Universidade Federal da Bahia
Instituto de Matemática
Curso de Pós-graduação em Matemática
Dissertação de Mestrado

Controle de distorção em aplicações multimodais

Maurício Sobral Brandão

Salvador-Bahia
Janeiro 2003

Controle de distorção em aplicações multimodais

Maurício Sobral Brandão

Dissertação apresentada ao colegiado do curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Vilton Jeovan Viana Pinheiro (Orientador)

Prof. Dr. José Ferreira Alves

Prof. Dr. Isaac Costa Lázaro

Brandão, M. S.
"Controle de Distorção em Aplicações Multimodais"./Maurício Sobral Brandão. Salvador-Ba, 2003.

Orientador: Dr. Vilton Jeovan Viana Pinheiro (UFBA). Dissertação de Mestrado apresentada ao curso de Pós-graduação em Matemática da UFBA, 25 páginas.

Palavras-Chave: Aplicações multimodais, Distorção, Componentes Ergódicas.

Agradecimentos

Quero primeiramente agradecer a Deus. Sei que pouco eu tenho retribuído diante do muito que me foi dado.

Agradeço a meus pais pela dedicação, por todo carinho e confiança.

A minha esposa e minhas duas filhas, por vocês existirem e me acompanharem nesta jornada não economizando carinho, compreensão, paciência.

Aos meus professores, que direta ou indiretamente me auxiliaram nesta conquista e em particular ao meu orientador, Dr. Vilton Jeovan Viana Pinheiro, pela sua paciência, dedicação e cuidado tornando possível a realização deste trabalho.

Finalmente, agradeço a todos meus colegas que me ajudaram neste curso seja nos momentos de estudo, de debates saudáveis, auxílio em informática ou até mesmo nas horas de descontração. Um forte abraço para todos.

Resumo

Consideramos neste trabalho uma aplicação multimodal f com pontos críticos não-flat podendo estes serem pontos de inflexão. Mostramos uma versão melhorada do lema de Koebe e um resultado sobre Schwarziana negativa. Com estes resultados mostramos que a primeira aplicação de entrada a uma vizinhança do conjunto crítico é uma composição de funções da forma $L \circ f$, sendo L um difeomorfismo com distorção limitada. Finalmente, mostramos uma proposição que permite concluir que a quantidade de componentes ergódicas está associada ao número de classes de equivalências formadas pelos pontos críticos, sendo, em particular, menor ou igual ao número de classes.

Abstract

In this dissertation we work with a multimodals maps $f$which have non-flat critical points. These points could be inflection points. We prove a improved version of Koebe´s lemma and a negative Schwarziana derivate result. With these results we demonstrate that the first entry map to neighbourhood of the set of critical points is a composition of maps of the type $L \circ f$, where L is a diffeomorphism with bounded distortion. Finally, we show a proposition that allow us conclude that the quantity of ergodic components are associated to the number of equivalence classes of critical points, in particular, the number ergodic components is not bigger than the number of equivalence classes.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

Uma função que possui distorção limitada goza de propriedades ergódicas importantes no estudo da dinâmica de um sistema. Desta forma, é importante sabermos quais classes de função apresentam controle de distorção.

Várias publicações nos trazem resultados em aplicações unimodais a exemplo de M. Martens [Ma] que mostrou no seu trabalho que aplicações unimodais com derivada Schawrziana negativa tem de distorção limitada. Em 2000, O. Koslovski [K] em seu artigo mostra que funções unimodais C^3 com ponto crítico não flat possui derivada Schawrziana negativa na vizinhança do ponto crítico. Sendo assim, todos os resultados obtidos supondo Schawrziana negativa são válidos exigindo-se menos das funções.

Nosso trabalho é baseado no artigo de S. van Strien e E. Vargas [vS-V] onde os autores obtém resultados similares aos obtidos nos dois trabalhos anteriormente citados, considerando agora aplicações multimodais. Começamos por um capítulo de noções preliminares, abordando os conhecimentos básicos usados nos capítulos seguintes.

No segundo capítulo, assumimos que as funções em questão possuem "Real Bounds" para pontos recorrentes do domínio e mostramos que altos iterados destas funções possuem Schawrziana negativa . Em seguida mostramos que a primeira aplicação de entrada a uma vizinhança do conjunto crítico de tais funções é uma composição de duas funções sendo que uma delas possui distorção limitada. Finalmente, concluindo nosso trabalho, obtemos um resultado quanto a ergodicidade com respeito a medida de Lebesgue.

Todas as demonstrações são essencialmente as mesmas feitas no artigo acrescidas de detalhes menos óbvios para quem se inicia em Dinâmica Unidimensional.

Capítulo 1

Preliminares

Faremos neste capítulo as definições e enunciaremos propriedades utilizadas no desenvolvimento deste trabalho.

Consideremos, caso não seja feita qualquer ressalva, uma função $f : M \to M$ de classe C^3 sendo $M = [-1;1]$ com uma quantidade finita de pontos críticos, com $f(\partial M) \subset \partial M$. Esta aplicação é denominada de *multimodal* pois M admite uma partição com uma quantidade finita de sub-intervalos onde a f é estritamente monótona.

Um intervalo aberto $I \subset M$ é chamado de intervalo *nice* se a órbita futura de sua fronteira não intersecta I isto é , $I \bigcap \left(\bigcup_{i=0}^{\infty} f^i(\partial I) \right) = \emptyset$.

Seja o intervalo $I \subset M$ e o conjunto $J = \{x \in I | \exists k \in \mathbb{Z},\ k \geq 1 \text{ tal que } f^k(x) \in I\}$. Definimos a *primeira aplicação de retorno* $\phi : J \to I$ por $\phi(x) = f^k(x)$, $\forall x \in J$, onde $k = min\{n, n > 0 | f^n(x) \in I\}$. Cada componente conexa do domínio da aplicação de retorno é denominado *domínio de retorno.*

Consideremos então I um intervalo nice e seja ϕ a primeira aplicação de retorno a I. Um fato importante é que ϕ aplica a fronteira de qualquer domínio de retorno na fronteira de I e isto é garantido pela continuidade de f. Por conseqüência desta propriedade, segue que qualquer domínio de retorno é nice também.

Seja um intervalo $I \subset M$ aberto e um ponto $x \in M$ tal que $f^n(x) \in I$. Podemos definir uma seqüência finita de intervalos fazendo $I_n = I$ e I_{i-1} é a componente conexa de $f^{-1}(I_i)$ contendo $f^{i-1}(x)$. Considerando esta seqüência , dizemos que I_i, $i < n$ é o *pullback* de I por $\{f^i(x), ..., f^n(x)\}$. Usamos a notação $\{I_i\}_{i=0}^{n}$ para representar a seqüência de intervalos e esta recebe o nome de *cadeia*. Se I é um intervalo nice então qualquer elemento de $\{I_i\}_{i=0}^n$ é nice também e dois elementos quaisquer desta seqüência são disjuntos ou encaixantes, isto é, um deles está contido no outro.

Considerando I nice, $x \in I$ e n o menor inteiro positivo tal que $f^n(x) \in I$, o pullback de I por $\{x, ..., f^n(x)\}$ é o domínio de retorno da primeira aplicação de retorno contendo x. Neste caso, dois elementos da cadeia $\{I_i\}_{i=0}^{n-1}$ são sempre disjuntos.

Dada uma cadeia $\{G_i\}_{i=0}^n$, definimos também a *multiplicidade de interseção* o número máximo de intervalos da mesma cuja interseção é diferente do vazio.

Uma ferramenta importante em nosso estudo é investigar como a aplicação em questão age sobre intervalos encaixantes com determinado espaço entre eles. A definição a seguir diz se um intervalo está contido em outro com espaço e nos dá uma idéia do tamanho deste espaço.

Sejam U, V intervalos limitados tais que o fecho de U está contido no interior de V. Diremos que V é uma *α-vizinhança* de U se $|U^+| \geq \alpha|U|$ e $|U^-| \geq \alpha|U|$, onde U^+ e U^- são as componentes conexas de $V \backslash U$. Muitas vezes diremos que U é *α-contido* em V. Quando for bem claro qual a constante diremos simplesmente que U é *bem posto* em V. Denotamos o comprimento do intervalo U por $|U|$.

Seja f uma aplicação C^1. Se $T \subset M$ é um intervalo tal que $Df(x) \neq 0$ $\forall x \in T$, definimos a *distorção* de f em T como:

$$Dist(f, T) = \sup_{x,y \in T} \log \frac{|Df(x)|}{|Df(y)|}$$

Seja c um ponto crítico de uma aplicação $f : M \longrightarrow M$, $(f'(c) = 0)$, dizemos que c é um ponto não-flat se existe um difeomorfismo ψ de classe C^3, $\beta \geq 2$ e uma vizinhança V_c de c tais que $f(x) = \pm|\psi(x)|^\beta + f(c), \forall x \in V_c$.

Em nosso trabalho, todos os pontos críticos de f são não-flat e uma propriedade importante quando temos pontos críticos não-flat é enunciado a seguir.

