Universidade Federal da Bahia
Instituto de Matemática
Curso de Pós-Graduação em Matemática
Dissertação de Mestrado

Ergodic Closing Lemma

Tiago Estrela de Oliveira

Salvador-Bahia

Dezembro 2008

Ergodic Closing Lemma

Tiago Estrela de Oliveira

Dissertação apresentada ao colegiado do curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Augusto Armando de Castro Júnior (Orientador).

Prof. Dr.

Prof. Dr.

Tiago Estrela Oliveira

"Ergodic Closing Lemma "/ Salvador-BA, 2008.

Orientador: Prof. Dr. Augusto Armando de Castro Júnior (UFBA).

Dissertação de Mestrado apresentada ao curso de Pós-Graduação em Matemática da UFBA, 46 páginas.

Palavras-Chave: .

Este trabalho é dedicado com todo carinho a minha mãe, irmã, familiares e amigos.

"Só existem dois dias no ano que nada pode ser feito. Um se chama ontem e o outro se chama amanhã, portanto hoje é o dia certo para amar, acreditar, fazer e principalmente viver.."

Dalai Lama

Agradecimentos

Resumo

Neste trabalho caracterizaremos $\mathfrak{M}(f)$, que é o conjuntos das probabilidades f-invariantes. O estudo desenvolvido foi baseado no artigo de R. Mañé intitulado An Ergodic Closing Lemma, publicado na revista Annals of Mathematics em 1982.

Seja $Diff(M)$ o espaço dos difeomorfsmos sobre a variedade M com a topologia C^1. Então existe um conjunto residual $\mathfrak{R} \in \mathfrak{M}(f)$ tal que para toda $f \in \mathfrak{R}$ vale que $\mathfrak{M}(f)$ é igual ao fecho convexo das probabilidades invariantes suportadas em órbitas periódicas, como poderemos ver no capítulo final da dissertação.

Sumário

Introdução

Um tópico clássico na teoria Sistemas Dinâmicos que tem destacado interesse é a criação de órbitas através de perturbação como feito no closing lemma de Pugh. Além de melhorar esse resultado geométrico também obteremos um resultado do ponto de vista estatístico.

Vamos definir alguns objetos importantes para a compreensão global do problema.Por todo nosso trabalho M será uma variedade compacta sem bordo e $Diff(f)$ o espaço dos difeomorfismos de classe C^1 munido da topologia C^1.

DEFINIÇÃO 0.1. *Sejam $x \in M$ e $f \in Diff(f)$. Dizemos que x é ponto periódico de f se existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $f^m(x) = x$*

DEFINIÇÃO 0.2. *Sejam $x \in M$ e $f \in Diff(f)$. Dizemos que x é recorrente se*

$$\liminf_{n \to +\infty} d(f^n(x), x) = 0$$

DEFINIÇÃO 0.3. *Sejam $x \in M$ e $f \in Diff(f)$. Dizemos que x é um ponto não-errante de f se para toda vizinhança U de x existe $n \neq 0$ tal que*

$$f^n(U) \bigcap U \neq \emptyset.$$

DEFINIÇÃO 0.4. *Sejam $f, g \in Diff(M)$. Dizemos que g é g-próxima de f se $g \in \mathfrak{U}$, onde $\mathfrak{U}$ é uma vizinhança de f em $Diff(M)$*

DEFINIÇÃO 0.5. *Sejam $y, z \in M$ e $f, g \in Diff(f)$. Dizemos que y é ϵ-sombreado por um ponto z m-periódico para g-próxima se*

$$d(f^i(y), g^i(z)) < \epsilon$$

para $i \in \{1, \ldots, m\}$.

A primeira parte do nosso trabalho será melhorá o trabalho de Pugh, [Pugh1], mostraremos fortalecimento da Closing Lemma desenvolvido por Pugh, isto é, provaremos que todo ponto não-errante $x \in M$ tem um iterado $f^{m(x)}(x) = y$ tal que $y \in M$ é sombreado por $z \in M$, onde z é um ponto periódico para g-próxima de f. Formalmente falando:

Proposição 0.6. *Dada $f \in Diff(M)$, $p \in M$, $\epsilon > 0$ e uma vizinhança $\mathfrak{U}$ de f, existe $r > 0$, $\rho > 1$ tal que se $x \in B_{\overline{r}(p)}$ com $0 < \overline{r} \leq 0$ e $f^m(x) \in B_{\overline{r}}(p)$ para algum $m > 0$ então existe $0 \leq m_1 < m_2 \leq m$ e $g \in \mathfrak{U}$ tal que $f^{m_1}(x) \in \overline{B_{\rho\overline{r}}}(p)$,$f^{m_2}(x) \in \overline{B_{\rho\overline{r}}}(p)$, $g^{m_2-m_1}(f^{m_2}(x)) = f^{m_2}(x)$, $g(w) = f(w)$ para $w \notin B_\epsilon(f,p)$ e $d(g^i(f^{m_2}(x)), f^j(f^{m_1}(x))) \leq \epsilon$ para $0 \leq j \leq m_2 - m_1$.*

Definição 0.7. *Denotamos por $B_\epsilon(f,x)$ conjunto dos pontos $y \in M$ tal que $d(f^n(x), y) \leq \epsilon$ para algum $n \in \mathbb{Z}$*

Definição 0.8. *Denotamos por $\sum(\mathfrak{U}, \epsilon)$ o conjunto dos pontos $x \in M$ tal que existe $g \in \mathfrak{U}$, $y \in M$ e $z \in \mathbb{Z}^+$ tal que y é um ponto m-periódico para g, $g = f$ sobre $M - B_\epsilon(f,x)$ e $d(f^j(x), g^j(y)) \leq \epsilon$ para todo $0 \leq j \leq m$*

Definição 0.9. *Denotamos por $\sum(f)$ o conjunto dos pontos $x \in M$ tal que para toda vizinhança $\mathfrak{U}$ de fe todo $\epsilon > 0$ existe $g \in \mathfrak{U}$ e $y \in M$ tal que y é um ponto m-periódico para g, $g = f$ sobre $M - B_\epsilon(f,x)$ e $d(f^j(x), g^j(y)) \leq \epsilon$ para todo $0 \leq j \leq m$*

Definição 0.10. *Uma medida de probabilidade μ é ergódica se para qualquer $A \subset M$ temos $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A^c) = 0$.*

Perceba que o resultado acima é geométrico e uma questão natural seria tirar informações estatísticas sobre o conjunto dos pontos que satisfaz a proposição acima.Isto será o tema central do segundo capítulo, ou seja,

Proposição 0.11. *Para toda $f \in Diff(M)$, toda vizinhança $\mathfrak{U}$ de f e todo $\epsilon > 0$ temos $\mu(\sum(\mathfrak{U}, \epsilon)) = 1$ para toda medida ergódica $\mu \in \mathfrak{M}(f)$.*

Definição 0.12. *Seja $\mathbb{X}$ um estaço topológico. Dizemos que $\mathfrak{R} \subset \mathbb{X}$ é um conjunto residual de $\mathbb{X}$ se ele puder ser escrito como interseção enumerável de abertos densos em $\mathbb{X}$.*

Finalmente no terceiro capítulo usaremos o resultado acima para provar

Teorema 0.13. *Sejam $\mathfrak{M}(f)$ o espaço das probabilidades f-invariantes e $Diff(M)$ o espaço dos difeomorfsmos sobre a variedade M com a topologia C^1. Então existe um conjunto residual $\mathfrak{R} \in \mathfrak{M}(f)$ tal que para toda $f \in \mathfrak{R}$ vale que $\mathfrak{M}(f)$ é igual ao fecho convexo das probabilidades invariantes suportadas em órbitas periódicas.*

Capítulo 1

Versão Forte do Closing Lemma

Mostraremos nesse capítulo o fortalecimento da Closing Lemma desenvolvido por Pugh, isto é, provaremos que todo ponto não-errante $x \in M$ tem um iterado $f^{m(x)}(x) = y$ tal que $y \in M$ é sombreado por $z \in M$, onde z é um ponto periódico para g-próxima de f.Formalmente falando:

Proposição 1.1. ***Versão Forte***

Dada $f \in Diff(M)$, $p \in M$, $\epsilon > 0$ e uma vizinhança $\mathfrak{U}$ de f, existe $r > 0$, $\rho > 1$ tal que se $x \in B_{\overline{r}(p)}$ com $0 < \overline{r} \leq 0$ e $f^m(x) \in B_{\overline{r}}(p)$ para algum $m > 0$ então existe $0 \leq m_1 < m_2 \leq m$ e $g \in \mathfrak{U}$ tal que $f^{m_1}(x) \in \overline{B_{\rho\overline{r}}}(p)$,$f^{m_2}(x) \in \overline{B_{\rho\overline{r}}}(p)$, $g^{m_2-m_1}(f^{m_2}(x)) = f^{m_2}(x)$, $g(w) = f(w)$ para $w \notin B_\epsilon(f,p)$ e $d(g^i(f^{m_2}(x)), f^j(f^{m_1}(x))) \leq \epsilon$ para $0 \leq j \leq m_2 - m_1$.

Para provar a proposição acima precisaremos de dois lemas:

Lema 1.2. *Sejam $f \in Diff(M)$ e $p \in M$. Suponha que exista uma vizinhança compacta de p que é identificada pela aplicação exponencial com a bola $\mathbf{B}_R = \{x \in T_pM; \parallel x \parallel \leq R\}$.Então existe uma decomposição $T_pM = E_1 \bigoplus ... \bigoplus E_l$tal que dada uma vizinhança $\mathfrak{U}$ de f e constante $C > 1$, $2 > \delta > 1$ existe $N > 0$, $0 < r_1 < r_0 < R$ com r_0 arbitrariamente pequeno e λ_i, $i = 1, ..., l$, satisfazendo as seguintes propriedades:*

I *Se $\pi_i : T_pM \to E_i$, $i = 1, ..., l$ denota a projeção associada com a decomposição $T_pM = E_1 \bigoplus ... \bigoplus E_l$ então $\{x; \sup_i \lambda_i \parallel \pi_i(x-u) \parallel \leq 2r_1\} \subset B_{r_0}$ se $\parallel u \parallel \leq r_1$.*

II *Se $\parallel y \parallel \leq r_1$, $\parallel z \parallel \leq r_1$ e $1 \leq \mu_i \leq C$, $i = 1, ..., l$ então existe $g \in \mathfrak{U}$ tal que*

- $g^N(y) = f^N(z)$
- $g(w) = f(w)$ *quando* $w \notin \bigcup_{j=0}^{N-1} f^i(\widetilde{B}_{\delta r}(q))$

onde $q = 2^{-1}(y+z),\ r = 2^{-1} \parallel y-z \parallel, \widetilde{B}_{\delta r}(q) = \{x; \sup_i \mu_i\lambda_i \parallel \pi_i(x-q) \parallel \leq \delta r\}$

A demonstração desse lema está feita no artigo **C. Pugh, The Closing Lemma,Amer. J.Math.,89,(1967),956-1009**. Porém tiraremos algumas consequências pertinentes ao nosso propósito.

