Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática - IM
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PGMAT
Tese de Doutorado

A fronteira de Martin de uma extensão por um grupo hiperbólico

Sara Ruth Pires Bispo

Salvador-Bahia
12 de Novembro de 2019

A fronteira de Martin de uma extensão por um grupo hiperbólico

Sara Ruth Pires Bispo

Tese de Doutorado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Doutora em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Manuel Stadlbauer.

Salvador-Bahia
12 de Novembro de 2019

Bispo, Sara Ruth Pires

A fronteira de Martin de uma extensão por um grupo hiperbólico / Sara Ruth Pires Bispo. – Salvador: UFBA, 2019.

Quantidade de folhas f.60 : il.

Orientador: Prof. Dr. Manuel Stadlbauer.

Tese (Doutorado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática e Estatística, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2019.

Referências bibliográficas.

1. Formalismo Termodinâmico. 2.Extensão por grupo hiperbólico 3. Fronteira de Martin. I.Stadlbauer, Manuel II. Título.

CDU : 515.122.4

Tese de Doutorado

Sara Ruth Pires Bispo

Tese de Doutorado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Doutora em Matemática, aprovada em 12 de Novembro de 2019.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Manuel Stadlbauer (Orientador)
UFRJ

Prof. Dr. Vilton Jeovan Viana Pinheiro
UFBA

Prof. Dr. Vitor Domingos Martins de Araújo
UFBA

Prof. Dr. Tertuliano Franco Santos Franco
UFBA

Prof. Dr. Leandro Martins Cioletti
UNB

À minha família, e ao meu esposo Jhoyne.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus pelo dom da vida, renovado a cada provação superada e a cada sonho que se realizou, como esse que agora se torna realidade.

Fruto de muito estudo, dedicação e persistência, este trabalho contou com o apoio e a colaboração de muitas pessoas, às quais dedico meus agradecimentos especiais:

À minha família, pela base sólida e por sempre me dar forças para encarar a vida, e pelo seu imenso amor. À minha mãe, Maria, pelos sacrifícios que fez pra que eu pudesse prosseguir nos estudos, pelo exemplo de vida, dedicação e amor. Aos meus irmãos, Raquel, Patrícia e Carlos, pela presença na minha vida e pelo auxílio nas minhas escolhas. Às minhas sobrinhas, Lívian, Sophia e a pequena Larissa, pelo amor e por me fazer sorrir nas horas difíceis: amo muito vocês!

Ao meu esposo, Jhoyne: essa vitória também é sua! Sem você tudo seria mais difícil. Amo-te! Aos meus sogros, José Carlos e Ivanete, pelo carinho e pelas palavras de incentivo no momento certo.

Ao meu orientador, Manuel Stadlbauer, por me orientar, pelos valiosos momentos de discussão e conhecimentos compartilhados.

Agradeço também aos professores Vilton Pinheiro, Tertuliano Franco e Leandro Cioletti por aceitarem participar da comissão julgadora da tese, é um privilégio tê-los e agradeço pelas sugestões e comentários. Em especial, ao Prof. Vítor Araújo, pela disponibilidade nos momentos que precisei e pela atenção que dedica a todos alunos da Pós-graduação.

Aos colegas de Doutorado, Felipe, Jacqueline, Darlan e, em especial, a Fabíola, Mariana e Elaine. Agradeço a amizade, o carinho e a cumplicidade, demonstrados na alegria dos bons momentos e na ansiedade das horas difíceis, dando-me forças para continuar essa trajetória. Sem dúvida, as melhores pessoas que a vida me permitiu conhecer.

Aos funcionários e professores do Departamento de Matemática da UFBA, pelo seu profissionalismo.

À CAPES e a FAPESB pela bolsa concedida.

"Dar o melhor de si é mais importante que ser o melhor"

–Mike Lermer

Resumo

As desigualdades uniformes de Ancona-Gouëzel estabelecidas para passeio aleatório em grupos hiperbólicos foram estendidas para extensão por grupo hiperbólico. Como aplicação, obteve-se a identificação das medidas conformes minimais com a fronteira visual do grupo hiperbólico. No primeiro principal resultado do trabalho, estabeleceram-se essas desigualdades. Para tanto, fora necessário a generalização das funções de Green para as extensões por grupos hiperbólicos, por meio da família de operadores de Green. Como aplicação, obteve-se uma função Hölder da fronteira visual para a fronteira de Martin. Para obter uma função análoga na direção inversa, provando que ambas as fronteiras são bi-Hölder homeomorfas, definiu-se uma família de medidas conformes e minimais. Mostrou-se que a fronteira de Martin coincide com esse conjunto de medidas.

Palavras-chave: Extensão por grupo hiperbólico; Grupos hiperbólicos; Medidas conformes e minimais; Operador de Green.

Abstract

Ancona-Gouëzel uniform inequalities established for random walking in hyperbolic groups were extended to extension by hyperbolic group. As application, we obtained the identification of the minimum conforming measures with the visual border of the hyperbolic group. In the first main result of the work, these inequalities were established. For this purpose, it was necessary to generalize Green's functions to the extensions by hyperbolic groups, through Green's family of operators. As an application, a Hölder function from the visual boundary to the Martin boundary was obtained. Te obtain a similar function in the reverse direction, proving that both boundaries are bi-Holder homeomorphic, a family of conforming and minimal measures was defined. Martin's border has been shown to coincide with this set of measures.
Keywords: Extension by hyperbolic group; Hyperbolic groups; Conforming and minimal measures; Green Operator.

Sumário

Introdução **1**

1 Cadeias de Markov Topológicas e Extensões por Grupos **6**

1.1 Caminhos aleatórios sobre grupos 6

1.2 Cadeia de Markov Topológica 9

1.2.1 Extensões por grupos de cadeias de Markov Topológicas 11

1.3 Caminhos aleatórios e extensões por grupos 14

2 Grupos hiperbólicos e Fronteira visual **17**

2.1 Espaço métrico Gromov-hiperbólico 17

2.2 Grupos hiperbólicos 19

2.3 Fronteira Visual 20

3 Família de Operadores de Green **22**

3.1 Desigualdade de Ancona 22

3.2 Operador de Green 22

4 Medida reduzida e Dominação principal **28**

4.1 Medidas excessivas e conformes 28

4.2 Medida reduzida 30

4.3 O princípio da Dominação 31

5 Desigualdade de Ancona-Gouëzel-Lalley para extensões por grupos hiperbólicos **32**

5.1 A desigualdade de Ancona para funções de Green 32

5.2 Desigualdade de Ancona para operadores de Green 32

5.2.1 Teorema A 36

6 A geometrização da fronteira de Martin **43**

6.1 Fronteira de Martin 43

6.2 Teorema B 46

6.3 Equivalência entre a Fronteira de Martin e a Fronteira visual 52

Perspectivas Futuras **53**

Referências Bibliográficas **54**

Introdução

Os caminhos aleatórios são objetos de estudos desde o século XX. Podemos pensá-los como um modelo que representa vários passos aleatórios dados de forma consecutiva. Nesse sentido, os passos podem não ser todos iguais, sendo que as orientações são determinadas por uma variável aleatória. Caso esta dependa do tempo, o processo é denominado estocástico. Diante disso, pode-se afirmar que caminhos aleatórios são um protótipo para vários modelos, em que as transições só podem ser feitas entre vizinhos. Em 1921, Pólya em [13] mostrou que o caminho aleatório simétrico em uma e em duas dimensões é recorrente, já quando a dimensão é maior que dois o caminho aleatório é transiente.

Neste trabalho, estaremos interessados nos caminhos aleatórios em grupos que podem ser definidos como uma cadeia de Markov cujo espaço de estados é o conjunto de elementos desse grupo, e a cada passo, a probabilidade de transição de um elemento para outro é dado por incremento que caracteriza a já citada caminhada aleatória. Assim, a referida cadeia move-se, multiplicando o estado atual, à esquerda, por um elemento aleatório do grupo escolhido de acordo com o incremento.

Além dos caminhos aleatórios em grupos, outro objeto de interesse do presente estudo são os grupos hiperbólicos, cuja noção foi introduzida por Gromov (ver [4]) que começou a investigar a ligação entre as propriedades algébricas de um grupo e as propriedades geométricas de um espaço, em que esse grupo age por isometrias. Diante disso, observou-se que quando os espaços em questão têm algumas características de curvatura hiperbólica ou de curvatura negativa essa ligação é mais forte, levando, por conseguinte, às noções de espaços Gromov-hiperbólicos e a de grupos hiperbólicos.

Isto posto, uma das formas de estudar caminhos aleatórios é por meio da teoria do potencial cujo objeto central é a função de Green, do matemático britânico George Green, o primeiro a desenvolver este conceito na década de 1830.

A função de Green é muito utilizada para resolver equações diferenciais não homogêneas sujeitas a condições iniciais. No estudo moderno das equações diferenciais parciais, essa função é estudada principalmente do ponto de vista das soluções fundamentais.

Para o nosso contexto, podemos pensar a função de Green $G_r(x, y)$ como o número médio de passagens em y se o caminho aleatório começa a partir de x. Mais precisamente, para $1 \leq r < R$ e $x, y \in G$

$$G_r(x,y) := \sum_{n=0}^{\infty} r^n p_n(x,y)$$

em que R é o raio de convergência da série e p_n é a probabilidade de ir de x a y no tempo n.

Além disso, cabe acrescentar que para a teoria do potencial, as funções de Green caracterizam a fronteira de Martin, a qual tem sido predominante nos estudos de caminhos aleatórios em grupos não abelianos, principalmente, ao que tange sua relação com a geometria de grupo.

À vista disso, Ancona em 1987 [3] estudou essa relação para grupos hiperbólicos, mostrando que para $r < R$ a fronteira geométrica (ou fronteira visual) é homeomorfa à fronteira de Martin. O ponto crucial do argumento foi um sistema de desigualdades que a grosso modo afirma que a função de Green $G_r(x,y)$ é quase multiplicativa na direção de uma geodésica. Ademais, tais desigualdades sempre são válidas para $r < R$. Esses resultados de Ancona foram ampliados para o parâmetro R pelos matemáticos Gouëzel e Lalley.

Em [9], Gouëzel e Lalley mostraram que a fronteira de Martin é homeomorfa à fronteira geométrica para grupos Fuchsianos co-compactos. Um fato crucial para conseguir esse resultado foi mostrar que a desigualdade de Ancona se estende a R, com isso, pode-se concluir que a fronteira de Martin para $R = r$ coincide com a fronteira geométrica. Além disso, Gouëzel e Lalley mostraram o teorema do limite local para as probabilidades de transição: $p_n(x,y) \approx C(x,y)R^{-n}n^{-3/2}$, onde $1/R$ é o raio espectral do correspondente caminho aleatório.

Em [8] Gouëzel estendeu esses resultados para grupos hiperbólicos. O processo para consegui-los foi o mesmo realizado anteriormente, provando que a desigualdade de Ancona é satisfeita para grupos hiperbólicos. Com isso, Gouëzel demonstrou que a fronteira de Martin é homeomorfa à fronteira geométrica de um grupo hiperbólico, incluindo o caso $r = R$.

Diante disso, nosso objetivo nesse trabalho é generalizar os resultados obtidos por Gouëzel em [8] para caminhos aleatórios. Nesse caso, quem generaliza os caminhos aleatórios são as extensões por grupos. Do ponto de vista abstrato, uma extensão por grupo de um espaço shift Σ por um grupo discreto G é definida por

$$T : \Sigma \times G \to \Sigma \times G, (x,g) \mapsto (\theta x, g\kappa(x)),$$

onde θ é a aplicação shift e $\kappa : \Sigma \to G$ uma função localmente constante. O primeiro passo para conseguirmos uma generalização dos resultados de Gouëzel foi generalizar a função de Green para as extensões por grupos. Nesse contexto quem generaliza as funções de Green é uma família de operadores, que chamaremos de família de operadores de Green.

Um dos nossos principais resultados no presente estudo será estabelecer a desigualdade de Ancona para extensões por grupos hiperbólicos, e para as famílias de operadores de Green (ver Teorema A), que chamaremos de Teorema de Ancona-Gouëzel-Lalley, o qual foi fundamental para mostrarmos o principal objetivo desta tese: mostrar que a fronteira visual de um grupo hiperbólico é homeomorfa à fronteira de Martin de uma extensão por grupos hiperbólicos.

Assim, para entendermos melhor esse resultado, tomemos duas sequências Gromov de G (ver Definição 2.3.1). Diremos que elas são equivalentes se o produto Gromov entre elas convergem para o infinito, ou seja, essas sequências convergem para o mesmo limite no infinito. Definiremos a fronteira de G como o conjunto de todas as classes de equivalência dessa relação.

Além disso, usando [7] definiremos uma métrica na fronteira de G, chamada métrica visual, já que para definirmos a fronteira de Martin nos inspiramos na sua construção clássica. Primeiro definiremos a aplicação (onde $\mathbb{G}_r$ é o operador de Green)

$$\mathbb{K}_r(h,\cdot,\cdot) : \Sigma \times G \to \mathbb{R},\ (x,g) \mapsto \frac{\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_h)(x,g)}{\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{\mathrm{id}})(x,g)},$$

e o conjunto

$$M_r := \{(x,g) \in \Sigma \times G : |\kappa^n(x)| \to \infty \text{ e } \lim_{n\to\infty} \mathbb{K}_r(h, T^n(x,g)) \text{ existe para todo } h \in G\},$$

onde $T^n(x,g) = (\theta^n(x), g\kappa^n(x))$ e $\kappa^n(x) := \kappa(x)\kappa(\theta x)\cdots\kappa(\theta^{n-1}x)$. Em M_r vamos dizer que (x,g) é equivalênte a $(\tilde{x},\tilde{g})$ se, e somente se,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{K}_r(h, T^n(x,g)) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{K}_r(h, T^n(\tilde{x},\tilde{g}))$$

para todo $h \in G$. Tomando como base os trabalhos de [19], definiremos a fronteira de Martin $\mathcal{M}_r$, por $\mathcal{M}_r := M_r/\sim$, além disso, conseguimos definir uma métrica em $\mathcal{M}_r$ (ver Lema 6.1.2).

Usando o Teorema de Ancona-Gouëzel-Lalley obtemos uma geometrização por uma equivalência Hölder da fronteira visual com a fronteira Martin, mais precisamente, conseguimos uma aplicação bejetiva $\psi : (\partial G, d_{\text{visual}}) \to (\mathcal{M}_r, d^r_{\text{Martin}})$ α- Hölder contínua, para um determinado α.

Para mostrarmos a direção inversa, ou seja, aplicação contínua da fronteira de Martin para a fronteira visual, a estratégia é definir uma família de medidas conformes minimais. Com isso, mostraremos que qualquer ponto de Martin corresponde a uma medida conforme e minimal, Teorema B. Com essa importante relação, pode-se concluir que a fronteira de Martin é homeomorfa à fronteira de G.

Após versar sobre essas noções essenciais à compreensão do presente trabalho, cabe esclarecer sua organização. No primeiro capítulo, introduziremos as definições e os

resultados preliminares, necessários para o desenvolvimento do nosso estudo acerca de caminhos aleatórios sobre grupo, de Cadeia de Markov topológica e a de extensão por grupos de cadeias de Markov Topológicas com base no artigo [17]. Ademais, relacionaremos também caminhos aleatórios e extensões por grupos, provando que extensão por grupo é mais geral.

Já no segundo capítulo, vamos estudar grupos hiperbólicos e fronteira visual. Para a sua construção, os trabalhos de Coornaert e Papadopoulos em [4] foram fundamentais.

No terceiro capítulo, apresentaremos a família de operadores de Green. Para tanto, usaremos como base os trabalhos de [15] e [8]. Além disso, estenderemos alguns resultados relevantes de Gouëzel sobre a função de Green, para a família de operadores de Green.

Já no quarto capítulo, vamos desenvolver a teoria do potencial de medidas conformes e excessivas, já que, nos capítulos posteriores vamos relacionar a fronteira visual com as medidas conformes minimais.

No quinto capítulo, apresentaremos um dos nossos principais resultados para a presente tese, qual seja, a desigualdade de Ancona-Gouëzel-Lalley para extensões por grupos hiperbólicos. Também apresentamos alguns resultados relevantes que usaremos para provar tal resultado.

Por último, no sexto capítulo, mostraremos um resultado extremamente interessante. Através das medidas conformes e minimais, provaremos que a fronteira de Martin é homeomorfa à fronteira visual.