Lema 1.1. *Seja J tal que $d(J, Cr) > 0$. Se todos os pontos críticos de f são não-flat então $\exists K > 0$ tal que*

$$\frac{|Df(x)|}{|Df(y)|} \geq \exp\left(- K \frac{|J|}{d(J, Cr)}\right), \;\; \forall x, y \in J$$

Onde $d(J, Cr)$ é a distância entre J e o conjunto dos pontos críticos. Considerando que f possui d pontos críticos, $Cr = \{c_1, \cdots, c_d\}$.

Prova. Seja c o ponto crítico de f mais próximo de J. Como c é não-flat podemos considerar que $f(x) - f(c) = S(x-c)^{\alpha}$ na vizinhança de c. Tomemos $x, y \in J$ tais que $x - c < y - c$.

$$\begin{aligned} |Df(x)| &= |S|\alpha|x-c|^{\alpha-1} \\ \text{Logo, } \log|Df(y)| - \log|Df(x)| &= (\alpha-1)\Big(\log|y-c| - \log|x-c|\Big) \end{aligned}$$

Seja a um ponto do fecho de J tal que $|D(\log|a-c|)|$ é o maior valor em módulo que a derivada do Log assume assume no intervalo $[x-c, y-c]$.

$$\begin{aligned} \text{Sendo assim } \log|Df(y)| - \log|Df(x)| &= (\alpha-1)(\log|y-c| - \log|x-c|) \\ &\leq (\alpha-1)D(\log|a-c|)|y-x| = (\alpha-1)\frac{|y-x|}{|a-c|} \\ \text{Como } |a-c| \geq d(J, Cr) \text{ e } |y-x| &\leq |J| \text{ temos que} \\ \log|Df(y)| - \log|Df(x)| &\leq K'\frac{|J|}{d(J,Cr)} \end{aligned}$$

Aplicando a exponencial e tomando K dado pela maior criticalidade entre os pontos críticos de f temos

$$\frac{|Df(x)|}{|Df(y)|} \geq \exp\Big(-K\frac{|J|}{dist(J,Cr)}\Big)$$

Para o caso em que $x - c > y - c$ o lema segue de forma imediata pois $|Df(x)| > |Df(y)|$

$\square$

A seguir vamos enunciar uma versão do lema de Koebe. A demonstração deste lema pode ser encontrado em [dM-vS].

Lema 1.2. *(Lema de Koebe)Sejam $\{G_i\}_{i=0}^{l}$ e $\{H_i\}_{i=0}^{l}$ cadeias tais que G_l é uma σ-vizinhança de H_l, para algum $\sigma > 0$. Se a multiplicidade de interseção de $\{G_i\}_{i=0}^{l}$ é limitada por k e f é uma aplicação C^2 com todos pontos críticos não-flat então valem as seguintes afirmações:*

1. G_0 é uma α-vizinhança de H_0, $\alpha > 0$ dependente somente de σ, k e f.

2.Se $G_{i_1}, ..., G_{i_\nu}$ são intervalos que contém pontos críticos então a aplicação

$f^{i_{j+1}-i_j-1}|_{G_{i_j+1}} : G_{i_j+1} \longrightarrow Gi_{j+1}$, para qualquer $j = 1, ..., \nu - 1$ satisfaz

$$\frac{|Df^{i_{j+1}-i_j-1}(x)|}{|Df^{i_{j+1}-i_j-1}(y)|} < K$$

para qualquer $x, y \in H_{i_j+1}$. A constante $K < \infty$ depende somente de σ, k e f.

Sejam J, T intervalos abertos tais que $J \subset T$. Definimos os *cross-ratios* $A(T,J)$ e $B(T,J)$ por

$$A(T,J) = \frac{|T||J|}{|L \bigcup J||R \bigcup J|} \text{ e } B(T,J) = \frac{|T||J|}{|L||R|},$$

onde L, R são as componentes conexas de $T \backslash J$.

Sejam J, T intervalos abertos tais que $J \subset T$ e f uma função monótona em T. Definimos os cross-ratios $A(f,T,J)$ e $B(f,T,J)$ por

$$A(f,T,J) = \frac{A(f(T), f(J))}{A(T,J)} \text{ e } B(T,J) = \frac{B(f(T), f(J))}{B(T,J)}$$

Proposição 1.1. *.São válidas as seguintes propriedades envolvendo os cross-ratios:*

1. $A(f^n, T, J) = \prod_{k=0}^{n-1} A(f, f^k(T), f^k(J))$

2. *Fazendo o intervalo J convergir para um ponto qualquer $x \in J$ temos que* $|Df(x)| = \lim_{J \to x} A(f,T,J) \cdot \frac{|T|}{|f(T)|} \cdot \frac{|f(L)|}{|L|} \frac{|f(R)|}{|R|}$, *Onde L e R são as componentes conexas de* $T \backslash \{x\}$

3. *Fazendo $J \to T$ temos que*

$$\lim_{J \to T} B(f,T,J) = \frac{|f(T)|^2}{|T|^2} \cdot \frac{1}{|Df(a)|} \cdot \frac{1}{|Df(b)|}, \text{ onde } (a,b) = T$$

Prova. Vamos provar a propriedade 1 por indução. Observe que a mesma é válida para $n = 2$. Assumindo verdadeira para $n-1$ isto é,

$$\begin{aligned}
A(f^{n-1}, T, J) &= \prod_{k=0}^{n-2} A(f, f^k(T), f^k(J)) \text{ temos que} \\
A(f^n, T, J) &= \frac{A(f^n(T), f^n(J))}{A(T,J)} = \frac{A(f^n(T), f^n(J))}{A(f^{n-1}(T), f^{n-1}(J))} \cdot \frac{A(f^{n-1}(T), f^{n-1}(J))}{A(T,J)} \\
&= A(f, f^{n-1}(T), f^{n-1}(J)) \cdot A(f^{n-1}, T, J) \\
&= A(f, f^{n-1}(T), f^{n-1}(J)) \prod_{k=0}^{n-2} A(f, f^k(T), f^k(J)) = \prod_{k=0}^{n-1} A(f, f^k(T), f^k(J))
\end{aligned}$$

Para provar a propriedade 2 usaremos a seguinte igualdade $|Df(x)| = \lim_{J \to x} \frac{|f(J)|}{|J|}$

$$\text{Segue que } A(f,T,J) = \frac{A(f(T), f(J))}{A(T,J)} = \frac{|f(T)||f(J)|}{|f(L) \bigcup f(J)||f(R) \bigcup f(J)|} \cdot \frac{|L \bigcup J||R \bigcup J|}{|T||J|}$$

Fazendo J convergir para x temos $\lim_{J \to x} A(f,T,J) = \frac{|f(T)|}{|T|} \frac{|L|}{|f(L)|} \frac{|R|}{|f(R)|} \cdot |Df(x)|$ e desta igualdade segue o resultado.

A demonstração da propriedade 3 é análoga ao anterior. Observemos que

$$|Df(a)| = \lim_{J \to T} \frac{|f(L)|}{|L|} \text{ e } |Df(b)| = \lim_{J \to T} \frac{|f(R)|}{|R|}$$

Dado $x \in M$ o conjunto *ω-limite* de x é o conjunto definido por $\omega(x) = \{y \in M; \exists n_i \to \infty$ com $f^{n_i}(x) \to y\}$

É verdadeiro afirmar se f é continua e $y \in \omega(x)$ então $\omega(y) \subset \omega(x)$ em conseqüência desta afirmação se $a \in \omega(b)$ e $b \in \omega(c)$ então $a \in \omega(c)$.

Definiremos a seguir a derivada schwarziana. Dada uma aplicação num intervalo muitos resultados são obtidos quando este operador só assume valores negativos .

Seja $f : M \longrightarrow M$ uma aplicação C^3 e $Df(x) \neq 0$ a derivada schwarziana de f em x é definida por

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2$$

Proposição 1.2. *São válidas as seguintes propriedades*

1. $S(fog)(x) = Sf(g(x)).(g'(x))^2 + Sg(x)$

2. $Sf^n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} Sf(f^i(x))(Df^i(x))^2$

3. *Seja $f : M \longrightarrow M$ uma aplicação C^3 com todos pontos críticos não-flat, existe $C > 0$ tal que $Sf(x) < C$ para todo $x \in M$.*

Prova. Aplicando a regra da cadeia temos que

$$\begin{aligned}
(fog)'(x) &= f'(g(x))g'(x) \\
(fog)''(x) &= f''(g(x))(g'(x))^2 + f'(g(x))g''(x) \\
(fog)'''(x) &= f'''(g(x))(g'(x))^3 + 3f''(g(x))g'(x)g''(x) + f'(g(x))g'''(x)
\end{aligned}$$

usando essas igualdades

$$\begin{aligned}
\frac{(fog)'''(x)}{(fog)'(x)} &= \frac{f'''(g(x))g'(x)}{f'(g(x))} + \frac{3f''(g(x))g''(x)}{f'(g(x))} + \frac{g'''(x)}{g'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{(fog)''(x)}{fog'(x)}\right)^2 \\
&= \frac{3}{2}\left(\frac{f''(g(x))}{f'(g(x))}\right)^2 (g'(x))^2 - \frac{3f''(g(x))g''(x)}{f'(g(x))} - \frac{3}{2}\left(\frac{g''(x)}{g'(x)}\right)^2 \\
\text{Logo } S(fog)(x) &= \frac{(fog)'''(x)}{(fog)'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{(fog)''(x)}{(fog)'(x)}\right)^2 \\
&= \left(\frac{f'''(g(x))}{f'(g(x))} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(g(x))}{f'(g(x))}\right)^2\right)(g'(x))^2 + \frac{g'''(x)}{g'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{g''(x)}{g'(x)}\right)^2 \\
&= Sf(g(x)).(g'(x))^2 + Sg(x)
\end{aligned}$$

Uma conseqüência imediata desta propriedade é que a composição de funções com derivadas schwarzianas negativas também tem derivada schwarziana negativa. A propriedade 2 segue da propriedade 1.

