propriedade $S1$), logo define uma propriedade radical superior $\mathcal{U}_\mathcal{M}$ para a qual todos os anéis em $\mathcal{M}$ são $\mathcal{U}_\mathcal{M}$-semissimples. Dessa forma, um anel $\mathcal{U}_\mathcal{M}$-radical não pode ser sobrejetado homomorfamente num anel não nulo de $\mathcal{M}$. Como um anel nilpotente não nulo não é primo e toda imagem por morfismo de um anel nilpotente é um ainda anel nilpotente, então todos os anéis nilpotentes são $\mathcal{U}_\mathcal{M}$-radicais, qualquer que seja a classe especial $\mathcal{M}$. O lema 2.5.35 sugere que $\mathcal{U}_\mathcal{M}$ seja hereditário tal como $\mathcal{U}_{\mathcal{M}_\phi}$, por causa de $SP3$). E de fato o é, basta que entendamos a prova do referido lema. O ideal I de B, nesse caso, é também um ideal de K porque B/I é um anel primo. Além disso, todos os anéis em $\mathcal{M}$ são primos. Logo $(K/I)/(B/I)^*$ é, por causa de $SP3$), um anel de $\mathcal{M}$, contradizendo o fato de K ser $\mathcal{U}_\mathcal{M}$-radical. Isso estabelece o seguinte resultado:

Teorema 2.8.2. *O radical superior $\mathcal{U}_\mathcal{M}$ determinado pela classe especial de anéis $\mathcal{M}$ é supernilpotente.*

■

O radical superior determinado por uma classe especial será chamado de *radical especial*.

Repetindo os mesmos argumentos usados para o radical $\mathcal{U}_{M_\phi}$, obtemos também o seguinte resultado:

Teorema 2.8.3. *Os radicais especiais são hereditários à direita e à esquerda.*

■

O resultado a seguir é uma ferramenta muito útil a ser usada com radicais especiais.

[6] Fechada para isomorfismos.

Teorema 2.8.4. *O radical especial $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}(K)$ de anel arbitrário K é igual à interseção de todos os ideais T_α de K tais que K/T_α é um anel pertencente à classe especial $\mathcal{M}$. Portanto, todo anel $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$-semissimples é uma soma subdireta de anéis da classe especial M.*

Demonstração: Denotemos por S o radical especial em K, isto é, $S = \mathcal{U}_{\mathcal{M}}(K)$. Se T_α é um ideal de K tal que K/T_α está em $\mathcal{M}$, então K/T_α é um anel $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$-semissimples. Logo, $S \subseteq T_\alpha$; consequentemente, $S \subseteq \cap T_\alpha$.

Por outro lado, seja T o ideal definido como $\cap T_\alpha$. Se T é $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$-radical, então $T \subseteq S$ e $S = T$. Entretanto, se T não é $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$-radical, então ele pode ser sobrejetado homomorfamente num anel não nulo de $\mathcal{M}$. Seja I o ideal de T tal que T/I está em $\mathcal{M}$. Tal como no lema 2.5.35, I é um ideal de K pois $(IH + I)/I \cdot T/I$ é o ideal nulo em K/I. Entretanto, $T/I \in \mathcal{M}$ é um anel primo, logo $IK \subseteq I$. Similarmente, $KI \subseteq I$ e I é um ideal de K. Portanto, K/I tem um ideal T/I que está em $\mathcal{M}$ e $(K/I)/(T/I)^*$ também está em $\mathcal{M}$, por $SP3$).

Seja $Q := \{x \in K \ ; \ xT \subseteq I \text{ e } Tx \subseteq I\}$. Provemos que $K/Q \cong (K/I)/(T/I)^*$. Claramente, $Q \supseteq I$. Mais ainda, $(T/I)^*$ é o conjunto de elementos de K/I que multiplicados T/I, em cada lado, resultam no ideal $(\bar{0})$. Portanto $(T/I)^* \cong Q/I$. Então, $(K/I)/(T/I)^* \cong (K/I)/(Q/I) \cong K/Q$. Como K/Q está em $\mathcal{M}$, $Q = T_\alpha$ para algum α. Portanto $T = \cap T_\alpha \subseteq Q$. Entretanto, se $T \subseteq Q$, então $TT \subseteq I$ e isto significa que T/I é um anel nilpotente. Mas T/I está em $\mathcal{M}$, logo ele é um anel primo e por isso não pode ser nilpotente, uma contradição. Logo, T deve ser um anel $S_{\mathcal{M}}$-radical, isto é, $T \subseteq S$.

Se um A é $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$-semissimples, então $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}(A) = (0) = \cap T_\alpha$ e segunda parte da prova segue do teorema 1.2.6.

■

Esse capítulo apresentou alguns aspectos gerais da Teoria de Radicais. Daqui em diante, o trabalho será direcionado à generalização do radical de Jacobson e para isso utilizaremos muitos dos conceitos, ferramentas e resultados apresentados aqui.

Capítulo 3

A k-quaserregularidade

Esse capítulo apresentará o radical de Jacobson generalizado como consequência da generalização da operação de Perlis, a operação "$\circ$", $x \circ y = x + y + xy$. Num de seus trabalhos de pesquisa, Petit Lobão percebeu que a operação deformada "q-adição" $\oplus_q$ proposta por Borges, em [B04], era uma generalização da operação de Perlis dentro do contexto na qual ela estava definida. Tendo como parâmetro inicial a ideia de Borges, Petit Lobão adaptou a operação $\oplus_q$ de forma que ela pudesse estar bem definida em todos os anéis, criando assim a "k-adição" $\oplus_k$. Essa "k-adição" se trata de uma operação derivada (recorrente às operações originais do anel, a adição e a multiplicação) do anel e pode ser expressa da seguinte forma:

$$x \oplus_k y = x + y + kxy,$$

em que x e y são elementos de um anel A arbitrário e k é um inteiro. Definida dessa forma, a k-adição, que a princípio era apenas uma adição deformada, é a generalização da operação de Perlis e será denotada por "$\circ_k$". Entretanto, sabe-se que a operação "$\circ$" pode definir uma classe radical, a classe dos anéis quaserregulares (os anéis radicais segundo Jacobson), conforme vimos no capítulo anterior. Será que a operação "$\circ_k$" também determina um radical? A resposta a essa pergunta é positiva, e esse radical será chamado de *radical generalizado de Jacobson* $\mathfrak{J}_k$.

3.1 O radical k-quaserregular

Na literatura matemática, em [Jac56], o radical de Jacobson de um anel A arbitrário foi apresentado, primeiramente, como a intersecção J de todos os anuladores de A-módulos irredutíveis de um anel A. Nessa perspectiva, descobriu-se que todos os elementos do ideal J são quaserregulares, isto é, para qualquer $x \in J$ existe $y \in A$ tal que $x + y + xy = 0$. Na verdade, y também está em J, pois J é um ideal de A. Um aspecto interessante disso é que a quaserregularidade foi concebida a partir das operações já existentes num anel e, por isso, a operação "$\circ$", $x \circ y = x + y + xy$, na qual x e y são elementos de um anel A arbitrário, foi chamada de *operação (binária) derivada associativa*.

Nesse sentido, McConnel e Stokes se propuseram a responder à seguinte pergunta: "Quais são todas as operações (binárias) derivadas associativas sobre um anel A arbitrário?". Em [MCSt98], eles exibiram a lista de todas as possíveis operações derivadas associativas definidas sobre um anel A arbitrário e descobriram que todas as operações do tipo $x \circ_k y = x + y + kxy$, $x, y \in A$ e $k \in \mathbb{Z}$, são operações derivadas associativas. Além disso, $(A, \circ_k)$ é um semigrupo, de modo geral, e provaremos que a classe de todos os anéis B para os quais $(B, \circ_k)$ é um grupo é uma classe radical. Em outras palavras, exibiremos uma maneira pela qual podemos generalizar o radical de Jacobson, já que a operação "$\circ$", que torna $(B, \circ)$ um grupo de B é um anel radical à Jacobson, é a operação "$\circ_1$".

Definição 3.1.1 (Operação k-círculo)**.** *Seja A um anel. Definiremos a operação k-círculo "$\circ_k$" da seguinte forma:*

$$x \circ_k y := x + y + kxy$$

quaisquer que sejam $x, y \in A$.

A operação acima também está bem definida, pois decorre das operações do anel. Ademais, o elemento neutro da adição 0 é um elemento neutro para a operação $\circ_k$ e, portanto, é o único elemento neutro em A para a operação $\circ_k$, já que a operação $\circ_k$ é associativa − isso garantirá a unicidade do elemento neutro. Portanto, (A , $\circ_k$) é um semigrupo.

Um elemento x de um anel A é *k-quaserregular à direita*, para um inteiro k fixado, se existir um elemento $y \in A$ tal que

$$x \circ_k y = x + y + kxy = 0.$$

O elemento y da definição anterior é dito ser o *k-quase-inverso à direita* de x em A. Analogamente, $x \in A$ é *k-quaserregular à esquerda*, para um dado k inteiro, se existir um elemento $y \in A$ (o seu *k-quase-inverso à esquerda*) tal que

$$x \circ_k y = x + y + kyx = 0.$$

Definição 3.1.2 (Elemento k-quaserregular)**.** Um elemento x de um anel A é dito ser k-quaserregular à direita, para um dado k inteiro, se existir um elemento $x' \in A$ tal que

$$x \circ_k x' = x + x' + kxx' = x + x' + kxx' = x' \circ_k x = 0,$$

em que k é um inteiro não nulo.

Em outras palavras, um elemento é k-quaserregular se, e somente se, ele é k-quaserregular à direita e à esquerda e, além disso, seus k-quase-inversos à direita e à esquerda coincidem.

Um anel A será dito *k-quaserregular à direita (à esquerda)* se todos os seus elementos são k-quaserregulares à direita (à esquerda).

Definição 3.1.3 (Anel k-quaserregular)**.** Um anel A é dito ser *k-quaserregular* se todos os seus elementos são k-quaserregulares.

Sejam A um anel e I um ideal de A. Diremos que I é um ideal à direita (à esquerda, bilateral) k-quaserregular à direita, no caso em que I, visto como um anel, seja k-quaserregular à direita, mesmo que A não seja, necessariamente, k-quaserregular à direita. *Mutatis mutandis*, a quaserregularidade à esquerda ou à direita são definidas com as devidas adaptações. Tal como o radical de Jacobson, a distinção lateral da k-quaserregularidade (à direita, à esquerda, ambos os lados) é irrelevante e isso será mostrado mais adiante.

Lema 3.1.4. *Todo elemento nilpotente é k-quaserregular.*

Demonstração: Seja x um elemento nilpotente do anel A. Logo, existe n inteiro positivo tal que $x^n = 0$. Seja $y = -x + kx^2 - k^2x^3 + \cdots \pm k^{n-2}x^{n-1}$. Dessa forma:

$$\begin{aligned} x + y + kxy &= x - x + kx^2 - k^2x^3 + \cdots \pm k^{n-2}x^{n-1} \\ &\quad -kx^2 + k^2x^3 + \cdots \mp k^{n-2}x^{n-1} \pm k^{n-1}x^n = \pm k^{n-1}x^n = 0. \end{aligned}$$

Com o mesmo cálculo, pode-se verificar que $x + y + kyx = 0$ e isto encerra a prova.

■

Lema 3.1.5. *Seja um A um anel. Se um elemento x de A é k-quaserregular à direita, com um k-quase-inverso à direita w, e k-quaserregular à esquerda, com um k-quase-inverso à esquerda t, então $w = t$ e w é único em A.*

Demonstração: Sejam w e t tais que

$$\begin{cases} x \circ_k w &= x + w + kxw &= 0 \\ t \circ_k x &= x + t + ktx &= 0. \end{cases}$$

Dessa forma,

$$t = t \circ_k 0 = t \circ_k (x \circ_k w) = (t \circ_k x) \circ_k w = 0 \circ_k w = w.$$

A unicidade do k-quase-inverso à direita segue-se de imediato. Dizer que um elemento é k-quaserregular à direita é o mesmo que dizer que ele possui um inverso no semigrupo

$(A, \circ_k)$ e a associatividade de $\circ_k$ garantirá a unicidade desse inverso em $(A, \circ_k)$, que é o k-quase-inverso à direita de x.

■

Seja $\mathfrak{J}_k$ a classe de todos os anéis k-quaserregulares. Note que um anel A é k-quaserregular se, e somente se, $(A, \circ_k)$ é um grupo. Observe também que $\mathfrak{J}_k = \mathfrak{J}_{-k}$, pois $x+y+kxy = 0$ se, e somente se, $-x-y-kxy = -x-y-k(-x)(-y) = 0$. Isso significa que $-x$ é $-k$-quaserregular, portanto $x = -(-x)$ também é $-k$-quaserregular.

Por causa do lema 3.1.4, $\mathfrak{J}_k$ contém a classe de todos os anéis nil.

Mostraremos que $\mathfrak{J}_k$ é um radical. Comecemos com alguns lemas auxiliares e, para os mesmos, estaremos levando em consideração um anel A arbitrário (a menos que se especifique o contrário), seus elementos e seus ideais.

Lema 3.1.6. *Se x é k-quaserregular e se y pertence a um ideal à direita (à esquerda, bilateral) k-quaserregular I, então $x+y$ é k-quaserregular.*

Demonstração: Se x é k-quaserregular, existe $x' \in A$ tal que $x + x' + kxx' = 0$. Seja I um ideal à direita e $y \in I$. O elemento $y + kyx'$ está em I, pois I é um ideal à direita. Seja z o seu k-quase-inverso, isto é,

$$y + kyx' + z + k(y + kyx')z = 0,$$

ou

$$y + z + k(yx' + yz + kyx'z) = 0.$$

Note que

$$\begin{aligned} & (x+y) + (x' + z + kx'z) + k(x+y)(x' + z + kx'z) = \\ = \ & (x + x' + kxx') + k(x + x' + kxx')z + y + z + k(yx' + yz + kyx'z) = \\ = \ & 0. \end{aligned}$$

Isso significa que $x+y$ é k-quaserregular e seu k-quase-inverso é $x' + z + kx'z$. No caso em que I é um ideal à esquerda, a demonstração é análoga.

■

Corolário 3.1.7. *A soma de uma quantidade finita de ideais à direita (à esquerda, bilaterais) k-quaserregulares é também um ideal à direita (à esquerda, bilateral) k-quaserregular.*

Demonstração: Segue-se imediatamente do lema anterior que a soma de dois ideais à direita (à esquerda, bilaterais) k-quaserregulares é também um ideal à direita (à esquerda, bilateral) k-quaserregular. Pelo princípio de indução finita, a soma de uma quantidade finita de ideais à direita (à esquerda, bilaterais) k-quaserregulares é ainda um ideal à direita (à esquerda, bilateral) k-quaserregular.

■

Corolário 3.1.8. *A soma de todos os ideais à direita (à esquerda, bilaterais) k-quaserregulares é também um ideal à direita (à esquerda, bilateral) k-quaserregular.*

Demonstração: Seja T a soma de todos os ideais à direita (à esquerda, bilaterais) k-quaserregulares de um anel A. Cada elemento de T está numa soma finita de ideais à direita (à esquerda, bilaterais) k-quaserregulares de A, portanto cada elemento de T é k-quaserregular.

■

Seja $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ a família de todos os ideais k-quaserregulares de um anel A. Definamos

$$J_k := \sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda.$$

Construído dessa forma, $J_k \in \{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, ou seja, J_k é um ideal k-quaserregular (em virtude do corolário 3.1.8) e, além disso, J_k é o maximal do conjunto $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de todos os ideais k-quaserregulares de A.

Poderíamos também, em análogo, fazer a mesma prova para ideais à esquerda ou à direita. Assim, acabamos de provar o seguinte lema:

Lema 3.1.9. *Qualquer anel A admite um ideal à direita (à esquerda, bilateral) k-quaserregular maximal com respeito à k-quaserregularidade.*

■

Agora mostraremos o resultado que nos interessa para a Teoria de Radicais.