- Suponha $\epsilon > 0$ dado pela proposição 1.1 então pela continuidade de f podemos escolher r_0 tal que $\sup_{0\leq j\leq N} diam f^i(B_{r_0}) \leq \epsilon$

- $\widetilde{B}_{\delta r}(q) \subset B_{r_0}$

Seja $x \in \widetilde{B}_{\delta r}(q)$ então $\sup_i \mu_i\lambda_i \parallel \pi_i(x-q) \parallel \leq \delta r$ mas como cada $\mu_i \geq 1$ temos que $\mu_i\lambda_i \parallel \pi_i(x-q) \parallel \geq \lambda_i \parallel \pi_i(x-q) \parallel$ para todo $i \in \{1,...,l\}$ logo $\lambda_i \parallel \pi_i(x-q) \parallel \leq \delta r$ mas como $r < r_1$ e $2 > \delta > 1$ obtemos assim $\delta r < 2r_1$. Portanto $\sup_i \lambda_i \parallel \pi_i(x-q) \parallel \leq 2r_1$ logo pela propriedade I do lema obtemos que $x \in B_{r_0}$.

- $g(w) = f(w)$ para $w \notin B_\epsilon(f,p)$.

Se $w \notin B_\epsilon(f,p)$ então pela definição desse conjunto temos que $d(f^n(p), w) > \epsilon\ \forall n \in \mathbb{N}$.Em particular, $d(f^j(p), w) > \epsilon, \forall j \in \{0,1,...,N-1\}$ logo como $\sup_{0\leq j\leq N} diam f^j(B_{r_0}) \leq \epsilon$ obtemos que $w \notin f^j(B_{r_0})\ \forall j \in \{0,1,...,N-1\}$ mas $\widetilde{B}_{\delta r}(q) \subset B_{r_0}$ logo $w \notin f^j(\widetilde{B}_{\delta r}(q))$ $\forall j \in \{0,1,...,N-1\}$. Consequentemente, $w \notin \bigcup_{j=0}^{N-1} f^i(\widetilde{B}_{\delta r}(q))$ logo por II temos que f(w)=g(w).

- Se p não é f-periódico podemos escolher pela continuidade e compacidade da variedade M r_0 tão pequeno que $f^{j_1}(B_{r_0}) \bigcap f^{j_2}(B_{r_0}) = \emptyset$ para todo $0 \leq j_1 \leq j_2 \leq N$.

Sejam $y, z \in \widetilde{B}_{\delta r}(q)$. Suponha que para algum m temos $y = f^m(z)$ e $f^i(z) \notin \widetilde{B}_{\delta r}(q)$ para todo $0 < j < m$.Ou seja, os iterados de z saindo de $\widetilde{B}_{\delta r}(q)$ e só retornam no m-ésimo iterado quando $y = f^m(z)$.Então podemos inferir o seguinte:

- $m \geq N$

Se $m < N$ então $B_{r_0} \bigcap f^m(B_{r_0}) \supset \{y = f^m(z)\}$ com $m < N$ contrariando a escolha de r_0 de modo que $f^{j_1}(B_{r_0}) \bigcap f^{j_2}(B_{r_0}) = \emptyset$ para todo $0 \leq j_1 \leq j_2 \leq N$.

- $g^m(y) = y$

Seja $m > N$ pois $g^N(y) = f^N(y) = y$ então $m = kN+r$ com $0 \leq r < N$ e $k \in \mathbb{Z}$.Com isso temos

$$g^m(y) = g^{kN+r}(y) = g^r(g^{kN}(y)) =_{(II)} g^r(f^{kN}(z)).$$

Mas

$$f^{kN}(z) \notin \bigcup_{j=0}^{N-1} f^i(\widetilde{B}_{\delta r}(q)).$$

De fato, se

$$f^{kN}(z) \in \bigcup_{j=0}^{N-1} f^j(\widetilde{B}_{\delta r}(q))$$

então existe $j_0 \in \{0, 1, ..., N-1\}$ tal que

$$f^{kN}(z) \in f^{j_0}(\widetilde{B}_{\delta r}(q))$$

logo

$$f^{kN-j_0}(z) \in \widetilde{B}_{\delta r}(q)$$

com $kN - j_0$ variando entre kN e $(k-1)N + 1$ mas isso contraria a hipótese de que

$$f^i(z) \notin \widetilde{B}_{\delta r}(q)$$

para todo $0 < j < m$.Consequentemente,

$$f^{kN}(z) \notin \bigcup_{j=0}^{N-1} f^i(\widetilde{B}_{\delta r}(q))$$

implicando por (II) que

$$g(f^{kN}(z)) = f(f^{kN}(z)) = f^{kN+1}(z)$$

logo

$$g^r(f^{kN}(z)) = g^{r-1}(g(f^{kN}(z))) = g^{r-1}(f^{kN+1}(z)).$$

Procedendo da mesma forma anterior obtemos que

$$g(f^{kN+1}(z)) = f^{kN+2}(z)$$

logo

$$g^{r-1}(f^{kN+1}(z)) = g^{r-2}(g(f^{kN+1}(z))) = g^{r-2}(f^{kN+2}(z)))$$

Repetindo o processo temos

$$g^{r-2}(f^{kN+2}(z))) = ... = f^{kN+r}(z) = f^m(z) = y.$$

Logo $g^m(y) = y$

- $d(g^i(y), f^i(z)) \leq \epsilon$

O item acima está é provado no trabalho do Pugh na hora em quele constroi a perturbação com essa propriedade. Agora vamos enunciar e provar o segundo lema.

Lema 1.3. *Dado $l \in \mathbb{Z}^+$ existem $C = C(l) > 1$, $A = A(l) > 1$ e $2 > \delta = \delta(l) > 1$ tal que se $E = E_1 \bigoplus ... \bigoplus E_l$ é um espaço vetorial e $|.|_i$ uma norma em E_i proveniente do produto interno então para qualquer conjunto $x_0, ..., x_n$ de pontos distintos de E existem $0 \leq j_1 < j_2 \leq n$ e $1 \leq \mu_i \leq C$ com $i = 1, ..., m$ tal que definindo $\| \ . \ \|_1$ em E por $\| v \|_1 = \sup_i \mu_i |\pi_i(v)|_i$, onde $\pi_i : E \to E_i$ são as projeções associadas com as decomposições de E_i, satisfazendo as seguintes propriedades:*

- $\| x_{j_i} - x_0 \|_1 \leq A \| x_n - x_0 \|_1$, $i = 1, 2$

- $\| x_j - p \|_1 > 2^{-1}\delta \| x_{j_1} - x_{j_2} \|_1$, $j_1 < j < j_2$, *onde* $p = 2^{-1}(x_{j_1} + x_{j_2})$.

Prova 1. *Para provar esse lema necessitaremos de algumas afirmações.*

Afirmação 1.1. *Se $1 < \delta_0 < \frac{\sqrt{5}}{2}$, $C > 1$ e $1 < \delta < \delta_0$ tal que $C^2 > 4m(\delta_0^2 - 1)^{-1}$ e $2\delta^2 < \delta_0^2 + 1$ então $\delta(\sum_{i=1}^{l} max\{\beta_i^2, C^{-2}\})^{\frac{1}{2}} \leq \delta_0(\sum_{i=1}^{l} \beta_i^2)^{\frac{1}{2}}$ para todo $0 \leq \beta_i \leq 1$, $i = 1, ..., l$, com $\beta_1 = 1$.*

Prova 2. *Vamos provar essa afirmação por indução em l. Pois veja que essa desigualdade depende da quantidade de subespaços que vamos decompor T_pM. Seja $m = 1$. Temos que $\beta_1 = 1$ logo*

$$\delta(max\{\beta_i^2, C^{-2}\})^{\frac{1}{2}} = \delta(max\{1, C^{-2}\})^{\frac{1}{2}} = \delta \leq \delta_0 = \delta_0(\beta_1^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Suponha por hipótese de indução que

$$\delta(\sum_{i=1}^{m-1} max\{\beta_i^2, C^{-2}\})^{\frac{1}{2}} \leq \delta_0(\sum_{i=1}^{m-1} \beta_i^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Para completar a provar da afirmação provaremos que

$$\delta^2(\sum_{i=1}^{m} max\{\beta_i^2, C^{-2}\}) \leq \delta_0^2(\sum_{i=1}^{m} \beta_i^2).$$

De fato,

$$\delta^2(\sum_{i=1}^{m} max\{\beta_i^2, C^{-2}\}) \leq \delta^2(\sum_{i=1}^{m-1} max\{\beta_i^2, C^{-2}\}) + \delta^2(max\{\beta_m^2, C^{-2}\})$$

$$\leq \delta_0^2(\sum_{i=1}^{m-1} \beta_i^2) + \delta^2(max\{\beta_m^2, C^{-2}\}),$$

usamos a hipótese de indução na segunda desigualdade. Agora se

- $max\{\beta_m^2, C^{-2}\} = \beta_m^2$ *então*
  $\delta^2(\sum_{i=1}^m max\{\beta_i^2, C^{-2}\}) \leq \delta^2(\sum_{i=1}^{m-1}\beta_i^2) + \delta^2(max\{\beta_m^2, C^{-2}\})$
  $\leq \delta^2(\sum_{i=1}^{m-1}\beta_i^2) + \delta^2\beta_m^2 \leq \delta_0^2(\sum_{i=1}^{m-1}\beta_i^2) + \delta_0^2\beta_m^2 = \delta_0^2(\sum_{i=1}^m \beta_i^2)$

- $max\{\beta_m^2, C^{-2}\} = C^{-2}$ *então*
  $\delta^2(\sum_{i=1}^m max\{\beta_i^2, C^{-2}\}) \leq \delta^2(\sum_{i=1}^{m-1}\beta_i^2) + \delta^2(max\{\beta_m^2, C^{-2}\}) \leq \delta^2(\sum_{i=1}^{m-1}\beta_i^2) + \delta^2 C^{-2}$.
  Resta mostrar que $\delta^2 C^{-2} \leq \delta_0\beta_m^2$.*Mas isso segue direto do fato que* $\beta_m^2 \leq C^{-2}$ *pois* $\delta^2 C^{-2} \leq \delta_0\beta_m^2 \leftrightarrow \frac{\delta^2}{\delta_0^2} \leq 1$