Vamos provar a propriedade 3. Tomemos para cada ponto crítico c_i de f uma vizinhança U_i de forma que

$$f(x) = S(x-c_i)^{\alpha} + f(c_i), \forall x \in U_i \text{ pois } c_i \text{ é não flat } \forall i \leq d$$

Seja $U = \bigcup_{i=1}^{d} U_i$. Temos que Sf é contínua em $M \backslash U$ e por este ser um compacto, Sf assume valor máximo para algum ponto. Logo, $\exists K > 0$ tal que $Sf(x) < K$, $\forall x \in M \backslash U$.

Seja $x \in U \backslash Cr$, onde $Cr = \{c_1, ..., c_d\}$.

Temos que

$$\begin{aligned}
f'(x) &= S\alpha_i(x-c_i)^{\alpha_i - 1} \\
f''(x) &= S\alpha_i(\alpha_i - 1)(x-c_i)^{\alpha_i - 2} \\
f'''(x) &= S\alpha_i(\alpha_i - 1)(\alpha_i - 2)(x-c_i)^{\alpha_i - 3} \\
\text{e } Sf(x) &= \frac{-\alpha_i^2 + 1}{2(x-c_i)^2}
\end{aligned}$$

como $\alpha_i \geq 2$, $-\alpha_i^2 + 1 < 0$ logo $Sf(x) < 0$

$\square$

Precisamos também do conceito de renormalização. Dizemos que f é renormalizável se existe um intervalo $I \subsetneq M$ tal que o domínio da primeira aplicação de retorno a I é o próprio I. Neste caso, dizemos que I é um intervalo de renormalização de f. A aplicação f será chamada de infinitamente renormalizável e denotaremos por ∞ -renormalizável, se existir uma coleção infinita de intervalos de renormalização distintos.

Encerrando este capítulo, vamos falar sobre a existência de intervalos errantes.

Teorema 1.1. *Seja $f : M \to M$ uma aplicação C^2 com todos os ponto críticos não-flat. Então f não tem intervalos errantes.*

Este teorema está demonstrado em [dM-vS]. O mesmo garante que as aplicações que fazem parte de nosso estudo não possuem intervalos errantes e isto implica o princípio da contração isto é, para cada $\eta_1 > 0$ existe $\eta_2 \in (0, \eta_1)$ tal que se U é um intervalo que não se acumula sobre uma órbita periódica atratora e $|U| > \eta_1$ então $|f^i(U)| > \eta_2$ para todo $i \geq 0$.

Capítulo 2

Derivada Schwarziana e Controle de Distorção

Neste Capítulo estudaremos o comportamento da derivada schwarziana de f. Veremos que mesmo que $Sf(x)$ não seja negativa para todo x, esta condição se verifica para altos iterados de f. Kozlovski mostrou este fato para aplicações unimodais, vide [K]. Com o resultado a respeito de derivada schwarziana da f mostraremos uma proposição que garante distorção limitada da primeira aplicação de entrada em uma vizinhança dos pontos críticos.

Começaremos mostrando uma versão para o princípio de Koebe com vantagens em relação ao atual, não exigindo que $T_0, \ldots, f^n(T_0)$ sejam disjuntos dois a dois ou que $f^n|_{T_0}$ seja um difeomorfismo.

Proposição 2.1. *Sejam f uma função C^2, n um inteiro e J um intervalo tal que $f^n|_J$ é um difeomorfismo e $\sum_{i=0}^{n-1} |f^i(J)| < S$, $S > 0$. Seja T uma δ-vizinhança de $f^n(J)$ para algum $\delta > 0$ e $T_0, \ldots, T_n := T$ o pullback de T por $J, \ldots, f^n(J)$. Então existe uma constante $K > 0$ e uma função $O(\epsilon)$ com $O(\epsilon) \to 0$ quando $\epsilon \downarrow 0$ sendo válidas as seguintes afirmações:*

1. *Seja $\mathcal{N} \subset \{0, \ldots, n-1\}$ o conjunto dos inteiros i para os quais T_i contém um ponto crítico e seja $\epsilon = \max\{|T_i|\}$. Então, para cada $x, y \in J$*

$$\frac{|Df^n(x)|}{|Df^n(y)|} \leq \exp\left(3O(\epsilon) \sum_{i=0}^{n-1} |f^i(J)|\right) \left(\frac{\delta+1}{\delta}\right)^2 \exp\left(2K \sum_{m \in \mathcal{N}} \frac{|f^m(J)|}{d(f^m(J), Cr)}\right)$$

Se $\mathcal{N} = \emptyset$ *tome*

$$\sum_{m\in\mathcal{N}} \frac{|f^m(J)|}{d(f^m(J), Cr)} = 0$$

2. Se $f^n|_{T_0}$ *é um difeomorfismo, então* T_0 *é um* δ*'-vizinhança de* J. δ*' dependendo de* ϵ *e* $\sum_{i=0}^{n-1} |f^i(J)|$.

Prova. Tomemos um ponto x no interior de J. O ponto x divide o mesmo em dois intervalos J^- e J^+. Seja $J_i = f^i(J)$, $J_i^+ = f^i(J^+)$ e $J_i^- = f^i(J^-)$. $f^i(x)$ divide o intervalo T_i também em dois, $T_i^- \supset J_i^-$ e $T_i^+ \supset J_i^+$. Afirmamos que

$$\frac{|f^n(J^-)|}{|J^-|} \geq \frac{|f^n(J)|}{|J|} \text{ ou } \frac{|f^n(J^+)|}{|J^+|} \geq \frac{|f^n(J)|}{|J|}$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que $\frac{|f^n(J^+)|}{|J^+|} \geq \frac{|f^n(J^-)|}{|J^-|}$, ou seja$|f^n(J^-)| \leq \frac{|J^-|}{|J^+|}|f^n(J^+)|$ Sendo assim

$$\frac{|f^n(J)|}{|J|} = \frac{|f^n(J^+)| + |f^n(J^-)|}{|J^+| + |J^-|} \leq \frac{|f^n(J^+)| + \frac{J^-}{J^+}|f^n(J^+)|}{|J^+| + |J^-|} = \frac{|f^n(J^+)|}{|J^+|}$$

o que mostra a afirmação.

Podemos supor para a prova da proposição que $\frac{|f^n(J^+)|}{|J^+|} \geq \frac{|f^n(J)|}{|J|}$ e $\frac{|f^n(J^-)|}{|J^-|} \leq \frac{|f^n(J)|}{|J|}$.

Sejam $n_s < \cdots < n_1 < n_0 := n$ inteiros tais que $T_{n_i}^-$ contém um ponto crítico. Fixemos $i \in \{1, ..., s\}$ e tomemos $R = J_{n_i+1}^+$, $L = T_{n_i+1}^-$, $J' = f^{n_i+1}(x)$ e $T' = L \bigcup J' \bigcup R$.

Usando a definição de cross-ratio temos

$$A(f^{n_{i-1}-n_i-1}, T', J') = \prod_{k=0}^{n_{i-1}-n_i-2} A(f, f^k(T'), f^k(J')).$$

É importante observar que $f^{n_{i-1}-n_i-1}|_{T'}$ é um difeomorfismo estando o cross-ratio bem definido.

Da desigualdade $A(f, T', J') \geq \exp\big(-|R|O(|L|)\big)$ (vide [dM-vS]) temos

$$\begin{aligned} A(f^{n_{i-1}-n_i-1}, T', J') &\geq \textstyle\prod_{k=0}^{n_{i-1}-n_i-2} \exp\big(-|f^k(R)|O(|f^k(L)|)\big) \\ &= \exp\Bigg(\sum_{k=0}^{n_{i-1}-n_i-2} -|f^k(R)|O(|f^k(L)|)\Bigg) \end{aligned}$$

Como $|f^k(L)| < |T_{k+n_i+1}| \leq \epsilon$, $O(|f^k(L)|) \leq O(\epsilon)$. Temos também que $|f^k(R)| < |f^k(J_{n_i+1})|$ e observando que o expoente é um número negativo segue que

$$\begin{aligned}
A(f^{n_{i-1}-n_i-1}, T', J') &\geq \exp\Bigg(\sum_{k=0}^{n_{i-1}-n_i-2} -|f^k(R)|O(|f^k(L)|)\Bigg) \\
&\geq \exp\Bigg(-O(\epsilon)\sum_{k=0}^{n_{i-1}-n_i-2} |f^k(J_{n_i+1})|\Bigg) \\
&\geq \exp\Bigg(-O(\epsilon)\sum_{k=0}^{n_{i-1}-n_i-1} |f^k(J_{n_i+1})|\Bigg) \\
&= \exp\Bigg(-O(\epsilon)\sum_{k=n_i+1}^{n_{i-1}} |f^k(J)|\Bigg)
\end{aligned}$$