Teorema 3.1.10. *A classe $\mathfrak{J}_k$ de todos os anéis k-quaserregulares é uma classe radical.*

Demonstração: Pelo corolário 3.1.8, a condição $R2$) está garantida. A condição $R1$) é imediata, pois um morfismo de anéis preserva as operações do anel que é o domínio desse morfismo. De fato, sejam A e B anéis e $\varphi : A \to B$ um morfismo, com $A' = \varphi(A)$. Se $x, y \in A$ são tais que $x + y + kxy = 0$, então

$$0 = \varphi(0) = \varphi(x + y + kxy) = \varphi(x) + \varphi(y) + k\varphi(x)\varphi(y),$$

do qual concluímos que $\varphi(x)$ é k-quaserregular em A'. Logo, se A é k-quaserregular, então A' também o será.

A fim de garantir a condição $R3$), ou seja, a semissimplicidade com respeito à k-quaserregularidade, suponhamos que A/J_k tenha um ideal k-quaserregular B/J_k e tomemos $x + J_k$ um elemento de B/J_k. Logo, existe uma classe $y + J_k$ tal que $x + y + kxy + J_k = J_k \Longrightarrow x + y + kxy \in J_k$, portanto deve existir um elemento $z \in A$ tal que

$$0 = (x + y + kxy) + z + k(x + y + kxy)z = x + (y + z + kyz) + kx(y + z + kyz).$$

Isso mostra que x é k-quaserregular em A. Consequentemente, todo elemento na classe $x + J_k$ é k-quaserregular, por causa do lema 3.1.6. Logo, todo elemento em B é k-quaserregular, o que significa B é um ideal k-quaserregular de A, portanto tem-se $B \subseteq J_k$, pois J_k é o ideal k-quaserregular maximal, e concluímos que $B/J_k = (0)$ em A/J_k. Segue que A/J_k é semissimples com respeito à k-quaserregularidade.

■

O ideal J_k (a soma de todos os ideais k-quaserregulares) de um anel A será chamado de *radical k-quaserregular de A* ou *k-radical de Jacobson generalizado de A* e denotado por $\mathfrak{J}_k(A)$. Antes de estudarmos a classe radical $\mathfrak{J}_k$, buscaremos outras formas de se obter o radical de Jacobson generalizado de um anel A arbitrário.

3.2 Equivalências para o ideal $\mathfrak{J}_k(A)$

Comentamos no início da seção anterior que o radical de Jacobson pode ser apresentado como a soma de todos os ideais quaserregulares do anel (veja [Jac56]). O objetivo dessa seção é identificar o radical de Jacobson generalizado de um anel A arbitrário, o qual denotamos por $\mathfrak{J}_k(A)$, para $k \geq 1$, num plano mais abrangente, pois nos interessa saber como esse radical generaliza as formas equivalentes do radical de Jacobson original. Para tanto, comecemos com um lema simples, da teoria básica de anéis:

Lema 3.2.1. *Se U é um A-módulo irredutível à direita, então $U \cong A/M$, no qual M é ideal à direita maximal de A.*

Demonstração: Pelo teorema 1.2.7, U é cíclico, logo existe $u \in U$ tal que $U = uA$. Defina então $f : A \to U$ pondo $f(a) = ua$. Definido dessa forma, f é um A-epimorfismo; logo $U \cong A/M$, no qual M é o núcleo de f e, portanto, ideal à direita de A (ou submódulo à direita do A-módulo A). Provemos que M é maximal. Seja N um ideal à direita de A que contenha propriamente M. Logo, N/M é isomorfo a um submódulo à direita não nulo de U e isso significa que $N/M \cong U$. Portanto $N = A$ e M é maximal.

■

A demonstração desse teorema para o radical de Jacobson implica no conceito de *regularidade*, ou seja, um ideal H de um anel A é *regular* se existe um elemento $\mathfrak{e}$ em A tal que $\mathfrak{e}x - x \in H$, para todo $x \in A$, pois se pode provar que o ideal da demonstração do lema 3.2.1 é regular. A seguinte definição é outra forma de se generalizar as estruturas referentes ao radical citado.

Definição 3.2.2 (k-regularidade à direita)**.** Um ideal à direita H é k-regular se existe um elemento $\mathfrak{e}$ em A tal que $k\mathfrak{e}x - x \in H$, para todo $x \in A$.

A regularidade usual é a 1-regularidade e o conjunto $\{k\mathfrak{e}x - x; x \in A\}$ também é denotado por $(k\mathfrak{e} - 1)A$. Tais notações devem ser vistas com cuidado, pois essa simbologia independe do fato do anel A possuir identidade. O elemento $\mathfrak{e}$ da definição anterior é dito ser a k-unidade à esquerda de H.

Se M é um ideal à direita do anel A, o conjunto

$$(M : kA) = \{x \in A \ ; \ kAx \subseteq M\}$$

é um ideal do anel A. Essa verificação é muito simples e será deixada a cargo do leitor.

Lema Técnico 3.2.3. *Se M é um ideal à direita do anel A, o ideal $(M : kA)$ contém o ideal $(M : A)$.*

Demonstração: Tenhamos em mente que a definição de $(M : A)$ é análoga à definição de $(M : kA)$, isto é, $(M : A) = \{x \in A \ ; \ Ax \subseteq M\}$ e, além disso, $(M : A)$ é um ideal de A. Se $x \in (M : A)$, então $Ax \subseteq M$, logo $kAx \subseteq M$ e isto significa que $x \in (M : kA)$.

■

Lema 3.2.4. *Se M é ideal à direita k-regular, então $(M : kA)$ é o maior ideal de A contido em M.*

Demonstração: Seja $\mathfrak{e}$ a k-unidade à esquerda de M. Se $x \in (M : kA)$, então $kAx \subseteq M$ logo, $k\mathfrak{e}x \in M$ e como $k\mathfrak{e}x - x \in M$ temos que $x \in M$. Portanto, $(M : kA) \subseteq M$. Além disso, seja N um ideal qualquer de A, tal que $N \subseteq M$. Dessa forma, $kAN \subseteq AN \subseteq N \subseteq M$, logo $N \subseteq (M : kA)$, ou seja, $(M : kA)$ é o maior ideal de A contido em M.

■

Lema Técnico 3.2.5. *Um elemento a de um anel A é k-quaserregular à direita se, e somente se, $(ka + 1)A = A$.*

Demonstração: Se a é k-quaserregular à direita, então existe a' tal que $a + a' + kaa' = 0$, isto é, $a = -kaa' - a'$. Logo $a \in (ka + 1)A$. Seja $x \in A$ arbitrário. O elemento kax está em $(ka + 1)A$, já que o conjunto $(ka + 1)A$ é um ideal à direita de A. Mas $kax + x \in (ka + 1)A$, logo $x \in (ka + 1)A$.

Por outro lado, se $(ka + 1)A = A$, então existe $-b \in A$ tal que

$$ka(-b) + (-b) = a,$$

logo $a + b + kab = 0$, do qual concluímos que a é k-quaserregular.

■

Definição 3.2.6 (k-Anulador)**.** Seja U um A-módulo à direita e $X \subseteq U$ um subconjunto. O k-anulador de X em A, denotado por $X_k^*(A)$ ou $\mathrm{Ann}_k(X, A)$, é definido da seguinte forma:

$$X_k^*(A) = \mathrm{Ann}_k(X, A) = \{a \in A \ ; \ kXa = 0\}.$$

Para simplificar a notação, desde que o anel A em questão esteja claro no contexto, escreveremos X_k^* no lugar de $X_k^*(A)$ ou $\mathrm{Ann}_k(X)$ no lugar de $\mathrm{Ann}_k(X, A)$. Facilmente se é notado que o conjunto $\mathrm{Ann}_k(U, A)$ é um ideal de A.

Agora, pensemos um anel A como um A-módulo sobre si próprio. Falar do k-anulador $\mathrm{Ann}_k(A, A) = A^*$ de um anel A arbitrário nos remete ao estudo de sistemas geradores à direita para A, pois se $a \in A^*$ e $A = \langle B, ka \rangle_r$, então $A = \langle B \rangle_r$. Seja $D_{k,r}$ o conjunto de todos os elementos $x \in A$ tais que kx são redundantes, segundo Szász (veja [Sza81]), num sistema gerador à direita, isto é, $A = \langle B, kx \rangle_r$ implica $A = \langle B \rangle_r$. Obviamente, $D_{k,r}$ é um ideal à direita de A e o denotaremos por D_r quando o índice k do radical de Jacobson generalizado estiver claro no contexto. Mais adiante, usaremos a ideia de ser redundância em sistemas geradores para caracterizar o radical $\mathcal{J}_k(A)$.

Sabe-se que um anel semissimples à Jacobson pode ser decomposto em anéis primitivos. Um anel A é *primitivo* se ele contiver um ideal maximal M tal que $(M : A) = (0)$. Uma generalização natural da primitividade é a seguinte:

Definição 3.2.7. Um anel A é k-primitivo à direita se ele contém um ideal à direita maximal M tal que $(M : kA) = (0)$.

Note que a k-primitividade implica na primitividade, em virtude do lema técnico 3.2.3. Por causa desse fato, a k-primitividade pode ser entendida como um conceito "mais forte" que a primitividade.

Definição 3.2.8. Um ideal P de A é um ideal k-primitivo à direita se A/P é um anel k-primitivo à direita.

Os próximos resultados mostram como os conceitos "k-regularidade"e "k-primitividade" estão relacionados.

Lema 3.2.9. *Se M é um ideal à direita k-regular maximal de A, então o ideal $(M : kA)$ de A é k-primitivo à direita.*

Demonstração: Consideremos $A/(M : kA)$. Se $(M : kA) = M$, então M é um ideal à direita de A e $A/M = A/(M : kA)$ não tem ideais à direita próprios não nulos, pois M é maximal, de acordo com o lema 3.2.4. Se $k(A/M)\bar{x} = (\bar{0})$, então $kAx \subseteq M$. Portanto, $x \in (M : kA) = M$ e assim, $\bar{x} = \bar{0}$. Consequentemente, $(M : kA)$ é um ideal k-primitivo à direita de A quando $(M : kA) = M$.

Por outro lado, se $(M : kA) \neq M$, então pelo lema 3.2.4, $(M : kA) \subset M$. Assim, em $A/(M : kA)$, consideremos o ideal à direita $M/(M : kA)$. Além disso,

$$(M/(M : kA) : kA/(M : kA)) = (\bar{0}),$$

pois se $A/(M : kA)\bar{x} \subseteq M/(M : kA)$, então $kAx \subseteq M$ e, portanto, $x \in (M : kA)$; logo $\bar{x} = \bar{0}$. Portanto, $A/(M : kA)$ é um anel k-primitivo à direita e, dessa forma, $(M : kA)$ é um ideal k-primitivo à direita.

■

Note que todos os lemas e todas as definições nesta seção têm a sua versão "à esquerda". O ideal $D_{k,l}$, por exemplo, é a versão à esquerda do ideal $D_{k,r}$.

Lembremo-nos que $\mathfrak{J}_k(A)$ é a soma de todos os ideais k-quaserregulares de um anel A e para ele obteremos algumas formas equivalentes. O resultado a seguir foi demonstrado para o radical de Jacobson original, por Szász (consulte [Sza81]).

Teorema 3.2.10. *Os subconjuntos abaixo relacionados de um anel A arbitrário coincidem com o k-radical de Jacobson generalizado $\mathfrak{J}_k(A)$ de A:*

- *A soma H_1 de todos os subgrupos do grupo k-quaserregular maximal do semigrupo $(A , \circ)$ que também são ideais à direita do anel A.*
- *A intersecção H_2 de todos os ideais à direita maximais k-regulares de A.*
- *A intersecção H_2' de todos os ideais à esquerda maximais k-regulares de A.*
- *O conjunto H_3 de todos os elementos $x \in A$ tais que o produto kxy é k-quaserregular para todo $y \in A$.*
- *O conjunto H_3' de todos os elementos $x \in A$ tais que o produto kyx é k-quaserregular para todo $y \in A$.*
- *O conjunto H_4 de todos os elementos $x \in A$ tais que o produto $kzxy$ é k-quaserregular para todo $y \in A$ e $z \in A$.*
- *A intersecção H_5 dos ideais $(M : kA) = \{x \in A \; ; \; Ax \subseteq M\}$, em que M é ideal maximal à direita.*
- *A intersecção H_5' dos ideais $(N : kA) = \{x \in A \; ; \; xA \subseteq N\}$, em que N é ideal maximal à esquerda.*
- *A intersecção H_6 dos k-anuladores em A de A-módulos à direita irredutíveis. Caso não existam A-módulos à direita irredutíveis, $J_k = A$.*

- *A intersecção H'_6 dos k-anuladores em A de A-módulos à esquerda irredutíveis. Se não existem A-módulos à esquerda irredutíveis, $J_k = A$.*
- *A intersecção H_7 de todos os ideais k-primitivos à direita de A.*
- *A intersecção H'_7 de todos os ideais k-primitivos à esquerda de A.*
- *O ideal $H_8 = (D_{k,r} : kA) = (D_r : kA) = \{x \in A\ ;\ kAx \subseteq D_r\}$.*
- *O ideal $H'_8 = (D_{k,l} : kA) = (D_l : kA) = \{x \in A\ ;\ kAx \subseteq D_l\}$.*

Demonstração: A soma H_1 é apenas outra forma de escrever o radical $\mathfrak{J}_k$: um subconjunto de A é subgrupo do grupo k-quaserregular maximal do semigrupo (A , $\circ$) e ideal à direita do anel A se, e somente se, ele é um ideal do anel A no qual todos os seus elementos são k-quaserregulares, ou seja, se ele é um ideal k-quaserregular. Como $\mathfrak{J}_k(A)$ é a soma de todos os ideais k-quaserregulares, $H_1 = \mathfrak{J}_k(A)$. Tendo em mente esta igualdade e o fato de que "ser k-quaserregular", "ser k-quaserregular à direita" e "ser k-quaserregular à esquerda" têm o mesmo significado, as próximas demonstrações seguiram esta linha de raciocínio. Caberá ao leitor identificar qual a "k-quaserregularidade lateral" que está sendo usada na demonstração.

Considere agora um elemento $x \in H_2$ e se x não é k-quaserregular, então $\{kxa+a : a \in A\} \neq A$, já que $x \notin \{kxa + a : a \in A\}$. Seja M um ideal à direita maximal contendo $\{kxa + a : a \in A\} \neq A$, mas não contendo x. Notemos que M é k-regular, pois

$$-kxa - a = k(-x)a - a \in M,$$

para todo $a \in A$, portanto M é k-regular e $x \in M$, uma contradição. Consequentemente, qualquer $x \in H_2$ é k-quaserregular, ou seja, H_2 é um ideal k-quaserregular, portanto $H_2 \subseteq \mathfrak{J}_k(A)$.

Se $x \in \mathfrak{J}_k(A)$, então $kxa \in \mathfrak{J}_k(A)$ para todo $a \in A$, pois $\mathfrak{J}_k(A)$ é um ideal de A, logo kxa é k-quaserregular e $\mathfrak{J}_k(A) \subseteq H_3$.