■

Defina $A = 4Cm^{\frac{1}{2}}$. *Seja* $|.|$ *a norma em* E *dada por* $|v| = (\sum_i |\pi_i v|_i^2)^{\frac{1}{2}}$ *e se* $\mu = (\mu_1, ..., \mu_m)$ *com* $C \geq \mu_i \geq 1$ *para todo* $1 \leq i \leq m$ *defina a norma* $\| \, . \, \|_\mu$ *por* $\| \, v \, \|_\mu = \sup_i \mu_i |\pi_i v|_i$.*Para todo* $v \in E$ *nós temos* $C^{-1} \| \, v \, \|_\mu \leq \| \, v \, \| \leq m^{\frac{1}{2}} \| \, v \, \|_\mu$

Afirmação 1.2. *Afirmamos que existe* $j_1, j_2 (0 \leq j_1 < j_2 \leq n)$ *tal que*

- $|x_{j_i} - x_0| \leq 4|x_n - x_0|$, $i = 1, 2$

- $|x_j - p| > \delta_0 2^{-1}|x_{j_1} - x_{j_2}|$, $j_1 < j < j_2$

Prova 3. *Escolha por indução um conjunto* $0 = i_0 \leq i_1 \leq ... \leq i_s < l_s \leq l_{s-1} \leq ... \leq l_0 = n$ *tal que vale*

$$\begin{cases} x_{i_{k+1}} = x_{i_k} & ou \\ x_{l_{k+1}} = x_{l_k} \end{cases}$$

e

$$|x_{l_{k+1}} - x_{i_{k+1}}| \leq 2^{-1}(1 + \delta_0^2)^{\frac{1}{2}}|x_{i_k} - x_{l_k}|$$

para todo $0 \leq k < s$. *Suponha que o conjunto de índices construído seja maximal. Então mostraremos que se*

$$p = 2^{-1}(x_{i_s} + x_{l_s})$$

temos $|x_j - p| > \delta_0 2^{-1}|x_{i_s} - x_{l_s}|$ *para todo* $i_s < j < l_s$.*Caso contrário,*

$$|x_j - p| \leq \delta_0 2^{-1}|x_{i_s} - x_{l_s}|$$

para algum $i_s < j < l_s$ *usando identidade do paralelogramos obteríamos:*

$$|x_j - x_{i_s}|^2 + |x_j - x_{l_s}|^2 = 2|x_j - p|^2 + \frac{1}{2}|x_{i_s} - x_{l_s}|^2 \leq 2^{-1}(1 + \delta_0^2)|x_{i_s} - x_{l_s}|^2$$

mas como temos dois farores somados sendo menores ou iguais a

$$2^{-1}(1+\delta_0^2)|x_{i_s}-x_{l_s}|^2$$

então pelo menos um é menor ou igual a

$$4^{-1}(1+\delta_0^2)|x_{i_s}-x_{l_s}|^2$$

e sem perda de generalidade podemos supor que

$$|x_j-x_{l_s}|^2 \leq 4^{-1}(1+\delta_0^2)|x_{i_s}-x_{l_s}|^2$$

.Então com fazendo $i_{s+1}=j$, $l_{s+1}=l_s$ temos um novo índice satisfazendo as três condições iniciais e com isso ampliariamos o conjunto maximal de índices construídos. Além disso obtemos de

$$|x_{l_{k+1}}-x_{i_{k+1}}| \leq 2^{-1}(1+\delta_0^2)^{\frac{1}{2}}|x_{i_k}-x_{l_k}|$$

implica

$$|x_{i_k}-x_{l_k}| \leq (2^{-1}(1+\delta_0^2)^{\frac{1}{2}})^k|x_o-x_n|.$$

De fato,

$$|x_{i_k}-x_{l_k}| \leq (2^{-1}(1+\delta_0^2)^{\frac{1}{2}})|x_{i_{k-1}}-x_{l_{k-1}}| \leq (2^{-1}(1+\delta_0^2)^{\frac{1}{2}})^2|x_{i_{k-2}}-x_{l_{k-2}}| \leq$$

$$(2^{-1}(1+\delta_0^2)^{\frac{1}{2}})^3|x_{i_{k-3}}-x_{l_{k-3}}| \leq \ldots \leq (2^{-1}(1+\delta_0^2)^{\frac{1}{2}})^k|x_o-x_n|.$$

Usando essa desigualdade provada agora e o fato que

$$\begin{cases} x_{i_{k+1}} = x_{i_k} & ou \\ x_{l_{k+1}} = x_{l_k} \end{cases}$$

para todo $0 \leq k < s$ obtemos que

$$|x_{i_s}-x_0| \leq |\, x_o-x_n| \sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{2}(1+\delta_0^2)^{\frac{1}{2}})^k \leq$$

$$|x_o-x_n|\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{3}{4})^k = 4|x_o-x_n|.$$

De maneira similar provamos a desigualdade para x_{l_s} no lugar de x_{i_s}.

■

Munido da afirmação temos que para qualquer escolha de μ temos

$$\| x_{j_i}-x_0 \|_\mu \leq C|x_{j_i}-x_0| \leq 4l^{\frac{1}{2}} \| x_n-x_0 \|_\mu = A \| x_n-x_0 \|_\mu$$

para $i = 1, 2$. Para completar a prova do lema basta encontrar μ tal que

$$\parallel x - p \parallel_\mu \leq \delta 2^{-1} \parallel x_{j_1} - x_{j_2} \parallel_\mu$$

implica

$$|x - p| \leq \delta_0 2^{-1} |x_{j_1} - x_{j_2}|.$$

Suponha para simplicar a notação suponha que

$$|\pi_1(x_{j_1} - x_{j_2})|_1 = \sup_i |\pi_i(x_{j_1} - x_{j_2})|_i.$$

Defina

$$\mu_i = \begin{cases} C & se \quad |\pi_i(x_{j_1} - x_{j_2})|_i = 0 \\ min\{C, |\pi_1(x_{j_1} - x_{j_2})|_1 |\pi_i(x_{j_1} - x_{j_2})|_i^{-1}\} & se \quad |\pi_i(x_{j_1} - x_{j_2})|_i \neq 0 \end{cases}$$

Então

$$|x - p| = (\sum_i |\pi_i(x - p)|_i^2)^{\frac{1}{2}} \leq (\sum_i \mu_i^{-2})^{\frac{1}{2}} \parallel x - p \parallel_\mu \leq$$

$$(\sum_i \mu_i^{-2})^{\frac{1}{2}} \delta 2^{-1} \parallel x_{j_1} - x_{j_2} \parallel_\mu = (\sum_i \mu_i^{-2})^{\frac{1}{2}} \delta 2^{-1} |\pi_1(x_{j_1} - x_{j_2})|_1.$$

A segunda desigualdade segue da hipótese verificaremos a primeira. Denote

$$\mu_{max} = \sup_i \mu_i$$

então

$$(\sum_i \mu_i^{-2}) \parallel x - p \parallel_\mu^2 \geq n(\mu_{max})^{-2} \parallel x - p \parallel_\mu^2 \geq n \sup_i (\mu_{max})^{-2} \mu_i^2 \parallel \pi_i(x - p) \parallel_i^2 \geq \sum_i |\pi_i(x - p)|_i^2.$$

Usando a definição do μ_i e a primeira afirmação feita no nesse lema temos que

$$(\sum_i \mu_i^{-2})^{\frac{1}{2}} \delta < \delta_0 [\sum_i \frac{|\pi_i(x_{j_1} - x_{j_2})|_i^2}{|\pi_1(x_{j_1} - x_{j_2})|_1^2}]^{\frac{1}{2}}.$$

Portanto

$$|x - p| \leq \delta_0 2^{-1} (\sum_i |\pi_i(x_{j_1} - x_{j_2})|_i^2)^{\frac{1}{2}} = \delta_0 2^{-1} |x_{j_1} - x_{j_2}|.$$

■

Após finalizar a prova dos dois lemas estamos em condições de atacar o resultado principal desse capítulo. Todos os elementos utilizados agora são os mesmo do resultado principal e dos lemas. Se p é um ponto periódico então o resulado é imediato , caso contrário suponhamos que p seja um ponto não periódico e também que r_0 tão pequeno tal que

$$\sup_{0\leq j\leq N} diam f^i(B_{r_0}) \leq \epsilon$$

e

$$f^{j_1}(B_{r_0}) \bigcap f^{j_2}(B_{r_0}) = \emptyset$$

para $j_1, j_2 \in \{1, \ldots, N\}$ com $j_1 \neq j_2$ sejam satisfeitos. Seja $S = [1, C] \times \overset{l}{\ldots} \times [1, C]$. Se $\mu \in S$ defina a norma $\| \, . \, \|_\mu$ sobre T_pM por

$$\| v \|_\mu := sup_i \mu_i \lambda_i |\pi_i v|_i$$

e faça $0 < k < K, 0 < b < B$ tal que

$$kd(x, y) \leq \| x - y \| \leq Kd(x, y)$$

para todo $x \in B_R$, onde d(.,.) denota a métrica de M, e

$$b \| x \|_\mu \leq \| x \| \leq B \| x \|_\mu$$

para todo $x \in T_pM, \mu \in S$. Faça $r > 0$ e $\rho > 1$ satisfazendo

- $(2ABb^{-1} + 1)Kr \leq r_1$
- $(2ABb^{-1})(1 + B^\delta b^{-1})Kr \leq r_0$
- $\rho = (2ABb^{-1} + 1)Kk^{-1}$

Suponha agora que $x \in M, m > 0$ e $0 < \bar{r} \leq r$ satisfazendo $x \in B_{\bar{r}}(p)$ e $f^m(x) \in B_{\bar{r}}(p)$. Sejam $0 = k_1 < ... < k_m$ inteiros em $[0, m]$ tais que $f^{k_i}(x) \in B_{r_0}$. Se $f^{k_j}(x) = f^{k_i}(x)$ para alguma $i \neq j$ então não há nada a se provar;portanto podemos supor que os $f^{k_i}(x)$ são distintos. Aplicando o segundo lema para os pontos $x_0 = x, x_j = f^{k_j}(x), 1 \leq j \leq n$, a decomposição $T_pM = E_1 \bigoplus ... \bigoplus E_l$, e normas $|v|_i = \lambda_i \| v \|$ sobre E_i, encontraremos $0 \leq m_1 = k_{j_1} < k_{j_2} = m_2 \leq m$ e $\mu \in S$ tal que definindo $\| \, . \, \|_1 = \| \, . \, \|_\mu$
temos pelo segundo lema que