Capítulo 1

Cadeias de Markov Topológicas e Extensões por Grupos

Neste capítulo apresentaremos algumas definições e alguns resultados preliminares, os quais serão necessários para o desenvolvimento do trabalho. Inicialmente, estudaremos caminhos aleatórios sobre grupos, as cadeias de Markov Topológicas e as extensões por grupos.

Na última seção, vamos relacionar caminhos aleatórios e extensões por grupos, mostrando que estas são uma generalização de caminhos aleatórios.

1.1 Caminhos aleatórios sobre grupos

Considere um grupo enumerável G e uma medida de probabilidade μ cujo suporte é um gerador de G. Informalmente, caminhos aleatórios em G obtêm-se multiplicando elementos aleatórios em G independentemente distribuídos de acordo com μ.

Assim, veremos a definição formal de caminhos aleatórios segundo os trabalhos de Kaimanovich e Vershik (ver em [11]).

Seja G um *grupo discreto* com o elemento identidade em G, denotado por id dotado de uma operação associativa $G \times G \to G$ tal que para todo $g \in G$

i) $\mathrm{id} \cdot g = g$ e $g \cdot \mathrm{id} = g$;

ii) existe um elemento inverso $g^{-1} \in G$ para o qual $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = \mathrm{id}$;

iii) G é enumerável e munido com a topologia discreta.

Se μ é uma medida de probabilidade sobre G, o par (G, μ) será chamado de um grupo com medida. O *suporte da medida* μ será denotado por $\sup \mu$:

$$\sup \mu = \{g \in G : \mu(g) > 0\}. \tag{1.1}$$

A medida μ será chamada *admissível* se o semigrupo gerado pelo suporte é todo o grupo G, *finitária* se $\sup \mu$ é finito, e *simétrica* se $\mu(g) = \mu(g^{-1})$ para todo $g \in \sup \mu$.

Definição 1.1.1. *Um processo estocástico em um espaço topológico X é uma coleção de variáveis aleatórias $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $w \mapsto (X_n(w) : n \in \mathbb{N})$ é mensurável em relação a σ-algebra Boreliana $\mathcal{B}(X^{\mathbb{N}})$ gerada pela topologia produto.*

Observe que X_n representa o estado do processo no tempo n. Como $\mathbb{N}$ é um conjunto enumerável, então $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é dito um processo estocástico discreto no tempo. Portanto, um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias que descreve a evolução de algum processo através do tempo.

Definição 1.1.2. *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e (X_n) uma sequência de aplicações mensuráveis de $\Omega \to G$. Diz-se que (X_n) é um caminho aleatório com incrementos independentes μ se, para cada $n \in \mathbb{N}, g_i \in G, i = 1, ..., n$*

$$P(X_1 = g_1, ..., X_n = g_n) = \prod_{i=1}^{n-1} \mu(g_i^{-1} g_{i+1}). \tag{1.2}$$

Em outras palavras, a posição de um caminho aleatório pode ser obtida a partir da anterior, através da multiplicação à direita com um elemento aleatório do grupo com distribuição μ. Nota-se que a definição de caminhos aleatórios segue apenas pela sua probabilidade de transição (sem qualquer distribuição inicial fixada), assim, o caminho aleatório pode ser identificado com o par (g, μ).

O caminho aleatório esquerdo pode ser definido similarmente com a probabilidade de transição $P(g|h) = \mu(gh^{-1})$. Evidentemente, $P(g^{-1}|h^{-1}) = \mu(h^{-1}g)$ e substituindo a medida μ por uma reflexão, reduz o estudo de caminhos aleatórios à esquerda ao estudo do caso direito somente.

Vejamos agora dois exemplos de caminhos aleatórios. O primeiro exemplo é baseado em caminhos aleatórios de Polya (ver [13]) em $\mathbb{Z}^d$. Já o segundo será o grupo livre $\mathbb{F}_d$. Ressalta-se que, no capítulo 3, veremos que esse grupo é um exemplo clássico de grupo hiperbólico.

Exemplo 1 Seja $G = \mathbb{Z}$ caminho aleatório simples, em que o espaço de estados são os números inteiros. As transições só ocorrem entre estados vizinhos, $P_{i,i+1} = p = 1 - P_{i,i-1}$, com $0 \leq p \leq 1$. Se $p = 0$, as transições são somente a esquerda, por outro lado, caso $p = 1$, elas são só para a direita. Já quando $p = \frac{1}{2}$, as transições satisfazem,

$$P_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & j = i - 1 \text{ ou } j = i + 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e a cadeia vai de um estado para o da esquerda ou para o da direita com a mesma probabilidade. Por isso a cadeia é chamada de caminho aleatória simples simétrico. Para $G = \mathbb{Z}^2$, temos

$$P(X_{n+1} = z \pm e_i | X_n = z) = \frac{1}{4}$$

onde e_i refere-se ao i-ésimo elemento da base canônica de $\mathbb{Z}^2$. Quando tomamos $G = \mathbb{Z}^d$, temos um resultado fundamental, devido a Pólya, 1921 (ver [13]), no qual, se $p = \frac{1}{2d}$, então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{\mathrm{id}}(X_{2n} = \mathrm{id})}{c_d.n^{\frac{-d}{2}}} = 1$$

e

$$P_{\mathrm{id}}(X_k = \mathrm{id} \text{ infinitamente}) = \begin{cases} 1 & \text{se } d \leq 2 \\ 0 & \text{se } d > 2 \end{cases}.$$

Ou seja, o caminho aleatório simétrico em $\mathbb{Z}^d$ é recorrente se, e somente se, $d \leq 2$.

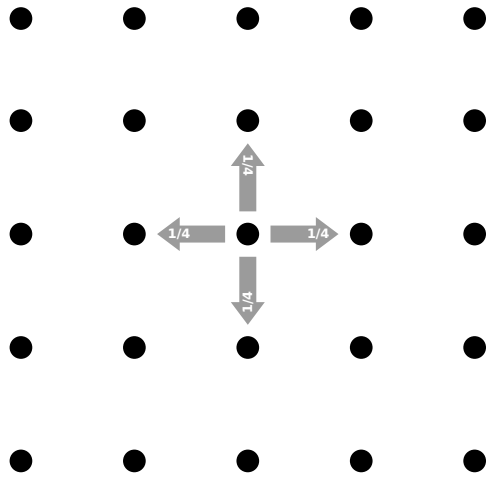

Figura 1.1: Caminho aleatório $\mathbb{Z}^2$

Exemplo 2 Seja $\mathcal{F}_d = \{e_1, e_1^{-1}, \ldots, e_d, e_d^{-1}\}$. O *grupo livre* $\mathbb{F}_d$ é definido por

$$\mathbb{F}_d := \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \{(v_1, \ldots, v_m) \in \mathcal{F}_d^m : v_i \neq v_{i+1}^{-1}, \forall i = 1, \ldots, m-1\}.$$

A aplicação $\mathbb{F}_d \times \mathbb{F}_d \to \mathbb{F}_d$, onde

$$(v_1, \ldots, v_m) \cdot (w_1, \ldots, w_n) = (v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_n)$$

o qual pertence a $\mathbb{F}_d$, é a palavra reduzida por $e_i e_i^{-1} = e_i^{-1} e_i = \mathrm{id}$. Por exemplo, para $d = 2$ temos o grupo livre com dois geradores, isto é, $\mathbb{F}_2 =< e_1, e_2, e_1^{-1}, e_2^{-1} >$. Um resultado importante de caminhos aleatórios em grupos livres $G = \mathbb{F}_d$, é o Teorema de Gerl-Woess

em 1986 (ver [5]), que afirma que, se $\mu(e_i^{\pm}) = \dfrac{1}{2d}$ e $\rho := \dfrac{\sqrt{2d-1}}{d}$, então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{\mathrm{id}}(X_n = \mathrm{id})}{c_d.n^{\frac{-3}{2}}\rho^n} = 1 \text{ e } P_{\mathrm{id}}(X_k = \mathrm{id} \text{ infinitamente}) = 0.$$

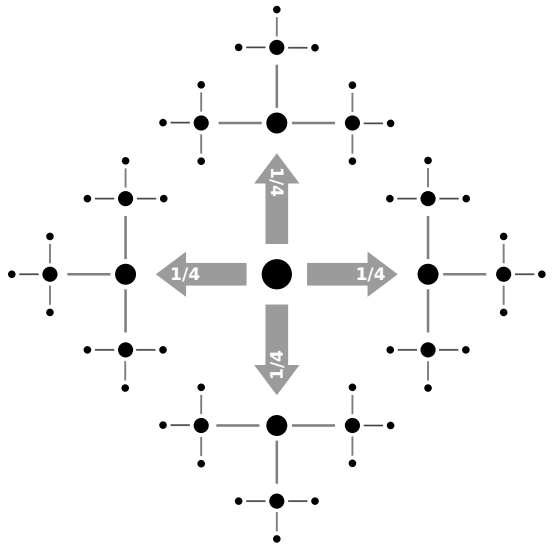

Figura 1.2: Caminho aleatório $\mathbb{F}_2$

1.2 Cadeia de Markov Topológica

Esta seção é baseada no artigo [17], na qual, vamos definir e estudar as principais características das cadeias de Markov topológicas, necessárias para um melhor entendimento deste trabalho. Já na próxima seção estudaremos as extensões por grupo de cadeia de Markov topológica.

Sejam $\mathcal{W}$ um conjunto enumerável, chamado de *alfabeto* e $A = (a_{ij})_{i,j\in I}$ uma matriz tal que $a_{ij} \in \{0,1\}$ para todo $i,j \in I$, e que a matriz A, chamada matriz de transição, não contenha linhas ou colunas com todos os elementos iguais a 0. Vamos denotar o par (Σ_A, θ) a correspondente cadeia de Markov topológica (ou, espaço shift), definida por

$$\Sigma_A := \{(w_k)_{k=0,1,\ldots} : w_k \in \mathcal{W} \text{ e } a_{w_k w_{k+1}} = 1, \forall k = 0,1,\ldots\},$$
$$\theta : \Sigma_A \to \Sigma_A : (w_k : \ k = 0,1,\ldots) \mapsto (w_k : \ k = 1,2,\ldots).$$

Se $\mathcal{W}$ for um conjunto finito, então (Σ_A, θ) é chamado de *subshift* do tipo finito e *shift completo* se todas as transições são possíveis, o qual denotaremos por Σ.

Chamaremos de *palavra admissível de comprimento* n uma sequência finita $w = (w_1 \cdots w_n)$ com $n \in \mathbb{N}, w_k \in \mathcal{W}$ para $k = 1, 2, ..., n$ e $a_{w_k w_{k+1}} = 1$ para $k = 1, 2, ..., n-1$. Denotamos o conjunto de palavras admissíveis de comprimento $n \geq 2$ por $\mathcal{W}^n$, o comprimento de $w \in \mathcal{W}^n$ por $|w|$ e o conjunto de todas as palavras admissíveis por $\mathcal{W}^\infty = \bigcup_n \mathcal{W}^n$. Dado uma palavra $w \in \mathcal{W}^n$ definimos o *cilindro de comprimento* n como sendo o conjunto

$$[w] := \{(v_k)_{k=0}^\infty \in \Sigma_A : w_k = v_k \ \forall k = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Assim, este é o conjunto de sequências de Σ_A que coincidem com w em seus n primeiros símbolos. Note que $\theta^n : [w] \to \theta^n([w])$ é um homeomorfismo, ou seja, aplicação contínua e invertível, com inversa contínua, a sua inversa denotaremos por $\tau_w : \theta^n([w]) \to [w]$, a qual está bem definida.

Definimos a distância entre duas sequências $(x_j), (y_j) \in \Sigma_A$ como sendo

$$d_r((x_j), (y_j)) := r^{\min\{j : x_j \neq y_j\}}$$

para $r \in (0, 1)$. Dessa forma d_r é uma métrica do espaço *shift* e Σ_A é um espaço polonês, ou seja, espaço metrizável, separável e completo, com respeito à topologia gerada pelos cilindros. Mais ainda, Σ_A é compacto com respeito a esta topologia se, se somente se, I é um conjunto finito (ver [12]). Para $a, b \in W^\infty$ e $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq |a|$, definimos

$$\mathcal{W}_{a,b}^n = \{(w_1 \ldots w_n) \in \mathcal{W}^n \text{ com } (w_1 \ldots w_{|a|}) = a, w_n b \text{ admissível }\}.$$

Diremos que (Σ_A, θ) é *topologicamente transitivo* se para todo $a, b \in I$, existe $n_{a,b} \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{W}_{a,b}^{n_{a,b}} \neq \emptyset$, ou equivalentemente, podemos dizer que $\theta^{n_{a,b}}([a]) \cap [b] \neq \emptyset$. Se para todo $a, b \in I$, existe $N_{a,b} \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{W}_{a,b}^n \neq \emptyset$ para todo $n > N_{a,b}$, dizemos que (Σ_A, θ) é *topologicamente misturadora*, equivalentemente, podemos denotar por $\theta^n([a]) \cap [b] \neq \emptyset$, para todo $n > N_{a,b}$. Além disso, uma cadeia de Markov topológica é dita que possui *grandes imagens e pré-imagens*, se existe um conjunto finito $I_{g.i.p.} \subset \mathcal{W}$ tal que para todo $v \in \mathcal{W}$, existe $\beta \in I_{g.i.p}$ tal que $(v\beta) \in \mathcal{W}^2$ ou $(\beta v) \in \mathcal{W}^2$, respectivamente. Finalmente, uma cadeia de Markov topológica é dita que possui a *propriedade (g.i.p.)* se a cadeia é topologicamente misturadora e tem grandes imagens e pré-imagens.

Para sequências positivas $(a_n), (b_n)$, frequentemente escreveremos $a_n \ll b_n$ se existe $C > 0$ com $a_n \leq C b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e $a_n \asymp b_n$ se $a_n \ll b_n \ll a_n$. E chamaremos de *potencial* uma aplicação $\varphi : \Sigma_A \to \mathbb{R}$ contínua. Considere um potencial estritamente positivo. Para $n \in \mathbb{N}$ e $w \in \mathcal{W}^n$, definimos

$$\Phi_n := \prod_{k=0}^{n-1} \varphi \circ \theta^k \text{ e } C_w := \sup_{x,y \in [w]} \Phi_n(x)/\Phi_n(y). \tag{1.3}$$

O potencial φ tem *variação localmente limitada* se φ é contínua e existe $C_\varphi > 0$ tal que $C_w \leq C_\varphi$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $w \in \mathcal{W}^n$.

Uma nova hipótese, mais forte sobre a variação é relacionada com ser localmente Hölder contínua. Definimos a n-ésima variação de uma função $f : \Sigma_A \to \mathbb{R}$ por

$$V_n(f) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x_i = y_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

A função f é uma função *localmente Hölder contínua no sentido simbólico*, se existe $0 < r < 1$ e $C \geq 1$ tal que $V_n(f) \ll r^n$ para todo $n \geq 1$. Se uma função é localmente Hölder contínua e $\|f\|_\infty < \infty$, então dizemos que é *função Hölder contínua.*

Dois objetos importantes para nossa análise são a medida conforme e a medida Gibbs relacionadas com um potencial φ. Devido ao fato de que a construção canonicamente conduzirá a medidas σ-finitas, faremos uso da seguinte noção: uma medida de probabilidade boreliana μ σ-finita é chamada *φ-conforme* se

$$\mu(\theta(A)) = \int_A \frac{1}{\varphi} d\mu$$

para todo conjunto boreliano A tal que $\theta|_A$ é injetiva. Dizemos que μ é uma medida Gibbs Markov se existe uma sequência $(B_n : n \in \mathbb{N})$, $B_n \geq 1$, tal que

$$B_n^{-1} \leq \frac{\mu([w])}{\Phi_n(x)} \leq B_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, $w \in \mathcal{W}^n$ e $x \in [w]$. Se $\sup B_n < \infty$, então μ é chamada de medida φ-Gibbs. Se $\lim_n B_n^{\frac{1}{n}} = 1$, então μ é chamada medida φ- Gibbs fraca.