Agora, vamos tomar $x \in H_3$; logo, kxy é k-quaserregular para qualquer $y \in A$, em particular kxy é k-quaserregular à direita para qualquer $y \in A$. Suponha $x \notin H_2$. Dessa forma, existe um ideal à direita maximal k-regular L com $x \notin L$. Como L é maximal, o ideal à direita maximal gerado por L e x é todo o anel A, isto é, $A = L + \{xy + ix\}$, no qual $y \in A$ e i é um inteiro. Como L é k-regular existe $\mathfrak{e}$ tal que $k\mathfrak{e}y - y \in L$, qualquer que seja $y \in R$. Assim, existem $l_0 \in L$, $y_0 \in A$ e i_0 inteiro tais que:

$$-\mathfrak{e} = l_0 + xr_0 + i_0x. \tag{3.1}$$

Multiplicando a equação (3.1) por $\mathfrak{e}$ à direita, obtemos

$$-\mathfrak{e}^2 = l_0\mathfrak{e} + xy_0\mathfrak{e} + i_0x\mathfrak{e}. \tag{3.2}$$

Ademais, $kxy_0\mathfrak{e} + ki_0x\mathfrak{e} = kx(y_0\mathfrak{e} + i_0x)$ é k-quaserregular à direita, pela definição de H_3, portanto existe $a \in A$ tal que

$$kxy_0\mathfrak{e} + ki_0x\mathfrak{e} + a + k^2xy_0\mathfrak{e}a + k^2i_0x\mathfrak{e}a = 0. \tag{3.3}$$

Tomando (3.2) e multiplicando por k^2a à direita:

$$-k^2\mathfrak{e}^2a = k^2l_0\mathfrak{e}a + k^2xy_0\mathfrak{e}a + k^2i_0x\mathfrak{e}a. \tag{3.4}$$

Combinando as equações (3.3) e (3.4), obtemos

$$k^2l_0\mathfrak{e}a - kxy_0\mathfrak{e} - ki_0x\mathfrak{e} + k^2\mathfrak{e}^2a - a = 0. \tag{3.5}$$

Como L é k-regular, $k\mathfrak{e}^2 - \mathfrak{e} \in L$ e, já que L é ideal à direita, $k\mathfrak{e}^2a - \mathfrak{e}a \in L$, portanto $k^2\mathfrak{e}^2a - k\mathfrak{e}a \in L$. Também $k\mathfrak{e}a - a \in L$, logo $k^2\mathfrak{e}^2a - a$ é um elemento de L e isto implica, por causa da equação (3.5), que $kxy_0\mathfrak{e} + ki_0x\mathfrak{e} \in L$. A equação (3.2) nos fornece

$$-k\mathfrak{e}^2 = kl_0\mathfrak{e} + kxy_0\mathfrak{e} + ki_0x\mathfrak{e}.$$

Mas isso significa que $-k\mathfrak{e}^2 \in L$ e como $k\mathfrak{e}^2 - \mathfrak{e} \in L$, obtemos que $\mathfrak{e} \in L$. Logo $k\mathfrak{e}z \in L$ para todo $z \in A$ e, como $k\mathfrak{e}z - z \in L$, para $z \in A$ arbitrário, concluímos que $z \in L$, isto é, $A = L$, uma contradição. Isto prova que $H_3 \subseteq H_2$.

Dessa forma, mostramos $H_2 \subseteq \mathfrak{J}_k(A) \subseteq H_3 \subseteq H_2$, ou seja, $H_2 = \mathfrak{J}_k(A) = H_3$. Com a versão "à esquerda" dessa demonstração, obtemos também $H_2' = \mathfrak{J}_k(A) = H_3'$.

Provemos que $\mathfrak{J}_k(A) = H_4$. É imediato $\mathfrak{J}_k(A) \subseteq H_4$. Se $x \in H_4$, então $kzxy$ é k-quaserregular, para qualquer $y \in A$, e isto implica (em virtude de $J_k = H_3$) que zx é k-quaserregular, ou $zx \in \mathfrak{J}_k(A)$, qualquer que seja $z \in A$. Ora, $\mathfrak{J}_k(A)$ é um ideal, então $kzx \in \mathfrak{J}_k(A)$. Mas $\mathfrak{J}_k(A) = H_3'$, então x é k-quaserregular, ou seja $x \in \mathfrak{J}_k(A)$. Logo $\mathfrak{J}_k(A) = H_4$.

Suponha, primeiramente, que o anel $A \neq 0$ não possua um A-módulo irredutível. Dessa forma, o anel A visto como A-módulo não é irredutível e isso significa que A é um anel zero, logo ele é um anel nilpotente. Por causa do lema 3.1.4, A é um anel k-quaserregular, logo $\mathfrak{J}_k(A) = A$. Seja U um A-módulo à direita irredutível e se $\mathfrak{J}_k(A) \nsubseteq \mathrm{Ann}_k(U)$, então $kU\mathfrak{J}_k(A) \neq (0)$, isto é, $ku\mathfrak{J}_k(A) \neq (0)$ para algum $u \in U$. Mas então $ku\mathfrak{J}_k(A) = U$ e, portanto, existe $h \in \mathfrak{J}_k(A)$ tal que $kuh = -u$. Seja $r \in A$ tal que $h + r + khr = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} 0 &= u(h + r + khr) = uh + ur + kuhr = \\ &= -u + ur - ur = -u, \end{aligned}$$

da qual concluímos que $ku\mathfrak{J}_k(A) = 0$, uma contradição. Portanto $\mathfrak{J}_k(A) \subseteq \mathrm{Ann}_k(U)$ e, finalmente, $\mathfrak{J}_k(A) \subseteq H_6$. Por causa do lema 3.2.1 e pela definição do próprio H_6, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ann}_k(A/M) &= \{x \in A \,:\, k(A/M)x = (\bar{0})\} \\ &= \{x \in A \,:\, kAx \subseteq M\} \\ &= (M : kA). \end{aligned}$$

Logo, $H_6 = H_5$. Seja então $x \in H_6$ e M um ideal maximal à direita k-regular de A. Dessa forma, $(1 - k\mathfrak{e})A \subseteq M$, para algum $\mathfrak{e} \in A$. Logo, $x - k\mathfrak{e}x \in M$ e também, como $x \in H_6 = H_5$, $x \in (A : kM)$, isto é, $kAx \subseteq M$. Isso significa que $k\mathfrak{e}x \in M$, portanto $x \in M$. Logo $H_6 \subseteq H_2 = \mathfrak{J}_k(A)$, do qual concluímos que $H_5 = H_6 = \mathfrak{J}_k(A)$. A versão "à esquerda" dessa demonstração validará $H'_6 = H'_5 = \mathfrak{J}_k(A)$.

Mostraremos agora que $\mathfrak{J}_k(A) = H_7$. Vejamos que $\mathfrak{J}_k(A) \supseteq H_7$. Todo ideal à direita maximal k-regular M de A contém um ideal k-primitivo à direita $(M : kA)$, pelos lemas 3.2.4 e 3.2.9. Portanto, $\mathfrak{J}_k(A) = H_2$ contém a intersecção dos ideais k-primitivos à direita em A. Provemos agora que $\mathfrak{J}_k(A) \subseteq H_7$. Para isto, consideremos P um ideal k-primitivo à direita em A. Portanto, A/P é k-primitivo à direita e isso significa que ele contém um ideal à direita maximal M/P, tal que $(M/P : kA/P) = (\bar{0})$, ou seja, $(M : kA) \subseteq P$. Como M/P é maximal em A/P, M é maximal em A. Logo $\mathfrak{J}_k(A) = H_5 \subseteq H_7$, isto é, $\mathfrak{J}_k(A) = H_7$ e a versão "à esquerda" nos fornece $\mathfrak{J}_k(A) = H'_7$.

Se $A = \mathrm{Ann}_k(A, A) = A^*_k$, então $\mathfrak{J}_k(A) = H_8 = H'_8$ trivialmente. Suponha que $A \nsubseteq A^*_k$, ou seja, $kA \nsubseteq A^*$, e que $x \notin H_7 = (D_r : kA)$. Dessa forma, existem $a \in A$ e $B \subseteq A$ (um subconjunto) tais que $\langle B, kax\rangle_r = A$ e $kax \notin \langle B\rangle_r$. Considere agora o ideal à direita M de A tal que $B \subseteq M$, $kax \notin M$ e M é maximal com respeito a essa propriedade (isso é garantido pelo lema de Zorn). Já que se tem $\langle B, kax\rangle_r = A$, M é ideal à direita maximal de A e o A-módulo à direita A/M é irredutível. Para cada elemento $b \in A$, seja $\bar{b}$ a imagem pelo A-morfismo $A \to A/M$. Se $kax \notin M$, então $k\bar{a}x = \bar{a}(kx) \neq \bar{0}$ e, como A/M é um A-módulo irredutível e $kA \neq A^*$, $(A/M)A = A/M$ e $(A/M)(kA) = A/M$, ou seja, existe $c \in A$ satisfazendo

$$\bar{a}(kx)c = \bar{a}(kxc) \neq \bar{0}.$$

e

$$\bar{a}kx(kc) = \bar{a}(k^2xc) = -\bar{a}.$$

Se kxc for k-quaserregular à direita, então existirá $y \in A$ tal que

$$kxc + y + k^2xcy = 0$$

e a igualdade

$$\begin{aligned} \bar{a}(kxc) &= \bar{a}(-y - k^2xcy) = -\bar{a}y - \bar{a}(k^2xcy) = \\ &= -\bar{a}y + \bar{a}y = \bar{0} \end{aligned}$$

levará-nos a uma contradição. Logo, $x \notin H_3$ e isto significa $H_3 \subseteq H_8$.

Para provarmos que $H_8 \subseteq H_3$, suponha $x \notin H_3$. Existirá, portanto, um elemento $a \in A$ tal que kxa não é k-quaserregular (usaremos aqui a k-quaserregularidade à direita). Considere o ideal à direita $S = (1 - k^4xaxa)A$ de A e suponha que $k^3xaxa \in S$. Logo, existe $y \in A$ tal que

$$k^3xaxa = y - k^4xaxa.$$

Portanto

$$\begin{aligned}&kxa + (-kxa + y - k^2xa) + k(kxa)(-kxa + y - k^2xa) =\\&= -k^3xaxa + y - k^4xaxa = 0,\end{aligned}$$

contradizendo o fato de kxa não ser k-quaserregular. Logo $k^3xaxa \notin S$. Com a notação $t = k^2xa$, obtemos que $ktxa \notin S$ e, como S é ideal, $ktx \notin S$. Seja $u \in A$ um elemento arbitrário.

$$u = uk^2txa + (u - uk^4xaxa),$$

portanto, $A = \langle S, k^2txa\rangle_r \subseteq \langle S, k^2tx\rangle_r \subseteq \langle S, ktx\rangle_r$, isto é, $A = \langle S, ktx\rangle_r$.

Ora, o sistema (S, ktx) é um sistema gerador de A mas ktx não pode ser cancelado, pois $ktx \notin S$. Logo $x \notin (D_r : kA)$, portanto $H_8 \subseteq H_3$ e concluímos que $J_k = H_3 = H_8$. A versão "à esquerda" provará $\mathfrak{J}_k(A) = H_3' = H_8'$.

■

As caracterizações do teorema 3.2.10 são úteis porque para certos anéis é complicado exibir um ideal k-quaserregular ou demonstrar a inexistência dos mesmos. Se D é um anel de divisão não trivial, por exemplo, então seu radical de Jacobson $\mathfrak{J}(D)$ é o ideal (0), pois se $x \in D$ é quaserregular, então existe $y \in D$ tal que $x + y + xy = 0$, logo

$$y = \frac{-x}{1_D + x}.$$

Portanto, se $x \neq -1_D$, então x é quaserregular.

Mas D é, em particular, um anel simples, logo não existem ideais não nulos de D no conjunto $D \setminus \{-1\}$. Portanto $\mathfrak{J}(D) = (0)$. Com o mesmo raciocínio, se A é um anel simples com unidade, então $\mathfrak{J}(A) = (0)$. Nesses casos, foi fácil determinar o radical de Jacobson, até porque se tratavam de anéis simples. No caso de um anel que não é simples nem sempre é fácil descobrir seu radical de Jacobson através da k-quaserregularidade. Um corolário interessante desse teorema é o seguinte:

Corolário 3.2.11. *Se A é um anel comutativo com unidade, então $\mathfrak{J}_k(A) = \cap M$, em que M é ideal maximal em A.*

Demonstração: Segue-se trivialmente, pois $\mathfrak{J}_k$ coincide com H_2 e no caso em que A é um anel comutativo com unidade, $H_2 = \cap M$.

■

Com esse resultado, podemos determinar $\mathfrak{J}_k(\mathbb{Z})$, para $k \neq 0$, no anel dos inteiros $\mathbb{Z}$:

$$\mathfrak{J}_k(\mathbb{Z}) = \bigcap M = \bigcap \langle p \rangle = (0),$$

em que $\langle p \rangle$ é um ideal primo de $\mathbb{Z}$.

Algumas propriedades para o radical de Jacobson são preservadas no k-radical de Jacobson generalizado. Estudaremos algumas delas e, posteriormente, as utilizaremos para identificar o radical $\mathfrak{J}_k$ entre alguns radicais já existentes na literatura.

3.3 Algumas propriedades do radical $\mathfrak{J}_k$

Antes que provemos os resultados dessa seção, é muito importante que se tenha em mente que muito do que foi feito na seção anterior foi pensado para o radical $\mathfrak{J}_k(A)$ de um anel A arbitrário. Ao falar em radical $\mathfrak{J}_k$, teremos em mente a classe radical $\mathfrak{J}_k$ dos anéis k-quaserregulares, a qual determina o radical $\mathfrak{J}_k(A)$ em qualquer anel A.

O próximo resultado mostrará que o k-radical de Jacobson é matricialmente extensível.

Teorema 3.3.1. *O radical $\mathfrak{J}_k$ satisfaz a igualdade de matriz, isto é, $\mathfrak{J}_k(A_n) = [\mathfrak{J}_k(A)]_n$ e isso equivale a dizer que $\mathfrak{J}_k$ é matricialmente extensível.*

Demonstração: Seja A um anel e considere a matriz quadrada X, de ordem n, da forma

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ 0 & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

na qual apenas $x_{11} \in A$ é k-quaserregular à direita. Dessa forma, existe x'_{11} tal que

$$x_{11} + x'_{11} + kx_{11}x'_{11} = 0.$$

Além disso, $(1 + kx_{11})A = A$ (lema 3.2.5), portanto existem x'_{1j}, $2 \leq j \leq n$, tais que $x'_{1j} + kx_{11}x'_{1j} = -x_{1j}$. Logo, a matriz

$$X' = \begin{pmatrix} x'_{11} & x'_{12} & \cdots & x'_{1n} \\ 0 & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

é tal que $X + X' + kXX' = 0$; portanto X é k-quaserregular à direita.

Seja agora I_j o conjunto dos elementos $X \in A_n$ tais que

$$X = (c_{rs})_{1 \leq r,s \leq n} = \begin{cases} c_{rs} \in J_k, & \text{se } r = j \\ 0, & \text{se } r \neq j \end{cases}.$$

Cada I_j é um ideal k-quaserregular à direita de A_n, já que todos os seus elementos são k-quaserregulares à direita (basta adaptar a prova anterior para uma matriz-linha qualquer), logo $I_j \subseteq \mathfrak{J}_k(A_n)$, para $1 \leq j \leq n$. Portanto

$$[\mathfrak{J}_k(A)]_n = I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_n \subseteq \mathfrak{J}_k(A_n).$$

Vejamos agora que $\mathfrak{J}_k(A_n) \subseteq [\mathfrak{J}_k(A)]_n$. Seja $X = (x_{ij}) \in \mathfrak{J}_k(A_n)$. Consideremos agora as matrizes

$$Y_{pq} = (y_{rs})_{1 \leq r,s \leq n} = \begin{cases} y \in A, & \text{na posição } (p,q) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e

$$Z_{pq} = (z_{rs})_{1 \leq r,s \leq n} = \begin{cases} z \in A, & \text{na posição } (p,q) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

para as quais y, z são arbitrários. Dessa forma

$$\sum_{l=1}^{n} Y_{lp} X Z_{ql} = \begin{pmatrix} yx_{pq}z & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & yx_{pq}z & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & yx_{pq}z \end{pmatrix}.$$

Como $X \in \mathfrak{J}_k(A_n)$, $\sum Y_{lp} X Z_{ql}$ também está em $\mathfrak{J}_k(A_n)$. Seja $W' = (w'_{ij})$ o k-quase-inverso de $\sum Y_{lp} X Z_{ql}$, tal que

$$yx_{pq}z + w' + kyx_{pq}zw' = 0 = yx_{pq}z + w' + kw'yx_{pq}z.$$

Portanto $yx_{pq}z$ é k-quaserregular para quaisquer $y, z \in A$ e também o é $kyx_{pq}z$. Em virtude do teorema 3.2.10, x_{pq} é k-quaserregular.

Logo, $\mathfrak{J}_k(A_n) \subseteq [\mathfrak{J}_k(A)]_n$, pelo qual obtemos $\mathfrak{J}_k(A_n) = [\mathfrak{J}_k(A)]_n$.

Em virtude do teorema 2.4.5, $\mathfrak{J}_k$ é matricialmente extensível.

∎

O nosso objetivo agora é mostrar que $\mathfrak{J}_k$ é um radical especial.