Definindo $C_o(a,b) = \exp\Bigg(-O(\epsilon)\sum_{k=a+1}^{b} |f^k(J)|\Bigg)$ temos $A(f^{n_{i-1}-n_i-1}, T', J') \geq C_o(n_i, n_{i-1})$. Usando a propriedade de cross-ratio temos também que

$$|Df^{n_{i-1}-n_i-1}(f^{n_i+1}(x))| = A(f^{n_{i-1}-n_i-1}, T', J')\frac{|T'||f^{n_{i-1}-n_i-1}(R)||f^{n_{i-1}-n_i-1}(L)|}{|L||R||f^{n_{i-1}-n_i-1}(T')|}$$

como $|T'| \geq |L|$

$$\begin{aligned}
|Df^{n_{i-1}-n_i-1}(f^{n_i+1}(x))| &\geq C_o(n_i, n_{i-1})\frac{|f^{n_{i-1}-n_i-1}(R)||f^{n_{i-1}-n_i-1}(L)|}{|R||f^{n_{i-1}-n_i-1}(T')|} \\
&= C_o(n_i, n_{i-1})\frac{|J^+_{n_{i-1}}||T^-_{n_{i-1}}|}{|J^+_{n_i+1}||T^-_{n_{i-1}}\bigcup J^+_{n_{i-1}}|} \\
&= C_o(n_i, n_{i-1})\frac{|f^{n_{i-1}}(J^+)||T^-_{n_{i-1}}|}{|f^{n_i+1}(J^+)||T^-_{n_{i-1}}\bigcup J^+_{n_{i-1}}|}
\end{aligned}$$

Como todos os pontos críticos de f são não-flat, existe uma constante universal $K_2 > 0$ tal que

$$|Df(f^{n_i}(x))| \geq \frac{|f^{n_i+1}(J^+)|}{|f^{n_i}(J^+)|}\exp\Bigg(-K_2\frac{|J_{n_i}|}{d(J_{n_i}, Cr)}\Bigg)$$

Também é válida a seguinte desigualdade

$$\frac{|T^-_{n_{i-1}}|}{|T^-_{n_{i-1}}\bigcup J^+_{n_{i-1}}|} \geq \frac{d(J_{n_{i-1}}, Cr)}{d(J_{n_{i-1}}, Cr) - |J_{n_{i-1}}|} \geq \exp\Bigg(-\frac{|J_{n_{i-1}}|}{d(J_{n_{i-1}}, Cr)}\Bigg)$$

Usando as desigualdades e a regra da cadeia temos

$$\begin{aligned}
|Df^n(x)| &= |Df^{n-n_1-1}(f^{n_1+1}(x))||Df(f^{n_1}(x))||Df^{n_1-n_2-1}(f^{n_2+1}(x))||Df(f^{n_2}(x))| \\
&\quad \cdots |Df(f^{n_s}(x))||Df^{n_s}(x)| \\
&\geq C_o(n_1,n)\frac{|f^n(J^+)||T_n^-|}{|f^{n_1+1}(J^+)||T_n^- \bigcup J_n^+|}\frac{|f^{n_1+1}(J^+)|}{|f^{n_1}(J^+)|}\exp\left(-K_2\frac{|J_{n_1}|}{d(J_{n_1},Cr)}\right) \\
&\quad C_o(n_2,n_1)\frac{|f^{n_1}(J^+)||T_{n_1}^-|}{|f^{n_2+1}(J^+)||T_{n_1}^- \bigcup J_{n_1}^+|}\frac{|f^{n_2+1}(J^+)|}{|f^{n_2}(J^+)|}\exp\left(-K_2\frac{|J_{n_2}|}{d(J_{n_2},Cr)}\right) \\
&\quad \cdots \frac{|f^{n_s+1}(J^+)|}{|f^{n_s}(J^+)|}\exp\left(-K_2\frac{|J_{n_s}|}{d(J_{n_s},Cr)}\right)C_o(0,n_s)\frac{|f^{n_s}(J^+)||T_{n_s}^-|}{|J^+||T_{n_s}^- \bigcup J_{n_s}^+|} \\
&\geq C_0(0,n)\frac{|f^n(J^+)|}{|J^+|}\exp\left(-K_2\frac{|J_{n_1}|}{d(J_{n_1},Cr)}\right)\exp\left(-K_2\frac{|J_{n_2}|}{d(J_{n_2},Cr)}\right) \\
&\quad \cdots \exp\left(-K_2\frac{|J_{n_s}|}{d(J_{n_s},Cr)}\right)\frac{|T_n^-|}{|T_n^- \bigcup J_n^+|}\frac{|T_{n_1}^-|}{|T_{n_1}^- \bigcup J_{n_1}^+|}\cdots\frac{|T_{n_s}^-|}{|T_{n_s}^- \bigcup J_{n_s}^+|}
\end{aligned}$$

Sendo

$$|Df^n(x)| \geq C_0(0,n)\frac{|f^n(J^+)|}{|J^+|}\frac{|T_n^-|}{|T_n^- \bigcup J_n^+|}\cdot\prod_{i=1}^{s}\exp\left(-(K_2+1)\frac{|J_{n_i}|}{d(J_{n_i},Cr)}\right)$$

Observe que

$$\frac{|T_n^-|}{|T_n^- \bigcup J_n^+|} = \frac{|T_n^- \backslash J_n^-| + |J_n^-|}{|T_n^- \backslash J_n^-| + |J_n|} \geq \frac{|T_n^- \backslash J_n^-|}{|T_n^- \backslash J_n^-| + |J_n|}$$

Como T_n é uma δ-vizinhança de J_n temos que

$$|J_n| \leq \frac{|T_n^- \backslash J_n^-|}{\delta}$$

e daí

$$\frac{|T_n^-|}{|T_n^- \bigcup J_n^+|} \geq \frac{|T_n^- \backslash J_n^-|}{|T_n^- \backslash J_n^-| + \frac{|T_n^- \backslash J_n^-|}{\delta}} = \frac{\delta}{1+\delta}$$

Como $\frac{|f^n(J^+)|}{|J^+|} \geq \frac{|f^n(J)|}{|J|}$ concluímos que

$$|Df^n(x)| \geq C_0(0,n)\frac{|f^n(J)|}{|J|}\frac{\delta}{1+\delta}\cdot\prod_{i=1}^{s}\exp\left(-(K)\frac{|J_{n_i}|}{d(J_{n_i},Cr)}\right), \text{onde} K = K_2+1$$

$$|Df^n(x)| \geq C_0(0,n)\frac{|f^n(J)|}{|J|}\frac{\delta}{1+\delta}\exp\left(-K\sum_{m\in\mathcal{N}}\frac{|J_{n_i}|}{d(J_{n_i},Cr)}\right)$$

Para chegarmos ao resultado, precisamos de uma desigualdade contrária para $|Df^n(x)|$.

Tomando uma intervalo $V \subset J^-$ temos.

$$\begin{aligned}
B(f^n, J^-, V) &= \textstyle\prod_{k=0}^{n-1} B(f, f^k(J^-), f^k(V)) \geq \prod_{k=0}^{n-1} \exp(-|f^k(J^-)|O(|f^k(J^-)|)) \\
&\geq \textstyle\prod_{k=0}^{n-1} \exp(-|f^k(J)|O(|f^k(J)|)) \geq \prod_{k=0}^{n-1} \exp(-O(\epsilon)|f^k(J)|) \\
&= \exp\left(-O(\epsilon)\sum_{k=0}^{n-1}|f^k(J)|\right) = C_0(0,n) \\
B(f^n, J^-, V) &\geq C_0(0,n)
\end{aligned}$$

Fazendo V convergir para J^- temos

$$\begin{aligned}
|Df^n(x)| &= \frac{1}{\lim\limits_{V \to J^-} B(f^n, J^-, V)} \left(\frac{|f^n(J^-)|}{|J^-|}\right)^2 \frac{1}{|Df^n(a)|} \\
&\leq \frac{1}{C_0(0,n)} \left(\frac{|f^n(J^-)|}{|J^-|}\right)^2 \frac{1}{|Df^n(a)|}, \text{ onde } a \text{ é o ponto da fronteira de } J^-
\end{aligned}$$

que não pertence a J. Logo,

$$|Df^n(x)| \leq \frac{1}{C_0(0,n)} \left(\frac{|f^n(J)|}{|J|}\right)^2 \frac{1}{|Df^n(a)|}$$

Usando a desigualdade da primeira parte temos

$$|Df^n(a)| \geq C_0(0,n) \frac{|f^n(J)|}{|J|} \frac{\delta}{1+\delta} \exp\left(-(K) \sum_{m \in \mathcal{N}} \frac{|J_{n_i}|}{d(J_{n_i}, Cr)}\right)$$

Sendo assim

$$|Df^n(x)| \leq \frac{1}{(C_0(0,n))^2} \frac{|f^n(J)|}{|J|} \frac{\delta+1}{\delta} \exp\left(K \sum_{m \in \mathcal{N}} \frac{|f^m(J)|}{d(f^m(J), Cr)}\right)$$