Definimos a composição de $\tau_v : \theta^n([v]) \to [v]$, que chamaremos de ramo inverso, com funções da seguinte forma. Para $v \in \mathcal{W}^n$ e uma função $f : \Sigma_A \to \mathbb{R}$, definimos a aplicação

$$f \circ \tau_v : \Sigma_A \to \mathbb{R}; x \mapsto \chi_{\theta^n([v])}(x) f(\tau_v(x)),$$

dada por $f \circ \tau_v(x) := f(\tau_v(x))$ para $x \in \theta^n([v])$ e $f \circ \tau_v(x) := 0$ para $x \notin \theta^n([v])$. Assim, o *operador de Ruelle* definido no espaço das funções contínuas será dado por

$$L_\varphi(f)(x) = \sum_{v \in \mathcal{W}} \varphi \circ \tau_v(x) \ \cdot \ f \circ \tau_v(x)$$

para $x \in \Sigma_A$.

1.2.1 Extensões por grupos de cadeias de Markov Topológicas

Seja G um grupo discreto enumerável. Para definirmos uma extensão por grupo de uma cadeia de Markov topólogica, consideramos $\kappa : \Sigma_A \to G$ uma aplicação constante

em $[w]$ para todo $w \in \mathcal{W}$. Para $X := \Sigma_A \times G$ equipado com a topologia produto, a *extensão por grupo* (X, T) de (Σ_A, θ) é definida por

$$T : X \to X, (x, g) \mapsto (\theta x, g\kappa(x)).$$

Note que (X, T) também é uma cadeia de Markov topológica e que os cilindros são dados por $[w, g] := [w] \times \{g\}$, para $w \in \mathcal{W}^\infty$ e $g \in G$. Definiremos

$$\kappa^n(x) := \kappa(x)\kappa(\theta x) \cdots \kappa(\theta^{n-1}x)$$

para $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \Sigma_A$. Observe que $\kappa^n : \Sigma_A \to G$ é constante em cilindros de comprimento n e, em particular, que $\kappa_w := \kappa^n(x)$, para algum $x \in [w]$ e $w \in \mathcal{W}^n$, está bem definida. Além disso, para $v \in \mathcal{W}^\infty$, o ramo inverso dado por $[v, \cdot]$ será denotado por τ_v, que é $\tau_v(x, g) := (\tau_v(x), g\kappa_v^{-1})$. Também denotaremos

$$\Phi_v(x) := \Phi_{|v|}(\tau_v(x)), \Phi_{vw}(x) := \Phi_v(\tau_w(x)) \cdot \Phi_w(x) \text{ e } f_v(x, g) := f \circ \tau_v(x, g).$$

A fim de distinguir entre o operador de Ruelle que diz respeito a θ e a T, este objeto para extensão por grupo será escrito em letra caligráfica, isto é, para $x \in \Sigma_A$, $n \in \mathbb{N}$ e $f : X \to \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}(f)(x, g) := \sum_{v \in \mathcal{W}} \varphi \circ \tau_v(x) \cdot f \circ \tau_v(x, g).$$

Além disso, para facilitar a notação, definiremos para todo subconjunto $K \subset G$, o conjunto $\mathbb{X}_K := \Sigma_A \times K$ e a função $\mathbf{X}_K := \mathbf{1}_{\mathbb{X}_K}$, onde $\mathbf{1}_{\mathbb{X}_K}$ é a função indicadora no conjunto $\mathbb{X}_K$. Em particular, para todo $g \in G$ temos $\mathbb{X}_g := \Sigma_A \times \{g\}$, e $\mathbf{X}_g := \mathbf{1}_{\mathbb{X}_g}$.

O próximo Lema nos fornece uma estimativa importante para a distorção dos iterados do operador de Ruelle $\mathcal{L}$. Mas antes de enunciarmos, vamos definir o que é uma aplicação Gibbs-Markov do tipo finito, pois essa aplicação fará parte das hipóteses dos principais resultados que enunciaremos a partir de agora, a qual foi implicitamente definida por [2] da seguinte forma.

Definição 1.2.1. *Seja μ uma medida de probabilidade de Borel em Σ_A tal que, para todo $w \in \mathcal{W}$, μ e $\mu \circ \tau_w$ são equivalentes. Então (Σ_A, θ, μ) é chamada de uma aplicação Gibbs-Markov se*

$$\inf\{\mu(\theta([w])) : w \in \mathcal{W}\} > 0$$

e existe $0 < r < 1$ tal que, para todo $m, n \in \mathbb{N}, v \in \mathcal{W}^m, w \in \mathcal{W}^n$,

$$\sup_{x,y \in [w]} \left| \log \frac{d\mu \circ \tau_v}{d\mu}(x) - \log \frac{d\mu \circ \tau_v}{d\mu}(y) \right| \leq C_\varphi d_r(x, y). \tag{1.4}$$

Observe que existe uma equivalência entre aplicações de Gibbs-Markov e potenciais localmente log-Hölder, visto que, se uma aplicação é Gibbs-Markov temos que $\varphi := d\mu/d\mu \circ \theta$ é localmente log-Hölder, então φ é de variação limitada e localmente log-Hölder. Da mesma forma, se θ tem a propriedade g.i.p e φ é somável ($\sup L_\varphi < \infty$), o Teorema de Sarig (ver Corolário 2 em [14]) garante a existência de uma medida μ conforme. Isto é, $\varphi/\rho = d\mu/d\mu \circ \theta$ e, em particular, μ satisfaz (1.4). Além disso, segue da propriedade g.i.p. que, para qualquer $w \in \mathcal{W}$, existe um $b \in I_{\text{g.i.p.}}$ tal que wb é admissível. Então

$$\mu(\theta(w)) = \sum_{a \in \mathcal{W}: wa \text{ admissível}} \mu([a]) \geq \mu([b]) \geq \min_{c \in I_{\text{g.i.p.}}} \mu([c]) > 0.$$

Portanto, (Σ_A, θ, μ) é Gibbs-Markov.

Definimos o operador de transferência $\hat{\theta} : L^1(\mu) \to L^1(\mu)$ associada a aplicação de Gibbs-Markov (Σ_A, θ, μ) por

$$\hat{\theta}(f) := \sum_{w \in \mathcal{W}} \frac{d\mu \circ \tau_w}{d\mu} f \circ \tau_w.$$

Estamos interessados em uma aplicação Gibbs-Markov do tipo finito, onde a primeira condição da definição é automaticamente satisfeita.

Lema 1.2.2. *Suponha T uma extensão por grupo topologicamente transitiva de uma aplicação Gibbs-Markov θ do tipo finito. Então, para cada $h \in G$, existe $K_h > 0$ e $N_h \in \mathbb{N}$ com a seguinte propriedade. Para todo $x, \tilde{x} \in \Sigma_A$, $g, \tilde{g} \in G$ com $h = g^{-1}\tilde{g}$, $m \in \mathbb{N}$, $L \geq 0$ e $f : \Sigma_A \times G \to [0, \infty)$ tal que, para $z, \tilde{z}$ em um mesmo cilindro de comprimento m, ou $f(z) = f(\tilde{z}) = 0$ ou $|f(z)/f(\tilde{z}) - 1| \leq L$, existe $k \leq N_h$ tal que*

$$\mathcal{L}^n(f)(x, g) \leq (K_{\tilde{g}^{-1}g}(L + 1))\, \mathcal{L}^{n+k}(f)(\tilde{x}, \tilde{g}).$$

Demonstração. Se $g = \tilde{g}$ e $x, \tilde{x}$ estão no mesmo cilindro de comprimento $n \geq m$, então

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{L}^n(f)(x, g) - \mathcal{L}^n(f)(\tilde{x}, \tilde{g})| \\
\leq &\sum_{v \in \mathcal{W}^n} |(\Phi_v(x) - \Phi_v(\tilde{x}))\, f_v(x, g)| + \sum_{v \in \mathcal{W}^n} \Phi_v(\tilde{x})\, |(f_v(x, g) - f_v(\tilde{x}, g))| \\
\leq &C_\varphi d_r(x, \tilde{x}) \sum_{v \in \mathcal{W}^n} \Phi_v(x) |f_v(x, g)| + C_\varphi \sum_{v \in \mathcal{W}^n} \Phi_v(x) |f_v(x, g)| \cdot \left|1 - \tfrac{f_v(\tilde{x}, g)}{f_v(x, g)}\right| \\
\leq &C_\varphi \left(d_r(x, \tilde{x}) + \sup_{v \in \mathcal{W}^n} \left|1 - \tfrac{f_v(\tilde{x}, g)}{f_v(x, g)}\right| \right) \mathcal{L}^n(f)(x, g) \leq C_\varphi(1 + L)\mathcal{L}^n(f)(x, g).
\end{aligned}$$

Agora, se $x, \tilde{x}$ não estão no mesmo cilindro, então, por transitividade, existe y no mesmo cilindro que x e $k \in \mathbb{N}$ tal que $T^k(y, g) = (\tilde{x}, g)$, ou, equivalentemente, existe $v \in \mathcal{W}^k$ com

$(y, g) = \tau_v(\tilde{x}, g)$. Assim,

$$\mathcal{L}^{n+k}(f)(\tilde{x}, g) \geq \Phi_v(\tilde{x})\mathcal{L}^n(f)(y, g) \geq \frac{\Phi_v(\tilde{x})}{1 + C_\varphi(L+1)}\mathcal{L}^n(f)(x, g).$$

Além disso, como θ é uma aplicação do tipo finita, $v \in \mathcal{W}^k$ pode ser escolhido dentro de um conjunto finito, o que prova a afirmação para (x, g) e $(\tilde{x}, g)$ com relação a $K_{\text{id}} + K_{\text{id}}L$, para algun K_{id} suficientemente grande. A prova para o caso geral é quase a mesma: para $(\tilde{x}, \tilde{g})$, por transitividade, existe $w \in \mathcal{W}^k$ tal que $g\kappa^k(w) = \tilde{g}$ e $\tilde{x} \in \theta^k([w])$. Como θ é uma aplicação do tipo finita e $\kappa_w = g^{-1}\tilde{g}$, w novamente pode ser escolhido dentro de um conjunto finito. Além disso, $\tau_w(\tilde{x}, \tilde{g}) \in \Sigma \times \{g\}$. Assim, pelo exposto, para alguns $l \leq N_{\text{id}}$ e qualquer $n \geq m$,

$$\mathcal{L}^{n+k+l}(f)(\tilde{x}, \tilde{g}) \geq \Phi_w(\tilde{x})\mathcal{L}^{n+l}(f)(\tau_w(\tilde{x}), g) \geq \frac{\Phi_w(\tilde{x})}{K_{\text{id}} + K_{\text{id}}L}\mathcal{L}^n(f)(x, g).$$

Com isso segue a afirmação do lema. □

1.3 Caminhos aleatórios e extensões por grupos

Nesta seção vamos relacionar caminhos aleatórios com extensões por grupos. Mostraremos, por meio do próximo resultado, que a extensão por grupo é uma generalização de caminhos aleatórios.

Proposição 1.3.1. *Seja μ uma medida finita e (G, μ) um caminho aleatório, então existe uma extensão por grupo definida em uma aplicação Gibbs-Markov do tipo finito em relação a uma medida ν tal que*

$$\mathcal{L}^n(\mathbf{X}_g)(x, h) = P(X_1 = g, ..., X_n = h).$$

Demonstração. Para conseguirmos o resultado desejado, faremos a seguinte descrição. Definamos $\mathcal{A} := \sup \mu$ e $\Sigma := \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Já a extensão por grupo vamos definir da seguinte forma, $\kappa : \Sigma \to G$, tal que, $\kappa(g_1 g_2 ...) = g_1$. Por fim, vamos definir uma medida em Σ, por $\nu([g_1 ... g_n]) = \mu(g_1) \cdot \mu(g_2) \cdots \mu(g_n)$. Assim, obtemos a seguinte igualdade desejada:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^n(\mathbf{X}_g)(x, h) &= \int_{\mathbb{X}_h} \mathcal{L}^n(\mathbf{X}_g) d\nu = \nu(\{x \in \Sigma; g\kappa^n(x) = h\}) \\
&= \sum_{g(g_1 g_2 ... g_n) = h} \nu([g_1 g_2 ... g_n]) \\
&= \sum_{g_1 g_2 ... g_n = g^{-1}h} \mu(g_1) \cdot \mu(g_2) \cdots \mu(g_n) \\
&= P(X_1 = g, ..., X_n = h).
\end{aligned}$$

□

Assim, qualquer caminho aleatório pode ser representado por uma extensão por grupo. Mas o que já é conhecido da teoria dos caminhos aleatórios nos dá os seguintes exemplos.

Exemplo 1 Para $G = \mathbb{Z}^d$ faremos uma descrição equivalente de caminho aleatório através da seguinte extensão por grupo. Seja $p_i \in (0,1) : i \in \{\pm 1, \ldots, \pm d\}$ com $\sum_{i=1}^{d}(p_i + p_{-i}) = 1$. Considere o caminho aleatório em $\mathbb{Z}^d$ com a probabilidade de transição $P(\pm e_i) = p_{\pm i}$ onde e_i refere-se ao i-ésimo elemento da base canônica de $\mathbb{Z}^d$. Seja Σ o *shift completo* com $2d$ símbolos $\{-d, \ldots, -1, 1, \ldots, d\}$ e φ a função localmente constante definida por $\varphi|_{[\pm i]} := p_{\pm i}$. Note que $\sum_{i=1}^{d}(p_i + p_{-i}) = 1$ implica que $L(1) = 1$. Além disso, sabemos que a medida é definida por $\mu([i_1 \ldots i_n]) := p_{i_1} \cdots p_{i_n}$. Note que μ é θ-invariante, ergódica e $1/\varphi$-conforme. Finalmente, a extensão por grupo é definida por

$$\kappa : \Sigma \to \mathbb{Z}^d,\ (i_1 i_2 \cdots) \mapsto \begin{cases} e_{i_1} & : i_1 > 0 \\ -e_{-i_1} & : i_1 < 0 \end{cases}.$$

A fim de aplicar o conhecido resultado sobre o teorema do limite local a partir da teoria da probabilidade note-se que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n(\mathbf{X}_{\mathrm{id}})(x, g) &= \sum_{w \in \mathcal{W}^n :\, \kappa^n(w) = g} \phi_n(\tau_w(x)) \\ &= \sum_{(i_1 \cdots i_n) :\, \kappa^n(i_1 \cdots i_n) = g} p_{i_1} \cdots p_{i_n} = P(X_n = g), \end{aligned}$$

com $X_n = g$ relativo ao caminho aleatório no tempo n começando na identidade com a distribuição (P_i) e P a probabilidade do processo de Markov associado. Por outro lado, pelo teorema do limite local para caminhos aleatórios (ver [19], Teorema 13.12), para $(k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$ e $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$P(X_n = (k_1, \ldots, k_d)) \sim C n^{-d/2} \left(2 \textstyle\sum_{i=1}^{d} \sqrt{p_i p_{-i}}\right)^n \displaystyle\prod_{i=1}^{d} \left(\sqrt{p_i / p_{-i}}\right)^{k_i}.$$

Assim, para $\rho = 2 \sum_{i=1}^{d} \sqrt{p_i p_{-i}}$ e com $\lambda_i := \sqrt{p_i / p_{-i}}$, podemos concluir que

$$\mathcal{L}^n(\mathbf{X}_{(k_1, \ldots, k_d)})(x, \mathrm{id}) \sim C n^{-d/2} \rho^n \prod_{i=1}^{d} \lambda_i^{-k_i}.$$

Lembre-se de que um caminho aleatório é chamado de simétrico se $p_i = p_{-i}$, para todo $i = 1, ..., d$. Então é imediato que $\rho = 1$ se, e somente se, o caminho aleatório é simétrico.

Exemplo 2 Seja $G = \mathbb{F}_d$. Agora vamos subtituir o grupo $\mathbb{Z}^d$ pelo grupo livre, com os geradores $g_1, ..., g_d$. Em analogia com o exemplo acima, as transições são dadas por $P(g_{\pm i}) = p_{\pm i}$ com $g_{-i} := g_i^{-1}$. A extensão por grupos associada é definida através de

$$\kappa : \Sigma \to \mathbb{F}_d,\ (i_1 i_2 \cdots) \mapsto g_{i_1}.$$

Como na proposição acima, podemos agora aplicar o teorema do limite local para o grupo livre de Gerl e Woess em [5]. Esse resultado é aplicável para probabilidades de transição arbitrárias, no entanto, para facilitar a exposição, restringimos-nos ao caso especial em que $q := \sqrt{p_i p_{-i}}$ não depende de i. Então, por (5.3) e (5.4) em [5], temos que $\rho = 2q\sqrt{2d-1}$ e $\lambda_{i_k} := \sqrt{p_{i_k}/p_{-i_k}}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(X_n = g_{i_1} \cdots g_{i_k})}{P(X_n = \mathrm{id})} = \left(1 + \tfrac{d-1}{d} k\right) (2d-1)^{-k/2} \prod_{i=1}^{k} \lambda_{i_k}, \tag{1.5}$$

para n e k e $g_{i_1} \cdots g_{i_k}$ em forma reduzida, ou seja, $g_{i_l} \neq g_{i_{l+1}}^{-1}$ para $l = 1, \ldots, k-1$. Dessa forma, os mesmos objetos que calculamos na proposição anterior, podemos calcular para $\mathbb{F}_d$.