Lema 3.3.2. *Todo anel k-primitivo à direita é um anel primo.*

Demonstração: Lembremos que um anel A é primo se (0) é um ideal primo de A. Suponha que A seja um anel k-primitivo à direita e que I é ideal à direita maximal tal que $(I : kA) = (0)$. Nessas condições, (0) é o único ideal bilateral de A contido em I, pois se L é um ideal de A e L está contido em I, então $kAL \subseteq AL \subseteq I$, logo $L \subseteq (I : kA) = (0)$. Portanto, se $B \cdot C = (0)$, em que B e C são ideais de A, com $B \neq 0$, então $B \nsubseteq I$. O ideal à direita I é maximal, logo podemos escrever

$$A = I + B$$

e multiplicando à direita por kC, obtemos

$$kAC = kIC + kBC \subseteq IC + BC \subseteq I.$$

Logo se tem $C \subseteq (I : kA) = (0)$ e isto implica $C = (0)$, do qual concluímos que A é um anel primo.

■

O próximo lema será muito importante nas construções generalizadas associadas a $\mathfrak{J}_k$ daqui por diante.

Lema 3.3.3. *Seja A um anel que contenha um subanel B tal que $(B : kA) = \{0\}$. O elemento $a \in A$ é não nulo se, e somente se, ka é não nulo.*

Demonstração: Se $ka \neq 0$, então $a \neq 0$ – e para isso nem é preciso que o anel A possua um subanel B como na hipótese do teorema! Seja agora $0 \neq a \in A$ e suponha que $ka = 0$. Logo, $(0) = A(ka) = kAa$. Portanto $kAa \subseteq B$ e isto significa que $a \in (B : kA)$, logo $a = 0$, uma contradição. Portanto, $ka \neq 0$.

■

Obviamente, o lema também pode ser reescrito ao negar-se tal equivalência, isto é, "A é um anel que contém um subanel B tal que $(B : kA) = \{0\}$, $A \ni a = 0$ se, e somente se, $ka = 0$". Em particular, os anéis k-primitivos satisfazem a tese desse lema.

Lema 3.3.4. *Todo ideal não nulo de um anel k-primitivo é também um anel k-primitivo.*

Demonstração: Seja A um anel k-primitivo e I ideal à direita maximal satisfazendo $(I : kA) = 0$. O que mostraremos agora é que I pode ser escolhido de tal forma que seja ele seja k-regular. Suponha então que I não seja k-regular. Exibiremos então um ideal à direita maximal e k-regular I_1 tal que $(I_1 : kA) = 0$.

Seja $a \notin I$ e consideremos o conjunto $I_1 = \{x \in A \ ; \ kax \in I\}$. O conjunto I_1 é, claramente, um ideal à direita de A.

I_1 é maximal.

Primeiramente, provaremos que $I_1 \neq A$. Se $I_1 = A$, então $kaI_1 = kaA \subseteq I$, logo $A = I + (a)_r$, em que $(a)_r$ é o ideal à direita gerado por a. Isto acontece pelo fato de I ser maximal e a não pertencer a I. Multiplicando por kA à esquerda, obtemos

$$kAA = kIA + k(a)_rA \subseteq I,$$

logo $A \subseteq (I : kA) = 0$, uma contradição. Portanto $I_1 \neq A$.

Tomemos agora $b \notin I_1$, ou seja, $ab \notin I$. Repetindo a construção anterior, temos que $kabA \nsubseteq A$ pois se fosse $kabA \subseteq A$ encontraríamos $kA^2 \subseteq I$ o que implicaria $A \subseteq (I : kA) = 0$. Como I é maximal e $kabA$ é ideal à direita não contido em I, tem-se $A = kabA + I$. Portanto, para qualquer $y \in A$ existem $c \in A$ e $i \in I$ tais que $ay = kabc + i$. Logo $a(y - kabc) \in I$, do qual concluímos que $y - kbc \in I_1$, ou seja, $y \in I_1 + kbA$. Como $y \in A$ é arbitrário, tem-se $A = I_1 + kbA$ e isto prova que I_1 é um ideal maximal à direita de A.

□

I_1 é k-regular.

Tomemos $A = I + kaA$. Isto é possível pois $aA \nsubseteq I$ e I é maximal. Logo existem elementos $\mathfrak{e} \in A$ e $i' \in I$ tais que $a = ka\mathfrak{e} + i'$. Para $x \in A$ arbitrário, nós temos $ax = ka\mathfrak{e}x + i'x$, ou $a(x - k\mathfrak{e}x) \in I$. Portanto $x - \mathfrak{e}x \in I_1$ e isto prova que I_1 é ideal à direita k-regular de A.

□

Finalmente, para ver que $(I_1 : kA) = (0)$ seja $x \in (I_1 : kA)$. Logo, $kAx \subseteq I_1$ e, conseqüentemente, $ka(kAx) = k^2aAx \subseteq I$. Entretanto $A = aA + I$ e

$$kA(kx) = k^2Ax = k^2aAx + k^2Ix \subseteq I.$$

Portanto $kx \in (I : kA) = (0)$, logo $kx = 0$ e isso implica que $x = 0$, por causa do lema 3.3.3, pelo qual concluímos que $(I_1 : kA) = 0$. Tal como no lema 3.3.2, podemos concluir que (0) é o único ideal bilateral de A contido em I_1.

Por causa desta construção, podemos supor, sem perda de generalidade, que I é ideal à direita maximal k-regular satisfazendo $(I : kA) = 0$. Também, o ideal (0) é único ideal bilateral de A contido em I.

Seja B um ideal não nulo de A. Nessas condições, $B \nsubseteq I$. Mostraremos que $B \cap I$ é um ideal à direita maximal k-regular de B. De imediato, $B \cap I$ é um ideal de B. Falta ver que ele é maximal e k-regular em B.

Tomemos $b \in B$ com $b \notin I$. Nessas condições, $A = I + (b)_r$, em que $(b)_r$ é o ideal à direita de A gerado por b, $(b)_r \nsubseteq I$. Mais ainda, $A = I + (b)_r^2$ ou $(b)_r^2 \nsubseteq I$. Para provar isto, de $A = I + (b)_r$ sabemos que $\mathfrak{e} = i + b_1$, com $i \in I$, $b_1 \in (b)_r$ e $\mathfrak{e}$ é o elemento tal que $x - k\mathfrak{e}x \in I$ para todo $x \in A$. Multiplicando essa expressão à direita por kc, $c \in (b)_r$ arbitrário, encontramos

$$k\mathfrak{e}c = kic + kb_1c.$$

Por outro lado, $k\mathfrak{e}c = i_1 + c$, $i_1 \in I$. Logo $c = -i_1 + k\mathfrak{e}c = -i_1 + kic + kb_1c$, com $-i_1 + kic \in I$ e $kb_1c \in (b)_r^2$. Se $(a)_r^2 \subseteq I$, então $c \in I$ e como $c \in (b)_r$ é arbitrário, obtemos $(b)_r \subseteq I$, uma contradição. Logo $(b)_r^2 \nsubseteq I$ e $A = I + (b)_r^2$. Seja Q o ideal à direita de B gerado por $b \notin I$. Logo, $Q \subseteq (b)_r$ e, de fato, $(b)_r = Q + QA$. Entretanto,

$$(b)_r^2 = (Q + QA)(b)_r = Q(b)_r + QA(b)_r \subseteq Q + QB \subseteq Q.$$

Portanto $A = I + Q$. Também, $B = A \cap B = (I + Q) \cap B$. Por outro lado, se $x \in B \subseteq A$, então ele é da forma $x = i + q$, $i \in I$, $q \in Q$. Como $Q \subseteq B$, então $q \in B$ portanto $i = x - q \in B$. Logo, $i \in I \cap B$ e tem-se $B = (I + Q) \cap B = (I \cap B) + Q$.

Isto prova que $B \cap I$ é ideal maximal à direita de B, pois para qualquer elemento $b \notin B \cap I$ e considerando $Q(b)$ o ideal à direita em B gerado por b, tem-se $B = (B \cap I) + Q(b)$. Resta-nos mostrar que $B \cap I$ é k-regular em B.

Seja $\mathfrak{e}$ o elemento de A para o qual $x - k\mathfrak{e}x \in I$, qualquer que seja $x \in A$. Como $A = I + B$, obtemos $\mathfrak{e} = i + \mathfrak{e}_1$, $i \in I$ e $\mathfrak{e}_1 \in A$. Já que $\mathfrak{e} \notin I$ (pois se estivesse, I deveria ser todo o A), o elemento $\mathfrak{e}_1$ não pode estar em I. Seja então $b - k\mathfrak{e}b$ para qualquer $b \in B \trianglelefteq A$. Como I é k-regular em A,

$$b - k\mathfrak{e}b = b - k(i + \mathfrak{e}_1)b = b - k\mathfrak{e}_1b - kib \in I \Longrightarrow b - k\mathfrak{e}_1b = (b - k\mathfrak{e}b) + kib \in I.$$

Entretanto, $b - k\mathfrak{e}_1b$ também está em B e portanto está em $B \cap I$. Ademais, $\mathfrak{e}_1 \notin I$ e isto implica $\mathfrak{e}_1 \notin B \cap I$, portanto $B \cap I$ é ideal à direita maximal k-regular de B. Agora resta-nos mostrar que $(B \cap I : kB) = 0$ e perceba que estamos "caminhando" no sentido contrário: antes tínhamos I ideal à direita maximal de A com $(I : kA) = 0$ e mostramos que este poderia ser escolhido de forma que fosse também k-regular. Agora, temos $B \cap I$ é ideal à direita maximal k-regular de B e mostraremos que $(B \cap I : kB) = 0$.

Como I não contém ideais não nulos de A, $B \cap I$ também não pode conter ideais não nulos de A. Mostraremos que $B \cap I$ também não contém ideais não nulos de B. Suponha que $(x)_B$ é um ideal (bilateral) não nulo de B gerado por um elemento $x \in B$ e que $(x)_B \subseteq B \cap I$. Seja $(x)_A$ o ideal de A gerado por $(x)_B$. Por causa do lema 1.2.8, $[(x)_A]^3 \subseteq (x)_B$. Logo, $[(x)_A]^3 \subseteq B \cap I$ e, portanto, $[(x)_A]^3 = 0$. Como A é k-primitivo então ele é primo, pelo lema 3.3.2. Portanto $(x)_A = 0$ e isto implica $(x)_B = 0$. Isto prova que $B \cap I$ não contém ideais não nulos de B. Como $(B \cap I : kB)$ é um ideal de B (lema 3.2.4), ele deve ser o ideal 0. Portanto, o anel B é k-primitivo porque possui um ideal maximal $B \cap I$ tal que $(B \cap I : kB) = 0$.

■

Lema 3.3.5. *Se $B \neq 0$ é um anel k-primitivo e B é um ideal de A, então A/B^* é um anel k-primitivo, em que $B^* = \{x \in A\ ;\ xB = Bx = 0\}$.*

Demonstração: Seja I o ideal à direita maximal de B tal que $(I : kB) = 0$. Podemos supor sem perda de generalidade (tal como no lema 3.3.4) que I é k-regular e seja $\mathfrak{e} \in B$ tal que $y - k\mathfrak{e}y \in I$, qualquer que seja $y \in B$. Ademais,

$$IA \subseteq BA \subseteq B \Longrightarrow (IA)^2 \subseteq (IA) \cdot B \subseteq IB \subseteq I.$$

Para provar que I é um ideal à direita de A, suponha $IA \nsubseteq I$. Dessa forma, $B = I + IA$, já que I é maximal em B. Logo $\mathfrak{e} = i + \alpha$, $i \in I$ e $\alpha \in IA$. Para $\beta \in IA$ arbitrário, tem-se $k\mathfrak{e}\beta = ki\beta + k\alpha\beta$. Agora, $k\mathfrak{e}\beta = \beta + i_1$, $i_1 \in I$ e $\alpha\beta \in (IA)^2 \subseteq I$. Logo, $\beta = -i_1 + ki\beta + k\alpha\beta \in I$ e isto implica $IA \subseteq I$, uma contradição. Portanto, $IA \subseteq I$ e I é ideal à direita de A.

Defina $I_1 = I + \{x - k\mathfrak{e}x\ ;\ x \in A\}$. Definido dessa forma, I_1 é ideal à direita de A e é k-regular, pois $x - k\mathfrak{e}x \in I_1$ para todo $x \in A$. É importante notar-se que $\mathfrak{e} \notin I_1$, pois $\mathfrak{e}$ estivesse em I_1, teríamos

$$\mathfrak{e}B \subseteq I_1B = (I + \{x - k\mathfrak{e}x\ ;\ x \in A\})B \subseteq IB + \{x - k\mathfrak{e}x\ ;\ x \in A\}B \subseteq I.$$

Como $b - k\mathfrak{e}b \in I$ para todo $b \in B$, concluiríamos que $b \in I$ para todo $b \in B$, ou $I = B$, contradição. Portanto, $\mathfrak{e} \notin I_1$ e isto prova que o ideal à direita (de A) k-regular I_1 é diferente de A. Pelo lema de Zorn, podemos tomar o ideal à direita de A que é maximal com respeito à exclusão do elemento $\mathfrak{e}$ e à inclusão do ideal I_1. Chamemos este ideal de I_2. Definido dessa forma, I_2 é ideal à direita maximal de A, pois se um ideal de A contivesse I_2 propriamente, então ele também conteria o elemento $\mathfrak{e}$ e o ideal I_1, portanto seria todo o anel A. O ideal I_2 também é k-regular já que $I_1 \subseteq I_2$.

Agora $I_2 \cap B \supseteq I$, pois $I \subseteq I_1 \subseteq I_2$ e $I \subseteq B$. Por outro lado, o elemento $\mathfrak{e}$ não está em I_2 e portanto não está em $I_2 \cap B$. Entretanto $\mathfrak{e}$ está em B e $B \supsetneqq I_2 \cap B \supseteq I$. Como I é ideal à direita maximal de B, devemos ter $I_2 \cap B = I$.

Consideremos agora B^* e suponha $B^* \nsubseteq I_2$. Dessa forma, $A = B^* + I_2$, já que I_2 é maximal. Multiplicando à direita por kB obtemos $kAB = kB^*B + kI_2B = kI_2B$. Entretanto $kI_2B \subseteq I_2B \subseteq I_2 \cap B = I$. Portanto $kBB \subseteq kAB \subseteq I$, isto é, $B \subseteq (I : kB) = 0$, uma contradição. Portanto $B^* \subseteq I_2$.

Seja C um ideal (bilateral) de A contido em I_2. Nessas condições, $CB \subseteq I_2B \subseteq I$. Mas CB é um ideal de B que está contido em I. Como o único ideal de B contido em I é o nulo, $CB = 0$. Logo, $(BC)^2 = (BC)(BC) \cong B(CB)C = 0$. Como $B \neq 0$ é k-primitivo, ele é primo, portanto $BC = 0$, isto é, $BC = CB = 0$. Logo, $C \subseteq B^*$. Portanto, não existem ideais de A contidos em I_2 que contém B^* propriamente. Isto significa que 0 é o único ideal bilateral de A/B^* contido em I_2/B^*. É claro que I_2/B^* é ideal à direita maximal em A/B^* já que I_2 é ideal à direita maximal em A. Finalmente, I_2/B^* é um ideal à direita maximal em A/B^* que não contém ideais não nulos de A/B^*. Sendo assim, também não contém ideais não nulos de kA/B^*, ou seja,

$$(I_2/B^* \ : \ kA/B^*) = 0$$

e isto mostra que A/B^* é k-primitivo.

■

Os lemas 3.3.2, 3.3.4 e 3.3.5, de acordo com a definição 2.8.1, nos fornecem o seguinte resultado:

Teorema 3.3.6. *A classe de todos os anéis k-primitivos é uma classe especial de anéis.*

■

O que é o radical especial determinado pela classe de todos os anéis k-primitivos? O lema 2.8.4 diz que o radical especial de um anel arbitrário A é a interseção de todos os ideais T_α tais que A/T_α está na classe especial. Nesse caso, A/T_α é um anel k-primitivo e isso significa que T_α é um ideal k-primitivo de A, ou seja, o radical especial de um anel arbitrário A determinado pela classe de todos os anéis k-primitivos é a interseção de todos os ideais k-primitivos do anel A. Por causa do teorema 3.2.10, esse ideal é precisamente $\mathfrak{J}_k(A)$. Estabelecemos o seguinte resultado:

Teorema 3.3.7. *O radical $\mathfrak{J}_k$ é especial.* ■

Esse teorema pode também ser enunciado de outra forma:

Teorema 3.3.8. *O radical $\mathfrak{J}_k$ é o maior radical para o qual todos os anéis k-primitivos são semissimples.* ■

Em particular, os teoremas 2.8.2 e 2.8.3 nos garante os seguintes resultados:

Corolário 3.3.9. *O radical $\mathfrak{J}_k$ é supernilpotente.* ■

Corolário 3.3.10. *O radical $\mathfrak{J}_k$ é hereditário à direita e à esquerda.* ■

O teorema 3.3.7 afirma que $\mathfrak{J}_k$ é o radical superior de uma certa classe de anéis, os anéis k-primitivos. Será que $\mathfrak{J}_k$ também pode ser "formulado" como o radical inferior de uma certa classe de anéis? O próximo resultado responde essa pergunta.