- $\| f^{m_i}(x) - x \|_1 \leq A \| f^m(x) - x \|_1$, i=1,2
- $f^{k_j}(x) \notin \tilde{B}_{\delta r_2}(q)$ para todo $j_1 < j < j_2$

onde $q = \frac{f^{m_1}(x)+f^{m_2}(x)}{2}$, $r_2 = \frac{\|f^{m_1}(x)-f^{m_2}(x)\|_1}{2}$ e

$$\widetilde{B}_{\delta r_2}(q) = \{x; \sup_i \mu_i \lambda_i \parallel \pi_i(x-q) \parallel \leq \delta r_2\}.$$

Então para i=1,2

$$\parallel f^{m_i}(x) - x \parallel \leq AB \parallel f^m(x) - x \parallel_1 \leq ABb^{-1}(\parallel f^m(x) \parallel + \parallel x \parallel) \leq 2ABb^{-1}K\bar{r}.$$

Afirmamos que

$$f^j(x) \notin \tilde{B}_{\delta r_2}(q)$$

para todo $m_1 < j < m_2$. Se

$$f^j(x) \in \tilde{B}_{\delta r_2}(q)$$

então

$$\parallel f^j(x) - q \parallel_1 \leq \delta r_2$$

implicando temos

$$\parallel f^j(x) \parallel \leq \parallel f^j(x) - q \parallel + \parallel q - x \parallel + \parallel x \parallel$$

$$\leq B \parallel f^j(x) - q \parallel_1 + \frac{1}{2} \parallel f^{m_1}(x) - x \parallel + \frac{1}{2} \parallel f^{m_2}(x) - x \parallel + \parallel x \parallel$$

$$\leq B\delta \frac{1}{2} \parallel f^{m_1}(x) - f^{m_2}(x) \parallel_1 + 2ABb^{-1}K\bar{r} + Kd(x,p)$$

(pois existe uma identificação entre p e 0 com isso $\parallel x \parallel = \parallel x - p \parallel \leq Kd(x,p)$)

$$\leq B\delta \frac{1}{2} b^{-1} \parallel f^{m_1}(x) - f^{m_2}(x) \parallel + 2ABb^{-1}K\bar{r} + Kd(x,p)$$

$$\leq B\delta \frac{1}{2} b^{-1}(\parallel f^{m_1}(x) - x \parallel + \parallel f^{m_2}(x) - x \parallel) + 2ABb^{-1}K\bar{r} + K\bar{r}$$

$$\leq B\delta b^{-1} 2ABb^{-1}K\bar{r} + 2ABb^{-1}K\bar{r} + K\bar{r}$$

$$\leq (2ABb^{-1}(1 + B\delta b^{-1}) + 1)K\bar{r} \leq r_0$$

Então $f^j(x) \in B_{r_0}$ logo podemos ter $j \neq k_i$ para algum $j_1 < i < j_2$ mas isso contradiz a maximalidade do conjunto de tempos que

$$f^{k_i} \in B_{r_0}$$

por outro na lado se $j = k_i$ contradiz a hipótese

$$f^{k_j}(x) \notin \tilde{B}_{\delta r_2}(q)$$

para todo

$$j_1 < j < j_2.$$

Além disso para 1=1,2

$$\| f^{m_i}(x) \| \leq 2ABb^{-1}K\bar{r} + \| x \|$$

$$\leq 2ABb^{-1}K\bar{r} + Kd(x,p) \leq (2ABb^{-1}+1)K\bar{r} \leq r_1$$

.

Então aplicando o primeiro lema para

$$y = f^{m_2}(x), z = f^{m_1}(x)$$

obtemos uma aplicação $g \in \mathfrak{U}$ satisfazendo

$$g^N(y) = f^N(z)$$

,

$$g(w) = f(w)$$

quando $w \notin \bigcup_{j=0}^{N-1} f^i(\widetilde{B}_{\delta r}(q))$ e

$$f^i(z) \notin \widetilde{B}_{\delta r}(q)$$

para todo $0 < j < m$ mas escolhemos r_0 tão pequeno que

$$\sup_{0 \leq j \leq N} diam f^i(B_{r_0}) \leq \epsilon$$

e

$$f^{j_1}(B_{r_0}) \bigcap f^{j_2}(B_{r_0}) = \emptyset$$

para todo $0 \leq j_1 \leq j_2 \leq N$ então como foi observado após o primeiro lema temos que o difeomorfismo g satisfaz $g(w) = f(w)$ para $w \notin B_\epsilon(f,p)$, $g^{m_2-m_1}(f^{m_2}(x)) = f^{m_2}(x)$ e $d(g^j(f^{m_2}(x)), g^j(f^{m_1}(x))) \leq \epsilon$ para $0 \leq j \leq m_2 - m_1$.Finalmente por

$$\rho = (2ABb^{-1}+1)Kk^{-1}$$

e

$$\| f^{m_i}(x) - x \|$$

, para i=1,2

$$d(f^{m_i}(x), p) \leq k^{-1} \| f^{m_i}(x) \| \leq (2ABb^{-1}+1)Kk^{-1}\bar{r} = \rho\bar{r}$$

e isso completa a prova do resultado principal.

Capítulo 2

Teorema A

Definição 2.1. *Denotamos por* $B_\epsilon(f,x)$ *conjunto dos pontos* $y \in M$ *tal que* $d(f^n(x),y) \leq \epsilon$ *para algum* $n \in \mathbb{Z}$

Definição 2.2. *Denotamos por* $\sum(\mathfrak{U},\epsilon)$ *o conjunto dos pontos* $x \in M$ *tal que existe* $g \in \mathfrak{U}$, $y \in M$ *e* $z \in \mathbb{Z}^+$ *tal que* y *é um ponto m-periódico para* g, $g = f$ *sobre* $M - B_\epsilon(f,x)$ *e* $d(f^j(x), g^j(y)) \leq \epsilon$ *para todo* $0 \leq j \leq m$

Definição 2.3. *Denotamos por* $\sum(f)$ *o conjunto dos pontos* $x \in M$ *tal que para toda vizinhança* $\mathfrak{U}$ *de* f *e todo* $\epsilon > 0$ *existe* $g \in \mathfrak{U}$ *e* $y \in M$ *tal que* y *é um ponto m-periódico para* g, $g = f$ *sobre* $M - B_\epsilon(f,x)$ *e* $d(f^j(x), g^j(y)) \leq \epsilon$ *para todo* $0 \leq j \leq m$

Definição 2.4. *Uma medida de probabilidade* μ *é ergódica se para qualquer* $A \subset M$ *temos* $\mu(A) = 0$ *ou* $\mu(A^c) = 0$.

Vamos usar a versão forte do Closing Lemma para provar o Teorema A. Inicialmente teremos que analisar o conjunto $\sum(f)$ para simplificar a prova de A. Observe que se $\mathfrak{U}_n$ e $\epsilon_n > 0$ são base de vizinhança de f e uma sequencia convergindo a 0 respectivamente então

$$\sum(f) = \bigcap_{n \geq 0} \sum(\mathfrak{U}_n, \epsilon_n).$$

Com efeito, $x \in \sum(f)$ então para toda vizinhança $\mathfrak{U}$ de f e todo $\epsilon > 0$ existe $g \in \mathfrak{U}$, $y \in M$ e $m \in \mathbf{Z}^+$ satisfazendo $g^m(y) = y$, g=f em $M \setminus B_\epsilon(f,x)$ e $d(f^n(x), g^n(x)) \leq \epsilon$ para todo $0 \leq n \leq m$ logo $x \in \sum(\mathfrak{U}_n, \epsilon_n)$ em particular $x \in \bigcap_{n \geq 0} \sum(\mathfrak{U}_n, \epsilon_n)$ basta tomar $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_n$ e $\epsilon = \epsilon_n$ logo $x \in \bigcap_{n \geq 0} \sum(\mathfrak{U}_n, \epsilon_n)$. Reciprocamente se $x \in \sum(\mathfrak{U}_n, \epsilon_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ então podemos escolher n suficientemente grande de modo que $\epsilon_n < \epsilon$ e $\mathfrak{U}_n \supset \mathfrak{U}$ pois $\{\mathfrak{U}_n\}$ uma base de vizinhaça de $\mathfrak{U}$ e sem perda de generalidade podemos assumir $\epsilon_n \downarrow 0$ logo $x \in \sum(f)$.

Com esse argumento percebemos que a prova do teorema A resume-se a prova da seguinte proposição

Proposição 2.5. *Para toda $f \in Diff(M)$, toda vizinhança $\mathfrak{U}$ de f e todo $\epsilon > 0$ temos $\mu(\sum(\mathfrak{U}, \epsilon)) = 1$ para toda medida ergódica $\mu \in \mathfrak{M}(f)$.*

Boa parte do trabalho de prova dessa proposição foi feita no capitulo anterior, isto é mostramos que todo ponto nao errante x tem um iterado $f^{m(x)}(x) = y$ tal que y é ϵ-sombreado por z, onde z é ponto periódico para g próxima de f.Por z sombrear y,entendemos que a órbita de z ϵ-acompanha a órbita de y durante um número de iterados pelo menos igual ao período de z.Agora mostraremos que o conjunto Y dos pontos y com tal propriedade de sombreamento tem probabilidade total para toda medida ergódica.Neste capítulo também usaremos argumentos de Ergodicidade, Teorema de Birkhoff, e alguma gordura de certos conjuntos que aproximam Y.