Capítulo 2

Grupos hiperbólicos e Fronteira visual

Iniciaremos o presente capítulo estudando os espaços métricos Gromov-hiperbólicos. A partir dessa teoria, define-se a noção de grupos hiperbólicos. Nesse sentido, para cada grupo hiperbólico, pode-se associar o chamado espaço no infinito ou a fronteira visual.

Essa fronteira, acaba por ser uma ferramenta extremamente útil e fundamental para estudar grupos hiperbólicos, dada a sua estrutura rica (topológica, dinâmica, métrica e algébrica).

Neste capítulo tomaremos como base os trabalhos de Coornaert e Papadopoulos (ver [4]). Já na seção 2.3, estudaremos fronteira visual, usando também como referência, os trabalhos de Ghys e de la Harpe (ver [7]).

2.1 Espaço métrico Gromov-hiperbólico

Seja (X, d) um espaço métrico. A geodésica em X é uma aplicação $\sigma : I \to X$ onde I é um intervalo de $\mathbb{R}$ tal que

$$d(\sigma(t_1), \sigma(t_2)) = |t_1 - t_2|$$

para cada $t_1, t_2 \in I$. Devemos frequentemente identificar uma geodésica com sua imagem. Se $I = [a, b]$ dizemos que a geodésica $\sigma : I \to X$ é um segmento geodésico, se $I = [0, \infty]$ dizemos que é raio geodésico. Além disso, denotamos por $[x, y]$ qualquer segmento geodésico unindo os pontos x e y de X. Por fim, o espaço X é considerado um espaço geodésico se quaisquer dois pontos em X puderem ser unidos por um segmento geodésico.

Definição 2.1.1 (Produto Gromov)**.** *O produto Gromov, de pontos x e y de X, relativo a $x_0 \in X$, é um número não-negativo $(x \cdot y)$ definido pela fórmula*

$$(x \cdot y) = (x \cdot y)_{x_0} = \frac{1}{2}(d(x, x_0) + d(y, x_0) - d(x, y)). \tag{2.1}$$

Nota-se pela Figura **??** que o produto Gromov mede por quanto tempo duas geodésicas viajam juntas.

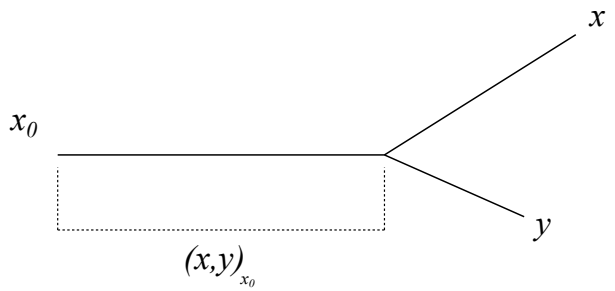

Figura 2.1: Produto Gromov

Além disso, o produto Gromov varia no máximo linearmente com p:

$$2|(x \cdot y)_p - (x \cdot y)_q| = |d(x,p) - d(x,q) + d(y,p) - d(y,q)| \leq 2d(p,q).$$

Definição 2.1.2 (Espaço Gromov-hiperbólico)**.** *Seja $\delta > 0$. O espaço métrico X é δ-hiperbólico se*

$$(x \cdot z)_{x_0} \geq \min\{(x \cdot y)_{x_0}, (y \cdot z)_{x_0}\} - \delta,$$

para cada $x, y, z \in X$. Se existir um número real $\delta > 0$ tal que X é δ-hiperbólico, dizemos que o espaço métrico X é Gromov-hiperbólico

Geometricamente, um espaço geodésico $\{X, d\}$ é hiperbólico se existe $\delta > 0$ tal que, para cada x, y, z em X, que são os vértices de um triângulo geodésico (união de três segmentos geodésicos), a união das δ-vizinhanças de quaisquer dois lados do triângulo, contém o terceiro lado, isto é

$$[x_1, x_3] \subset \cup_{i \in \{1,2\}} V_\delta([x_i, x_{i+1}]),$$

$x_i \in \{x, y, z\}, 1 \leq i \leq 3$, em que $[x_i, x_{i+1}]$ denota o lado do triângulo definido por estes vértices.

Tomando como base os trabalhos de [6], podemos definir árvore como um grafo conexo (existe caminho entre quaisquer dois vértices) e acíclico (não possui ciclos). Uma árvore é denominada enraizada se um vértice é fixado, sendo esse vértice chamado de raiz.

Um fato importante a respeito dessas árvores é que elas são 0-hiperbólicas, onde as geodésicas são o caminho mais curto entre dois pontos na árvore. O lema abaixo (ver Teorema 12 em [6]) nos diz que qualquer subconjunto finito de um espaço δ-hiperbólico

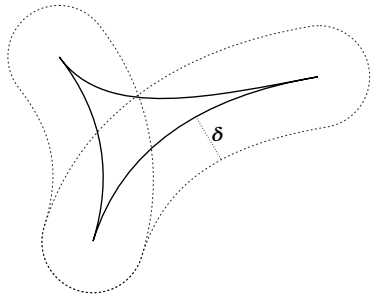

Figura 2.2: Triângulo δ-hiperbólico

pode ser aproximado por uma árvore enraizada. Esse fato importante será útil para obtermos o Teorema da desigualdade de Ancona-Gouëzel-Lalley.

Lema 2.1.3. *Suponha que (X, d) seja δ-hiperbólico e $F \subset X$ com $|F| \leq 2^k + 2$ e $\mathbf{o} \in X$. Então existe uma árvore finita e enraizada T e $\Theta : F \to T$ tal que*

1. $d(x, \mathbf{o}) = d(\Theta(x), \Theta(\mathbf{o}))$ *para todo* $x \in F$,
2. $d(x, y) - 2k\delta \leq d(\Theta(x), \Theta(y)) \leq d(x, y)$ *para todo* $x, y \in F$.

2.2 Grupos hiperbólicos

Seja G um grupo finitamente gerado e S gerador de G. Para cada $g, h \in G$ defina

$$d_S(g, h) := \min \left\{ n; g^{-1}h = \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_n, \alpha_i \in S \cup S^{-1} \right\}.$$

A função d_S define uma métrica em G, chamada métrica relativa a S, ou seja, a distância entre g e h é o número mínimo de geradores para escrever $g^{-1}h$. Nos casos em que estivermos trabalhando com extensões por grupos, o gerador de G será o conjunto $S = \{\kappa(w), w \in W\}$.

A partir de agora, assumiremos que G é um grupo finitamente gerado e que S é um gerador simétrico de G, isto é, $S = S^{-1}$. Dizemos que G é um grupo hiperbólico, se o espaço métrico (G, d_S) é Gromov-hiperbólico. Nessas condições, também nos referiremos a G como grupo Gromov-hiperbólico.

Um exemplo clássico de grupo hiperbólico é o grupo livre, $\mathbb{F}_2 = \langle g, h \rangle, S = \{g, h, g^{-1}, h^{-1}\}$ para $\delta = 0$. Notemos pela figura abaixo que as geodésica em $\mathbb{F}_2$ são o caminho mais curto de um ponto ao outro dentro do gráfico de Cayley.

O próximo lema nos fornece quase a outra direção da desigualdade triangular. Usaremos esse resultado na demostração do Lema 5.2.3 no capítulo 5. Sua prova encontra-se em ([8], Lema 2.4). Além disso, fixaremos a seguinte notação $|g| := d_S(g, \mathrm{id})$ para todo $g \in G$.

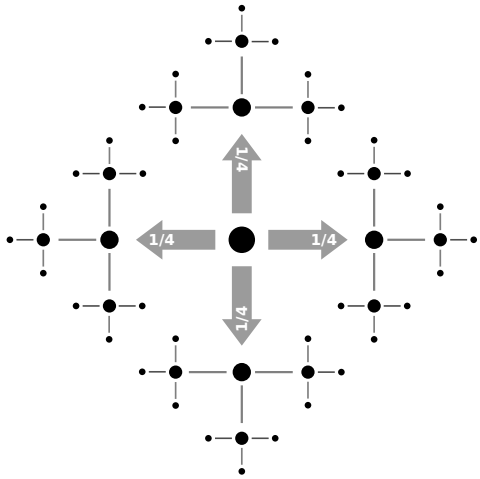

Figura 2.3: grupo $\mathbb{F}_2$

Lema 2.2.1. *Seja G um grupo hiperbólico. Então, existe $C > 0$ de modo que, para qualquer $x, y \in G$, existe $h \in G$ de comprimento no máximo C, tal que*

$$|g_1 h g_2| \geq |g_1| + |g_2| \,.$$

2.3 Fronteira Visual

Seja G um grupo hiperbólico. Para um ponto fixado $p \in G$, denotaremos $(g \cdot h) = (g \cdot h)_p$ para qualquer $g, h \in G$.

Definição 2.3.1. *Seja g_n uma sequência de pontos de G. Dizemos que g_n é uma sequência Gromov se $(g_i \cdot g_j) \to \infty$ quando $i, j \to \infty$.*

Notemos que, se g_n é uma sequência Gromov, então $d_S(g_i p, \mathrm{id}) \geq (g_i \cdot g_i) \to \infty$ quando $i \to \infty$. Na literatura, as sequências Gromov são geralmente chamadas de sequências convergentes no infinito ou tendendo ao infinito. Além disso, duas sequências Gromov g_n e h_n em G são equivalentes, e escrevemos $g_n \sim h_n$, se

$$(g_n \cdot h_n) \to \infty, n \to \infty.$$

A relação definida acima é uma relação de equivalência, já que, para toda sequência z_n de pontos de G, tem-se $(g_n \cdot z_n) \geq \min\{(g_n \cdot h_n), (h_n \cdot z_n)\} - \delta$. Usaremos essa relação de equivalência para definir a fronteira de G. Seja $\hat{g}$ a classe de equivalência da sequência Gromov g_n. Definimos a fronteira visual de G, denotada por ∂G, como o conjunto de todas as classes de equivalência dessa relação, isto é,

$$\partial G = \{\hat{g}; g_n \text{ é sequência Gromov em G .}\}$$

Chamaremos este conjunto de fronteira visual de G. Assim, se $\xi \in \partial G$, então existe uma sequência de pontos de G tal que ξ é a sua classe de equivalência. O produto Gromov, em pontos da fronteira de G, é definido por

$$(\xi \cdot \eta) := \sup \left\{ \liminf_{m,n\to\infty} (g_m \cdot h_n) \ : \ g_n \to \xi, h_m \to \eta \right\}$$

para qualquer $\xi, \eta \in \partial G$. Se G é δ-hiperbólico, por [7] temos os seguintes resultados: $(\xi\cdot\eta) - 2\delta \leq \liminf_{m,n}(g_m \cdot h_n) \leq (\xi\cdot\eta)$, para quaisquer sequências g_m e h_n que aproximam ξ e η. Além disso, para $\lambda \in (\sqrt[2\delta]{1/2}, 1)$ e $r(\xi,\eta) := \lambda^{(\xi\cdot\eta)}$,

$$d_{\text{visual}}(\xi,\eta) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} r(x_k, x_{k+1}) : n \in \mathbb{N}, x_k \in \partial G, x_1 = \xi, x_n = \eta \right\} \tag{2.2}$$

define uma métrica em ∂G e existe $C \in (0,1)$ tal que $Cr(\xi,\eta) \leq d_{\text{visual}}(\xi,\eta) \leq r(\xi,\eta)$ para todo $\xi, \eta \in \partial G$. Além disso, ∂G é compacto com respeito a essa métrica. Para cada escolha de λ, nos referimos d_{visual} como a métrica visual em ∂G .

Capítulo 3

Família de Operadores de Green

Neste capítulo trabalharemos com uma extensão por um grupo hiperbólico (X, T), onde $X := \Sigma_A \times G$ e (Σ_A, θ) é um subshift do tipo finito.

Em [8], Gouëzel define função de Green da seguinte forma: para uma medida μ admissível com suporte finito, um grupo contável G e $p_n(x, y)$ a probabilidade de ir de x a y no tempo n, a função de Green é definida para $1 \leq r < R$ e $x, y \in G$ por $G_r(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n p_n(x, y)$, onde $R = \limsup p_n(\mathrm{id}, \mathrm{id})^{-1/n}$. Também podemos pensar $G_r(x, y)$ como o número médio de passagens em y se o caminho aleatório começa a partir de x, mas para a medida $r\mu$ em vez de μ.

3.1 Desigualdade de Ancona

Nosso objetivo é generalizar a desigualdade de Ancona (ver Definição 3.1.1) para passeio aleatório com incrementos não independentes, ou seja, para as extensões por grupos. Nesse contexto, o objeto canônico que generaliza a função de Green é uma família de operadores, a qual chamaremos de família de operadores de Green.

Definição 3.1.1 (Desigualdade de Ancona)**.** *Uma medida de probabilidade μ em um grupo Gromov-hiperbólico G satisfaz a desigualdade de Ancona uniforme se, dada uma constante $D > 0$, existe uma constante $C > 0$, tal que, para qualquer $g, g' \in G$ e para qualquer h tal que a distância entre h e o segmento geodésico de g' para g é menor que D e $r \in [1, R]$,*

$$G_r(g', g) \leq C \cdot G_r(g', h) \cdot G_r(h, g).$$

3.2 Operador de Green

Nesta seção, iremos definir os operadores de Green. Também mostraremos que alguns resultados relevantes para as funções de Green se estendem às famílias de operadores

de Green. Para isso, seja G um grupo hiperbólico. Definamos

$$\rho := \limsup_n \sqrt[n]{\mathcal{L}^n(\mathbf{X}_g)(x,h)}$$

para todo $g, h \in G$. Excluindo os casos em que $\rho = 0$ ou $\rho = \infty$ podemos definir $R := \frac{1}{\rho}$. Notemos que R não depende de (x,h) e g, pelo Lema 1.2.2.

Em analogia às funções de Green na teoria de caminhos aleatórios, para $1 \leq r < R$ e $f \geq 0$, definimos a família de operadores de Green por

$$\mathbb{G}_r(f) := \sum_{n=0}^{\infty} r^n \mathcal{L}^n(f).$$

Além disso, como $f \geq 0$, $\mathbb{G}_r(f)$ é bem definido, mesmo que $\mathbb{G}_r(f)$ não seja necessariamente finita. Por meio do operador de Green, podemos definir uma função de Green da seguinte maneira $G_r^x(g,h) = \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_g)(x,h)$ para qualquer $x \in \Sigma_A$ e $g, h \in G$. Além disso, pelo teorema de Hadamard, $G_r^x(g,h) < +\infty$ sempre que $r < R$.

Para construir um espaço de funções com propriedades mais fortes, consideraremos um espaço de funções localmente Hölder contínuas, com coeficiente de Hölder não constante. A principal ideia por trás da construção de um espaço invariante é considerar funções cujos coeficientes locais de Hölder não são constantes e são dominadas por autofunções positivas de $\mathcal{L}$. Para tanto vamos definir dois objetos: a métrica em X

$$d(((x_i), g), ((y_i), h)) := \begin{cases} 1 & : g \neq h \\ 2^{-\min\{i \geq 0 : x_i \neq y_i\} - 1} & : g = h, (x_i) \neq (y_i) \\ 0 & : g = h, (x_i) = (y_i) \end{cases}$$

e para $\alpha > 0$, $f : X \to \mathbb{R}$, a função $D_\alpha(f) : X \to [0, \infty]$, constante em cilindros de tamanho 1, definida por

$$D_\alpha(f)(z,g) := \sup_{x,y \in [a,g]} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)^\alpha} \quad \text{para todo } z \in [a] \text{ e } a \in W^1.$$

Além disso, nos referiremos a E_ρ como o conjunto de funções positivas, Hölder contínuas e ρ-sub-harmônicas, isto é, $E_\rho := \{h : \|D_\alpha(h)\|_\infty < \infty, h > 0, \mathcal{L}(h) \leq \rho h\}$, que é não vazio para α igual ao expoente de Hölder de $\log \varphi$ se $|\mathcal{W}| < \infty$ por um resultado em [17]. Estamos agora em condições de definir os espaços de funções Hölder contínuas como também as funções localmente Hölder contínuas:

$$\mathcal{H}_\alpha := \left\{ f : X \to \mathbb{R} \middle| \|f\|_\infty < \infty, \|D_\alpha(f)\|_\infty < \infty \right\}, \text{ e}$$
$$\mathcal{H}_{\text{loc}} := \left\{ f : X \to \mathbb{R} \middle| \exists h \in E_\rho \text{ e } |f| \leq h, D_\alpha(f) \leq h \right\}.$$

Observe que $\mathcal{H}_{\text{loc}}$ é um espaço não vazio. Por exemplo, cada função Hölder contínua com suporte em $\Sigma_A \times K$, com $K \subset G$ finito está contida em $\mathcal{H}_{\text{loc}}$. A próxima proposição mostra que $\mathcal{H}_{\text{loc}}$ é $\mathbb{G}_r$-invariante para $r < R$. Depois estenderemos a ação de $\mathbb{G}_r$ em $\mathcal{H}_{\text{loc}}$ para $r = R$. Essa proposição será muito útil para podermos definir aplicações envolvendo $\mathbb{G}_r$.