Teorema 3.3.11 (Y. Lee). *Sejam $\mathbb{n}$ a classe dos anéis nilpotentes e $\mathfrak{J}_k^r$ a classe definida da seguinte forma:*

$$\mathfrak{J}_k^r := \{ \ A^r \ ; \ A \in \mathfrak{J}_k \ \},$$

para a qual r é um inteiro positivo fixado.

O radical $\mathfrak{J}_k$ é o radical inferior determinado por $\mathfrak{J}_k^r \cup \mathbb{n}$.

Demonstração: É óbvio que $\mathcal{L}(\mathfrak{J}_k^r \cup \mathbb{m}) \leq \mathfrak{J}_k$, por causa da minimalidade de $\mathcal{L}(\mathfrak{J}_k^2 \cup \mathbb{m})$ – lema 2.2.6. Mostraremos a inclusão reversa. Sejam $A \in \mathfrak{J}_k$, $I \subsetneqq A$ e A/I o anel quociente não nulo do anel A. Se $I \supseteq (\mathfrak{J}_k(A))^r$, então $A \supsetneqq (\mathfrak{J}_k(A))^r$ e

$$A/I \cong \frac{A/(\mathfrak{J}_k(A))^r}{I/(\mathfrak{J}_k(A))^r}.$$

Ademais,

$$\left(\frac{A}{(\mathfrak{J}_k(A))^r}\right)^r = \left(\frac{\mathfrak{J}_k(A)}{(\mathfrak{J}_k(A))^r}\right)^r = \frac{(\mathfrak{J}_k(A))^r}{(\mathfrak{J}_k(A))^r} = (0).$$

Logo $[A/(\mathfrak{J}_k(A))^r]^r \in \mathbb{m}$ e isso significa que $0 \neq A/I \in \mathbb{m}$, pois é imagem homomorfa de um anel nilpotente (lema 2.5.7). Portanto, A é um anel de grau 1 sobre $\mathbb{m}$ e pela construção do radical inferior (teorema 2.2.5), $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{J}_k^r \cup \mathbb{m})$

Se $I \not\supseteq (\mathfrak{J}_k(A))^r$, então

$$A/I \trianglerighteq I + (\mathfrak{J}_k(A))^r \cong \frac{(\mathfrak{J}_k(A))^r}{I \cap (\mathfrak{J}_k(A))^r} \neq (0).$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned} \frac{(\mathfrak{J}_k(A))^r}{I \cap (\mathfrak{J}_k(A))^r} &= \left(\frac{\mathfrak{J}_k(A)}{I \cap (\mathfrak{J}_k(A))^r}\right)^r = \\ &= \left(\mathfrak{J}_k\left(\frac{A}{I \cap (\mathfrak{J}_k(A))^r}\right)\right)^r \in \mathfrak{J}_k^r \end{aligned}$$

Isso mostra que se um anel está $\mathfrak{J}_k$ então qualquer imagem homomorfa não nula contém um ideal não nulo em $\mathfrak{J}_k^r \cup \mathbb{m}$, mas isso significa que $\mathfrak{J}_k \leq \mathcal{L}(\mathfrak{J}_k^r \cup \mathbb{m})$.

■

3.4 O radical $\mathfrak{J}_k$ em contextos de Morita

Os conceitos "classe radical" e "classe semissimples" sugerem um comportamento dual na Teoria de Radicais, quando essa última é analisada sob o ponto de vista categorial. Em contraponto a essa perspectiva, Gardner mostrou que não existe tantos fenômenos duais na Teoria de Radicais quanto se pensava (veja [Gar07]), logo numa análise categorial da Teoria de Radicais não será permitido muitas dualizações.

Com as ferramentas da Teoria de Categorias, levantou-se a hipótese de investigar a *normalidade* de alguns radicais dentro da Teoria de Morita. O que ficou constatado é que nem todos os radicais são normais para qualquer *contexto de Morita*. A *força* e a *hereditariedade* são fatores que podem determinar a normalidade de uma classe radical.

Sejam A e B dois anéis quaisquer e ${}_AM_B$ e ${}_BN_A$ bimódulos (M é A-módulo à esquerda e B-módulo à direita; N é B-módulo à esquerda e A-módulo à direita). A quádrupla (A, M, N, B) é um *contexto de Morita* se o conjunto das matrizes 2×2

$$\begin{pmatrix} A & M \\ N & B \end{pmatrix} := \left\{ \begin{pmatrix} a & m \\ n & b \end{pmatrix} \; ; \; a \in A,\ b \in B,\ m \in M,\ n \in N \right\}$$

é um anel com a adição (usual) de matrizes proveniente da adição de cada componente e a multiplicação de matrizes proveniente das multiplicações que estão bem definidas em cada caso, a saber, a multiplicação em cada anel, a multiplicação por escalar em cada bimódulo e os produtos tensoriais

$$M \times N \to A\,, \quad N \times M \to B$$

tais que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (m_1+m_2)n &=& m_1n+m_2n \\ a(mn) &=& (am)n \\ (mb)n &=& m(bn) \\ m(n_1+n_2) &=& mn_1+mn_2 \\ (mn)a &=& m(na) \\ (m_1n)m_2 &=& m_1(nm_2) \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} (n_1+n_2)m &=& n_1m+n_2m \\ b(nm) &=& (bn)m \\ (na)m &=& n(am) \\ n(m_1+m_2) &=& nm_1+nm_2 \\ (nm)b &=& n(mb) \\ (n_1m)n_2 &=& n_1(mn_2) \end{array} \right. ,$$

em que $m_1, m_2 \in M$ e $n_1, n_2 \in N$ são elementos arbitrários.

Definição 3.4.1. Um radical $\mathcal{R}$ é dito ser *normal* se

$$M\mathcal{R}(B)N \subseteq \mathcal{R}(A)$$

para qualquer contexto de Morita (A, M, N, B).

Observação 3.4.2. Observe que um contexto de Morita é dualizável, isto é, se (A, M, N, B) é contexto de Morita então (B, N, M, A) também o é. Logo, se $\mathcal{R}$ é normal para o contexto de Morita (A, M, N, B), então ele também é normal no contexto de Morita (B, N, M, A) e isso equivale a afirmar que

$$N\mathcal{R}(A)M \subseteq \mathcal{R}(B).$$

Um resultado devido a Sands, em [San75], afirma o seguinte:

Teorema 3.4.3. *Se um radical $\mathcal{R}$ é principalmente hereditário à direita (à esquerda) e forte à direita (à esquerda), então ele é normal.* ■

O corolário 3.3.10 afirma que $\mathcal{J}_k$ é hereditário com respeito aos ideais unilaterais. Agora, mostraremos que ele é forte à direita e à esquerda.

Teorema 3.4.4. *O radical $\mathcal{J}_k$ é forte à direita e à esquerda.*

Demonstração: Seja A um anel arbitrário. A prova seguirá quatro passos:

(i) *A soma de uma quantidade finita de $\mathfrak{J}_k$-ideais à direita de A é também um ideal um $\mathfrak{J}_k$-ideal à direita.*

É o resultado do corolário 3.1.7.

□

(ii) *Se I é um $\mathfrak{J}_k$-ideal à direita de A, então aI é $\mathfrak{J}_k$-ideal à direita, qualquer que seja $a \in A$.*

Sejam $b \in I$ e $a \in A$ elementos arbitrários. Como $ba \in I$, existe $c \in I$ tal que $c \circ_k ba = 0$. Seja $d = -(kacb + ab) \in aI$. Mostraremos que $d \circ_k ab = 0$.

$$\begin{aligned} d \circ_k ab &= -kacb - ab + ab + k(-kacb - ab)ab = \\ &= -ka(c + kcba + ba)b = (-ka)(c \circ_k ba)b \\ &= 0. \end{aligned}$$

Essa igualdade mostra que todo elemento de aI é k-quaserregular.

□

(iii) *Se I é um $\mathfrak{J}_k$-ideal à direita A, então o ideal $I + AI$ também é um $\mathfrak{J}_k$-anel.*

Se $x \in I + AI$, então $x = b + \sum^n a_j c_j$, em que $b, c_j \in I$ e $a_j \in A$. Entretanto, esse elemento está numa soma finita de ideais à direita, $x = b + \sum^n a_j c_j \in I + \sum^n a_j I$ e, por (ii) e (i), o resultado segue.

□

(iv) *Se I é um $\mathfrak{J}_k$-ideal à direita A, então $I \subseteq \mathfrak{J}_k(A)$.*

De imediato: $I \subseteq I + AI$ e, como $I + AI$ é um $\mathfrak{J}_k$-ideal de A, $I + AI \subseteq \mathfrak{J}_k(A)$. Portanto, $I \subseteq \mathfrak{J}_k(A)$.

□

Finalizando a prova, o passo (iv) afirma $\mathfrak{J}_k$ é forte à direita.
A versão "à esquerda" dessa demonstração fornecerá que $\mathfrak{J}_k$ é forte à esquerda.

■

O corolário 3.3.10 e os teoremas 3.4.4 e 3.4.3 fornecem o seguinte resultado:

Teorema 3.4.5. *O radical $\mathfrak{J}_k$ é normal para qualquer contexto de Morita (A, M, N, B).*

■

Este capítulo mostrou algumas das generalizações referentes ao radical $\mathfrak{J}_k$, tendo como ponto de partida alguns dos resultados já conhecidos para o radical de Jacobson $\mathfrak{J}$. Ao demonstrarmos que $\mathfrak{J}_k$ era especial, mostramos também que os anéis k-primitivos são $\mathcal{J}_k$-semissimples. Com essa observação, é interessante que se estude também quais tipos de generalizações podem ser obtidas para os anéis $\mathcal{J}_k$-semissimples e podemos fazê-lo estudando alguns deles, os anéis k-primitivos, por exemplo. Esse é o assunto do próximo capítulo.

Capítulo 4

Uma generalização do teorema da densidade de Jacobson

No capítulo anterior, obtivemos o radical $\mathfrak{J}_k$ através de uma generalização da quaserregularidade, a k-quaserregularidade, e através da mesma encontramos formas equivalentes para o radical de Jacobson generalizado de um anel. Nesse estudo, além dos anéis $\mathfrak{J}_k$-radicais, destacam-se os anéis k-primitivos à direita (veja a definição 3.2.7). Foi mostrado no capítulo 3 que a classe dos anéis k-primitivos é uma classe especial e que o radical superior por ela determinado é o radical $\mathfrak{J}_k$. Dessa forma, os anéis k-primitivos determinam a especialidade de $\mathfrak{J}_k$. O lema técnico 3.2.3 afirma, em particular, que a classe dos anéis k-primitivos à direita está contida na classe dos anéis primitivos à direita. Essa observação é útil quando temos em mente o teorema da densidade de Jacobson:

Todo anel $\mathfrak{J}$-semissimples é isomorfo a uma soma subdireta de anéis densos de transformações lineares definidas em espaços vetoriais sobre anéis de divisão.[1]

O principal fato que permite essa decomposição é que o radical de Jacobson pode ser escrito como a interseção de todos os ideais primitivos à direita e prova-se que anéis primitivos à direita são isomorfos a anéis densos de transformações lineares definidas em espaços vetoriais à direita sobre anéis de divisão.

Sabemos que, para qualquer anel A, $\mathfrak{J}_k(A)$ é a interseção de todos os ideais k-primitivos à direita. Em particular, podemos obter o mesmo resultado:

Todo anel $\mathfrak{J}_k$-semissimples é isomorfo a uma soma subdireta de anéis densos de transformações lineares definidas em espaços vetoriais sobre anéis de divisão.

[1]Ao decorrer desse capítulo, exibiremos a definição de *anel denso*.

Entretanto, isso é uma versão fraca, haja vista que a definição de k-primitividade é um conceito mais forte (no sentido de exigir mais da estrutura do anel). Dentre os vários resultados desse capítulo, um deles é o "fio condutor" nessa linha de estudo: *a generalização do teorema da densidade de Jacobson* por intermédio do que chamamos de *k-densidade.*

4.1 Construindo espaços vetoriais a partir de anéis k-primitivos

Se M é apenas um ideal à direita, o conjunto A/M não é, necessariamente, um anel. Entretanto, é ao menos um grupo aditivo. Seja $E(A/M)$ o conjunto de todos os endomorfismos de A/M. Ora, $E(A/M)$ possui estrutura de anel com identidade (com a soma − operação do grupo comutativo − induzida de A/M e produto definido a partir da composição de endomorfismos; a identidade de $E(A/M)$ é, obviamente, o endomorfismo identidade). Seja x um elemento arbitrário em A e considere, sobre A/M, a aplicação,

$$x' : a + M \mapsto ax + M.$$

Definido dessa forma, x' é um endomorfismo de A/M, pois preserva a soma. Podemos ver que é possível definir a aplicação $x \mapsto x'$, com domínio em A e contradomínio em $E(A/M)$. Seja A' o conjunto de todos os x' em $E(A/M)$. Essa aplicação é um morfismo de anéis. Para ver isso, consideremos $y \mapsto y'$, em que y' é um endomorfismo de A/M conforme definimos no parágrafo anterior.

$$(x + y)' : a + M \to a(x + y) + M = ax + M + ay + M$$

e portanto $(x + y)' = x' + y'$. Também

$$(xy)' : a + M \mapsto a \cdot xy = ax \cdot y + M,$$

do qual concluímos que $(xy)' = x'y'$, para $x'y' := y' \circ x' = a + M \mapsto ax \cdot y + M$. A fim de evitar confusões acerca da ordem de composição dos morfismos, usaremos a notação $(c)\beta$ ou $c\beta$ para indicar a imagem de um elemento c em A/M pelo endomorfismo β. Assim, $x'y' = x' \circ y'$, já que

$$ax'y' = (a)x'y' = ((a)x')y'.$$

Esse morfismo é sobre A', por definição.

A próxima demonstração considerará um anel A e um ideal à direita maximal M de A. Mais adiante, usaremos a condição do anel "ser k-primitivo" para mostrar que A é, num certo sentido, "largo" em $E(A/M)$.

O seguinte lema nos será útil.

Lema 4.1.1. *Seja* $D = \{\gamma \in E(A/M) \ : \ \gamma x' = x'\gamma, \ \forall x' \in A'\}$*. Definido dessa forma,* D *é um anel de divisão.*

Demonstração: Está claro que D é um anel (pois é um subanel de $E(A/M)$) e que ele contém a identidade id de $E(A/M)$. Seja $0 \neq \gamma \in D$ e, como $\gamma \neq 0$, $(A/M)\gamma \neq M$. Logo, existe $a \in A$ tal que $(a + M)\gamma \neq M$. Note que a pré-imagem de $(a + M)\gamma$ pelo epimorfismo (de grupos) canônico $A \to A/M$, em geral, não é única, porém é bem determinada módulo M. Logo, se $(a + M)\gamma = t + M$, denotaremos $a\gamma = t$, $t \in A$. Como M é um ideal maximal à direita, o ideal à direita gerado por M e $a\gamma$ deve ser todo o anel A. Portanto, qualquer que seja $y \in A$, existem $m \in M$, $b \in A$ e um inteiro j tais que

$$y = m + a\gamma \cdot b + a\gamma \cdot i \ .$$

No grupo aditivo A/M, teremos

$$y + M = M + (a\gamma b + M) + (a\gamma i + M) = (a + M)\gamma b' + (a + M)\gamma i' + M \ .$$

Como $\gamma \in D$, $\gamma b' = b'\gamma$. Ademais, $i' : x + M \mapsto xi + M$ é um endomorfismo que comuta com qualquer outro endomorfismo de A/M. Logo,

$$\begin{aligned} y + M &= (a + M)b'\gamma + (a + M)i'\gamma + M = \\ &= ((a + M)b' + (a + M)i')\gamma + M = \\ &= (ab + ai + M)\gamma + M \ . \end{aligned}$$

Mas $y \in A$ é arbitrário, logo $y+M$ é um elemento arbitrário de A/M e ele está na imagem de γ, ou seja, $(A/M)\gamma = A/M$. Portanto, se $\gamma \in D$ e $\gamma \neq 0$, então γ é um endomorfismo sobrejetor de A/M.