Usando as desigualdades obtidas temos que para quaisquer $x, y \in J$

$$\begin{aligned}
\frac{|Df^n(x)|}{|Df^n(y)|} &\leq \frac{\frac{1}{(C_0(0,n))^2} \frac{|f^n(J)|}{|J|} \frac{\delta+1}{\delta} \exp\left(K \sum_{m \in \mathcal{N}} \frac{|f^m(J)|}{d(f^m(J), Cr)}\right)}{C_0(0,n) \frac{|f^n(J)|}{|J|} \frac{\delta}{1+\delta} \exp\left(-K \sum_{m \in \mathcal{N}} \frac{|J_{n_i}|}{d(J_{n_i}, Cr)}\right)} \\
&= \frac{1}{(C_0(0,n))^3} \left(\frac{\delta+1}{\delta}\right)^2 \exp\left(2K \sum_{m \in \mathcal{N}} \frac{|f^m(J)|}{d(f^m(J), Cr)}\right) \\
&= \exp\left(3O(\epsilon) \sum_{i=0}^{n-1} |f^i(J)|\right) \left(\frac{\delta+1}{\delta}\right)^2 \exp\left(2K \sum_{m \in \mathcal{N}} \frac{|f^m(J)|}{d(f^m(J), Cr)}\right)
\end{aligned}$$

Para a prova da segunda parte da proposição tomemos $L, J', R \subset T_0$ tais que $L \bigcup J' = J$, $|f^n(L)| = |f^n(J')|$ e $f^n(R)$ é uma das componentes de $f^n(T_0 \backslash J)$. A figura dá uma idéia desta configuração.

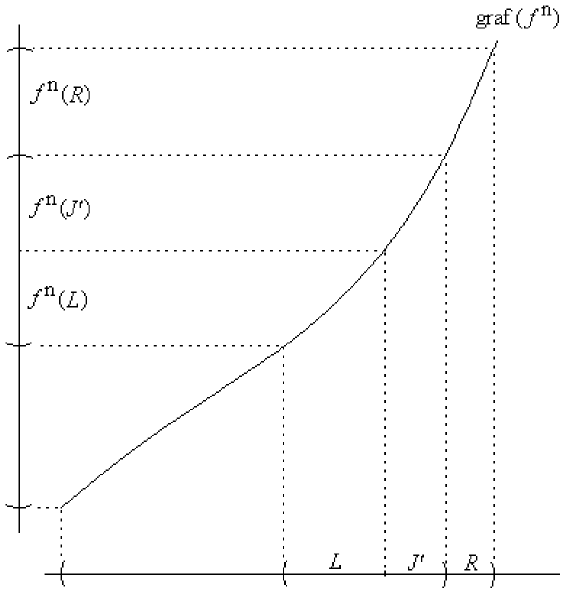

Figura 2.1: Intervalos L, J' e R quando $f^n|_{T_0}$ é um difeomorfismo

$$\begin{aligned}
\frac{|R\bigcup J'|}{|J'|} &\geq \frac{|L\bigcup J'|}{|J'|}\frac{|R\bigcup J'|}{|T'|} = \frac{1}{A(T',J')} \\
&= \frac{A(f^n,T',J')}{A(f^n(T'),f^n(J'))} \\
&\geq C_0(0,n).\frac{1}{A(f^n(T'),f^n(J'))}
\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
A(f^n(T'),f^n(J')) &= \frac{|f^n(T')||f^n(J')|}{|f^n(L)\bigcup f^n(J')||f^n(R)\bigcup f^n(J')|} \\
&= \frac{|f^n(T')||f^n(J')|}{2|f^n(J')|(|f^n(R)|+|f^n(J')|)} \\
&= \frac{|f^n(R)|+2|f^n(J')|}{2(|f^n(R)|+|f^n(J')|)} \\
&= \frac{1}{2}+\frac{|f^n(J')|}{2(|f^n(R)|+|f^n(J')|)}
\end{aligned}$$

Como $f^n|_{T_0}$ é um difeomorfismo, $T = f^n(T_0)$e este é uma δ-vizinhança de $f^n(J)$. Sendo assim

$$|f^n(R)| \geq \delta|f^n(J)| = 2\delta|f^n(J')|$$

$$\text{e } A(f^n(T'),f^n(J')) = \frac{1}{2}+\frac{|f^n(J')|}{2(|f^n(R)|+|f^n(J')|)} \leq \frac{1}{2}+\frac{|f^n(J')|}{2(2\delta|f^n(J')|+|f^n(J')|)}$$

$$= \frac{\delta+1}{2\delta+1}$$

Com esta desigualdade concluímos que

$$\begin{aligned}\frac{|R\bigcup J'|}{|J'|} &\geq C_0(0,n).\frac{1}{A(f^n(T'),f^n(J'))} \geq C_0(0,n).\frac{2\delta+1}{\delta+1}\\ \frac{|R|}{|J'|} &\geq C_0(0,n).\frac{2\delta+1}{\delta+1}-1\end{aligned}$$

Por outro lado, $\exists b \in J$ tal que $|f^n(L\bigcup J')| = |Df^n(b)||L\bigcup J'|$ e $\exists a \in \bar{J}$ tal que $|Df^n(a)|$ é o maior valor que a derivada de f^n assume, logo $|f^n(J')| \leq |Df^n(a)||J'|$. Desta forma

$$\frac{|L\bigcup J'|}{|J'|} \leq \frac{\dfrac{|f^n(L\bigcup J')|}{|Df^n(b)|}}{\dfrac{|f^n(J')|}{|Df^n(a)|}} = \frac{|f^n(L\bigcup J')|}{|f^n(J')|}\frac{|Df^n(b)|}{|Df^n(a)|} \leq \frac{2}{\Big(C_0(0,n)\Big)^3}\left(\frac{\delta+1}{\delta}\right)^2$$

logo,

$$\frac{|R|}{|L\bigcup J'|} \geq \frac{C_0(0,n).\dfrac{2\delta+1}{\delta+1}-1}{\dfrac{2}{\big(C_0(0,n)\big)^3}\left(\dfrac{\delta+1}{\delta}\right)^2} := \delta'$$

Daí, concluímos que T_0 é uma δ'-vizinhança de J, onde δ' depende de δ e de $O(\epsilon)\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}|f^i(J)|$.

$\square$

Proposição 2.2. *Seja f uma aplicação C^3. Para cada inteiro N, cada $\xi > 0, \delta > 0, S > 0$ existe $\tau > 0$ com a seguinte propriedade. Seja n um inteiro e J um intervalo tal que $\displaystyle\sum_{0\leq i<n}|f^i(J)| \leq S$. Seja T_n uma δ-vizinhança de $f^n(J)$ e seja $T_0, ..., T_n$ o pullback com $T_i \supset f^i(J)$. Seja $\mathcal{N} \subset \{0, ..., n-1\}$ o conjunto formado pelos inteiros para os quais T_i contém um ponto crítico. Assuma que*

1. *$\sharp\mathcal{N} \leq N$;*
2. *$|f^n(J)| \geq \xi d(f^n(J), Cr)$;*
3. *$|f^n(J)| \leq \tau$.*

Então, $Sf^{n+1}(x) < 0, \forall\, x \in J,\ Df^{n+1}(x) \neq 0$

Prova. Como f é C^3 e todos seus pontos críticos são não-flat, existe $C > 0$ tal que $Sf(x) < C$ para todo x. Existe também uma vizinhança U de Cr e uma constante $C' > 0$ tal que

$$Sf(y) < -\frac{C'}{[d(y, Cr)]^2}, \text{ para todo } y \in U.$$

De fato, na vizinhança de um ponto crítico c_i a derivada schwarziana é dada por

$$Sf(y) = \frac{-\beta_i^2 + 1}{2(y - c_i)^2}$$

Fazendo $\beta = min\{\beta_i | 1 \leq i \leq d\}$ e observando que $(y - c_i)^2 = [d(y, Cr)]^2$ temos

$$Sf(y) = \frac{-\beta_i^2 + 1}{2(y - c_i)^2} \leq \frac{-\beta^2 + 1}{2[d(y, Cr)]^2} = -\frac{\beta^2 - 1}{2[d(y, Cr)]^2}$$

Tomando $C' = \dfrac{\beta^2 - 1}{2}$ temos que $C' > 0$ pois $\beta \geq 2$ e

$$Sf(y) < -\frac{C'}{[d(y, Cr)]^2}$$

Sejam $n_s < ... < n_0 = n$ inteiros tais que $|f^{n_i}(J)| > \xi d(f^{n_i}, Cr), \forall i \in \{0, .., s\}$. Definidos desta forma, os intervalos $f^{n_i}(J)$ estão próximos de um ponto crítico e nada impede que alguns destes intervalos contenham um ponto crítico.

Afirmação. Fixando i, $Sf^{n'}(x) < 0$ para $\forall x \in f^{n_{i+1}+1}(J)$ onde $n' = n_i - n_{i+1}$.