Proposição 3.2.1. *Suponha que $\|D_\alpha(\log\varphi)\|_\infty < \infty$ e que $\mathcal{L}_\theta(1) = 1$. Então $\mathbb{G}_r$ atua em $\mathcal{H}_\alpha$ como um operador limitado em relação a $\|\cdot\|_\infty + \|D_\alpha(\cdot)\|_\infty$ para cada $r \in [0,1)$. Para $r \in [0,R)$, $\mathbb{G}_r$ atua em $\mathcal{H}_{loc}$ e existe uma constante $C > 0$ tal que, para todo $f \in \mathcal{H}_{loc}$ e $h \in E_\rho$ com $|f| \leq h$ e $D_\alpha(f) \leq h$,*

$$|\mathbb{G}_r(f)| \leq \frac{R}{R-r}h, \quad D_\alpha(\mathbb{G}_r(f)) \leq \frac{CR}{R-r}h.$$

Demonstração. Para $r < 1$ e $f \in \mathcal{H}_\alpha$, temos que

$$\|\mathbb{G}_r(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|\mathbb{G}_r(1)\|_\infty = \|f\|_\infty \sum_n r^n = \|f\|_\infty (1-r)^{-1}.$$

Para provarmos que $\mathbb{G}_r$ atua em $\mathcal{H}_\alpha$, resta mostrarmos que $\|D_\alpha(\mathbb{G}_r(f))\|_\infty < \infty$. Para isso, assuma que $x, y \in [v]$ para algum $v \in \mathcal{W}^1$ e lembre-se de que, pela propriedade de Gibbs-Markov, existe C_φ, independente de x, y e $w \in \mathcal{W}^n$ tal que $|1 - \Phi_w(x)/\Phi_w(y)| \leq C_\varphi d(x,y)^\alpha$ e $\Phi_w(y)/\Phi_w(x) \leq C_\varphi$. Então,

$$\begin{aligned}
&|\mathbb{G}_r(f)(x,g) - \mathbb{G}_r(f)(y,g)| \,/ d(x,y)^\alpha \\
&\leq \frac{1}{d(x,y)^\alpha} \sum_{n\in\mathbb{N}_0, w\in\mathcal{W}^n} r^n (|\Phi_w(x) - \Phi_w(y)|\,|f_w(x,g)| + \Phi_w(y)\,|f_w(x,g) - f_w(y,g)|) \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{N}_0, w\in\mathcal{W}^n} (r^n C_\varphi \Phi_w(y)\|f\|_\infty + \frac{r^n}{2^{\alpha n}}\Phi_w(y)\|D_\alpha(f)\|_\infty) = \frac{C_\varphi}{1-r}\|f\|_\infty + \frac{1}{1-\frac{r}{2\alpha}}\|D_\alpha(f)\|_\infty.
\end{aligned}$$

Suponha que $r < R$ e $f \in \mathcal{H}_{\text{loc}}$. Então existe $h \in E_\rho$ com $|f| \leq h$ e $D_\alpha(f) \leq h$, e

$$|\mathbb{G}_r(f)| \leq \mathbb{G}_r(|f|) \leq \mathbb{G}_r(h) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \mathcal{L}^n(h) = \sum_{n=0}^{\infty} (\rho r)^n h = \frac{R}{R-r}h.$$

Portanto, resta mostrar que $D_\alpha(\mathbb{G}_r(f)) \ll h$. Por argumentos semelhantes, para $x, y \in [v]$

para algum $v \in \mathcal{W}^1$,

$$
\begin{aligned}
&|\mathbb{G}_r(f)(x,g) - \mathbb{G}_r(f)(y,g)| \,/ d(x,y)^\alpha \\
&\leq \frac{1}{d(x,y)^\alpha} \sum_{n\in\mathbb{N}_0, w\in\mathcal{W}^n} r^n (|\Phi_w(x) - \Phi_w(y)| \, |f_w(x,g)| + \Phi_w(y) \, |f_w(x,g) - f_w(y,g)|) \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{N}_0, w\in\mathcal{W}^n} (r^n C_\varphi \Phi_w(x) |f_w(x,g)| + \frac{r^n}{2^{\alpha n}} \Phi_w(y) D_\alpha(f)(\tau_w(x), g\kappa_w^{-1})) \\
&\leq C_\varphi \left(\mathbb{G}_r(|f|)(x,g) + \mathbb{G}_{2^{-\alpha}r}(D_\alpha(f))(x,g)\right) \leq C_\varphi \left(\frac{R}{R-r} + \frac{2^\alpha R}{2^\alpha R - r}\right) h(x,g).
\end{aligned}
$$

□

O próximo resultado mostra que $\mathcal{H}_{\text{loc}}$ possui a propriedade do fechamento para a operação de multiplicação.

Lema 3.2.2. *Se $f \in \mathcal{H}_\alpha$, $g \in \mathcal{H}_{loc}$ então $f \cdot g \in \mathcal{H}_{loc}$.*

Demonstração. Por hipótese $g \in \mathcal{H}_{\text{loc}}$ então existe h_g autofunção tal que $|g| \ll h_g$ e $D_\alpha(g) \ll h_g$. Queremos mostrar que existe h autofunção tal que $|f \cdot g| \ll h$, $D_\alpha(f \cdot g) \ll h$. Vejamos

$$|f \cdot g| \leq \|f\|_\infty \cdot |g| \leq \|f\|_\infty \cdot h_g.$$

Para ver que $D_\alpha(f \cdot g) \ll h$ note que

$$
\begin{aligned}
\frac{|f(x)g(x) - f(y)g(y)|}{d(x,y)^\alpha} &\leq \frac{|f(x) - f(y)| \, |g(x)| + |g(x) - g(y)| \, |f(y)|}{d(x,y)^\alpha} \\
&\leq \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)^\alpha} \cdot h_g(x) + \frac{|g(x) - g(y)|}{d(x,y)^\alpha} \cdot \|f\|_\infty \\
&\leq \sup D_\alpha(f) \cdot h_g(x) + D_\alpha(g)(x) \, \|f\|_\infty \\
&\leq (\|D_\alpha(f)\|_\infty + \|f\|_\infty) \cdot h_g(x).
\end{aligned}
$$

□

Agora, seja A um subconjunto de G. Definimos o operador de Green restrito a A por

$$\mathbb{G}_r(f|A)(x,h) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \mathcal{L}^n \left(f \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \mathbf{X}_A \circ T^k\right)(x,h). \tag{3.1}$$

Observe que, se tomarmos $f = \mathbf{X}_g$, estaremos considerando todos os caminhos que estão em A que começam em g e terminam em h.

Proposição 3.2.3. *Seja A um subconjunto de G não contendo g_1, g_2 tal que qualquer*

caminho indo de g_1 para g_2 tem que passar por A. Tem-se

$$\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{g_1})(x,g_2) = \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_A \cdot \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{g_1}|A^c))(x,g_2).$$

Demonstração. Basta calcular explicitamente:

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{g_1})(x,g_2) &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n \mathcal{L}^n(\mathbf{X}_{g_1})(x,g_2) = \sum_{w\in\mathcal{W}^\infty : g_1\kappa_w = g_2} r^{|w|}\Phi_w(x) \\
&= \sum_{h\in A} \sum_{\substack{(vw): g_1\kappa_v = h, h\kappa_w = g_2, \\ g_1\kappa_v^j \notin A: j=1,\dots,|v|-1}} r^{|v|+|w|}\Phi_v(\tau_w(x))\Phi_w(x) \\
&= \sum_{h\in A} \sum_{h\kappa_w = g_2} \mathbb{G}(\mathbf{X}_{g_1}|A^c)(\tau_w(x),h) r^{|w|}\Phi_w(x) \\
&= \sum_{h\in A} \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_h \cdot \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{g_1}|A^c)(\cdot,h))(x,g_2).
\end{aligned}$$

□

Corolário 3.2.4. *Para $x,y,z \in \Sigma$,*

$$\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{g_1})(x,g_2) \asymp \sum_{h\in A} \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{g_1}|A^c)(y,h) \cdot \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_h)(z,g_2).$$

Demonstração. De fato, pelo Lema 1.2.2,

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{g_1})(x,g_2) &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n \mathcal{L}^n(\mathbf{X}_{g_1})(x,g_2) = \sum_{w\in\mathcal{W}^\infty : g_1\kappa_w = g_2} r^{|w|}\Phi_w(x) \\
&= \sum_{h\in A} \sum_{\substack{(vw): g_1\kappa_v = h, h\kappa_w = g_2, \\ g_1\kappa_v^j \notin A: j=1,\dots,|v|-1}} r^{|v|+|w|}\Phi_{vw}(x) \\
&\asymp \sum_{h\in A} \sum_{\substack{v: g_1\kappa_v = h, \\ g_1\kappa_v^j \notin A: j=1,\dots,|v|-1}} r^{|v|}\Phi_v(y) \sum_{w: h\kappa_w = g_2} r^{|w|}\Phi_w(z) \\
&= \sum_{h\in A} \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{g_1}|A^c)(y,h) \cdot \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_h)(z,g_2).
\end{aligned}$$

□

Observe que, na Proposição 3.2.1, para termos a ação de $\mathbb{G}_r$ em $\mathcal{H}_{\text{loc}}$, é preciso considerar $r < R$. Para de estender esta ação para $r = R$, introduziremos a noção de aplicação transiente, em analogia à teoria de caminhos aleatórios. Para tanto, assumiremos que μ é uma medida não singular em X em relação a T, isto é, as medidas $d\mu$ e $d\mu \circ T$ são equivalentes.

Definição 3.2.5. *Dizemos que a extensão por grupo T é transiente se* $\mathbb{G}_R(\mathbf{X}_{\mathrm{id}})(x, \mathrm{id}) < \infty$ *para um* $x \in \Sigma_A$.

Proposição 3.2.6. *Assuma que T é uma extensão por grupo transiente, topologicamente transitiva de uma aplicação Gibbs-Markov do tipo finito. Então, para $f \in \mathcal{H}_{loc}$ e $A \subset G$ finito, temos $\mathbb{G}_R(\mathbf{X}_A) \in E_\rho$, $\mathbb{G}_R(\mathbf{X}_A \cdot f) \in \mathcal{H}_{loc}$ e*

$$|\mathbb{G}_R(\mathbf{X}_A \cdot f)| \leq \|\mathbf{X}_A \cdot f\|_\infty \cdot \mathbb{G}_R(\mathbf{X}_A), \text{ e ainda}$$
$$D_\alpha(\mathbb{G}_R(\mathbf{X}_A \cdot f)) \leq C_\varphi \|\mathbf{X}_A \cdot f\|_\infty \mathbb{G}_R(\mathbf{X}_A) + \|D_\alpha(\mathbf{X}_A \cdot f)\|_\infty \mathbb{G}_{2^{-\alpha}R}(\mathbf{X}_A).$$

Demonstração. Segue do Lema 1.2.2 que $\mathbb{G}_R(\mathbf{X}_{\mathrm{id}})(x, g) < \infty$ para todo $(x, g) \in G$. Como $\mathbb{G}_R(\mathbf{X}_{\mathrm{id}})(x, g)$ é invariante sob a multiplicação à esquerda de elementos de G, temos que $\mathbb{G}_R(\mathbf{X}_g)(x, h)$ é finito para todo $h \in G$. Portanto, para $A \subset G$ finito, $\mathbb{G}_R(\mathbf{X}_A)(x, h) < \infty$ e, como facilmente pode ser verificado, $\mathbb{G}_R(\mathbf{X}_A) \in E_\rho$. As afirmações restantes seguem como na prova da proposição 3.2.1 . □

Como consequência do Lema 1.2.2, obtém-se, imediatamente, a seguinte independência de $\mathbb{G}_r(f)(x, g)$ de x.

Lema 3.2.7. *Assuma que T é uma extensão por grupo transiente, topologicamente transitiva de uma aplicação Gibbs-Markov do tipo finito e que existem $m \in \mathbb{N}$, $L \geq 0$ e $f : \Sigma_A \times G \to [0, \infty)$ tais que, para $z, \tilde{z}$ em um mesmo cilindro de comprimento m, ou $f(z) = f(\tilde{z}) = 0$ ou $|f(z)/f(\tilde{z}) - 1| \leq L$. Então, para $1 \leq r \leq R$ e f tal que $\mathbb{G}_r(f)(x, \mathrm{id}) < \infty$,*

$$(K_{g^{-1}h}(L+1))^{-1}\, \mathbb{G}_r(f)(y, h) \leq \mathbb{G}_r(f)(x, g) \leq K_{h^{-1}g}(L+1)\mathbb{G}_r(f)(y, h).$$

Demonstração. Segue do Lema 1.2.2 que, para algum $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{G}_r(f)(x, g) &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n \mathcal{L}^n(f)(x, g) \leq K_{h^{-1}g}(L+1) \sum_{n=0}^{\infty} r^n \mathcal{L}^{n+k}(f)(y, h) \\ &= \frac{K_{h^{-1}g}(L+1)}{r^k} \sum_{n=k}^{\infty} r^n \mathcal{L}^n(f)(y, h) \leq K_{h^{-1}g}(L+1)\mathbb{G}_r(f)(y, h).\end{aligned}$$

Observe-se que para obtermos a segunda parte é suficiente trocarmos (x, g) por (y, h). □

Capítulo 4

Medida reduzida e Dominação principal

Tendo em vista que no Capítulo 6 vamos relacionar a fronteira visual de G com as medidas conformes e minimais, neste capítulo vamos adaptar as ideias expostas em [18].

A teoria bem conhecida de potencial para operadores de Markov é adaptada para configuração de operadores de Ruelle em espaços localmente compactos (ver também [15]).

Neste capítulo os resultados novos na literatura são: Proposição 4.1.4, Teorema 4.2.2 e Teorema 4.3.1.

4.1 Medidas excessivas e conformes

Começaremos com uma versão do teorema de decomposição de Riesz. Contudo, antes, vamos definir medidas excessivas e medidas conformes, as quais farão parte das hipóteses dos próximos resultados.

Definição 4.1.1. *Dizemos que uma medida μ é λ-excessiva se $\mathcal{L}^*(\mu) \leq \lambda\mu$ e λ-conforme se $\mathcal{L}^*(\mu) = \lambda\mu$. Além disso, uma medida conforme e não-nula μ é dita minimal, se quando existir uma outra medida conforme ν tal que $\nu \leq \mu$, então ou $\nu = 0$ ou existe uma constante $\alpha > 0$ tal que $\nu = \alpha\mu$.*

Recordamos que $\mu \leq \nu$ se $\mu(A) \leq \nu(A)$ para todo elemento A da σ-álgebra $\mathcal{B}$.

Proposição 4.1.2 (Lemma 3.2 em [15])**.** *Seja μ uma medida $1/r$-excessiva para $0 < r \leq R$. Então existe um único par de medidas de Radon μ_0 e ν tais que μ_0 é $1/r$-conforme e $\mu = \mu_0 + \mathbb{G}_r^*(\nu)$ no sentido de que*

$$\int f d\mu = \int f d\mu_0 + \int \mathbb{G}_r(f)(z) d\nu(z)$$

para qualquer f contínua com suporte compacto. Além disso, $\nu = \mu - r^{-1}\mathcal{L}^*(\mu)$.