Para vermos que $0 \neq \gamma \in D$ é automorfismo, provaremos que ele é um monomorfismo. De fato, seja $a + M$ uma classe tal que

$$(a + M)\gamma = a\gamma + M = M \ ,$$

ou seja, $a\gamma \in M$, e suponha que $a + M \neq M$, isto é, $a \notin M$. Como M é ideal à direita maximal, $A = M + \langle a \rangle_r$. Isso significa que, dado $y \in A$ arbitrário, podemos escrever

$$y = m + ab + ai \ ,$$

para certos $m \in M$, $b \in A$ e i inteiro. Em A/M, teremos

$$y + M = M + (ab + M) + (ai + M) = (a + M)b' + (a + M)i' + M \ ,$$

portanto,

$$\begin{aligned}(y+M)\gamma &= y\gamma + M = ((a+M)b' + (a+M)i')\gamma + M = \\ &= (a+M)b'\gamma + (a+M)i'\gamma + M = \\ &= (a+M)\gamma b' + (a+M)\gamma i' + M = \\ &= a\gamma b + a\gamma i + M\ .\end{aligned}$$

Logo $y\gamma - a\gamma b + a\gamma i \in M$ e, como $a\gamma \in M$, devemos ter $y\gamma \in M$, ou seja, $(y+M)\gamma = M$. Entretanto, $y+M$ é elemento arbitrário de A/M e isso significa que $(A/M)\gamma = M$, pelo qual concluímos que $\gamma = 0$, uma contradição. Logo a deve estar em M e, portanto, γ é um automorfismo. Logo γ tem um inverso γ^{-1} em $E(A/M)$. Mas γ^{-1} deve estar em D, pois se $\gamma x' = x'\gamma$, então $x'\gamma^{-1} = \gamma^{-1}x'$. Portanto, D é um anel de divisão.

■

Note, da discussão anterior, que o anel A' é uma imagem epimorfa do anel A e, desprezando a trivialidade, estamos supondo $A \neq (0)$. Mas a prova não garante que o anel D, construído a partir de A, seja não nulo. Entretanto, se A é k-primitivo, os anéis A' e A são isomorfos. Para vermos isso, se x' é o endomorfismo zero, então $ax + M = M$ para todo $a \in A$. Logo, $Ax \subseteq M$, isto é, $kAx \subseteq M$ e, portanto, $x \in (M : kA)$. Entretanto A é k-primitivo; nesse caso, $x \in (M : kA) = (0)$, logo $x = 0$. Isso mostra que A é isomorfo a A'. Em outras palavras, se A não for o anel k-primitivo trivial, então D é um anel de divisão não trivial, isto é, $0 \neq \mathrm{id} \in D$.

Para as demonstrações que se seguirão, nessa seção, estaremos considerando um anel k-primitivo à direita A e M o seu ideal maximal à direita tal que $(M : kA) = (0)$, a menos que seja explicitado o contrário.

Lema 4.1.2. *A/M é um espaço vetorial à direita sobre o anel de divisão D.*

Demonstração: Seja v um elemento qualquer de A/M. Tome $\gamma \in D \subseteq E(A/M)$. Dessa forma, $v\gamma$ é também um elemento de A/M, logo a operação "por escalar" está bem definida. Claramente, $v \cdot \mathrm{id} = v$, $v(\gamma_1 + \gamma_2) = v\gamma_1 + v\gamma_2$, $v \cdot \gamma_1\gamma_2 = v\gamma_1 \cdot \gamma_2$, quaisquer que sejam $\gamma_1, \gamma_2 \in D$ (basta usar o mesmo raciocínio na discussão anterior, quando provamos que $(x+y)' = x' + y'$ e $(xy)' = x'y'$). Como γ é um morfismo definido em A/M, $(v_1 + v_2)\gamma = v_1\gamma + v_2\gamma$, quaisquer que sejam $v_1, v_2 \in A/M$, e o resultado segue.

■

Em geral, A/M não é um espaço vetorial de dimensão finita. Logo, em geral, $L(A/M)$, o conjunto de todas as transformações lineares com domínio em A/M não tem dimensão finita. Se A/M tem dimensão finita, digamos n, então $L(A/M)$ pode ser representado como o conjunto de todas as matrizes quadradas de ordem n com entradas em D.

4.2 O teorema da k-densidade

Comecemos essa seção com um lema muito útil para a demonstração do teorema de densidade generalizada.

Lema 4.2.1. *Se G é um subespaço próprio de dimensão finita de A/M e v está em A/M mas não está em G, então existe um elemento em $a' \in A'$ tal que ka' anula G mas não v.*

Demonstração: Primeiramente, note não podemos ter $kA' = (0)$. Como A e A' são isomorfos, A' é também k-primitivo e isso significa $kA' \neq (0)$, em virtude do lema 3.3.3.

Provaremos através da indução (finita) sobre a dimensão n de G. Assuma que o lema é válido para todos os espaços de dimensão $n-1$ e assuma que G tem uma base $\{b_1, ..., b_{n-1}, b_n\}$. Considere agora $v \notin G$ e suponha que todo elemento $a' \in A'$ que anula G também anula v.

Seja T' o subconjunto de A' que anula o espaço vetorial gerado por $\{b_1, ..., b_{n-1}\}$. Definido dessa forma, T' é um ideal à direita de A', já que

$$\langle\{b_1, ..., b_{n-1}\}\rangle T' = (0) \Longrightarrow \langle\{b_1, ..., b_{n-1}\}\rangle T'R' = (0) \Longrightarrow T'R' \subseteq T'.$$

Também, kT' é um ideal à direita de A'.

Consideremos $b_n \cdot kT'$. Usando a hipótese de indução, $b_n \cdot kT' \neq (0)$, ou $kT' \neq (0)$. Também, como A' a A isomorfos, kT' é isomorfo a um ideal kT de A.

Por outro lado, $b_n = b_n^* + M$ e $M + kb_n^*T = A$, já que $b_n^* \cdot kT \notin M$; $M + b_n^*kT$ é um ideal à direita de A que contém propriamente o ideal à direita maximal M. Portanto, $A/M = b_n \cdot kT = b_n \cdot kT'$. Tomando como referência a construção anterior, $A/M \supseteq v \cdot kT'$.

Agora, consideremos a aplicação $b_n(kt') \mapsto v(kt')$, $v \in A/M$ e $kt' \in kT'$. Se $b_n(kt') = b_n(kt'')$, então $b_n \cdot k(t' - t'') = 0$ e isso significa que $k(t' - t'')$ anula b_n. Mas $k(t' - t'') \in kT'$, logo ele anula $b_1, ..., b_{n-1}$, isto é, ele anula G e, portanto, conforme assumimos no início dessa prova, ele anula v, isto é, $v \cdot k(t' - t'') = 0$ ou $v(kt') = v(kt'')$. Consequentemente, $b_n(kt') \mapsto v(kt')$ está bem definida.

Já que $A/M = b_n \cdot kT'$ e $A/M \supseteq v \cdot kT'$, a aplicação $b_n(kt') \mapsto v(kt')$ é um endomorfismo de A/M. Mostraremos que ela está em D. Seja $a' \in A'$ e note que $b_nkt' \cdot a' = b_n \cdot kt'a' \mapsto v \cdot kt'a'$, já que $kt'a' \in T' \trianglelefteq A'$. Por outro lado, $v \cdot kt'a' = vkt' \cdot a'$. Logo, a aplicação $b_nkt' \mapsto vkt'$ comuta com qualquer $a' \in A'$ e, portanto, está em D. Assim, existe $\gamma \in D$ tal que $b_nkt' \cdot \gamma = vkt'$, qualquer que seja $kt' \in kT'$. Mas $b_nkt' \cdot \gamma = b_n\gamma \cdot kt'$. Logo, $(b_n\gamma - v)kT' = (0)$. Se $b_n\gamma - v$ não é o subespaço gerado por $\{b_1, ..., b_{n-1}\}$, então, pela hipótese de indução, deve existir um elemento em kT' que não anula $b_n\gamma - v$. Mas todos os elementos de kT' anulam $b_n\gamma - v$, pelo qual concluímos que $b_n\gamma - v$ está no subespaço gerado por $\{b_1, ..., b_{n-1}\}$. Logo, $v \in G$, uma contradição.

Portanto, se o lema é válido para subespaços de dimensão $n-1$, ele é válido para subespaços de dimensão n. Para findar a demonstração por indução, resta-nos mostrar que o lema é verdadeiro para espaços unidimensionais. Nesse caso, a prova segue os mesmos passos dos parágrafos anteriores e o resultado segue.

■

A próxima definição ajudará no entendimento do significado de “um anel ser ‘largo’ em outro”.

Definição 4.2.2 (Anel k-denso de transformações lineares)**.** *Diremos que U é um anel k-denso de transformações lineares com domínio num espaço vetorial V sobre um anel de divisão (não trivial) Δ se, para qualquer conjunto linearmente independente $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq V$ e qualquer conjunto finito arbitrário $\{y_1, ..., y_n\} \subseteq V$, existe um elemento $u \in U$ tal que $u : kx_i \mapsto y_i$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$.*

Um anel 1-*denso* é o anel denso já conhecido na literatura.

Suponha que o subconjunto $\{y_1, ..., y_n\}$ de V seja linearmente independente. Se $\{kx_1, ..., kx_n\}$ não for um conjunto linearmente independente, então não existirá $u \in U$ de forma que $u : kx_i \mapsto y_i$ e isso acarretaria problemas na definição anterior. Logo, se o anel U é k-denso, então o espaço vetorial V obedece, implicitamente, a condição: “para qualquer conjunto $\{x_1, ..., x_n\}$ linearmente independente, o conjunto $\{kx_1, ..., kx_n\}$ é ainda linearmente independente”. Uma pergunta natural é: “Existe algum anel k-denso?”. Se U é k-primitivo (mas essa hipótese poderia ser enfraquecida, pelo lema 3.3.3), o conjunto $\{kx_1, ..., kx_n\}$ é linearmente independente, no qual $\{x_1, ..., x_n\}$ é um conjunto linearmente independente arbitrário. Provemos esse fato. Suponha que existam $\delta_1, ..., \delta_n \in \Delta$ tais que $\sum^n \delta_i(kx_i) = 0$. Desse modo,

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \delta_i(kx_i) = \sum_{i=1}^{n} (k\delta_i)x_i$$

e isso implica que $k\delta_i = 0$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$, já que $\{x_1, ..., x_n\}$ é um conjunto linearmente independente. Agora, tenhamos em mente as aplicações $\delta_i' : v \mapsto \delta_i v$ definidas sobre V. Não necessariamente elas estão em U, mas por causa da condição d k-densidade, existe alguma transformação linear T tal que T restrita a qualquer subespaço finito de V coincide com δ_i', para algum i. Como U é k-primitivo, $k\delta_i' = 0$ se, e somente se, $\delta_i' = 0$, por causa do lema 3.3.3. Mas Δ é um anel de divisão (não trivial), portanto se $\delta_i'(V) = (0)$, para qualquer $i \in \{1, ..., n\}$, então $\delta_i = 0$, para qualquer $i \in \{1, ..., n\}$, pelo qual concluímos que $\{kx_1, ..., kx_n\}$ é linearmente independente.

Em particular, se V tem dimensão finita, o anel k-denso U é o anel de todas as transformações lineares com domínio em kV. Também, em dimensão finita, a condição “para qualquer conjunto $\{v_1, ..., v_n\}$ linearmente independente de V, o conjunto

$\{kv_1, ..., kv_n\}$ é ainda linearmente independente" é o mesmo que dizer que $kV = V$. Logo, se V tem dimensão finita, o anel k-denso U é o anel de todas as transformações lineares com domínio em V. Note que a k-densidade é mais forte que a densidade, pois $kx_i \cdot u = x_i \cdot ku$ e $ku = t$ também está em U. Em outras palavras, para qualquer conjunto linearmente independente $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq V$ e qualquer conjunto finito arbitrário $\{y_1, ..., y_n\} \subseteq V$, existe $t \in U$ tal que $x_i t = y_i$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Isso significa que a k-densidade implica na densidade.

Estamos agora aptos a demonstrar a k-densidade para anéis k-primitivos à direita.

Teorema 4.2.3. *Todo anel k-primitivo à direita é isomorfo a um anel k-denso de transformações lineares com domínio num espaço vetorial à direita sobre um anel de divisão.*

Demonstração: Mostraremos que A', que é isomorfo ao anel A e, portanto, é k-primitivo, é um anel k-denso de transformações lineares com domínio em A/M.

Seja $\{x_1, ..., x_n\}$ um subconjunto linearmente independente arbitrário de A/M. Considere agora o conjunto linearmente independente $\{kx_1, ..., kx_n\}$. Seja G o espaço de dimensão finita gerado por $\{x_2, ..., x_n\}$. Em virtude do lema 4.2.1, existe um elemento $t_1 \in A'$ tal que kt_1 anula G e não anula x_1. Digamos que $x_1 kt_1 = (kx_1)t_1 = z_1 \neq 0$. Usando o mesmo argumento para os demais vetores de $\{x_1, ..., x_n\}$, podemos encontrar $t_i \in A'$ tal que $(kx_i)t_i = z_i \neq 0$ e $(kx_j)t_i = 0$ para $i \neq j$, $i, j \in \{1, ..., n\}$. Usando o mesmo lema, $z_i A' \neq (0)$, para cada $z_i \neq 0$.

Tal como na prova do lema 4.2.1, $A/M = z_i kA'$, qualquer que seja $i \in \{1, ..., n\}$. Logo, para $y_i \in A/M$ arbitrário existe $u_i \in A'$ tal que $z_i(ku_i) = y_i$, isto é, $k^2 x_i t_i u_i = y_i$. Se $\alpha = kt_1u_1 + \cdots + kt_nu_n$, então $\alpha \in A'$ e

$$\begin{aligned}
(kx_i)\alpha &= kx_i(kt_1u_1 + \cdots + kt_nu_n) \\
&= k^2 x_i t_i u_i = (kx_i)t_i(ku_i) \\
&= y_i,
\end{aligned}$$

para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Logo A' é k-denso e o teorema é demonstrado, pois, como A é um anel k-primitivo, A e A' são isomorfos.

■

Corolário 4.2.4. *Se A é um anel de transformações lineares sobre um espaço vetorial à direita V_Δ sobre um anel de divisão Δ e se para qualquer $v \neq 0$ em V_Δ e qualquer outro $w \in V_\Delta$, A contém um elemento x tal que $kvx = w$, então A é k-primitivo à direita. Em particular, se A é um anel k-denso de transformações lineares sobre V_Δ, então A é k-primitivo à direita.*

Demonstração: Para simplificar a linguagem, denotaremos o espaço vetorial V_Δ simplesmente por V, pois o anel de divisão Δ já está implícito no contexto. A condição "para qualquer $v \neq 0$ em V e qualquer outro $w \in V$, A contém um elemento x tal que $kvx = w$", assumida nesse corolário, é chamada de *k-unitransitividade*, ou *k-1-transitividade*, e é uma assunção mais fraca que a k-densidade, já que a k-densidade pode ser entendida como a k-n-transitividade.

Seja $v \neq 0$ em V um vetor arbitrário. A hipótese afirma, em outras palavras, que $kvA = V$. Seja $M = \{a \in A : kva = 0\}$. Claramente, M é um ideal à direita de A e $M \neq A$, pois $kvA = V \neq (0)$. Note que

$$(M : kA) = \{a \in A : kAa \subseteq M\} = (0),$$

pois se $kAa \subseteq M$, então $v \cdot kAa = kvAa = (0)$. Como $kvA = V$, isso significa que $kvAa = Va = (0)$. Mas a única transformação linear que manda todo o espaço V no espaço (0) é a transformação 0. Logo $a = 0$ e, portanto, $(M : kA) = (0)$.