Notemos que, conforme ilustrado na figura a seguir, a $f^{n'}(f^{n_{i+1}+1}(J)) \subset (f^{n_i+1}(J))$

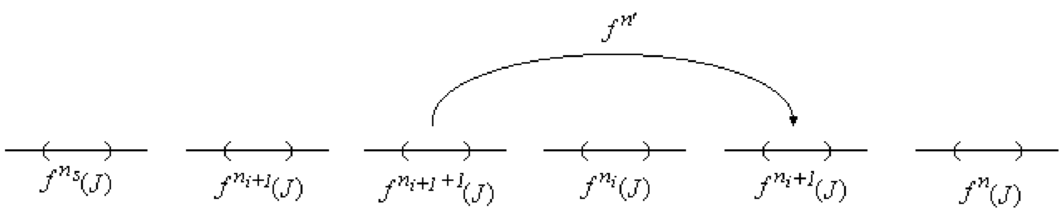

Figura 2.2: $f^{n'}(f^{n_{i+1}+1}(J)) \subset (f^{n_i+1}(J))$

A derivada schwarziana de uma função composta é dada por

$$\begin{aligned} Sf^{n'}(x) &= \sum_{j=0}^{n'-1} Sf(f^j(x))(Df^j(x))^2 \\ &= |Df^{n'-1}(x)|^2 Sf(f^{n'-1}(x)) + \sum_{j=0}^{n'-2} Sf(f^j(x))(Df^j(x))^2 \\ &= |Df^{n'-1}(x)|^2 \Bigg(Sf(f^{n'-1}(x)) + \frac{1}{|Df^{n'-1}(x)|^2} \sum_{j=0}^{n'-2} Sf(f^j(x))(Df^j(x))^2 \Bigg) \end{aligned}$$

Notemos que

$$Df^{n'-1}(x) = Df^{n'-1-j+j}(x) = Df^{n'-1-j}(f^j(x))Df^j(x), \text{Logo}$$

$$\begin{aligned} Sf^{n'}(x) &= |Df^{n'-1}(x)|^2 \Bigg(Sf(f^{n'-1}(x)) + \sum_{j=0}^{n'-2} Sf(f^j(x)) \bigg(\frac{Df^j(x)}{Df^{n'-1-j}(f^j(x))Df^j(x)} \bigg)^2 \Bigg) \\ &= |Df^{n'-1}(x)|^2 \Bigg(Sf(f^{n'-1}(x)) + \sum_{j=0}^{n'-2} \frac{Sf(f^j(x))}{\big(Df^{n'-1-j}(f^j(x))\big)^2} \Bigg) \\ &\le |Df^{n'-1}(x)|^2 \Bigg(\frac{-C'}{\big(d(f^{n'-1}(x), Cr)\big)^2} + \sum_{j=0}^{n'-2} \frac{C}{\big(Df^{n'-1-j}(f^j(x))\big)^2} \Bigg) \end{aligned}$$

Temos também que

$$d(f^{n'-1}(x), Cr) \le d(f^{n_i}(J), Cr) + |f^{n_i}(J)| \le \frac{\xi+1}{\xi}|f^{n_i}(J)|$$

Usando esta desigualdade

$$\frac{-C'}{\big[d(f^{n'-1}(x), Cr)\big]^2} \le \frac{-C'\xi^2}{(\xi+1)^2|f^{n_i}(J)|^2}$$

Por outro lado, da proposição anterior segue que

$$\begin{aligned} |Df^{n'-1-j}(f^j(x))| &\ge C_0(0, n'-1-j)\frac{|f^{n_i}(J)|}{|f^{n_{i+1}+1+j}(J)|}\frac{\delta}{1+\delta}\exp\Bigg(-(K)\sum_{m\in\mathcal{N}}\frac{|J_m|}{d(J_m, Cr)}\Bigg) \\ &= K'\frac{|f^{n_i}(J)|}{|f^{n_{i+1}+1+j}(J)|} \end{aligned}$$

Logo

$$\sum_{j=0}^{n'-2} \frac{C}{\big(Df^{n'-1-j}(f^j(x))\big)^2} \le \sum_{j=0}^{n'-2} \frac{C}{(K')^2}\bigg(\frac{|f^{n_{i+1}+1+j}(J)|}{|f^{n_i}(J)|}\bigg)^2 = \frac{C''}{|f^{n_i}(J)|^2}\sum_{n_{i+1}+1}^{n_i-1}|f^j(J)|^2$$

Segue que

$$
\begin{aligned}
Sf^{n'}(x) &\leq |Df^{n'-1}(x)|^2\left(\frac{-C'}{(d(f^{n'-1}(x),Cr))^2}+\sum_{j=0}^{n'-2}\frac{C}{\left(Df^{n'-1-j}(f^j(x))\right)^2}\right)\\
&\leq |Df^{n'-1}(x)|^2\left(\frac{-C'\xi^2}{(\xi+1)^2|f^{n_i}(J)|^2}+\frac{C''}{|f^{n_i}(J)|^2}\sum_{j=n_{i+1}+1}^{n_i-1}|f^j(J)|\right)\\
&= \frac{|Df^{n'-1}(x)|^2}{|f^{n_i}(J)|^2}\left(\frac{-C'\xi^2}{(\xi+1)^2}+C''\sum_{j=n_{i+1}+1}^{n_i-1}|f^j(J)|^2\right)
\end{aligned}
$$

Onde a constante C'' depende da cardinalidade de N, C, δ e S. Como $|f^n(J)|$ é controlado por τ, pelo princípio da contração, $|f^i(J)|$ é suficientemente pequeno, e $\sum\limits_{0\leq i<n}|f^i(J)|$ é limitado. Logo a parcela positiva da expressão acima pode ser controlada e $Sf^{n'}(x)<0$, $\forall x\in f^{n_{i+1}+1}(J)$

Para chegarmos em nosso resultado, notemos que

$$f^{n+1}(x)=f^{n-n_1}\circ f^{n_1-n_2}\circ ...\circ f^{n_s+1}(x),\forall x\in J.$$

Como a derivada schwarziana da composição de funções com schwarziana negativa também é negativa temos

$$Sf^{n+1}(x)<0,\forall x\in J$$

$\square$

Para o enunciado do teorema 2.1 precisamos das definições a seguir.

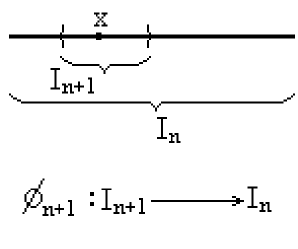

Figura 2.3: ϕ_{n+1} é a primeira aplicação de retorno a I_n restrita a I_{n+1}

Dizemos que x é um ponto recorrente se para qualquer vizinhança V_x de x existe $i>0$ talque $f^i(x)\in V_x$. Seja I um intervalo nice e $x\in I$. Sejam $I_0=I$ e ϕ_1 a primeira aplicação de retorno a I_0 restrita a I_1 domínio de retorno contendo x. Desta forma, definimos uma seqüência de intervalos contendo x. Dizemos que ϕ_{n+1} é não-central se somente se $\phi_{n+1}(x) \notin I_{n+1}$. Se x não é recorrente então existe n_0 tal que $I_n = \emptyset$ para todo $n > n_0$.

Teorema 2.1. *Seja $f : M \longrightarrow M$ uma aplicação $C^{1+zygmund}$ com todos pontos críticos não-flat. Assumindo que x é um ponto recorrente de f e $\{I_n\}$ é uma seqüência de intervalos conforme a definição anterior, valem as seguintes afirmações:*

1.Para cada $k > 0$ existe $\xi(k) > 0$ tal que se $\phi_n : I_n \longrightarrow I_{n-1}$ é não-central, então o intervalo I_{n+k+1} é $\xi(k)$-bem posto em I_{n+k}.

2.Para cada $\xi > 0$, existe $\xi' > 0$ tal que se I_{n+1} é ξ-bem posto em I_n todos os domínios da primeira aplicação de retorno a I_{n+1} são ξ'-bem postos em I_{n+1}. $\xi' \to \infty$ quando $\xi \to \infty$

Este teorema está provado em [vS-V] (vide teorema A).

Dizemos que uma aplicação tem ”Real Bounds”quando esta goza da propriedade dois do teorema 2.1.

Definição 2.1. *Sejam $I_k \subset M$ e $N = \{x \in M | \vartheta^+(f(x)) \bigcap I_k \neq \emptyset\}$ definimos a primeira aplicação de entrada em I_k, $\varphi : N \longrightarrow I_k$, $\varphi(x) = f^i(x)$ onde $i = min\{n \in N | f^n(f(x)) \in I_k\}$*

Proposição 2.3. *Existe vizinhança U_i de Cr tal que sempre que $f^n(x) \in U_i$ para algum $x \in M$ e algum $n \geq 0$ então $Sf^{n+1}(x) < 0$.*

Prova. De acordo com o teorema 2.1, existe um intervalo nice I_k contendo c com a seguinte propriedade, se $D(I_k)$ é o domínio da primeira aplicação de entrada φ_{k+1} a I_k, então cada componente conexa de $D(I_k) \bigcap I_k$ é também componente conexa do domínio da primeira aplicação de retorno e é bem-posta em I_k. Façamos $\varphi = \varphi_{k+1}$ e para qualquer $y \in D(I_k)$ chamemos de $J(y)$ a componente de $D(I_k)$ contendo y. Seja $V = J(c)$ ou, no caso de c não recorrente, V uma vizinhança de c bem posta em I_k.