Demonstração. A existência segue do Lema 3.2 em [15]. Agora, assuma que $\mu_0 + \mathbb{G}_r^*(\nu) = \tilde{\mu}_0 + \mathbb{G}_r^*(\tilde{\nu})$. Aplicando $r^{-1}\mathcal{L}^*$ em ambos os lados, segue que

$$\mu_0 + \mathbb{G}_r^*(\nu) - \nu = \tilde{\mu}_0 + \mathbb{G}_r^*(\tilde{\nu}) - \tilde{\nu}.$$

Daí, $\nu = \tilde{\nu}$. □

O teorema de decomposição de Riesz tem as seguintes consequências importantes.

Lema 4.1.3. *Suponha que μ é $1/r$-excessiva e que $\mu \leq \mathbb{G}_r^*(\nu)$ para uma medida ν tal que $\mathbb{G}_r^*(\nu)$ é σ-finita. Então existe ν_0 tal que $\mu = \mathbb{G}_r^*(\nu_0)$. Em particular, se μ é conforme, então $\mu = 0$.*

Demonstração. Pela proposição anterior, $\mu = \mu_0 + \mathbb{G}_r^*(\nu_0)$. Portanto, $\mu_0 \leq \mathbb{G}_r^*(\nu)$ e $\mu_0 = 0$ já que

$$\mu_0 = r^{-n}(\mathcal{L}^n)^*(\mu_0) \leq r^{-n}(\mathcal{L}^n)^*(\mathbb{G}_r^*(\nu)) \to 0.$$

Então $\mu = \mathbb{G}_r^*(\nu_0)$. □

Para uma família de medida σ-finita $\{\mu_i : i \in I\}$, defina $\mu^\dagger(A) := \inf_{i\in I} \mu_i(A)$ e

$$\bigwedge_{i\in I} \mu_i(A) := \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \mu^\dagger(B_j) : \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = A, B_j \in \mathcal{B}\right\}, \qquad \text{para } A \in \mathcal{B}.$$

Nos referimos a $\bigwedge_{i\in I} \mu_i(A)$ como o ínfimo da família $\{\mu_i : i \in I\}$.

Proposição 4.1.4. *O ínfimo de uma família de medidas de Radon é uma medida de Radon. Além disso, o ínfimo de uma família de medidas λ-excessivas é λ-excessiva.*

Demonstração. Começamos mostrando que $\mu := \bigwedge_{i\in I} \mu_i$ é uma medida, para isso, primeiro, observa-se que para uma partição de $A \in \mathcal{B}$ em $\{A_i \in \mathcal{B} : i \in \mathbb{N}\}$ que $\mu(A) \leq \sum_i \mu(A_i)$ por construção. Por outro lado, considere que para partições $\{B_j : j \in \mathbb{N}\}$, $\{B_k^* : k \in \mathbb{N}\}$ de A em conjuntos Borel, tais que o segundo é mais fino que o primeiro,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu^\dagger(B_j) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^\dagger(B_k^*). \tag{4.1}$$

Em particular, implica que $\mu(A) \geq \sum_i \mu(A_i)$, como cada partição de A tem um refinamento que é mensurável em relação a $\sigma(\{A_i : i \in \mathbb{N}\})$, então μ é σ-aditiva, sendo assim, uma medida. Além disso, como $\mu(A) \leq \mu_i(A)$ para todo i, μ é σ-finita. A propriedade de Radon segue imediatamente de $\mu(A) \leq \mu_i(A)$ para todo $i \in I$ e $A \in \mathcal{B}$, isso prova a primeira afirmação.

Agora, suponha que $f : X \to [0, \infty)$ é uniformemente contínua e limitada, que $A \in \mathcal{B}$ com $\mu(A) < \infty$ e que ϵ é arbitrário. Aplicando (4.1), podemos supor que $\mu(A) \leq$

$\sum_j \mu^\dagger(B_j) \leq \mu(A) + \epsilon$, onde $\{B_j : j \in \mathbb{N}\}$ é uma partição de A em conjuntos de diâmetro δ. Se δ é escolhido suficientemente pequeno, a continuidade uniforme implica que

$$\int_A f d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{B_j} f d\mu \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\inf_{x \in B_j} f(x) + \epsilon \right) \mu^\dagger(B_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{B_j} f d\mu_i + \epsilon(\mu(A) + \epsilon)$$
$$\leq \inf_{i \in I} \int_A f d\mu_i + \epsilon\mu(A) + \epsilon^2.$$

Como ϵ é arbitrário, segue que $\int_A f d\mu \leq \inf_i \int_A f d\mu_i$. A afirmação restante segue facilmente disso. □

4.2 Medida reduzida

Seja μ uma medida de Radon λ-excessiva e $\mathcal{R}$ denotando a família de medidas de Radon, definamos a *medida reduzida* associada a μ em A como

$$R_A(\mu) := \bigwedge \{\nu \in \mathcal{R} : \mathcal{L}^*(\nu) \leq \lambda\nu, \nu|_A \geq \mu|_A.\}$$

Notemos que pela proposição anterior, a *medida reduzida* associada a μ em A é uma medida de Radon, bem definida, λ-excessiva. Além disso, se $A = \Sigma \times K$, para algum $K \subset G$ finito, então $\mathbb{G}_r^*(\mu|_A)$ é bem definida, λ-excessiva e $\mathbb{G}_r^*(\mu|_A) \geq \mu|_A$. Em particular, $R_A(\mu) \leq \mathbb{G}_r^*(\mu|_A)$. Assim, o Lema 4.1.3 implica que existe ν_0 tal que $R_A(\mu) = \mathbb{G}_r^*(\nu_0)$ e, como $\nu_0 = R_A(\mu) - r^{-1}\mathcal{L}^*(R_A(\mu))$, ν_0 é uma medida de Radon. Observa-se também que $R_A(\mu)|_A = \mu|_A$ por construção. Consequentemente, deixando $K \to G$, obtém-se imediatamente o seguinte.

Proposição 4.2.1. *Suponha que μ é $1/r$-excessiva, então existe uma sequência crescente de medida de Radon (ν_n), tal que, $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{G}_r^*(\nu_n)(A)$, para todo $A \in \mathcal{B}$.*

Agora, suponha que A é mensurável em relação à partição em n-cilindros, para algum $n \in \mathbb{N}$, então $\mathbf{1}_A$ é Lipschitz contínua, em particular, $\mathcal{L}_A(f) := \mathcal{L}(\mathbf{1}_A f)$ atua em funções contínuas com suporte compacto. Além disso, considere

$$\mathbb{G}_r^A := \mathbf{1}_A \sum_{n=0}^{\infty} r^n (\mathcal{L}_A)^n, \quad \mathcal{F}_A := \mathbf{1}_A \sum_{n=0}^{\infty} r^n (\mathcal{L}_{A^c})^n.$$

Observa-se que essa escolha de A implica pela Proposição 3.2.6 que $\mathbb{G}_r^A$ e $\mathcal{F}_A$ atuam em funções Lipschitz com suporte em $\Sigma_A \times K$, para $K \subset G$ finito, para $0 < r \leq R$. Em particular, as ações de $(\mathbb{G}_r^A)^*$ e $\mathcal{F}_A^*$ em medidas σ-finitas são bem definidas. Além disso, fazendo uma analogia com a equação 3.1, notemos que esses operadores são quase iguais a $\mathbb{G}_r(f|A)$.

Teorema 4.2.2. *Suponha que μ é $1/r$-excessiva e que A é mensurável, com respeito à partição de n-cilindros, para alguns $0 < r \leq R$ e $n \in \mathbb{N}$. Então a medida reduzida em A é igual a $\mathcal{F}_A^*(\mu)$.*

Demonstração. Seja $B := A^c$. Pela Proposição 4.2.1, existe uma sequência monótona de medidas de Radon (ν_n), tal que, $\mathbb{G}_r^*(\nu_n) \to \mu$. Além disso, decompondo órbitas em relação à primeira entrada em A, obtém-se $\mathbb{G}_r = \mathbb{G}_r^B + \mathbb{G}_r \circ \mathcal{F}_A$, o que implica

$$\mathcal{F}_A^* \circ \mathbb{G}_r^*(\nu_n) = (\mathbb{G}_r - \mathbb{G}_r^B)^*(\nu_n) \leq \mathbb{G}_r^*(\nu_n).$$

Tomando o limite, quando $n \to \infty$, obtemos $\mathcal{F}_A^*(\mu)([w,g]) \leq \mu([w,g])$ para qualquer conjunto de cilindros, e portanto $\mathcal{F}_A^*(\mu) \leq \mu$. Assim, por construção, $\mathcal{F}_A^*(\mu)|_A = \mu|_A$ daí $\mu|_A \leq \nu|_A$ o que implica que $\mathcal{F}_A^*(\mu) \leq \mathcal{F}_A^*(\nu)$ globalmente. Assim, se $\mathcal{F}_A^*(\mu)$ é $1/r$-excessiva, então $\mathcal{F}_A^*(\mu) = R_A(\mu)$.

Diante do exposto, resta mostrar que $\mathcal{F}_A^*(\mu)$ é uma medida $1/r$-excessiva. Por aplicação de iterados de $\mathcal{L}^*(\mu) \leq r^{-1}\mu$ obtemos para uma função de teste $h \geq 0$ que

$$\begin{aligned}
\int \mathbf{1}_A h d\mu &\geq r \int \mathcal{L}(\mathbf{1}_A h) d\mu = r \int \mathbf{1}_A \mathcal{L}_A(h) d\mu + r \int \mathbf{1}_B \mathcal{L}_A(h) d\mu \\
&\geq r \int \mathbf{1}_A \mathcal{L}_A(h) d\mu + r^2 \int \mathbf{1}_A \mathcal{L}_B \mathcal{L}_A(h) d\mu + r^2 \int \mathbf{1}_B \mathcal{L}_B \mathcal{L}_A(h) d\mu \\
&\geq \int \mathbf{1}_A \sum_{k=0}^{n} r^{k+1} \mathcal{L}_B^k \mathcal{L}_A(h) d\mu + r^{n+1} \int \mathbf{1}_B \mathcal{L}_B^n \mathcal{L}_A(h) d\mu.
\end{aligned}$$

Assim, por convergência monótona,

$$\int \mathbf{1}_A h d\mu \geq \int \mathbf{1}_A \sum_{n=0}^{\infty} r^{n+1} \mathcal{L}_B^n \mathcal{L}_A(h) d\mu.$$

Por outro lado,

$$r\mathcal{F}_A \circ \mathcal{L} = \mathbf{1}_A \sum_{n=0}^{\infty} r^{n+1} \mathcal{L}_B^n \circ (\mathcal{L}_B + \mathcal{L}_A) = \mathcal{F}_A - \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_A \sum_{n=0}^{\infty} r^{n+1} \mathcal{L}_B^n \circ \mathcal{L}_A,$$

o que implica

$$r \int \mathcal{L}h \, d\mathcal{F}_A^*(\mu) = \int h \, d\mathcal{F}_A^*(\mu) - \int_A h - \sum_{n=0}^{\infty} r^{n+1} \mathcal{L}_B^k \mathcal{L}_A(h) \, d\mu \leq \int h \, d\mathcal{F}_A^*(\mu),$$

provando que $\mathcal{F}_A^*(\mu)$ é $1/r$-excessiva. $\square$

4.3 O princípio da Dominação

Como $\mathcal{F}_A^*(\mu)$ é dominada por $\mathbb{G}_r^*(\mu|_A)$, segue do Lema 4.1.3 que existe uma única ν com $\mathcal{F}_A^*(\mu) = \mathbb{G}_r^*(\nu_A)$. Se $\mu = \mathbb{G}_r^*(\nu)$ para algum ν, isso da origem a uma aplicação $\nu \mapsto \nu_A$, onde ν_A é referido como o *balayée* de ν e pode ser construída explicitamente da seguinte forma

$$\mathcal{R}_A(f) := \sum_{n=0}^{\infty} r^n (\mathbf{1}_{A^c}\mathcal{L})^n (\mathbf{1}_A f).$$

Na medida em que cada órbita com pelo menos uma visita a A pode ser decomposta em relação a última ou à primeira visita a A, segue-se que $\mathbb{G}_r \circ \mathcal{F}_A = \mathcal{R}_A \circ \mathbb{G}_r$. Portanto, o balayée de ν é dado por $\nu_A = \mathcal{R}_A^*(\nu)$ como, para $\mu = \mathbb{G}_r^*(\nu)$,

$$R_A(\mu) = \mathcal{F}_A^*(\mu) = \mathcal{F}_A^* \circ \mathbb{G}_r^*(\nu) = \mathbb{G}_r^* \circ \mathcal{R}_A^*(\nu) = \mathbb{G}_r^*(\nu_A).$$

Em particular, se ν tem suporte em A, então

$$\nu_A = \mathcal{R}_A^*(\nu) = \nu.$$

Isso prova o seguinte resultado, conhecido como príncipio da dominação.

Teorema 4.3.1. *Assuma que A é mensurável com respeito a partição em n-cilindros para alguns $n \in \mathbb{N}$ e que ν é uma medida de Radon finita cujo suporte está contido em A tal que $\mathbb{G}_r^*(\nu)$ é bem definido para $0 < r \leq R$). Se μ é $1/r$-excessiva e $\mu|_A \geq \mathbb{G}_r^*(\nu)|_A$, então*

$$\mu \geq \mathbb{G}_r^*(\nu).$$

.

Capítulo 5

Desigualdade de Ancona-Gouëzel-Lalley para extensões por grupos hiperbólicos

Neste capítulo, provaremos o Teorema da Desigualdade de Ancona-Gouëzel-Lalley para extensões por grupos hiperbólicos.

5.1 A desigualdade de Ancona para funções de Green

O teorema abaixo é a desigualdade de Ancona para funções de Green, como em [8] e [9].

Teorema 5.1.1. *Se μ é uma medida admissível, com suporte finito e simétrica em um grupo hiperbólico não elementar, então satisfaz a desigualdade de Ancona.*

Além disso, para G um grupo hiperbólico, Gouëzel e Lalley mostraram que (ver [8, 9]), se existem $C > 0$ e $\rho > 0$ tal que, para todos os pontos $g', g, h, h' \in G$, em que a configuração é aproximada por uma árvore, como mostrado abaixo (ver Figura 5.1), então para qualquer $r \in [1, R]$

$$\left| \frac{G_r(g,h)/G_r(g',h)}{G_r(g,h')/G_r(g',h')} - 1 \right| \leq Ce^{-\rho n}.$$

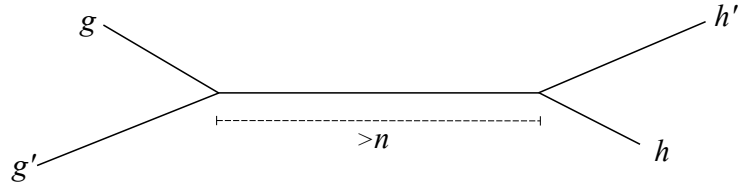

Figura 5.1: Configuração de $g, g', h, h' \in G$

5.2 Desigualdade de Ancona para operadores de Green

Assim, nossa finalidade na presente seção é provar esses dois resultados, para as extensões por grupos hiperbólicos. Mas antes, iremos definir o seguinte objeto:

Definição 5.2.1. *Dizemos que a extensão por grupo T é simétrica se para qualquer $g \in G$*

$$\mathcal{L}^n(\mathbf{X}_g)(x, \mathrm{id}) \asymp \mathcal{L}^n(\mathbf{X}_{g^{-1}})(x, \mathrm{id}).$$

Agora, definiremos a seguinte aplicação $H_r : \mathcal{H}_\alpha \times \mathcal{H}_{\mathrm{loc}} \to \mathcal{H}_{\mathrm{loc}}$ dada por

$$H_r(f_1, f_2) := \mathbb{G}_r(f_2 \mathbb{G}_r(f_1)). \tag{5.1}$$

Nota-se que, pelo Lema 3.2.2, a aplicação H_r está bem definida.