Finalmente, mostraremos que M é maximal em A. Suponha então que exista N ideal à direita de A tal que $N \supsetneq M$ e seja x tal que $x \in N$ e $x \notin M$. Logo $kvx \neq 0$ e, portanto, $kvxA = V$. Agora seja $a \in A$ arbitrário e seja $v_1 = kva$. Como $xA \subseteq N$, $kvN = V$. Dessa forma, existe $y \in N$, tal que $kvy = v_1 = kva$, isto é, $kv(y - a) = 0$. Portanto, $y - a \in M$, ou $y - a = m$, para algum $m \in M$. Logo $a = y - m$ está em N, pois $M \subseteq N$ e, portanto, $A \subseteq N$, pelo qual concluímos que $A = N$ e, dessa forma, M é ideal à direita maximal de A.

Logo, A contém um ideal à direita maximal M tal que $(M : kA) = (0)$ e, portanto, A é k-primitivo à direita, por definição. A k-unitransitividade é um caso particular de k-densidade.

$\blacksquare$

O corolário 4.2.4 não prova que A é k-denso em V_Δ, ou que a k-unitransitividade é equivalente a k-densidade. Aplicando o lema 4.1.1 ao anel k-primitivo A, obteremos, em geral, um anel de divisão D maior que Δ. Dessa forma, A tem de ser k-denso em V_D, mas não necessariamente em V_Δ.

Para ilustrar essa observação, seja $\mathbb{C}_\mathbb{R}$ o corpo dos complexos pensado como um espaço vetorial à direita sobre $\mathbb{R}$. Agora pensemos $\mathbb{C}$ como um anel de transformações lineares definidas no espaço vetorial $\mathbb{C}_\mathbb{R}$. Para qualquer $0 \neq v \in \mathbb{C}_\mathbb{R}$, $v\mathbb{C} = \mathbb{C}_\mathbb{R}$; portanto, $\mathbb{C}$ é unitransitivo sobre $\mathbb{C}_\mathbb{R}$, logo é um anel primitivo à direita (ou 1-primitivo à direita). Por causa do lema 4.1.1, nós encontramos $D = \mathbb{C}$ e portanto $\mathbb{C}$ é denso em $\mathbb{C}_\mathbb{C}$. Entretanto, $\mathbb{C}$ não é denso em $\mathbb{C}_\mathbb{R}$. O conjunto $\{1, i\}$ é linearmente independente em $\mathbb{C}_\mathbb{R}$. Considere agora o conjunto unitário $\{1\}$. Se existisse $c \in \mathbb{C}$ tal que

$$\begin{aligned} c : 1 &\mapsto 1 \\ c : i &\mapsto 1, \end{aligned}$$

então $c = a + bi$ é tal que $1 \cdot c = 1(a + bi) = 1$; portanto $a = 1$ e $b = 0$. Também, $1 = i \cdot c = i(1) = i$, uma contradição.

O teorema 3.2.10 nos fornece, de imediato, o seguinte resultado:

Teorema 4.2.5. *O anel $A/\mathfrak{J}_k(A)$ é isomorfo a uma soma subdireta de anéis k-primitivos à direita.*

Demonstração: Pode ser encontrada em [And09].

■

O teorema 4.2.3 nos fornece o seguinte teorema de estrutura:

Teorema 4.2.6 (Teorema de Estrutura)**.** *O anel $A/\mathfrak{J}_k(A)$ é isomorfo a uma soma subdireta de anéis k-densos de transformações lineares com domínio num espaço vetorial à direita sobre um anel de divisão.*

■

A generalização do teorema de densidade de Jacobson encerra, nesse trabalho, nossa linha investigativa acerca das estruturas algébricas preservadas, generalizadas ou estendidas pelo radical $\mathfrak{J}_k$, tendo por ponto de partida o radical de Jacobson $\mathfrak{J}$. Os próximos resultados seguirão no rumo de entender o radical $\mathfrak{J}_k$ dentro de um contexto mais geral na Teoria de Radicais, inclusive com comparações a outros radicais da literatura. Nesse sentido, nos importará conhecer o comportamento da família $\{\mathfrak{J}_k;\ k \geq 1\}$ no reticulado dos radicais.

Capítulo 5

O reticulado dos radicais k-quaserregulares

Foi visto que a operação de Perlis generalizada "$\circ_k$" está associada à classe radical $\mathcal{J}_k$ de anéis associativos. Variando-se o parâmetro k da operação de Perlis generalizada, obtemos uma família de classes radicais com características similares: $\{\mathcal{J}_k; k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0\}$.

A demonstração do teorema 3.3.11 sugere uma maneira pela qual podemos definir supremos e ínfimos de classes radicais. Seja $\{\mathcal{R}_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}$ uma coleção de classes radicais. Definamos

$$\bigvee \{\mathcal{R}_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\} = \mathcal{L}\left(\bigcup \{\mathcal{R}_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}\right)$$

e

$$\bigwedge \{\mathcal{R}_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\} = \bigcap \{\mathcal{R}_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}.$$

Por causa do teorema 2.1.5, a intersecção de uma coleção de classes radicais é uma classe radical e, além disso, é a maior das classes radicais que são cotas inferiores dessa coleção. Por sua vez, o radical inferior determinado pela união de uma coleção de classes radicais é a menor das classes radicais que são cotas superiores, pela sua própria construção (já que o radical inferior determinado pela união de uma coleção de classes radicais é o menor radical que contém todas essas classes). Tal proposta foi feita por Leavitt, em [Lea72], e aperfeiçoada por Snider, em [Sni72], e tem se mostrado muito útil no estudo de reticulados de classes radicais, bem como dos seus subreticulados. Snider mostrou que a classe de todos os radicais forma um reticulado completo (veja [Sni72]).

Lembremos também que o radical $\mathcal{R}_1$ é maior que o radical $\mathcal{R}_2$ se todo anel radical segundo $\mathcal{R}_2$ é radical segundo $\mathcal{R}_1$, ou seja, a classe radical $\mathcal{R}_1$ contém a classe radical $\mathcal{R}_2$, ou ainda, equivalentemente, que $\mathcal{R}_2(A) \trianglelefteq \mathcal{R}_1(A)$, para qualquer anel A. Dessa forma, obtemos reticulados de classes radicais e nos importará estudar o reticulado determinado pela família $\{\mathcal{J}_k;\ k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0\}$.

5.1 A estrutura do reticulado

O principal objetivo dessa seção é estudar o comportamento dos radicais $\mathfrak{J}_k$, com k variando em $\mathbb{Z}$, quando comparados entre si. A coleção $\{\mathfrak{J}_k;\ k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0\}$ será denotada por $\mathbb{J}$. Nas próximas demonstrações, estaremos levando em consideração um anel A arbitrário e seus elementos.

Lema 5.1.1. *Sejam k e l dois inteiros tais que l divide k. Nessas condições, $\mathfrak{J}_l(A)$ está contido em $\mathfrak{J}_k(A)$.*

Demonstração: Se l divide k, então $k = ln$, $n \in Z$. Tendo em mente o lema técnico 3.2.3,

$$(M : kA) = (M : (ln)A) = (M : n(lA)) \supseteq (M : lA).$$

Por causa do teorema 3.2.10,

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_k(A) &= \bigcap\{(M : kA)\ :\ M \trianglelefteq_r A \text{ maximal}\} \supseteq \\ &\supseteq \bigcap\{(M : lA)\} \supseteq \bigcap\{(N : lA)\ :\ N \trianglelefteq_r A \text{ maximal}\} = \\ &= \mathfrak{J}_l(A). \end{aligned}$$

■

Lembremos que um elemento a de um reticulado $(X, \leq)$ é um *átomo* se $\perp < a$ e $\perp \leq b \leq a$ implica $b = \perp$ ou $b = a$.

Note também que o lema 5.1.1 afirma que $\mathfrak{J} \leq \mathfrak{J}_k$, qualquer que seja $k \in \mathbb{Z}$ não nulo. Em outras palavras, obtivemos o seguinte resultado:

Teorema 5.1.2. *O radical $\mathfrak{J}$ é o único átomo de $\mathbb{J}$.*

■

Podemos generalizar o lema 5.1.1 da seguinte forma:

Lema 5.1.3. *Sejam k e l dois inteiros, $d = \mathrm{mdc}(k, l)$, o máximo divisor comum a k e l, e $m = \mathrm{mmc}(k, l)$, o mínimo múltiplo comum a k e l. Nessas condições, $\mathfrak{J}_k(A) \cap \mathfrak{J}_l(A) = \mathfrak{J}_d(A)$ e $\mathfrak{J}_k(A) + \mathfrak{J}_l(A) = \mathfrak{J}_m(A)$.*

Demonstração: Se $d = \mathrm{mdc}(k, l)$, então $k = dn$, $l = dm$ e $\mathrm{mdc}(n, m) = 1$. Ademais, $n\mathfrak{J}_k(A) \subseteq \mathfrak{J}_d(A)$. Para que vejamos isso, suponha $x \in \mathfrak{J}_k(A)$; então existe $y \in \mathfrak{J}_k(A)$ tal que $x + y + kxy = 0$ e, como $\mathfrak{J}_k(A)$ é ideal de A, nx e ny também estão em $\mathfrak{J}_k(A)$. Logo,

$$(nx) \circ_d (ny) = nx + ny + d(nx)(ny) = nx + ny + n(dnxy) = n(x + y + kxy) = 0,$$

pelo que concluímos que $n\mathfrak{J}_k(A) \subseteq \mathfrak{J}_d(A)$. *Mutatis mutandis*, $m\mathfrak{J}_l(A) \subseteq \mathfrak{J}_d(A)$. Logo, se $x \in \mathfrak{J}_k(A) \cap \mathfrak{J}_l(A)$, então nx e mx estão em $\mathfrak{J}_d(A)$. Como $\mathrm{mdc}(n, m) = 1$, existem inteiros

s, t tais que $sn + tm = 1$. Ora, $\mathfrak{J}_d(A)$ é um ideal de A e isso implica que snx e tmx estão $\mathfrak{J}_d(A)$. Também, $snx+tmx = x \in \mathfrak{J}_d(A)$, portanto, $\mathfrak{J}_k(A) \cap \mathfrak{J}_l(A) \subseteq \mathfrak{J}_d(A)$. Com o mesmo raciocínio podemos mostrar que $\mathfrak{J}_m(A) \subseteq \mathfrak{J}_k(A) + \mathfrak{J}_l(A)$.

A contingência reversa é imediata, por causa do lema 5.1.1, pois se $d = \text{mdc}(k, l)$ e $m = \text{mmc}(k, l)$, então $d|k$, $d|l$, $k|m$, $l|m$, portanto $\mathfrak{J}_d(A) \subseteq \mathfrak{J}_k(A)$ e $\mathfrak{J}_d(A) \subseteq \mathfrak{J}_l(A)$, implicando em $\mathfrak{J}_d(A) \subseteq \mathfrak{J}_k(A) \cap \mathfrak{J}_l(A)$; também, $\mathfrak{J}_k(A) \subseteq \mathfrak{J}_m(A)$ e $\mathfrak{J}_l(A) \subseteq \mathfrak{J}_m(A)$, implicando em $\mathfrak{J}_k(A) + \mathfrak{J}_l(A) \subseteq \mathfrak{J}_m(A)$.

■

Corolário 5.1.4. *Sejam $k_1, ..., k_r$ inteiros, $d = \text{mdc}(k_1, ..., k_r)$ e $m = \text{mmc}(k_1, k_r)$. Nessas condições,*

$$\bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{J}_{k_i}(A) = \mathfrak{J}_d(A) \quad e \quad \sum_{i=1}^{r} \mathfrak{J}_{k_i}(A) = \mathfrak{J}_m(A).$$

Demonstração: Basta usar indução finita. Está claro que $\text{mdc}(k_1, ..., k_r)$ é o máximo divisor comum aos elementos $k_1, ..., k_r$ e $\text{mmc}(k_1, ..., k_r)$ é o mínimo múltiplo comum aos elementos $k_1, ..., k_r$.

■

Lembrando que a interseção de dois ideais é maior ideal contido em ambos e que o a soma de dois ideais é o menor ideal que contém ambos e fazendo as devidas adaptações, obtemos a versão para classes radicais do lema 5.1.3, isto é, $\mathfrak{J}_k \wedge \mathfrak{J}_l = \mathfrak{J}_d$ e $\mathfrak{J}_k \vee \mathfrak{J}_l = \mathfrak{J}_m$, em que $d = \text{mdc}(k, l)$ e $m = \text{mmc}(k, l)$, a qual também pode ser estendida indutivamente,

$$\bigwedge_{i=1}^{r} \mathfrak{J}_{k_i} = \mathfrak{J}_d \ \text{ e } \ \bigvee_{i=1}^{r} \mathfrak{J}_{k_i} = \mathfrak{J}_m \ ,$$

em que $d = \text{mdc}(k_1, ..., k_r)$ e $m = \text{mmc}(k_1, k_r)$.

Dessa forma, acabamos de provar os seguintes resultados:

Teorema 5.1.5. *Os reticulados $(\mathbb{J}\ , \leq)$ e $(\mathbb{N}\ , |)$ são isomorfos, em que $|$ denota a divisão.*

■

Teorema 5.1.6. $(\mathbb{J}, \vee, \wedge)$ *é um subreticulado do reticulado de classes radicais.*

Demonstração: Note que $\mathfrak{J}_k \vee \mathfrak{J}_l = \mathfrak{J}_{\text{mmc}(k,l)}$ e $\mathfrak{J}_k \wedge \mathfrak{J}_l = \mathfrak{J}_{\text{mdc}(k,l)}$, em que $\vee$ e $\wedge$ são os operadores supremo e ínfimo, respectivamente, definidos para o reticulado de classes radicais.

■

Em [Sni72] também pode ser encontrado um exemplo que mostra que a classe de todos os radicais especiais (a denotaremos por $\mathbb{L}_s$) não é um subreticulado do reticulado de todos os radicais. Todos os radicais em $\mathbb{J}$ são especiais (teorema 3.3.7), entretanto $\mathbb{J} \leq \mathbb{L}_s$ é um subreticulado do reticulado de todos os radicais.

5.2 O radical $\mathfrak{J}_\infty$

Nesta seção, nos importará saber o comportamento da coleção $\{\mathfrak{J}_k;\ k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0\}$ de todos os radicais k-quaserregulares considerando-se conjuntos de índices não finitos. A *especialidade* e a *extensibilidade matricial* são conceitos que já foram vistos no capítulo 2 e que serão retomados aqui, pois servirão de suporte para outro resultado. Os critérios que comparam as classes radicais $\mathfrak{J}_k$ entre si já foram vistos na seção anterior.

Consideremos o supremo $\mathfrak{J}_\infty$ da coleção $\{\mathfrak{J}_k;\ k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0\}$. Esse supremo é também uma classe radical (pois a classe de todos os radicais forma um reticulado completo). O seguinte resultado levará em consideração a especialidade de classes radicais:

Teorema 5.2.1 (Snider)**.** *A coleção de todos os radicais especiais forma um reticulado completo.*

Demonstração: Consulte [Sni72].

■

Para os radicais que são especiais e matricialmente extensíveis, o teorema 5.2.1 pode ser apresentado de forma particularizada.

Teorema 5.2.2 (Booth, France-Jackson)**.** *A classe de todos os radicais especiais e matricialmente extensíveis é um subreticulado completo da classe de todos os radicais especiais.*

Demonstração: Consulte [BFJ06-2].

■

Corolário 5.2.3. *O radical $\mathfrak{J}_\infty$ é especial e matricialmente extensível.*

Demonstração: Segue-se imediatamente do teorema 5.2.2.

■

O próximo resultado exibirá o radical $\mathfrak{J}_\infty(A)$ como um ideal de um anel A arbitrário.