DEFINIÇÃO 2.6. *Defina $\sum(\mu, \epsilon, r, \rho, m)$ onde $r > 0$, $\rho > 1$ e $m \in \mathbf{Z}^+$ como o conjunto dos pontos $x \in M$ tal que se $y \in B_{r_1}(x)$ para algum $0 < r_1 \leq r$ e $f^m(y) \in B_{r_1}(x)$ existe $0 \leq m_1 < m_2 \leq m$, $g \in \mathfrak{U}$ e $z \in M$ tal que $g = f$ sobre $M - B_\epsilon(f, x)$, $g^{m_2 - m_1}(z) = z$, $d(g^n(z), f^n(f^{m_1}) \leq \epsilon$ para todo $0 \leq n \leq m_2 - m_1$ e $f^{m_1} \in \overline{B_{\rho r_1}(x)}$*

Observe que nesse caso pela propria definição de $\sum(\mathfrak{U}, \epsilon)$ considerando $m = m_2$ temos que $f^{m_1}(y) \in \sum(\mathfrak{U}, \epsilon)$. É fácil ver que $\sum(\mu, \epsilon, r, \rho, m)$ é fechado. Com efeito, tome uma sequência $\{x^n\}$ em $\sum(\mu, \epsilon, r, \rho, m)$ convergindo para $x \in M$. Devemos mostrar que $x \in \sum(\mu, \epsilon, r, \rho, m)$.Então como $x \in \sum(\mu, \epsilon, r, \rho, m)$ temos que para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que: se $y^n \in B_{r_1^n}(x)$ para algum $0 < r_1^n \leq r$ e $f^m(y^n) \in B_{r_1^n}(x)$ existe $0 \leq m_1^n < m_2^n \leq m$, $g_n \in \mathfrak{U}$ e $z^n \in M$ tal que $g_n = f$ sobre $M - B_\epsilon(f, x)$, $g^{m_2^n - m_1^n}(z^n) = z^n$, $d(g_n^j(z), f^j(f^{m_1^n}) \leq \epsilon$ para todo $0 \leq j \leq m_2^n - m_1^n$ e $f^{m_1^n} \in \overline{B_{\rho r_1^n}(x)}$.Perceba que todas as novas sequência formadas, exceto $\{g_n\}$ que está em $\mathfrak{U}$, estão em compactos. Logo sem perda de generalidade podemos supor que elas estão convergindo. Ou seja, $y^n \to y$,$z^n \to z$, $r_1^n \to r_1$,$m_1^n \to m_1$, $m_2^n \to m_2$. Por outro lado podemos considerar que $\{g_n\}$ que está contido num compacto $\mathbb{K} \subset \mathfrak{U}$. Como $g_n = f$ sobre $M - B_\epsilon(f, x)$ pela convergencia das sequências temos $g = f$ sobre $M - B_\epsilon(f, x)$, $g^{m_2 - m_1}(z) = z$, $d(g^n(z), f^n(f^{m_1}) \leq \epsilon$ para todo $0 \leq n \leq m_2 - m_1$ e $f^{m_1} \in \overline{B_{\rho r_1}(x)}$. Em outras palavras $x \in \sum(\mu, \epsilon, r, \rho, m)$.

DEFINIÇÃO 2.7.

$$\sum(\mu, \epsilon, r, \rho) = \bigcup_{m \geq 0} \sum(\mu, \epsilon, r, \rho, m)$$

Como $\sum(\mu, \epsilon, r, \rho, m)$ é fechado logo boreliano temos que $\sum(\mu, \epsilon, r, \rho)$ é boreliano pois é a união enumerável de borelianos.

A prova da proposição requer um tipo de Teorema de Recobrimento de Vitali sobre certas partições do toro $T^s = S^1 \times \overset{s}{\ldots} = \times S^1$. Necessitando de algumas definições:

Definição 2.8. *Dizemos que $A \subset T^s$ é um cubo se ele puder ser escrito como $A = I_1 \ldots I_s$ onde cada I_i são intervalos de S^1.*

Definição 2.9. *Dizemos que $(p_1, \ldots, p_s)$ é o centro do cubo A se p_i é o ponto médio de I_i.*

Definição 2.10. *O comprimento de um intervalo I_i é chamado de lado do cubo.*

Definição 2.11. *Dizemos que $\mathfrak{P}_j^k$ é uma partição de T^s com lado de comprimento $\frac{2\pi}{k^j}$*

Como cada lado possui tamanho $\frac{2\pi}{k^j}$ serão necessários k^j átomos da partição $\mathfrak{P}_j^k$, para cobrir T^s

Definição 2.12. *Seja $k \in \mathbb{Z}^+$. Então dizemos que $\mathfrak{P}_1^k \leq \mathfrak{P}_2^k \leq \ldots$ é uma sequência de partições sobre T^s*

Observe que para cada elemento Q de $\mathfrak{P}_j^k$ podemos associar cubos $\hat{Q}, \tilde{Q}$ concentricos e de lados $\frac{2k\pi}{k^j}$, $\frac{6k\pi}{k^j}$ respectivamente. Com esses átomos geraremos as seguintes partições $\hat{\mathfrak{P}}_j^k$ e $\tilde{\mathfrak{P}}_j^k$ para o toro T^s.

Definição 2.13. *Seja $x \in T^s$. Dizemos que $\mathfrak{P}_j^k(x)$ é o átomo de $\mathfrak{P}_j^k$ contendo x*

Provaremos alguns lemas importantes para a prova da Proposição principal do capítulo. Mas para isso suponha M isometricamente imerso em T^s

Lema 2.14. *Para cada medida de probabilidade μ sobre os conjuntos borelianos de T^s, todo $\delta > 0$ e todo inteiro ímpar k as seguintes inequações são satisfeitas para todo $j \geq 1$: $\mu(\{x|\mu(\mathfrak{P}_j^k(x)) \geq \delta\mu(\hat{\mathfrak{P}}_j^k(x))\}) \geq 1 - \delta k^s$ e $\mu(\{x|\mu(\mathfrak{P}_j^k(x)) \geq \delta\mu(\tilde{\mathfrak{P}}_j^k(x))\}) \geq 1 - \delta 3^s k^s$*

Prova 4. *Seja $\{x_1, \ldots, x_l\}$ um conjunto de pontos que cada elemento está está em um único átomo de $\mathfrak{P}_j^k$ logo $l = k^j$. Seja*

$$\hat{S} = \{1 \leq i \leq l|\mu(\mathfrak{P}_j^k(x_i)) < \delta\mu(\hat{\mathfrak{P}}_j^k(x_i))\}.$$

Então

$$\mu(\{x|\mu(\mathfrak{P}_j^k(x)) < \delta\mu(\hat{\mathfrak{P}}_j^k(x))\}) =$$

$$\sum_{i\in S}\mu(\mathfrak{P}_j^k(x_i)) < \delta\sum_{i\in S}\mu(\hat{\mathfrak{P}}_j^k(x_i))$$

$$\leq \delta\sum_{i=1}^{l}\mu(\hat{\mathfrak{P}}_j^k(x_i))$$

$$= \delta\sum_{i=1}^{l}k^s\mu(\mathfrak{P}_j^k(x_i)) = \delta k^s.$$

Consequentemente,

$$1-\mu(\{x|\mu(\mathfrak{P}_j^k(x)) < \delta\mu(\hat{\mathfrak{P}}_j^k(x))\}) \leq 1-\delta k^s \Leftrightarrow$$

$$\mu(\{x|\mu(\mathfrak{P}_j^k(x)) \geq \delta\mu(\hat{\mathfrak{P}}_j^k(x))\}) \geq 1-\delta k^s.$$

Usamos o fato de k ser ímpar, pois sendo assim temos que conjuntos $\hat{\mathfrak{P}}_j^k(x_i)$, $i = 1, \ldots, l$, cobre cada átomo de $\mathfrak{P}_j^k(x_i))$ exatamente k^s vezes. Isto prova a primeira desigualdade. Vamos provar a segunda desigualdade. Defina

$$\tilde{S} = \{1 \leq i \leq l|\mu(\mathfrak{P}_j^k(x_i)) < \delta\mu(\tilde{\mathfrak{P}}_j^k(x_i))\}.$$

Então

$$\mu(\{x|\mu(\mathfrak{P}_j^k(x)) < \delta\mu(\tilde{\mathfrak{P}}_j^k(x))\}) =$$

$$\sum_{i\in S}\mu(\mathfrak{P}_j^k(x_i)) < \delta\sum_{i\in S}\mu(\tilde{\mathfrak{P}}_j^k(x_i))$$

$$\leq \delta\sum_{i=1}^{l}\mu(tilde\mathfrak{P}_j^k(x_i))$$

$$= \delta\sum_{i=1}^{l}3^sk^s\mu(\mathfrak{P}_j^k(x_i)) = \delta k^s.$$

Consequentemente,

$$1-\mu(\{x|\mu(\mathfrak{P}_j^k(x)) < \delta\mu(\tilde{\mathfrak{P}}_j^k(x))\}) \leq 1-\delta 3^sk^sk^s \Leftrightarrow$$

$$\mu(\{x|\mu(\mathfrak{P}_j^k(x)) \geq \delta\mu(\tilde{\mathfrak{P}}_j^k(x))\}) \geq 1-\delta 3^Sk^s.$$

■

Agora provaremos a proposição. Seja $f \in Diff(M)$, $\epsilon > 0$, uma vizinhança $\mathfrak{U}$ de f e uma medida ergódica $\mu \in \mathfrak{M}$ seja dada. Extenda μ para uma medida sobre T^s definindo $\mu(A) = \mu(A \bigcap M)$ para todo conjunto boreliano A de T^s. Pegue uma sequencia monótona $r_n > 0$, $\rho_n > 1$ convergindo para 0 e $+\infty$ respectivamente. Para cada par de inteiros $n > 0$, $m > 0$ podemos encontrar $k = k(n, m)$ e $j(n, m)$ tal que se $j \geq j(n, m)$ e $x \in T^s$ existem $0 < r \leq r_n$ satisfazendo

(a) $\mathfrak{P}_j^k(x) \subset B_r(x)$

(b) $\overline{B_{\rho_m r}(r)(x)} \subset \hat{\mathfrak{P}}_j^k(x)$

Agora a notação $B_t(z)$ denota a bola aberta em T^s com raio t e centro z. Nós deveremos sempre escolher $k = k(n, m)$ ímpar pelo motivo mencionado na prova do lema anterior.

Definição 2.15. *Seja $\delta > 0$ denotamos $\bigwedge_\delta^0(n, m)$ como o conjunto dos pontos $x \in T^s$ tal que para $k = k(n, m)$ as inquações são $\mu(\mathfrak{P}_j^k(x)) \geq \delta\mu(\hat{\mathfrak{P}}_j^k(x))$ e $\mu(\mathfrak{P}_j^k(x)) \geq \delta\mu(\tilde{\mathfrak{P}}_j^k(x))$ são satisfeitas para uma sequência $\nu(x)$ de infinitos valores de j*

Definição 2.16. *Defina $\bigwedge_\delta(n, m) = \sum(\mathfrak{U}, \epsilon, r_n, \rho_m) \bigcap \bigwedge_\delta^0(n, m)$.*

Lema 2.17. *Se $x \in \sum(\mathfrak{U}, \epsilon, r_n, \rho_m)$, $j \geq j(n, m)$, $j \geq j(n, m)$ $k \geq k(n, m)$ e $\mu(\mathfrak{P}_j^k(x)) \geq \delta\mu(\hat{\mathfrak{P}}_j^k(x))\})$ temos*

$$\mu(\hat{\mathfrak{P}}_j^k(x) \bigcap \sum(\mathfrak{U}, \epsilon)) \geq \delta\mu(\mathfrak{P}_j^k(x)).$$

Prova 5. *Faça $0 < r \leq r_n$ satisfazendo as propriedades (a) e (b). Queremos mostrar que que para qualquer par de inteiros $0 \leq i_i < i_2$ tal que $f^{i_1}(y)$ e $f^{i_2}(y)$ pertencentes a $\mathfrak{P}_j^k(x) \subset B_r(x)$, existe i_3, $i_1 \leq i_3 \leq i_3$ tal que*

$$f^{i_3}(y) \in \overline{B_{\rho_m r}(x)} \bigcap \sum(\mathfrak{U}, \epsilon) \subset \hat{\mathfrak{P}}_j^k(x) \bigcap \sum(\mathfrak{U}, \epsilon).$$