Lema 5.2.2. *Seja T uma extensão por grupo transiente, topologicamente transitiva de uma aplicação Gibbs-Markov do tipo finito. Então $H_R(\mathbf{X}_A f_1, \mathbf{X}_B f_2) \in \mathcal{H}_{loc}$ para todo $f_1 \in \mathcal{H}_\alpha, f_2 \in \mathcal{H}_{loc}$ e $A, B \subset G$ finito.*

Demonstração. Notemos que $\mathbb{G}_r$ atua em $\mathcal{H}_{\mathrm{loc}}$ pela Proposição 3.2.1. Para $r = R$, pela Proposição 3.2.6 implica que $\mathbb{G}_R(\mathbf{X}_B f_2) \in \mathcal{H}_{\mathrm{loc}}$, portanto, como $\mathbf{X}_A f_1 \mathbb{G}_R(\mathbf{X}_B f_2) \in \mathcal{H}_{\mathrm{loc}}$ por finitude de A, outra aplicação da Proposição 3.2.6 mostra que $H_R(\mathbf{X}_A f_1, \mathbf{X}_B f_2) \in \mathcal{H}_{\mathrm{loc}}$. □

Lema 5.2.3. *Suponha G um grupo hiperbólico e T uma extensão por grupo transiente, topologicamente transitiva de uma aplicação Gibbs-Markov do tipo finito, então existe $C > 0$ tal que, para qualquer $k \in \mathbb{N}$,*

$$\sum_{|g|=k} H_R(\mathbf{X}_{\mathrm{id}}, \mathbf{X}_g)(x, \mathrm{id}) \leq C.$$

Demonstração. Fixe $r < R$ e escreva $u_k(r) = \sum_{|g|=k} H_r(\mathbf{X}_{\mathrm{id}}, \mathbf{X}_g)(x, \mathrm{id})$. Para $k \in \mathbb{N}$, denotaremos S_k a esfera de raio k. Assim, para $g_1 \in S_k$ e $g_2 \in S_l$ podemos definir pelo Lema 2.2.1 a seguinte aplicação $\psi(g_1, g_2) := g_1 h g_2 \in \cup_{k+l \leq i \leq k+l+c} S_i$. Agora, defina $C_{h,r} := H_r(\mathbf{X}_{\mathrm{id}}, \mathbf{X}_h)(x, \mathrm{id})$, note que $C_{h,r} < \infty$, já que, $\mathbb{G}_r \in \mathcal{H}_\alpha$. Seja $0 < r_0 \leq r < R$, então $\frac{C_{h,r}}{C_{h,r_0}} \geq 1$. Assim,

$$
\begin{aligned}
&H_r(\mathbf{X}_{\mathrm{id}}, \mathbf{X}_{g_1})(x, \mathrm{id}) H_r(\mathbf{X}_{\mathrm{id}}, \mathbf{X}_{g_2})(x, \mathrm{id}) \\
&\leq \frac{C_{h,r}}{C_{h,r_0}} H_r(\mathbf{X}_{\mathrm{id}}, \mathbf{X}_{g_1})(x, \mathrm{id}) H_r(\mathbf{X}_{\mathrm{id}}, \mathbf{X}_{g_2})(x, \mathrm{id}) \\
&\leq \sup_{|h| \leq c} \frac{1}{C_{h,r_0}} H_r(\mathbf{X}_{\mathrm{id}}, \mathbf{X}_{g_1})(x, \mathrm{id}) H_r(\mathbf{X}_{\mathrm{id}}, \mathbf{X}_{h})(x, \mathrm{id}) H_r(\mathbf{X}_{\mathrm{id}}, \mathbf{X}_{g_2})(x, \mathrm{id}) \\
&\ll H_r(\mathbf{X}_{\mathrm{id}}, \mathbf{X}_{g_1})(x, \mathrm{id}) H_r(\mathbf{X}_{g_1}, \mathbf{X}_{g_1 h})(x, g_1) H_r(\mathbf{X}_{g_1 h}, \mathbf{X}_{g_1 h g_2})(x, g_1 h) \\
&\ll H_r(\mathbf{X}_{\mathrm{id}}, \mathbf{X}_{g_1 h g_2})(x, \mathrm{id}).
\end{aligned}
$$

Seja γ_p um segmento geodésico de id para p. Suponha que $p = g_1 h g_2$ e que g_1 está a uma distância l de γ_p, também vamos supor que $|p| = s + t$ e $\left|g_1^{-1} p\right| \leq l + t$. Pelo fato de G ser um grupo Gromov-hiperbólico e pela desigualdade triângular temos

$$
s + l - \delta \leq |g_1| \leq s + l
$$

$$
l + t - \delta \leq \left|g_1^{-1} p\right| \leq l + t \Rightarrow l + t - \delta \leq |h g_2| \leq l + t.
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
|g_1| + |g_2| \leq |p| &= s + t \\
&\leq |g_1| - l + \delta + t \leq |g_1| - l + \delta + |h g_2| - l + \delta \\
&= |g_1| + |g_2| - 2l + 2\delta + c.
\end{aligned}
$$

Tomando $q_1 = \delta + \frac{c}{2}$, temos $l \leq q_1$, então, $g_1 \in B(\gamma_p(k), q_1)$. Usando o mesmo argumento para g_2, temos $g_2 \in B(\gamma_p(k), q_2)$. Tomando $q = \max\{q_1, q_2\}$, temos que cada ponto tem q pré-imagens sobre ψ. Daí

$$
\begin{aligned}
u_k(r) u_l(r) &= \sum_{g \in S_k, g_1 \in S_l} H_r(\mathbf{X}_{\mathrm{id}}, \mathbf{X}_{g_1})(x, \mathrm{id}) H_r(\mathbf{X}_{\mathrm{id}}, \mathbf{X}_{g_2})(x, \mathrm{id}) \\
&\ll \sum_{g_1 \in S_k, g_2 \in S_l} H_r(\mathbf{X}_{\mathrm{id}}, \mathbf{X}_{g_1 h g_2})(x, \mathrm{id}) \\
&= \sum_{g_1 \in S_k, g_2 \in S_l} H_r(\mathbf{X}_{\mathrm{id}}, \mathbf{X}_{\psi(g_1, g_2)})(x, \mathrm{id}) \\
&\leq q \sum_{i=k+l}^{k+l+c} \sum_{p \in S_i} H_r(\mathbf{X}_{\mathrm{id}}, \mathbf{X}_{p})(x, \mathrm{id}) \\
&= q \sum_{i=k+l}^{k+l+c} u_i(r).
\end{aligned}
$$

Para $r < R$, assuma que $\sum_{g\in G} H_r(\mathbf{X}_{\mathrm{id}}, \mathbf{X}_g)(x, \mathrm{id})$ é finito. Em particular, a sequência $u_k(r)$ é somável $\left(\sum_{g\in S_k} H_r(\mathbf{X}_{\mathrm{id}}, \mathbf{X}_g)(x, \mathrm{id}) < \infty\right)$ e atinge seu máximo $M(r)$ para algum índice $k_0(r)$. Usando a equação anterior para $k = l = k_0(r)$, obtemos $M(r)^2(r) \leq q(c+1)M(r)$ logo $M(r) \leq C$.

Portanto, para $r < R$, para cada $k \in \mathbb{N}$, tem-se $\sum_{|g|=k} H_r(\mathbf{X}_{\mathrm{id}}, \mathbf{X}_g)(x, \mathrm{id}) \leq C$. Nota-se que a constante C não depende de r, assim, segue o resultado desejado.

□

Lema 5.2.4. *Suponha G um grupo hiperbólico e T uma extensão por grupo transiente, simétrica, topologicamente transitiva de uma aplicação Gibbs-Markov do tipo finito. Então existe $k_0 > 0$ e $\epsilon > 0$ tal que, para cada $k \geq k_0$, e para qualquer $g, l, h \in G$ em um segmento geodésico (nessa ordem) com $d(g, l) \geq k$ e $d(l, h) \geq k$, para todo $x \in \Sigma_A$ temos*

$$\mathbb{G}_R(\mathbf{X}_g | B(l,k)^c)(x,h) \leq C2^{-e^{\epsilon k}}.$$

Demonstração. Fixe $\epsilon > 0$ pequeno e defina $N := e^{\epsilon k}$. De forma análoga feita por Gouëzel em [8](ver Lema 2.6), a ideia da prova é construir N barreiras, que chamaremos de $B_1, ..., B_N$, tal que, qualquer trajetória do caminho aleatório indo de g para h fora de $B(l,k)$ tem que passar por B_1 em seguida por B_2 e assim por diante. Vamos decompor a trajetória de acordo com a sua primeira visita a $B_1, \ldots, B_N$. Tomemos $A = B(l,k)$, e para simplificar a notação, vamos denotar $\mathbb{G}_r^A(f) := \mathbb{G}_r(f|A)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}_r^{A^c}(\mathbf{X}_g)(x,h) &= \sum_n r^n \mathcal{L}^n(\mathbf{X}_g \cdot \mathbf{1}_{A^c} \circ T \cdots \mathbf{1}_{A^c} \circ T^{n-1})(x,h) \\
&= \sum_{w\in\mathcal{W}^\infty : w\notin A, g\kappa(w)=h} r^{|w|}\Phi_w(x) \\
&= \sum_{\substack{(uv):uv\notin A, g\kappa(uv)=h, \\ h\kappa_j(v)^{-1}\notin B_N : j=1,\ldots,|v|-1}} r^{|u|+|v|}\Phi_u(\tau_v(x))\Phi_v(x) \\
&= \mathbb{G}_r^{A^c\cup B_N^c}(\mathbf{X}_{B_N}\mathbb{G}_r^{A^c}(\mathbf{X}_g))(x,h) \\
&= \mathbb{G}_r^{A^c\cup B_N^c}(\mathbf{X}_{B_N}\mathbb{G}_r^{A^c\cup B_{N-1}^c}(\mathbf{X}_{B_{N-1}}\mathbb{G}_r^{A^c\cup B_{N-2}^c}(\mathbf{X}_{B_{N-2}} \\
&\cdots \mathbb{G}_r^{A^c\cup B_1^c}(\mathbf{X}_{B_1}\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_g)))) \cdots)(x,h) \\
&\leq \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{B_N}\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{B_{N-1}}\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{B_{N-2}} \cdots \mathbf{X}_{B_1}\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_g))) \cdots)(x,h).
\end{aligned}$$

Gouëzel em [8] (ver Lema 2.6, pág 899 a 901) constrói as barreiras $B_1, ..., B_n$ de forma que, escrevendo $B_0 = \{g\}$ e $B_{N+1} = \{h\}$, tem para qualquer $1 \leq i \leq N+1$

$$\sum_{a\in B_{i-1}} \sum_{b\in B_i} \left(\int_{X_b} \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_a) d\mu\right)^2 \leq \frac{1}{4C} \tag{5.2}$$

onde C é uma constante. Defina o operador $M_i : \mathcal{H}_\alpha(B_{i-1}) \to \mathcal{H}_\alpha(B_i)$ por

$$M_i(f) = \mathbf{X}_{B_i}\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{B_{i-1}}f)$$

onde f é tal que $\dfrac{f(x,h)}{f(y,h)} \leq C$, para todo $x, y, h \in G$. Observe que

$$\begin{aligned} M_i(M_{i-1}(\mathbf{X}_g))(x,h) &= \mathbf{X}_{B_i}\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{B_{i-1}} \cdot M_{i-1}(\mathbf{X}_g))(x,h) \\ &= \mathbf{X}_{B_i}\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{B_{i-1}}\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{B_{i-2}} \cdot \mathbf{X}_g))(x,h). \end{aligned}$$

Daí $\mathbb{G}_r^{A^c}(\mathbf{X}_g)(x,h) \leq M_N \circ M_{N-1} \circ \cdots \circ M_0(\mathbf{X}_g)$. Mostraremos agora que

$$\|M_i\| \leq \frac{1}{2C}.$$

Por Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \|M_i(f)\|_2^2 &= \sum_{b\in B_i}\left(\int_{X_b}|M_i(f)|\,d\mu\right)^2 = \sum_{b\in B_i}\left(\int_{X_b}\left|\mathbf{X}_{B_i}\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{B_{i-1}}f)d\mu\right|\right)^2 \\ &= \sum_{b\in B_i}\left(\sum_{a\in B_{i-1}}\int_{X_b}\sum_w r^{|w|}\phi_w(x)\mathbf{X}_a(\tau_w(x))\,|f_w(x,a)|\,d\mu\right)^2 \\ &\leq \sum_{b\in B_i}\left(\sum_{a\in B_{i-1}}\|f|_{X_a}\|_\infty\int_{X_b}\sum_{w:a\psi_w=b} r^{|w|}\phi_w(x)d\mu\right)^2 \\ &= \sum_{b\in B_i}\left(\sum_{a\in B_{i-1}}\|f|_{X_a}\|_\infty\int_{X_b}\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_a)d\mu\right)^2 \\ &\leq \left(\sum_{a\in B_{i-1}}\|f|_{X_a}\|_\infty^2\right)\left(\sum_{a\in B_{i-1},b\in B_i}\left(\int_{X_b}\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_a)d\mu\right)^2\right) \\ &\leq C\sum_{a\in B_{i-1},b\in B_i}\left(\int_{X_b}\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_a)d\mu\right)^2\|f\|_2^2\,. \end{aligned}$$

Então, $\|M_i(f)\| \leq C\left(\sum_{a\in B_{i-1}, b\in B_i}\left(\int_{X_b}\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_a)d\mu\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Assim,

$$\begin{aligned} M_N\cdots M_0(\mathbf{X}_g) &\leq \|M_N\cdots M_0(\mathbf{X}_g)\| \\ &\leq \|M_N\|\cdot\|M_{N-1}\|\cdots\|M_0\|\cdot\|\mathbf{X}_g\| \\ &\leq \left(\frac{1}{2C}\right)^{N+1} \\ &< C2^{-N} \end{aligned}$$

daí, $\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_g|A^c)(x,h) \leq C2^{-N}$. Como queríamos.

□

5.2.1 Teorema A

Estamos agora em posição de demonstrar um dos nossos principais resultados, a generalização dos Teoremas 2.3 e 2.9 em [8] e dos Teoremas 4.1, 4.3 e 4.6 em [9].

Teorema A (Desigualdade de Ancona-Gouëzel-Lalley)**.** *Suponha G um grupo hiperbólico e T uma extensão por grupo transiente, simétrica, topologicamente transitiva de uma aplicação Gibbs-Markov do tipo finito. Então:*

i . Dada uma constante $D > 0$, existe uma constante $C > 0$ tal que, para cada $g, h \in G$, $x \in \Sigma_A$ e qualquer $z \in G$ tal que a distância entre z e o segmento geodésico $[h, g]$ é menor que D e $r \in [1, R]$, temos

$$\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_h)(x,g) \leq C\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_z\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_h))(x,g). \tag{5.3}$$

ii . Existe $C > 0$ e $\lambda \in (0,1)$ tal que, para qualquer $r \in [1, R]$, para qualquer $x, y \in \Sigma_A$ e para qualquer $g, g', h, h' \in G$ em uma configuração aproximada por uma árvore como mostrado abaixo, temos

$$\left|\frac{\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_h)(x,g)/\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_h)(y,g')}{\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{h'})(x,g)/\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{h'})(y,g')} - 1\right| \leq C\lambda^n.$$

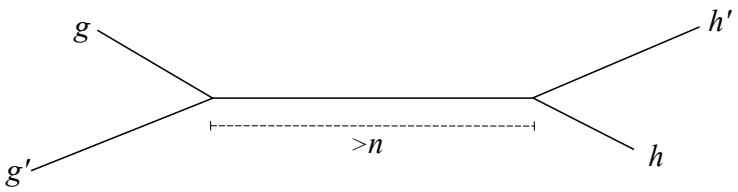

Figura 5.2: Configuração de $g, g', h, h' \in G$

Demonstração. Para provar a desigualdade de Ancona-Gouëzel-Lalley para extensões por grupos hiperbólicos, seguiremos as ideias usadas por Gouëzel e Lalley para provar os Teoremas 4.1, 4.3 e 4.6 em [9]. Começaremos provando o item (i), em que é necessário verificar se a abordagem feita para a função de Green não apresentará problema quando generalizada para o operador de Green.

Parte (I). Assuma que $[g,h]$ é uma geodésica em G e que $z \in [g,h] \setminus \{g,h\}$ e defina $d := d_S(g,h)$. Além disso, seja $\gamma : [0,d] \to [g,h]$ referente à isometria obtida pela identificação das arestas com cópias de $[0,1]$ tal que $\gamma(0) = g$ e $\gamma(d) = h$. Nós agora construíremos sequências finitas de $t_i, s_i \in [0,d]$ e bolas B_i como segue abaixo. Para começar, defina $s_0 = 0$ e $t_0 = d$. Os s_i, t_i são então construídos da seguinte forma (ver Figura 5.3).