Tomemos $x \in D(I_k)$, n o menor inteiro positivo tal que $f^n(x) \in V$ e seja $i \geq 0$ menor inteiro tal que uma das situações acorra:

i) Um dos intervalos do pullback de $J(\varphi^i(x))$ ao longo de $\{x, f(x) ..., f^{s_i}(x)\}$ contém um ponto crítico onde s_i é tal que $\varphi^i = f^{s_i}$ na vizinhança de x ou ii)$\varphi^i(x) \in V$.

Notemos que uma das duas situações terá que ocorrer pois $f^n(x) \in V$, logo $\exists k > 0$ tal que $\varphi^k(x) = f^n(x)$.

Se i) vale façamos $U = J(\varphi^i(x))$ caso contrário ii) vale e seja $U = V$. Em ambos os casos, U é bem posto em I_k. Tomando $\tilde{n}$ e $\hat{n}$ tais que $\varphi^i = f^{\tilde{n}}$ e $\varphi^{i-1} = f^{\hat{n}}$ em uma vizinhança de x, notemos que $\hat{n} < \tilde{n} \leq n$. Sejam também $U_0, ..., U_{\tilde{n}}$ e $T_0, ..., T_{\tilde{n}}$ o pullback respectivamente de U e I_k ao longo de $\{x, ..., f^{\tilde{n}}(x)\}$ e n' o menor inteiro tal que $U_{n'}$ contém um ponto crítico de f, $\hat{n} < n' \leq \tilde{n}$. Pelo fato de i ser mínimo, nenhum dos intervalos $T_0, ..., T_{n'-1}$ contém um ponto crítico e $T_{\hat{n}}, ..., T_{n'-1}$ e $U_0, ..., U_{n'-1}$ são disjuntos dois a dois. Em particular, como U é bem posto em $T_{\tilde{n}} = I_k$, também $U_{n'}$ é bem posto em $T_{n'}$. Pela definição, $U_{n'}$ contém um ponto crítico e da proposição 1.2 segue que $Sf^{n'+1}(x) < 0$.

Se $n' = n$ então o resultado segue. Se $n' < n$, então definimos $x' = f^{n'+1}(x)$ e repetimos o mesmo argumento. Como a composição de aplicações com derivada schwarziana negativa também tem schwarziana negativa e a proposição está provada.

$\square$

Teorema 2.2. *Seja $\mathcal{R}$ uma classe de equivalência em $(Cr, \prec)$ e seja $\{c_1, ..., c_k\} = \mathcal{R}$ indexados de forma que se $c_i \prec c_j$ então $i < j$. Existe $\xi > 0$ tal que para qualquer $\epsilon > 0$ valem as seguintes afirmações:*

1. Existem intervalos nice, disjuntos dois a dois, $W_1, ..., W_k$ tais que $c_i \in W_i$, $i = 1, ..., k$, $|W_1| < \epsilon$, onde cada W_i, para $i > 0$ é um domínio da primeira aplicação de entrada ψ a W_1 e $orb^+(c) \bigcap W_1 = \emptyset$ qualquer ponto crítico $c \notin \mathcal{R}$

2. Se c_i é não recorrente então $orb^+(c_i) \bigcap W_i = \emptyset$. Se f é infinitamente renormalizável em c_1 então podemos tomar W_1 sendo um intervalo periódico. Se f é finitamente renormalizável em c_1 então podemos tomar W_1 tal que cada domínio de retorno a W_i, $i \geq 1$ é ξ-bem posto em W_i.

3. Seja $V_i \subset W_i$ intervalo maximal tal que $c_i \in V_i$ e $\psi(V_i) \subset W_i$ está contido em um domínio de retorno a W_1 contendo $\psi(c_i)$. Então a primeira aplicação de entrada a $\bigcup V_i$ é uma composição de no máximo $d-1$ aplicações do tipo $L \circ f$, onde L é um difeomorfismo de distorção limitada.

Prova. Se f é finitamente renormalizável em c_1, vamos considerar um intervalo nice W_1 suficientemente pequeno tal que não contenha intervalos periódicos, $orb^+(c)\bigcap W_1 = \emptyset$ para qualquer ponto crítico $c \notin \mathcal{R}$ e os domínios de retorno a W_1 são todos ξ-bem postos em W_1.

Seja W_i, $1 < i \leq k$, o domínio da primeira aplicação de entrada ψ a W_1 que contém o ponto crítico $c_i \in \mathcal{R}$. Seja s_i o menor inteiro positivo tal que $f^{s_i}(W_i) \subset W_1$ e $V_i \subset W_i$ o intervalo maximal tal que $c_i \in V_i$ e $f^{s_i}(V_i)$ está contido em um domínio de retorno J_i a W_1 ou seja $f^{s_i}(\partial V_i) \subset (\partial J_i)$.

Da forma como foi definido cada W_i, temos que $W_1, ..., W_k$ são dois a dois disjuntos. Pelo lema de Koebe V_i é bem posto em W_i. Por outro lado V_i e W_i são pullback de W_1.

Tomando $x \in M$ tal que existe um inteiro positivo t mínimo de forma que $f^t(x) \in \bigcup V_i$. Tomemos $V_{j_0} \subset W_{j_0}$ com $f^t(x) \in V_{j_0} \subset W_{j_0}$ e definamos a cadeia $\{\mathcal{V}_i\}_{i=0}^t$ e $\{\mathcal{W}_i\}_{i=0}^t$ tal que $\mathcal{V}_t = V_{j_0}$ e $\mathcal{W}_t = W_{j_0}$.

Afirmação. Cada ponto crítico pertence a no máximo um dos intervalos da $\{\mathcal{W}_i\}_{i=0}^t$. Vamos provar este fato por contradição. Seja c_l um ponto crítico de $\mathcal{R}$ e $0 \leq i_1 \leq i_2 \leq t$ tais que $c_l \in \mathcal{W}_{i_1}$ e $c_l \in \mathcal{W}_{i_2}$. Como $\mathcal{W}_{i_1} \bigcap \mathcal{W}_{i_2} \neq \emptyset$ e estes são pullback de um intervalo nice temos que $\mathcal{W}_{i_1} \subset \mathcal{W}_{i_2}$. Contendo c_l temos também o intervalo V_l que, por definição, $f^{s_l}(V_l) \subset J_l$ domínio de retorno a W_1. Desta forma, temos duas possibilidades:

1. $\mathcal{W}_{i_1} \subset V_l$

2. $V_l \subsetneq \mathcal{W}_{i_1}$

Assumindo a possibilidade 1 chegamos numa contradição pois $i_1 < t$ e $f^{i_1}(x) \in \mathcal{W}_{i_1} \subset \bigcup V_j$.

A possibilidade 2 também é uma contradição pois fazendo $r = s_{j_0} + t - i_2$, temos que $f^r(\partial \mathcal{W}_{i_2}) \subset \partial W_1$, logo $f^r(\partial V_l) \subset f^r(\mathcal{W}_{i_1}) \subset W_1$. Seja agora $s = i_2 - i_1$ temos que $f^{r+s}(\partial \mathcal{W}_{i_1})$ e $f^{r+s}(\partial V_l) \subset W_1$ e isto é uma contradição pois $f^r(V_l)$ está contida em um domínio de retorno de forma maximal, decorre daí que $f^s(\partial(f^r(V_l))) \subset \partial W_1$.

De posse deste resultado, consideremos os intervalos $\mathcal{W}_{n_1}, ..., \mathcal{W}_{n_\nu}$ da cadeia $\{\mathcal{W}_i\}_{i=0}^t$ que contém pontos críticos. Usando o resultado da proposição 2.3 concluímos que a aplicação $f^{n_{j+1}-n_j}|_{\mathcal{W}_{n_j+1}} : \mathcal{W}_{n_j+1} \longrightarrow \mathcal{W}_{n_{j+1}+1}$, sendo $0 \leq j \leq \nu - 1$ e $n_0 = 0$, tem derivada schawrzian negativa . É importante observar que é possível controlar o comprimento de W_1 de forma que $\bigcup \mathcal{W}_{n_i} \subset \bigcup U_i$ dado pela última proposição. Isto implica que $f^{n_{j+1}-n_j-1}|_{\mathcal{V}_{n_j+1}}$

é um difeomorfismo com distorção limitada o que garante que a primeira aplicação de entrada a $\bigcup V_i$ é uma composição de no máximo $d-1$ aplicações do tipo $L \circ f$ onde L é um difeomorfismo com distorção limitada.

$\square$

Capítulo 3

Ergodicidade

Manẽ [M] começa o estudo de ergodicidade relacionando-o com o teorema de Birkhoff que mostra a existência do limite (q.t.p):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(x) + \varphi(T(x)) + ... + \varphi(T^{n-1}(x))}{n}$$

sendo T uma transformação que preserva medida em um espaço $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e uma função $\varphi : X \to \mathbb{R}$ integrável. O teorema ainda garante que o valor do limite é constante q.t.p. desde que não exista um conjunto invariante $A \in \mathcal{A}$ tal que $0 < \mu(A) < \mu(X)$. Isto motiva a seguinte definição: dizemos que uma função é ergódica com respeito a uma medida μ qualquer (não necessariamente invariante) se todo conjunto U invariante possui medida nula ou $\mu(U) = \mu(X)$.