Como

$$x \in \sum(\mathfrak{U}, \epsilon, r_n, \rho_m)$$

podemos aplica a versão forte do Closing lema da seguinte maneira: sejam $w = f^{i_1}(y)$ e $f^m(w) = f^{i_2 - i_1}(f^{i_2}(y)) = f^{i_2 - i_1}(w)$ pertencentes a $\in \mathfrak{P}_j^k(x) \subset B_r(x)$ logo existe $0 \leq m_1 < m_2 \leq m$ e $g \in \mathfrak{U}$ tal que

$$f^{m_1}(w) \in \overline{B_{\rho\bar{r}}}(p), f^{m_2}(w) \in \overline{B_{\rho\bar{r}}}(p),$$

$$g^{m_2 - m_1}(f^{m_2}(w)) = f^{m_2}(w)$$

, *$g(\theta) = f(\theta)$ para $\theta \notin B_\epsilon(f,p)$ e $d(g^i(f^{m_2}(w)), f^j(f^{m_1}(w))) \leq \epsilon$ para $0 \leq j \leq m_2 - m_1$. Basta definir $i_3 = m_1 + i_1$ que teremos também de forma imediata que $f^{i_3}(y) \in \sum(\mathfrak{U}, \epsilon)$ e o resto do desejado. Esta propriedade mostrada agora será importante para estimar a cardinalidade dos seguintes conjuntos:*

$$A = \sharp\{1 \leq i \leq l | f^i(y) \in \hat{\mathfrak{P}}_j^k(x) \bigcap \sum(\mathfrak{U}, \epsilon)\},$$

$$B = \sharp\{1 \leq i \leq l | f^i(y) \in \mathfrak{P}_j^k(x)\}$$

Se $\sharp B = 2$ isto é, $B = \{i_1 i_2\}$ então pela propriedade mostrada existe $i_3 \in A$ logo $\sharp A \geq \sharp B - 1$. Por raciocínio análogo, podemos aplicar o processo indutivo e obter que:

$$\sharp\{1 \leq i \leq l | f^i(y) \in \hat{\mathfrak{P}}_j^k(x) \bigcap \sum(\mathfrak{U}, \epsilon)\} \geq \sharp\{1 \leq i \leq l | f^i(y) \in \mathfrak{P}_j^k(x)\} - 1.$$

Antes de realizar a majoração desejada pelo lema perceba que como μ é uma medida ergódica então existe $y \in M$ tal que :

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1}{l} \sharp\{1 \leq i \leq l | f^i(y) \in \hat{\mathfrak{P}}_j^k(x) \bigcap \sum(\mathfrak{U}, \epsilon)\} = \mu(\hat{\mathfrak{P}}_j^k(x) \bigcap \sum(\mathfrak{U}, \epsilon))$$

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1}{l} \sharp\{1 \leq i \leq l \mid f^i(y) \in \mathfrak{P}_j^k(x)\} = \mu(\mathfrak{P}_j^k(x))$$

Então

$$\mu(\hat{\mathfrak{P}}_j^k(x) \bigcap \sum(\mathfrak{U}, \epsilon)) = \lim_{l\to\infty} \frac{1}{l} \sharp\{1 \leq i \leq l | f^i(y) \in \hat{\mathfrak{P}}_j^k(x) \bigcap \sum(\mathfrak{U}, \epsilon)\} \geq$$

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1}{l} \sharp\{1 \leq i \leq l | f^i(y) \in \mathfrak{P}_j^k(x)\} = \mu(\mathfrak{P}_j^k(x)) \geq \delta\mu(\hat{\mathfrak{P}}_j^k(x)).$$

Isto completa a prova do lema.

■

DEFINIÇÃO 2.18. *Denotamos por $\mathfrak{F}$ a família de conjuntos $\mathfrak{P}_{j_i}^{(k)}(x)$ com*

$$x \in \bigwedge_\delta(n,m) \bigcap \sum(\mathfrak{U}, \epsilon)^c$$

e $j \in \nu(x)$.

Lema 2.19. *Dada uma vizinhança de U de $\bigwedge_\delta(n,m)\bigcap\sum(\mathfrak{U},\epsilon)^c$ existe uma sequência de $x_i \in \bigwedge_\delta(n,m)\bigcap\sum(\mathfrak{U},\epsilon)^c$, $j_i \in \nu(x_i)$,i=1,2,3... tal que*

- *Os conjuntos $\hat{\mathfrak{P}}^{(k)}_{j_i}(x_i)$,i=1,2,3... são disjuntos e estão contidos em U.*
- $\mu(\bigwedge_\delta(n,m)\bigcap\sum(\mathfrak{U},\epsilon)^c - \bigcup_i \hat{\mathfrak{P}}^{(k)}_{j_i}(x_i)) = 0$

Prova 6. *Por argumentos padrões de medida podemos encontrar uma translação $\tau : T^s \hookleftarrow$ tal que*

$$\mu(\tau(\bigcup\{\partial\hat{A}|A \in \mathfrak{P}^{(k)}_{j_i}(x_i), l \geq 1, i \geq 1\})) = 0$$

onde $\partial\hat{A}$ denota a fronteira de $\hat{A}$.De fato se para toda translação $\tau : T^s \hookleftarrow$ temos

$$\mu(\tau(\bigcup\{\partial\hat{A}|A \in \mathfrak{P}^{(k)}_{j_i}(x_i), l \geq 1, i \geq 1\})) \neq 0$$

Então se consideramos o subconjunto de M dado por

$$V = \bigcup_\tau \mu(\tau(\bigcup\{\partial\hat{A}|A \in \mathfrak{P}^{(k)}_{j_i}(x_i), l \geq 1, i \geq 1\}))$$

temos que $\mu(V) = +\infty$ contrarindo que $V \subset M$ e $\mu(M) = 1$.

Então podemos supor sem perda de generalidade, que:

$$\mu(\bigcup\{\partial\hat{A}|A \in \mathfrak{P}^{(k)}_{j_i}(x_i), l \geq 1, i \geq 1\}) = 0.$$

Como j e k não são fixos podemos escollher uma sequência $A_i \in \mathfrak{F}$

1. *$\hat{A}_i \subset U$ para todo $1 \leq i$*
2. *$\mu(\hat{A}_i \bigcap \hat{A}_l) = 0$ para todo $1 \leq l < i$*
3. *Para todo $l < i$ temos que $diamA_i = max\{diamA|A \in \mathfrak{F}, \hat{A} \subset U, \mu(\hat{A}_i \bigcap \hat{A}_l) = 0$ para todo $1 \leq l < i\}$*

É fácil ver que essa propriedade implica

$$\lim_{j\to+\infty} diamA_j = 0$$

Pois se $\lim_{j\to+\infty} diamA_j = L \neq 0$ dado ϵ então existiria j_0 tal que $diamA_j > L - \epsilon$ logo podemos escolher $j_1 j_2 > j_0$ de modo que $\mu(A_{j_1} \bigcap A_{j_2}) \neq 0$ contrariando a construção da família.

$$\sum_i \mu(A_i) = \mu(\bigcup_i A_i) \leq 1$$

pois

$$\mu(\bigcup_i A_i) = \mu((\bigcup_i A_i) \bigcap M) \leq \mu(M) = 1.$$

Afirmamos que para qualquer $N \geq 1$ *temos*

$$\bigwedge_\delta (n,m) \bigcap \sum (\mathfrak{U}, \epsilon)^c - \bigcup_{i=1}^{N} \overline{\hat{A}_i} \subset \bigcup_{i>N} \tilde{A}_i.$$

Suponha que

$$x \in \bigwedge_\delta (n,m) \bigcap \sum (\mathfrak{U}, \epsilon)^c - \bigcup_{i=1}^{N} \overline{\hat{A}_i}.$$

Então existe $A \in \mathfrak{F}$ *com* $x \in A$ *e*

$$\hat{A} \bigcap \bigcup_{i=1}^{N} \overline{\hat{A}_i} = \emptyset.$$

fazendo N *crescer temos que os cubos* $\hat{A}_i$ *vão diminuido e exaurindo o subconjunto* U *de* $\bigwedge_\delta (n,m) \bigcap \sum (\mathfrak{U}, \epsilon)^c$ *então existe um determinado momento,*$N_1 > N$*, em que*

$$\hat{A} \bigcap \hat{A}_i = \emptyset$$

para todo $1 \leq i < N_1$ *e*

$$\hat{A} \bigcap \hat{A}_{N_1} \neq \emptyset.$$

Por outro lado como

$$\hat{A} \bigcap (\bigcup_{i=1}^{N} \overline{\hat{A}_i}) = \emptyset$$

temos

$$\hat{A} \subset (\bigcup_{i=1}^{N} \overline{\hat{A}_i})^c$$

logo

$$\hat{A} \bigcap \hat{A}_{N_1} \subset (\bigcup_{i=1}^{N} \overline{\hat{A}_i})^c \bigcap \hat{A}_{N_1} = \hat{A}_{N_1}$$

implicando

$$\hat{A} \subset \hat{A}_{N_1}.$$

Portanto

$$diam(\hat{A}) \leq diam(\hat{A}_{N_1}).$$

Temos também

$$x \in A \subset \hat{A} \subset \hat{A}_{N_1} \subset \bigcup_{i>N} \hat{A}_i \subset \bigcup_{i>N} \tilde{A}_i$$

completando assim a prova de

$$\bigwedge_{\delta}(n,m)\bigcap\sum(\mathfrak{U},\epsilon)^c-\bigcup_{i=1}^{N}\overline{\hat{A}_i}\subset\bigcup_{i>N}\tilde{A}_i.$$

Segue de

$$\mu(\bigcup\{\partial\hat{A}\mid A\in\mathfrak{P}_{j_i}^{(k)}(x_i),l\geq 1,i\geq 1\})=0$$

. que

$$\mu((\bigwedge_{\delta}(n,m)\bigcap\sum(\mathfrak{U},\epsilon)^c)-\bigcup_{i=1}^{N}\hat{A}_i)=$$

$$\mu((\bigwedge_{\delta}(n,m)\bigcap\sum(\mathfrak{U},\epsilon)^c)-\bigcup_{i=1}^{N}\bar{\hat{A}}_i)\leq$$

$$\mu((\bigwedge_{\delta}(n,m)\bigcap\sum(\mathfrak{U},\epsilon)^c)\leq$$

$$\mu(\bigcup_{i>N}\tilde{A}_i)\leq\sum_{i>N}\mu(\tilde{A}_i)\leq\delta^{-1}\sum_{i>N}\mu(A_i).$$

Por

$$\sum_i\mu(A_i)=\mu(\bigcup_i A_i)\leq 1$$

o lema está provado.