Teorema 5.2.4. *Sejam A um anel e $\mathfrak{J}_k(A)$ seu radical de Jacobson generalizado.*

$$\mathfrak{J}_\infty(A) = \sum_{k \in \mathbb{Z},\, k \neq 0} \mathfrak{J}_k(A).$$

Demonstração: Qualquer que seja $k \in \mathbb{Z}$ não nulo, $\mathfrak{J}_\infty \geq \mathfrak{J}_k$, pela sua própria construção e isso significa que $\mathfrak{J}_\infty(A) \supseteq \mathfrak{J}_k(A)$, portanto $\mathfrak{J}_\infty(A) \supseteq \sum_{k \in \mathbb{Z},\, k \neq 0} \mathfrak{J}_k(A)$. Por outro lado, $\sum_{k \in \mathbb{Z},\, k \neq 0} \mathfrak{J}_k(A)$ – essa soma é a soma de ideais que estamos usando desde o início desse trabalho (definição 1.1.17) – é uma cota superior de $\{\mathfrak{J}_k(A); k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0\}$, portanto $\sum_{k \in \mathbb{Z},\, k \neq 0} \mathfrak{J}_k(A) \supseteq \mathfrak{J}_\infty(A)$.

■

Seja k um inteiro não nulo. Denotemos por $\mathcal{T}_k$ a classe de k-torção, isto é, um anel A está em $\mathcal{T}_k$ se, e somente se, para todo elemento x de A existe um inteiro positivo n tal que $k^n x = 0$. Usando o teorema 2.1.4, podemos ver facilmente que $\mathcal{T}_k$ é uma classe radical, para todo inteiro k.

Em [MCSt98] é demonstrado que $\mathcal{J}_k = \mathcal{J} \vee \mathcal{T}_k$. Dessa forma, para k não nulo,

$$\mathcal{J}_\infty = \bigvee_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{J}_k = \bigvee_{k\in\mathbb{Z}} (\mathcal{J} \vee \mathcal{T}_k) = \mathcal{J} \vee \bigvee_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_k. \tag{5.1}$$

Observação 5.2.5. Não é difícil ver que $\mathcal{J}$ e $\mathcal{T}_k$ são classes não comparáveis, para um k inteiro não nulo. Seja F um corpo de característica k. Sabemos que todo corpo é um anel simples; dessa forma, o radical de Jacobson deste anel é o ideal nulo, pois a identidade 1_F não é quaserregular. Em contrapartida, todo elemento deste anel tem k-torção, logo seu radical de k-torção é todo ele.

Note que $\mathcal{J}_k(A)$ é a soma de todos os ideais k-quaserregulares de um anel A arbitrário e um ideal de A é k-quaserregular se todos os seus elementos são k-quaserregulares. Sobre o radical $\mathcal{J}_\infty$, uma pergunta que poderia ser feita é a seguinte: $\mathcal{J}_\infty$ pode ser formulado de maneira elementar, isto é, a partir de alguma propriedade imposta sobre os elementos de um anel A, podemos construir $\mathcal{J}_\infty(A)$? Nesse caso, a resposta é afirmativa. Se A é um anel arbitrário e $x \in \mathcal{J}_\infty(A)$, então $x = y_{k_1} + y_{k_2} + \cdots + y_{k_n}$, em que $y_{k_i} \in \mathcal{J}_{k_i}(A)$, para todo $1 \leq i \leq n$. Ora,

$$y_{k_1} + y_{k_2} + \cdots + y_{k_n} \in \mathcal{J}_{k_1}(A) + \mathcal{J}_{k_2}(A) + \cdots + \mathcal{J}_{k_n}(A) = \mathcal{J}_m(A),$$

em que $m = \mathrm{mmc}(k_1, ..., k_n)$. Portanto, todo elemento x em $\mathcal{J}_\infty(A)$ é n-quaserregular, em que $n = n(x)$ é um inteiro não nulo.

Ao longo deste trabalho, pudemos notar que os $\mathcal{J}_k$, com $k \in \mathbb{Z}$ não nulo, apresentam muitas características em comum, assim como $\mathcal{J}_\infty$, conforme visto no corolário 5.2.3. Todavia, este último se distingue daqueles como nos mostra o próximo exemplo.

Exemplo 5.2.6. *O radical $\mathcal{J}_\infty$ não é fechado para somas subdiretas nem para somas diretas completas.*

Alguns radicais têm a propriedade de ser fechado para somas diretas completas, isto é, se $\{A_\lambda \,;\, \lambda \in \Lambda\}$ é uma coleção de anéis $\mathcal{R}$-radicais, para algum radical $\mathcal{R}$, então

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \in \mathcal{R}.$$

O radical $\mathcal{J}_k$, em $k \in \mathbb{Z}$ é um inteiro não nulo arbitrário, por exemplo, é fechado para somas diretas completas, pelos mesmos motivos que tornam $\mathcal{J}$ fechado para somas diretas completas (consulte [GW04]).

Um resultado da teoria básica de anéis é que $\cap p\mathbb{Z} = (0)$, com p primo; portanto

$$\mathbb{Z} = \sum_{p \text{ primo}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \sum_{p \text{ primo}} \mathbb{Z}_p \quad (\text{teorema 1.2.6}).$$

Imediatamente após o corolário 3.2.11, mostramos que $\mathcal{J}_k(\mathbb{Z}) = (0)$, para qualquer $k \in \mathbb{Z}$ não nulo. Logo, $\mathcal{J}_\infty(\mathbb{Z}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{J}_k(\mathbb{Z}) = (0)$. Note também que $\mathcal{J}_p(\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p$, com $p \in \mathbb{Z}$ primo, pois $\mathcal{J}_p(\mathbb{Z}_p) = \mathcal{J}(\mathbb{Z}_p) + \mathcal{T}_p(\mathbb{Z}_p)$ e $\mathcal{T}_p(\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p$, já que $p\mathbb{Z}_p = (0)$. Portanto, $\mathcal{J}_\infty(\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p$, pois $\mathbb{Z}_p = \mathcal{J}_p(\mathbb{Z}_p) \subseteq \mathcal{J}_\infty(\mathbb{Z}_p) \subseteq \mathbb{Z}_p$. Em outras palavras, o anel $\mathbb{Z}$ dos inteiros é um anel $\mathcal{J}_\infty$-semissimples que é escrito como soma subdireta de anéis $\mathcal{J}_\infty$-radicais, portanto $\mathcal{J}_\infty$ não é fechado para soma subdiretas.

Para ver que $\mathcal{J}_\infty$ não é fechado para somas diretas completas, seja $\prod_{n \in \mathbb{N}} A_n$ uma soma direta completa de anéis $\mathcal{J}_\infty$-radicais de forma que em A_1 exista um elemento x_1 que é quaserregular, em A_2 exista um elemento x_2 que é 2-quaserregular e, de modo geral, em A_n exista um elemento x_n que é n-quaserregular. Agora seja $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ em $\prod_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Se $\prod_{n \in \mathbb{N}} A_n$ é $\mathcal{J}_\infty$-regular, existe $m \in \mathbb{Z}$ não nulo tal que x é m-regular. Suponha, sem perda de generalidade, que m seja um inteiro positivo. Pela própria escolha de x, m é um inteiro positivo que é dividido pelos demais inteiros, isto é, m é um maximal entre os inteiros, uma contradição.

Conclusão

Neste trabalho, demos prosseguimento aos resultados obtidos por Andrade e Petit Lobão, em [And09], estabelecendo as equivalências clássicas (do radical de Jacobson) com respeito ao radical $\mathcal{J}_k(A)$, em que A é um anel arbitrário. Melhoramos o teorema de estrutura dos anéis $\mathcal{J}_k$-semissimples obtido pelo próprio Andrade, além de detectarmos um fenômeno que distingue "fortemente" anéis k-primitivos e anéis primitivos: a k-densidade. Através da k-densidade, estabelecemos o teorema da densidade de Jacobson num contexto mais amplo e provamos que os espaços vetoriais no contexto da densidade para o radical $\mathcal{J}_k$ têm uma estrutura muito peculiar: cada um deles é construído sobre um anel de divisão cuja característica é diferente de k. Mostramos também que os reticulados $(\mathbb{N}, |)$ e $(\mathbb{J}, \leq)$ são isomorfos e esse fato é, num certo sentido, surpreendente: o reticulado de classes radicais é, em termos de ideia, muito "bagunçado" (classes radicais, em geral, não têm um bom critério de comparação entre si). Entretanto, nessa "bagunça radical", encontramos a família $\mathbb{J} = \{\mathcal{J}_k;\ k \in Z, k \neq 0\}$, que é bem "organizada" (essa família possui um critério de comparação bastante razoável para os seus elementos). Em particular, podemos destacar dentro de $\mathbb{J}$ uma cadeia de radicais, a saber:

$$\mathcal{J} \leq \mathcal{J}_2 \leq \mathcal{J}_4 \leq \cdots \leq \mathcal{J}_{2^n} \leq \cdots$$

Outro objeto proveniente deste trabalho é o radical $\mathcal{J}_\infty$. Ele preserva a extensibilidade matricial e a hereditariedade de $\mathcal{J}$, mas não é fechado para somas diretas completas. Isso torna $\mathcal{J}_\infty$ radicalmente distinto de cada $\mathcal{J}_k$, k é um inteiro não nulo, o que nos permite afirmar que obtivemos um novo radical na literatura matemática.

Seja A um anel. Diremos que um elemento x de A torce se existe $n = n(x)$ inteiro tal que $nx = 0$. Seja $\mathcal{T}$ a classe dos anéis tais que todos os seus elementos torcem. Por causa do teorema 2.1.4, $\mathcal{T}$ é uma classe radical. Em virtude da equação 5.1, conjecturamos (embora isso seja "quase verdade"):

- $\mathcal{T} = \bigvee\{\mathcal{T}_k\ ;\ \ k \in \mathbb{Z}\}$.

- $\mathcal{J}_k(A) = \mathcal{J}(A) + \mathcal{T}_k(A)$.

- $\mathcal{J}_\infty(A) = \mathcal{J}(A) + \mathcal{T}(A)$.

Tendo por inspiração o teorema 5.2.4, conjecturamos o seguinte:

$$\mathcal{R} = \bigvee_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{R}_\lambda \Longleftrightarrow \mathcal{R}(A) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{R}_\lambda(A), \quad \text{para qualquer anel } A,$$

em que $\mathcal{R}_\lambda$ é radical, pra todo $\lambda \in \Lambda$. Caso isso não seja verdade para qualquer família de radicais, haveria alguma condição que pudesse ser imposta aos radicais $\mathcal{R}_\lambda$ para que a equivalência se tornasse válida?

Outra proposta é analisar o comportamento de um radical qualquer quando se considera a sua "junção" com o $\mathcal{T}_k$. Sabemos que $\mathcal{J}_k = \mathcal{J} \vee \mathcal{T}_k$, ou seja, o que torna $\mathcal{J}_k$ diferente de $\mathcal{J}$ é o radical $\mathcal{T}_k$. Entretanto, $\mathcal{J}$ e $\mathcal{J}_k$ são muito parecidos, tendo em vista algumas de suas caracterizações radicais (hereditariedade, extensibilidade matricial, especialidade, força). Tomemos um radical $\mathcal{R}$ arbitrário e consideremos sua extensão $\mathcal{R}_k = \mathcal{R} \vee \mathcal{T}_k$. Surge outra pergunta: $\mathcal{R}_k$ é sempre uma extensão "suave" de $\mathcal{R}$? A palavra "suave" está sendo usada aqui para indicar que $\mathcal{R}_k$ preserva as caracterizações radicais de $\mathcal{R}$: se $\mathcal{R}$ é especial, por exemplo, $\mathcal{R}_k$ também é especial?

O leitor deve ter percebido que o radical de Brown-McCoy $\mathcal{G}$ é outra forma de estender o radical de Jacobson $\mathcal{J}$. Em [Div64], é demonstrado que $\mathcal{J} < \mathcal{G}$, isto é, pode-se exibir um anel que é $\mathcal{G}$-radical mas não é $\mathcal{J}$-radical. Como $\mathcal{G}$ se comporta frente a cada radical $\mathcal{J}_k$? Em algumas discussões acerca desse trabalho, percebemos que a característica do anel é fator que pode ser determinante nesse critério de comparação e, por isso, é muito provável que $\mathcal{G}$ não seja comparável com nenhum $\mathcal{J}_k$.

Talvez seja interessante verificar se o ideal gerado pelo ideal à direita $kaA + A$, que pode ser formulado como

$$\langle \{kar + r \ ; \ r \in A\} \rangle = \left\{ kar + r + \sum_{i=1}^{n<\omega} x_i a y_i + x_i y_i \ ; \ x_i, y_i, r \in A \right\} =: \mathcal{G}_k(a),$$

fornece-nos a condição de $\mathcal{G}$-regularidade generalizada, a $\mathcal{G}_k$-regularidade, para a qual a coleção dos anéis $\mathcal{G}_k$-regulares também formem uma classe radical. Supondo que a classe dos anéis $\mathcal{G}_k$-regulares, construída da mesma forma que os anéis $\mathcal{G}$-regulares (veja a seção 2.7), seja uma classe radical, será que a mesma coincide com a classe $\mathcal{G} \vee \mathcal{T}_k$?

O radical $\mathcal{J}_k$ é o radical superior determinado pelos anéis k-primitivos (teorema 3.3.7) e o radical inferior determinado pela classe $\mathcal{J}_k^r \cup \mathbb{m}$ (teorema 3.3.11). Tendo em vista os teoremas 2.3.1 e 2.3.4, o radical $\mathcal{J}_k$ está associado a qual partição na classe dos anéis simples?

Referências

[Div64] DIVINSKY, N. J. *Rings and Radicals*. University of Toronto, 1964. (Mathematical Expositions)

[GW04] GARDNER, B. J.; WIEGANDT, R. *Radical Theory of Rings*. Marcel Deker, 2004. (Pure And Applied Mathematics, **261**)

[Hung74] HUNGERFORD, T. W. *Algebra*. Springer, 1974. (Graduate Texts in Mathematics, **73**)

[Lang02] LANG, S. *Algebra*. Springer, 2002.

[And09] ANDRADE, L. D. *A construção do k-radical: Uma generalizacão do radical de Jacobson*. 2009. 39 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Matemática, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2009.

[Jec03] JECH, Thomas J. *Set Theory: The Third Millennium Edition, Revised and Expanded*. New York: Springer, c2003. (Springer Monographs in Mathematics)

[Sza81] SZÁSZ, F. *Radicals of rings*. John Wiley and Sons, 1981.

[Am52-1] AMITSUR, S. A general Theory of Radicals I. *Am. J. Math.*, **74**, p. 774 - 786, 1952.

[Am54-2] — A general Theory of Radicals II. *Am. J. Math.*, **76**, p. 100 - 125, 1954.

[Am54-3] — A general Theory of Radicals III. *Am. J. Math.*, **76**, p. 126 - 136, 1954.

[Jac56] JACOBSON, N. Structure of Rings. *Ame. Math. Soc. Coll. Publ.*, **76**, 1956.

[G69] GRAY, M. *A Radical Approach to Algebra*. Addison-Wesley, 1969.

[MCSt98] MCCONNEL, N. R., STOKES T. Generalising quasiregularity for rings. *Australian Mathematical Society Gazette*, **25**, p. 250 - 252, 1998.

[Lee93] LEE, Y-L. A note on the Jacobson Radical. *American Mathematical Society*, **118**, p. 337 - 338, 1993.

[Gar07] GARDNER, B. J. There isn't much duality in radical theory. *Journal Algebra and Discrete Mathematics*, **3**, p. 59 - 66, 2007.

[Jae75] JAEGERMANN, M. Normal Radicals. *Fund. Math.*, **95**, p. 147-155, 1977.

[San75] SANDS, A. D. On normal radicals. *J. London Math. Soc.*, **11**, p. 361 - 365, 1975.

[Lea72] LEAVITT, W. G. Sets of radical classes. *Publ. Math. Debrecen*, **14**, p. 321 - 324, 1967.

[Sni72] SNIDER, R. L. Lattices of radicals. *Pacific J. Math.*, **40**, p. 207 - 220, 1972.

[BFJ03-1] BOOTH, G. L. and FRANCE-JACKSON, H. On the lattice of matric-extensible radicals, *Acta Math. Hungar.*, **101**, p. 163 - 172, 2003.

[BFJ06-2] — On the lattice of matric-extensible radicals. II, *Acta Math. Hungar.*, **102**, p. 187 - 199, 2006.

[B04] BORGES, E. P. A possible deformed algebra and calculus inspired in nonextensive thermostatistics, *Physica A*, **340**, p. 95 - 101, 2004.

Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática / Colegiado da Pós-Graduação em Matemática

Av. Adhemar de Barros, s/n, Campus Universitário de Ondina, Salvador - BA
CEP: 40170 -110
<http://www.pgmat.ufba.br>