Dizemos que um conjunto A é atrator [Mi] se satisfaz as seguintes condições:

1. A é compacto.

2. Positivamente invariante ($f(A) \subset A$).

3. $Leb(\beta(A)) > 0$, onde $\beta(A) = \{x \in M | \omega(x) \subset A\}$ é denominado bacia de A.

4. Se $U \subset A$ satisfaz as condições 1, 2, 3 então $U = A$.

Os conjuntos atratores em aplicações multimodais como as nossas, podem assumir três formatos distintos: órbitas periódicas atratoras, intervalos periódicos atratores ou um conjuntos minimais atratores. Concluindo nosso trabalho mostraremos uma proposição que estuda as componentes ergódicas com respeito a bacia de atração de um atrator minimal. De fato a proposição estabelece, no caso de conjunto X minimal isto é, X é invariante e $\omega(x) = X$ para qualquer $x \in X$, que mesmo que tenhamos mais de um conjunto invariante com medida positiva, estes estão relacionados com cada classe de equivalência formada a partir de seus pontos críticos.

Um subconjunto $U \subset X$ é dito ergódico com respeito a medida de Lebesgue, também chamado de uma componente ergódica, se $Leb(U) > 0$ e $f|_U$ é ergódica com respeito a medida de Lebesgue. Quando o atrator for uma órbita periódica a dinâmica na sua bacia é bastante simples e pode ser estudada geometricamente. Por outro lado o caso de intervalos periódicos apresenta uma dinâmica bastante complexa (de fato, é o que se chama de dinâmica caótica). Podemos encontrar este caso em [vS-V].

Proposição 3.1. *Seja X minimal tal que $f(X) \subset X$. X tem medida de Lebesgue zero e para cada $x \in X$ existe uma seqüência de intervalos nice $\mathcal{N}_n \subset \mathcal{U}_n$ tais que $\cap \mathcal{U}_n = \{x\}$, $(\mathcal{U}_n \backslash \mathcal{N}_n) \cap X = \emptyset$ e $\mathcal{N}_n$ é bem posto em $\mathcal{U}_n$. Além disso, se $Y \subset B(X)$ tem medida de Lebesgue positiva então X é igual a $w(c)$ para pelo menos um ponto crítico c recorrente, e*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\mathcal{U}_n \cap Y|}{|\mathcal{U}_n|} = 1$$

Prova.Tomemos um ponto $x \in X$ qualquer. Seja W_x um intervalo nice tal que todos os domínios de retorno são bem postos e isto é garantido pelo teorema 2.1.

Sejam $V_i \subset W_i$ os intervalos dados pelo teorema 2.2 tais que W_i é uma componente conexa da primeira aplicação de entrada a W_x e V_i o intervalo maximal contendo c_i e s_i o menor inteiro tal que $f^{s_i}(V_i)$ está contido em um domínio de retorno a W_x.

Seja $D(\psi)$ o domínio da primeira aplicação de entrada a $\cup V_i$. Para cada componente conexa J de $D(\psi)$, $\psi(J) \subset V_{j_0}$ e $T(J) \supset J$ é o pullback pela extensão de $\psi|_J$ de W_{j_0}.

Da forma como foram definidos temos que J_i, J_k, $T(J_i)$, $T(J_k)$ são pullbacks de W_x . Decorre deste fato que se $T(J_i) \cap T(J_k) \neq \emptyset$ então $T(J_i) \subset T(J_k)$ ou $T(J_k) \subset T(J_i)$ e se $J_i \cap T(J_k) \neq \emptyset$ então $J_i \subset T(J_k)$. Tomemos J de tal forma que $X \cap J \neq \emptyset$ e $T(J) \subset T(\tilde{J})$ para qualquer outro $\tilde{J} \subset D(\psi)$ tal que $X \cap \tilde{J} \neq \emptyset$. Notemos que $T(J)$ contém no máximo $2^b - 1$ intervalos $\tilde{J}$ onde b é o número de pontos de dobra, $\tilde{J} \cap X \neq \emptyset$ e cada um deles é bem posto em $T(J)$ por conseqüência do lema de Koebe.

Segue que existem intervalos nice N, U tais que $N \subset U \subset T(J)$, N é bem posto em U e $X \cap (U \backslash N) = \emptyset$.

Como X é minimal, para cada $z \in X$ existe o menor inteiro $s \geq 0$, tal que $f^s(z) \in$

$N \subset U$. Pelo fato de s ser mínimo, o pullback $z \in N_s \subset U_s$ de $N \subset U$ pelo caminho $z, ..., f^s(z) \in N$ é disjunto. Assim N_s é bem posto em U_s e $X \cap (U_s \backslash N_s) = \emptyset$. Tomando uma seqüência de intervalos W_x convergindo a um ponto de X nós temos uma seqüênciade intervalos $\mathcal{N}_n \subset \mathcal{U}_n$ conforme a afirmação.

Segue que se $Y \subset B(X)$ tem medida de Lebesgue positiva e X é minimal, então $X = w(\tilde{c})$ para pelo menos um ponto crítico recorrente $\tilde{c}$ ($\tilde{c} \in X$), esta afirmação está mostrada em [vS-V]. Tomando $x = \tilde{c}$, seja $\mathcal{U}_n \supset \mathcal{N}_n \ni \tilde{c}$ e seja C o conjunto formado pelos pontos críticos c tais que $w(c) \ni \tilde{c}$. Seja y um ponto de densidade de Y, existe t tal que $f^t(y) \in \mathcal{N}_n$. Seja $\mathcal{U}_n^i \supset \mathcal{N}_n^i \ni f^i(y), i = 0, ..., t$ seja o pullback de $\mathcal{U}_n \supset \mathcal{N}_n$ ao longo do caminho $f^i(y), ..., f^t(y)$. Da propriedade de $\mathcal{U}_n \supset \mathcal{N}_n$ estabelecido anteriormente, para $i \leq j \leq t$ com $\mathcal{U}_n^i \cap \mathcal{U}_n^j \neq \emptyset$ só uma das afirmações é verdadeira: $\mathcal{U}_n^i \subset \mathcal{U}_n^j$ ou $\mathcal{U}_n^i$ está contido em uma das componentes de $\mathcal{U}_n^j \backslash \mathcal{N}_n^j$. Da minimalidade de t concluímos que a primeira afirmação é falsa. Sendo $\mathcal{U}_n \cap X \subset \mathcal{N}_n$, para cada ponto crítico $c \in X$ existe no máximo um valor de $i \leq t$ com $c \in \mathcal{N}_n^i \subset \mathcal{U}_n^i$. Mais ainda $\mathcal{U}_n^i \cap X \subset \mathcal{N}_n^i$. Pelo princípio da contração, tomando n suficientemente grande, qualquer ponto crítico c que não está em $X = w(y)$ não está em qualquer dos intervalos $\mathcal{U}_n^i$. Da proposição2.1 e sendo y um ponto de densidade de Lebesgue de Y, existe um ponto crítico $c \in X$ tal que $c \in \mathcal{N}_n^{i(n)}$ tal que $\mid \mathcal{U}_n^{i(n)} \cap Y \mid / \mid \mathcal{U}_n^{i(n)} \mid$ vai para um.

$\square$

Decorre de $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{|\mathcal{U}_n \cap Y|}{|\mathcal{U}_n|} = 1$ que associado a cada minimal X só temos essencialmente um conjunto invariante $Y \subset B(X)$ com medida positiva. Qualquer outro invariante com medida positiva $Y' \subset B(X)$ temos que $\mid Y \triangle Y' \mid = 0$. Concluímos desta forma que a quantidade de componentes ergódicas associadas a atratores minimais é igual ao número de classes de equivalência de associados a atratores minimais.

Observamos finalmente que fenômeno análogo ocorre também quando o atrator é um intervalo periódico [vS-V], e que não existe componentes ergódicas associadas a órbitas periódicas atratoras. Desta forma, o número de componentes ergódicas de f é no máximo igual ao número de classes de equivalência dos pontos críticos de f.

Bibliografia

[M] R. Mañé, Introdução à Teoria Ergódica, (1983), IMPA, CNPq.

[dM-vS] W. de Melo and S. van Strien, One-Dimensional Dynamics, Springer-Verlag (1993).

[Ma] M. Martens, Distortions results and invariant Cantor sets of unimodal maps, Ergod. Th. Dynam. Sys. **14**, 1994, 331-349.

[Mi] J. Milnor, On the concept of attractor, Comm. Math. Phys. **102**, 1994, no. 3, 517-519.

[R] C. Robinson, Dynamical Systems Stability, Symbolic Dynamics and Chaos, CRC Press (1995)

[K] O. Kozlovskii,Getting rid of the negative Schwarzian derivative condition, Annals of Mathematics **152**, 2000, 743-762.

[vS-V] S. van Strien and E. Vargas, Real bounds, ergodicity and negative Schwarzian for multimodal maps, J. Amer. Math. Soc. **17**, 2004, no. 4, 749-782.

Universidade Federal da Bahia-UFBa
Instituto de Matemática/Depto. de Matemática

Campus de Ondina, Av. Adhemar de Barros s/n, CEP:40170-110
www.im.ufba.br/hpinst/mestrado