■

Pelos dois últimos lemas temos que

$$\mu(U)\geq\sum_i\mu(\hat{\mathfrak{P}}_{j_i}^{(k)}(x_i))\geq\frac{1}{1-\delta}\sum_i\mu(\hat{\mathfrak{P}}_{j_i}^{(k)}(x_i)\bigcap\sum(\mathfrak{U},\epsilon)^c)=$$

$$\frac{1}{1-\delta}\mu(\bigcup_i\hat{\mathfrak{P}}_{j_i}^{(k)}(x_i)\bigcap\sum(\mathfrak{U},\epsilon)^c)\leq\frac{1}{1-\delta}\mu(\bigwedge_{\delta}(n,m)\bigcap\sum(\mathfrak{U},\epsilon)^c).$$

A últimas desigualdade segue do fato de que

$$\hat{\mathfrak{P}}_{j_i}^{(k)}(x_i)\subset U\subset\bigwedge_{\delta}(n,m)\bigcap\sum(\mathfrak{U},\epsilon)^c$$

Mas se

$$\mu(\bigwedge_{\delta}(n,m)\bigcap\sum(\mathfrak{U},\epsilon)^c)>0$$

podemos escolher U satisfazendo

$$\mu(U)<\frac{1}{1-\delta}\mu(\bigwedge_{\delta}(n,m)\bigcap\sum(\mathfrak{U},\epsilon)^c)$$

contradizendo a última inequação. Portanto

$$\mu(\bigwedge_{\delta}(n,m)\bigcap\sum(\mathfrak{U},\epsilon)^c)=0.$$

Pelo primeiro lema aplicado ao conjunto $\mu(\bigwedge_{\delta}^{0}(n,m)$ temos que $\mu(\bigwedge_{\delta}^{0}(n,m))\geq 1-\delta(k^s+3^sk^s)$.

Além disso a partir da definição de $\bigwedge_{\delta}(n,m)$ podemos escrever

$$\bigcup_{r=1}^{+\infty}\bigwedge_{\frac{1}{r}}(n,m)=\bigcup_{r=1}^{+\infty}(\sum(\mathfrak{U},\epsilon,r_n,\rho_m)\bigcap\bigwedge_{\frac{1}{r}}^{0}(n,m))=$$

$$\sum(\mathfrak{U},\epsilon,r_n,\rho_m)\bigcap(\bigcup_{r=1}^{+\infty}\bigwedge_{\frac{1}{r}}^{0}(n,m))=\sum(\mathfrak{U},\epsilon,r_n,\rho_m)mod(0),$$

onde $mod(0)$ representa a menos de um conjunto de medida nula.Como mostramos acima

$$\mu(\sum(\mathfrak{U},\epsilon)^c\bigcap\bigwedge_{\delta}(n,m))=0$$

para todo $0<\delta<1$ temos que

$$\sum(\mathfrak{U},\epsilon)\supset\bigwedge_{\delta}(n,m))mod(0)$$

para todo $0<\delta<1$ logo

$$\sum(\mathfrak{U},\epsilon)\supset\bigcup_{\delta=0}^{1}\bigwedge_{\delta}(n,m))mod(0).$$

ou seja,

$$\sum(\mathfrak{U},\epsilon)\supset\bigcup_{r=1}^{+\infty}\bigwedge_{\frac{1}{r}}(n,m)\supset\sum(\mathfrak{U},\epsilon,r_n,\rho_m)mod(0).$$

Como a propriedade será satisfeita para todo $n>0$, $m>0$ mas como

$$M=\bigcup_{n\geq 0}\bigcup_{m\geq 0}\sum(\mu,\epsilon,r_n,\rho_m)$$

obteremos que

$$\mu(\sum(\mathfrak{U},\epsilon))=\mu(M)=1$$

e isso completa a prova da proposição que implica no teorema A.

Capítulo 3

Versão Residual do Ergodic Closing Lemma

Inicialmente teremos que introduzir uma topologia em $\mathfrak{M}(f)$ para obter os resultados desejados do capítulo.

Definição 3.1. *Sejam $\mu \in \mathfrak{M}(f)$ um conjunto finito $\epsilon > 0$ e $F = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_s\} \subset C^0(M)$ dados. Defina*

$$V_{\varphi_1,\ldots,\varphi_s;\epsilon} := \{\nu \in \mathfrak{M}(f); | \int \varphi_i d\nu_k - \int \varphi_i d\mu_k |< \epsilon, \forall i = 1, \ldots, s\}.$$

Então a topologia fraca-* é definida estipulando que estes conjuntos $V_{\varphi_1,\ldots,\varphi_s;\epsilon}$ para $\epsilon > 0$ e $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_s\}$ variáveis constituem uma base de vizinhança de μ

Vamos agora caracterizar a convergência nesse espaço.

Lema 3.2. *Uma sequência $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathfrak{M}(f)$ converge para uma medida μ em $\mathfrak{M}(f)$ na topologia fraca-* se e somente se*

$$\int \varphi d\mu_k \to \int \varphi d\mu$$

para toda função contínua $\varphi : M \to \mathbb{R}$.

Prova 7. $(\Rightarrow)$

Considere qualquer função continua φ e forme o conjunto $F = \{\varphi\}$. Como $\mu_n \to \mu$ temos que dado $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que

$$\mu_n \in V_{\varphi;\epsilon}$$

para todo $n > n_0$ logo

$$| \int \varphi d\mu_k - \int \varphi d\mu |< \epsilon$$

para todo

$n > n_0$. Portanto

$$\int \varphi d\mu_k \to \int \varphi d\mu$$

.

($\Leftarrow$)

Se $\int \varphi d\mu_k \to \int \varphi d\mu$ para toda função contínua φ, então dado ϵ e $F = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_s\}$ temos para cada $i \in \{i = 1, \ldots, s\}$ existe n_{i_0} tal que

$$| \int \varphi_i d\mu_k - \int \varphi_i d\mu |< \epsilon$$

para todo $n > n_{i_0}$. Fazendo $n_0 = max\{n_{1_0}, \ldots n_{s_0}\}$ temos $\mu_n \in V_{\varphi_1,\ldots,\varphi_s;\epsilon}$.

■

Lema 3.3. *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo.Se para um x em um conjunto de probabilidade total S temos que dado $\epsilon > 0$ existe um ponto $p = p(x)$ f-periódico que é ϵ-sombreado por x então $\mathfrak{M}(f)$ é o fecho convexo de medidas ergódicas suportadas em órbitas f-periódicas.*

Prova 8. *Relembramos que um conjunto convexo em $\mathfrak{M}(f)$ é fechado sse é fechado na topologia fraca-*. Devido ao Teorema da Decomposição Ergódica $\mathfrak{M}(f)$ é o fecho convexo de probabilidades f-ergódicas. Todo o trabalho será para mostrar que qualquer medida de probabilidade ergódica μ será o limite fraco-* de medidas suportadas em órbitas periódicas. Portanto consideremos uma probabilidade f-ergódica μ. Suponhamos sem perda de generalidade que μ não é suportada numa órbita periódica. Para um ponto $x \in M$ μ-típico temos:*

- *Teorema de Recorrência de Poincaré implica x é recorrente*
- *Pela versão forte do Ergodic Closing Lemma temos que x possui a propriedade de sombreamento*
- *Teorema Ergódico de Birkhoff implica que*

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(x)} \to_{fraca-^*} \mu$$

quando $n \to +\infty$.[Apendice A]

Vamos agora construir as medidas suportadas nas órbitas periódicas. Seja (n_k) *a sequência de tempos de primeiro retorno da órbita de* x *que voltam para* $B(x, \alpha_k)$*, onde* $\alpha_1 = 1$ *e* $\alpha_{k+1} := \frac{d(f^{\alpha_k}(x),x)}{2}$ *para todo* $k \geq 1$*. Portanto* $n_k \to +\infty$ *quando* $k \to +\infty$*.Pela Versão Forte do Ergodic Closing Lemma escolha uma sequência de pontos periódicos* (p_k) *de tal modo que cada* p_k *é* $\frac{\alpha_k}{3}$ *a órbita de* x*.*

Em particular, o período t_k *de* p_k*é de pelo menos* n_k *(de outro modo a órbita de* x *retornaria a* $B(x, \alpha_k)$*ante de* n_k*). Então para* $t_k \geq n_k$ *implica* $t_k \to +\infty$ *quando* $k \to +\infty$ *e até termos uma sequência podemos supor que os* t_k*'s são dinstintos. Defina* μ_k *como uma probabilidade ergódica suportada na órbita de* (p_k)*, ou seja,*

$$\mu_k := \frac{1}{t_k} \sum_{j=0}^{t_k-1} \delta_{f^j(p_k)}.$$

Mostraremos

$$\mu_k \to_{fraca-^*} \mu.$$

De

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(x)} \to_{fraca-^*} \mu$$

temos que

$$\nu_k = \frac{1}{t_k} \sum_{j=0}^{t_k-1} \delta_{f^j(x)} \to_{fraca-^*} \mu$$

quando $k \to +\infty$*. Sejam* $\epsilon > 0$ *e* $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_s\} \subset C^0(M)$ *dados. Tudo o que precisamos verifica é se existe* $k_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* ν_k *pertence a vizinhança*

$$V_{\varphi_1,\ldots,\varphi_s;\epsilon} := \{\nu \in \mathfrak{M}(f); \mid \int \varphi_i d\nu_k - \int \varphi_i d\mu_k \mid < \epsilon, \forall i = 1, \ldots, s\},$$

para todo $k \geq k_0$*.*

De fato, faça $\alpha > 0$ *tal que* $\mid \varphi_i(y)\varphi_i(z) \mid < \frac{\epsilon}{2}$*,* $\forall i = 1, \ldots, s$*,* $\forall y, z \in M$ *tal que* $d(y, z) < \alpha$*. Então, faça* k_0 *tal que* $\alpha_k < \frac{\alpha}{2}$*, e*

$$\mid \int \varphi_i d\nu_k - \int \varphi_i d\mu \mid < \frac{\epsilon}{2},$$

para todo $k \geq k_0$*,* $\forall i = 1, \ldots, s$*. concluimos que*

$$\mid \int \varphi_i d\mu_k - \int \varphi_i d\mu \mid \leq \mid \int \varphi_i d\nu_k - \int \varphi_i d\mu_k \mid + \mid \int \varphi_i d\nu_k - \int \varphi_i d\mu \mid <$$

$$\frac{1}{t_k}\sum_{j=0}^{t_k-1} \mid \varphi_i(f^j(x)) - \varphi_i(f^j(p_k)) \mid + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$

$\forall i = 1, \ldots, s$. A última desigualdade é devida a própria definição de integral. Com isso obtemos que $\mu_k \in V_{\varphi_1,\ldots,\varphi_s;\epsilon}$, para todo $k \geq k_0$. Portanto $\mu_k \rightarrow_{fraca-*} \mu$

■

DEFINIÇÃO 3.4. *Seja $\mathbb{X}$ um estaço topológico. Dizemos que $\mathfrak{R} \subset \mathbb{X}$ é um conjunto residual de $\mathbb{X}$ se ele puder ser escrito como interseção enumerável de abertos densos em $\mathbb{X}$.*

Teorema 3.5. Versão Residual do Ergodic Closing Lemma

Sejam $\mathfrak{M}(f)$ o espaço das probabilidades f-invariantes e $Diff(M)$ o espaço dos difeomorfsmos sobre a variedade M com a topologia C^1. Então existe um conjunto residual $\mathfrak{R} \in \mathfrak{M}(f)$ tal que para toda $f \in \mathfrak{R}$ vale que $\mathfrak{M}(f)$ é igual ao fecho convexo das probabilidades invariantes suportadas em órbitas periódicas.

Prova 9. *Devido ao último lema se para alguma f e qualquer ponto $q \in M$ que retorna suficientemente próximo de si mesmo, tem algum interado que é sombreado por um ponto f-periódico, então para f, nós temos que $\mathfrak{M}(f)$ é o fecho convexo de medidas ergódicas suportadas em órbitas periódicas. De fato, se isso ocorre, como na prova do teorema da Versão Forte do Closing Lemma segue que para qualquer $\epsilon > 0$ o conjunto dos pontos $x \in M$ que são ϵ-sombreadas por pontos f-periódicos de probabilidade total. Seja $\epsilon > 0$ dado e seja $\hat{B} = B(\hat{f}, \hat{\epsilon})$ para alguma bola em $Diff(M)$. Fixe $m \in \mathbb{N}$. Não há perda de generalidade generalidade em supor que todos os pontos periódicos de f com período até m são hiperbólicos, como tais tipos de endomorfismos formam um subconjunto aberto e denso em $Diff(M)$. Também pegaremos $\hat{\epsilon}$ suficientemente pequeno tal que cada ponto periódico p_g de $g \in \hat{B}$ é uma continuação analítica hiperbólica de um ponto periódico p_f de f.Fazendo $\hat{\epsilon}$ suficientemente pequeno , podemos supor que $d(f^j(x), g^j(x)) < \frac{\epsilon}{3}$, para todo $x \in M$ e $f, g \in B$, $j = 1, \ldots, m$. Agora pegue qualquer ponto $x \in M$ e qualquer $f \in \hat{B}$. Pelo lema na primeira parte do teorema A, existe $r > 0$ tal que, se $x, f(x) \in B(q, r)$, então existe $0 \leq m_1 \leq m_2 \leq m$ tal que $f^{m_1}(x)$ é $\frac{\epsilon}{3}$-sombreado por um ponto p_g $m_1 - m_2$-periódico para g-próxima em $\hat{B}$. Devido a nossa escolha de $\hat{B}$, f também tem um ponto p_f cuja f-órbita a g-órbita de p_g. Portanto, concluimos que $f^{m_1(x)}$ é ϵ-sombreado por p_f. Agora $\mathbb{S}_{m,\epsilon}$ é a união de todas as bolas $\hat{B}$. Portanto $\mathbb{S}_{m,\epsilon}$é um aberto e denso de $Diff(M)$. Seja uma sequência $\epsilon \downarrow 0$. É claro que*

$$\hat{\mathbb{S}} := \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \mathbb{S}_{m,\epsilon}$$

é um conjunto residual que para qualquer $\epsilon > 0$, qualquer $f \in \bigwedge$ e qualquer $q \in M$ que retorna suficientemente próximo de si mesmo, q possui algum iterado que é ϵ-sombreado por algum ponto f-periódico. Isto implica que o conjunto dos pontos $x \in M$ que são sombreados por pontos f-periódicos tem f-probabilidade total. Logo o resultado segue do último lema.

■

Capítulo 4

Apêndices

4.1 Apêndice A

Dissemos no capítulo 3 que a partir do Teorema Ergódico de Birkhoff teríamos:

$$\nu_k = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(x)} \rightarrow_{fraca-^*} \mu$$

quando $n \rightarrow +\infty$.

Para tal precisamos mostrar um lema que garantirá esse fato imediatamente.

Lema 4.1. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *$\mathfrak{M}(f)$ possui um único elemento*

2. *existe $\mu \in \mathfrak{M}(f)$ tal que para toda aplicação $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e qualquer $x \in M$*

$$\lim_{n\rightarrow+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^i(x)) = \int \varphi d\mu$$

3. *Para toda $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(f^i(x))$ converge pontualmente a uma constante*

4. *Para toda $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(f^i(x))$ converge uniformemente a uma constante*

Prova 10. (4) $\Rightarrow$ (3) *Imediato*

(3) $\Rightarrow$ (2) *Seja $C^0(M)$ o espaço das funções contínuas de M em $\mathbb{R}$. Defina $\xi : C^0(\mathfrak{M}) \rightarrow \mathbb{R}$ por*

$$\xi(\varphi) = \lim_{n\rightarrow+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^i(x))$$

para todo $x \in M$. Afirmamos que essa aplicação é um funcional linear positivo.A linearidade é imediata resta mostra que é positivo. Se $\varphi \geq 0$ então

$$\varphi(f^i(x)) \geq 0$$

para todo $i \in \mathbb{N}$ logo $\xi(\varphi) \geq 0$. Consequentemente pelo Teorema da Representação de Riesz existe uma única probabilidade invariante μ tal que

$$\int \varphi d\mu = \xi(\varphi)$$

para toda $\varphi \in C^0(\mathfrak{M})$. Além disso a medida μ encontrada é invariante pois $\xi(\varphi \circ f) = \xi(\varphi)$.

(2) $\Rightarrow$ (1) *Suponhamos a exstência de $\nu \in \mathfrak{M}(f)$. Sabemos pelo Teorema Ergódico de Birkhoff que*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^i(x))$$

converge para ν-q.t.p para uma função $\hat{\varphi}$ tal que

$$\int \varphi d\nu = \int \hat{\varphi} d\nu.$$

Mas os fatos das médias convergirem pontualmente para a função constante igual a $\int \varphi d\mu$ segue que $\int \hat{\varphi} d\nu = \int \varphi d\mu$. Como ν e μ integram funções contínuas da mesma forma então são idênticas.

(1) $\Rightarrow$ (4) *Lembre-se qie a constante para qual a média de Birkhoff converge tem que ser $\int \varphi d\mu$, onde μ é a única probabilidade invariante de f. Suponha que (4) não valha então. então, existem $\psi \in C^0(M)$ e $\epsilon > 0$ tais que para todo $n_0 \geq 1$ existem $n \geq n_0$ e x_n tais que*

$$\mid \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi(f^i(x_n)) - \int \psi d\mu \mid \geq \epsilon.$$

Ou seja, exite uma subsequência $\{n_j\}_j$ e para cada j um ponto x_{n_j} tais que

$$\mid \frac{1}{n_j} \sum_{j=0}^{n_j-1} \psi(f^i(x_{n_j})) - \int \psi d\mu \mid \geq \epsilon.$$

Tomes as medidas μ_{n_j} dadas por

$$\mu_{n_j} = \frac{1}{n_j} \sum_{j=0}^{n_j-1} \delta_{f^i_{x_{n_j}}}.$$

Para elas, temos

$$| \int \psi d\mu_{n_j} - \int \psi d\mu | \geq \epsilon.$$

Por causa da compacidade de $\mathfrak{M}(f)$*, existe uma uma subsequência de* $\{n_j\}_j$ *(suporemos que é a mesma, para facilitar a notação) tal que*

$$\mu_{n_j} \to \mu_\infty$$

, onde $\mu_\infty = lim_{j\to+\infty}\frac{1}{n_j}\sum_{j=0}^{n_j-1}\delta_{f^i_{x_{n_j}}}$*.Pela desigualdade acima* $\mu \neq \mu_\infty$*. Como* μ_∞ *é invariante provamos que* $\mathfrak{M}(f) \supset \{\mu, \mu_\infty\}$ *contrariando (1).*

■

Observaremos que se μ é ergódica então toda função invariante $\psi \in C^0(M)$ é constante num concjunto de medida total.Com efeito,considerando $\psi \in C^0(M)$uma função qualquer invariante temos que a pré-imagem $A = \psi^{-1}(I)$ de qualquer intervalo $I(R)$ é um conjunto invariante pois

$$f^{-1}(A) = f^{-1} \circ \psi^{-1}(I) = (\psi \circ f)^{-1}(I) = \psi^{-1}(I) = A.$$

Como μ é ergódica temos que temos que essa pré-imagem tem medida zero ou 1. Como o intervalo I é arbitrário, isto prova que ψ constante num conjunto de probabilidade total μ.

Como μ é ergódica e por um argumento simples sabemos que $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(f^i(x))$ é invariante então sabemos pelo argumento anterior que $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(f^i(x))$ é costante num conjunto de medida de medida total.Então a condição (3) do lema é satisfeita para um conjunto de medida total. Logo

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(f^i(x)) = \int \varphi d\mu$$

para $\mu - q.t.p\ x \in M$.

Sejam $\{\varphi_1, ldots, \varphi_s\}$ e $\epsilon > 0$ então pela igualdade acima temos que existe n_{i_0} para todo $i \in \{1, \ldots, s\}$ tal que

$$| \int \varphi_i d\nu_k - \int \varphi_i d\mu | \epsilon,$$

para todo $n > n_{i_0}$ onde

$$\nu_k := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\delta_{f^j(x)}.$$

Portanto

$$\nu_k = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\delta_{f^j(x)} \rightarrow_{fraca-^*} \mu$$

quando $n \rightarrow +\infty$.

4.2 Apêndice B

Referências Bibliográficas

[Castro] A. Castro, -*A criterion of generic hyperbolicity based on periodic points*, to appear.

[M] R. Mañé, -*An Ergodic Closing Lemma* Ann.of Math. , 116, (1982), 503-540.

[Pugh1] C. Pugh,C. Robinson -*The* C^1 *Closing Lemma, including Hamiltonians* Ergodic Theory Dynam. Systems 3, (1983),2 61-313.

[Pugh2] C. Pugh, -*The Closing Lemma* , Amer. J. Math. , 89, (1967), 956-1009

[Robinson] C. Robinson, -*Introduction to the Closing Lemma* ,The Structure of Attractors in Dynamical Systems, Lectures Nontes in Math. , 668, (1978), Springer Verlag.