1. Se $t_i - s_i \leq 16$ então, a indução para. De fato, a Figura 5.3 ilustra um possível último passo na iteração.

2. Se $t_i - s_i > 16$ e $d(\gamma(s_i), z) \geq d(\gamma(t_i), z)$, então $s_{i+1} = s_i + (t_i - s_i)/4$ e $t_{i+1} = t_i$. Como $s_{i+1} - s_i = (t_i - s_i)/4 > 4$, então, existe uma bola B_{i+1} com centro em $\gamma((s_i, s_{i+1})) \cap G$ e raio em $\mathbb{N}$ tal que B_{i+1} cobre $\gamma((s_i, s_{i+1}))$ até dois segmentos de comprimento total no máximo 3.

3. Se $t_i - s_i > 16$ e $d(\gamma(s_i), z) \leq d(\gamma(t_i), z)$, então $s_{i+1} = s_i$ e $t_{i+1} = t_i - (t_i - s_i)/4$. Como acima, existe uma bola B_{i+1} com centro em $\gamma((t_{i+1}, t_i)) \cap G$ e raio $r_i \in \mathbb{N}$ tal que B_{i+1} cobre $\gamma((t_{i+1}, t_i))$ até dois segmentos de comprimento total no máximo 3.

Agora, assumindo que a indução parou no passo n, é fácil ver que $s_0 \leq s_i \cdots \leq s_n < t_n \leq t_{i+1} \cdots \leq t_0$, $t_i - s_i = (3/4)^i d$, e que $(3/4)^i d \leq 16$ diam $B_{i+1} \leq 4(3/4)^i d$ e que a distância entre duas bolas adjacentes é no máximo 4.

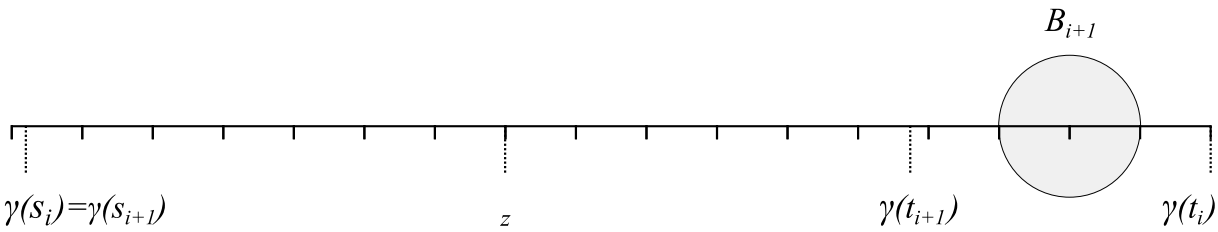

Figura 5.3: A construção de B_{i+1}

Suponha que $f \in \mathcal{H}_\alpha$ e que estas três bolas B_i, B_j, B_k estão nessa ordem, da esquerda para direita, em relação a $[g,h]$. Agora, expandiremos $\mathbf{X}_{B_i}\mathbb{G}_r(f\mathbf{X}_{B_k})$, de acordo com a posição de B_j em relação a z, da seguinte forma:

$$\mathbf{X}_{B_i}\mathbb{G}_r(f\mathbf{X}_{B_k}) = \mathbf{X}_{B_i}\mathbb{G}_r(f\mathbf{X}_{B_k}|B_j^c) + \begin{cases} \mathbf{X}_{B_i}\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{B_j}\mathbb{G}_r(f\mathbf{X}_{B_k})|B_j^c) & : B_j \text{ à esquerda} \\ \mathbf{X}_{B_i}\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{B_j}\mathbb{G}_r(f\mathbf{X}_{B_k}|B_j^c)) & : B_j \text{ à direita} \end{cases} \tag{5.4}$$

Ou seja, no primeiro caso, separamos as órbitas, começando em B_k e terminando em B_i, em sua última visita a B_j, enquanto no segundo caso, em sua primeira visita a B_j. Nesse momento, aplicamos essa expansão indutivamente da seguinte maneira: no primeiro caso, aplicamos (5.4) para $\mathbf{X}_{B_j}\mathbb{G}_r(f\mathbf{X}_{B_k})$, em relação a B_l entre B_j, B_k, já no segundo caso em $\mathbf{X}_{B_i}\mathbb{G}_r(f^*\mathbf{X}_{B_j})$, com relação a B_l entre B_i e B_j, com $f^* = \mathbb{G}_r(f\mathbf{X}_{B_k}|B_j^c)$. Para obter uma expressão manipulável, defina

$$\mathbb{G} = \mathbb{G}_r, \quad \mathbb{G}_j = \mathbb{G}_r(\,\cdot\,|B_j^c), \quad L_j(f) := \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{B_j}\cdot f|B_j^c), \qquad R_j(f) := \mathbf{X}_{B_j}\cdot\mathbb{G}_r(f|B_j^c).$$

Além disso, para $k \leq N$ assuma que $a_k(i) = 1, \ldots, k (i = 1, \ldots, k)$ são determinadas pela ordem do B_i ao longo da geodésica $[g, h]$, no sentido de que $B_{a_k(i)}$ é seguido pela $B_{a_k(i+1)}$ etc. e que ℓ_k é dado por $B_{a_k(\ell_k)} < z < B_{a_k(\ell_k+1)}$. Definamos

$$\begin{aligned}
E_k &:= \mathbf{X}_{\{g\}}\cdot L_{a_k(1)}\cdots L_{a_k(\ell_k)}\circ\mathbb{G}\circ R_{a_k(\ell_k+1)}\cdots R_{a_k(k)}(\mathbf{X}_{\{h\}}),\\
D_k &:= \mathbf{X}_{\{g\}}\cdot L_{a_k(1)}\cdots L_{a_k(\ell_k)}\circ\mathbb{G}_{k+1}\circ R_{a_k(\ell_k+1)}\cdots R_{a_k(k)}(\mathbf{X}_{\{h\}}),\\
D_0 &:= \mathbf{X}_{\{g\}}\cdot\mathbb{G}_1(\mathbf{X}_{\{h\}}).
\end{aligned}$$

Na figura 5.4, órbitas típicas relacionadas a D_3 e a E_4 são ilustradas, ou seja, no primeiro caso, a órbita é interrompida na primeira visita a B_1, depois passa sem atingir B_4, para a última visita a B_3 e, através da última visita, para B_2 a g, enquanto, no segundo caso, a órbita tem que passar por B_4. Nós, mostramos agora, por indução que: $\mathbf{X}_{\{g\}}\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{\{h\}}) = E_k + \sum_{i=0}^{k-1} D_i$. Se $k = 1$, então $a_1(1) = 1$ e $\ell_1 \in \{0, 1\}$. Em particular,

$$E_1 = \begin{cases} \mathbf{X}_{\{g\}}\cdot\mathbb{G}_1(\mathbf{X}_{B_1}\cdot\mathbb{G}(\mathbf{X}_{\{h\}})) & : \ell_1 = 1\\ \mathbf{X}_{\{g\}}\cdot\mathbb{G}(\mathbf{X}_{B_1}\cdot\mathbb{G}_1(\mathbf{X}_{\{h\}})) & : \ell_1 = 0 \end{cases}$$

Consequentemente, $\mathbf{X}_{\{g\}}\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{\{h\}}) = E_1 + D_0$ por (5.4). Para estender o resultado para qualquer $k \leq n$, basta aplicar (5.4) para

$$\mathbf{X}_{B_{a_k(\ell_k)}}\left(\mathbb{G}\left(\mathbf{X}_{B_{a_k(\ell_k+1)}}\,\cdot\,\right) - \mathbb{G}\left(\mathbf{X}_{B_{a_k(\ell_k+1)}}\,\cdot\,|{B_{a_k(\ell_{k+1})}}^c\right)\right)$$

para mostrar que $E_k = E_{k+1} + D_k$ e, em particular, $\mathbf{X}_{\{g\}}\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{\{h\}}) = E_k + \sum_{i=0}^{k-1} D_i$ para todos os $k \leq n$ por indução.

Agora, assumindo que $u \in B_{a_k(\ell_k)}$ e $v \in B_{a_k(\ell_k+1)}$, segue-se da δ-hiperbolicidade que a distância do segmento geodésico $[u, v]$ ao centro de B_{k+1} é no máximo δ. Em particular, há uma bola de raio $B_{k+1}/2 - (\delta + 1)$ com centro em $[u, v] \cap G$ que está contido em B_{k+1}. Segue-se agora do Lema 5.2.4 e da construção que

$$\mathbf{X}_{\{u\}}\mathbb{G}_r(\mathbf{1}_{[a,v]}|B_{k+1}^c) \leq \mathbf{X}_{\{u\}}\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{\{v\}}|B_{k+1}^c) \leq 2^{-\lambda^{(B_{k+1})/2-(\delta+1)}} \leq 2^{-\lambda^{\frac{d}{32}\left(\frac{3}{4}\right)^k-(\delta+1)}}$$

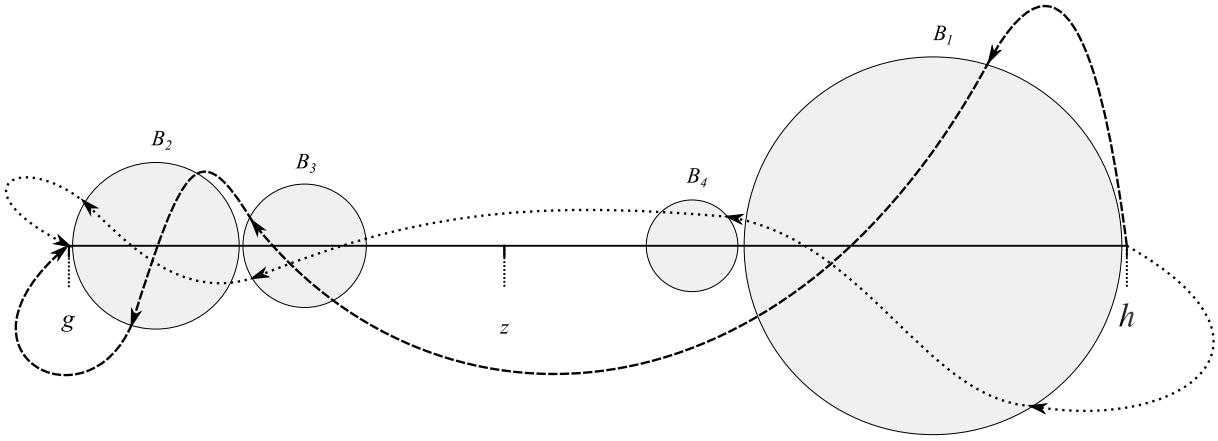

Figura 5.4: Órbitas típicas para D_3 (tracejado) e E_4 (pontilhado)

para qualquer $a \in \mathcal{W}^1$, desde que $(3/4)^k d \geq 32(n_0 + 1 + \delta)$. Como $d\mu/d\mu \circ \theta$ é afastado uniformemente de zero, existe $p \in (0,1)$ tal que $\mathbb{G}_r(\mathbf{1}_{[a,v]})(x,v) \gg p^{d(u,v)}$ para todo $x \in \Sigma_A$. Novamente, pela construção e pela desigualdade triangular, temos que $d(u,v) \leq |t_{k-1} - s_{k-1}| = d(3/4)^{k-1}$. Portanto, existem $\alpha > 1$, $\beta > 1$, tal que

$$\mathbf{X}_{\{u\}}\mathbb{G}_r(\mathbf{1}_{[a,v]}|B_{k+1}^c) \leq \alpha^{-\beta^{d(3/4)^k} + d(3/4)^k}\mathbf{X}_{\{u\}}\mathbb{G}_r(\mathbf{1}_{[a,v]}). \tag{5.5}$$

Agora, defina $\alpha_{d,k} := \alpha^{-\beta^{d(3/4)^k} + d(3/4)^k}$ e suponha que $f > 0$ satisfaça

$$\sup\{D_\alpha(\log f)(z,v) : z \in \Sigma_A\} \leq \log C.$$

Então

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_{\{u\}}\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{\{u\}}\ f|B_{k+1}^c) &\leq \sum_{a\in\mathcal{W}^1} \sup_{z\in[a,v]} f(x,v)\ \mathbf{X}_{\{u\}}\mathbb{G}_r(\mathbf{1}_{[a,v]}|B_{k+1}^c) \\ &\leq \sum_{a\in\mathcal{W}^1} \sup_{x\in[a]} f(x,v)\ \alpha_{d,k}\mathbf{X}_{\{u\}}\mathbb{G}_r(\mathbf{1}_{[a,v]}) \leq C\alpha_{d,k}\mathbf{X}_{\{u\}}\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{\{u\}}\ f)\end{aligned}$$

Pela propriedade Gibbs-Markov, temos que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k-1} D_i &= \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{\substack{u\in B_{a_i(\ell_i)},\\ v\in B_{a_i(\ell_i+1)}}} \mathbf{X}_{\{g\}} \cdot L_{a_i(1)}\left(\cdots L_{a_i(\ell_i)}\left(\mathbf{X}_{\{u\}}\mathbb{G}_r\left(\mathbf{X}_{\{v\}}R_{a_k(\ell_i+1)}\left(\cdots(\mathbf{X}_{\{h\}})\right)|B_{i+1}^c\right)\right)\right) \\ &\leq C_\varphi \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{\substack{u\in B_{a_i(\ell_i)},\\ v\in B_{a_i(\ell_i+1)}}} \alpha_{d,i}\mathbf{X}_{\{g\}} \cdot L_{a_i(1)}\left(\cdots L_{a_i(\ell_i)}\left(\mathbf{X}_{\{u\}}\mathbb{G}_r\left(\mathbf{X}_{\{v\}}R_{a_k(\ell_i+1)}\left(\cdots(\mathbf{X}_{\{h\}})\right)\right)\right)\right) \\ &\leq \left(\textstyle\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_{d,i}\right)\mathbf{X}_{\{g\}}\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{\{h\}}).\end{aligned}$$

O próximo passo, depende do fato de que $\alpha_{d,k}$ e $t_k - s_k$ são funções de $(3/4)^k d$, que

permitem escolher M tal que $t_k - s_k \geq M$ implica $\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_{d,i} \leq \frac{1}{2}$. Para k maximal, com essa propriedade, também notemos que $B_{a_k(\ell_k)}$ e $B_{a_k(\ell_k+1)}$ estão contidos em uma bola com centro z e raio $t_{k-1} - s_{k-1} +$ diam B_{k-1}. Dessa forma, como o raio é uniformemente limitado por um múltiplo de M, existe $C > 0$ tal que

$$\mathbf{X}_{\{g\}} \cdots \mathbf{X}_{\{u\}} \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{\{v\}} \cdots \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{\{h\}})) \leq C \mathbf{X}_{\{g\}} \cdots \mathbf{X}_{\{u\}} \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{\{z\}} \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{\{v\}} \cdots \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{\{h\}})))$$

para todos os $u \in B_{a_k(\ell_k)}$ e $v \in B_{a_k(\ell_k+1)}$. Colocando essas estimativas juntas, obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_{\{g\}} \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{\{h\}}) &= E_k + \sum_{i=0}^{k-1} D_i \leq E_k + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{d,k} E_i \leq E_k + \frac{1}{2} \mathbf{X}_{\{g\}} \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{\{h\}}) \\
&\leq \sum_{u \in B_{a_k(\ell_k)}, v \in B_{a_k(\ell_k+1)}} \mathbf{X}_{\{g\}} \cdots \mathbf{X}_{\{u\}} \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{\{v\}} \cdots \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{\{h\}})) + \frac{1}{2} \mathbf{X}_{\{g\}} \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{\{h\}}) \\
&\leq C \sum_{u,v} \mathbf{X}_{\{g\}} \cdots \mathbf{X}_{\{u\}} \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{\{z\}} \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{\{v\}} \cdots G_r(\mathbf{X}_{\{h\}}))) + \frac{1}{2} \mathbf{X}_{\{g\}} \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{\{h\}}) \\
&\leq C \mathbf{X}_{\{g\}} \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{\{z\}} \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{\{h\}})) + \frac{1}{2} \mathbf{X}_{\{g\}} \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{\{h\}}).
\end{aligned}$$

Consequentemente, $\mathbf{X}_{\{g\}} \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{\{h\}}) \leq 2C \mathbf{X}_{\{g\}} \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{\{z\}} \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{\{h\}}))$, provando (5.3) para z no segmento geodésico $[g, h]$.

Assuma que a distância entre z e o segmento geodésico $[g, h]$ é menor que D. Em particular, existe $z' \in [g, h]$ com $d(z, z') < D$ e (5.3), valendo em relação a z'. Além disso, observa-se que $\{g : d(g,\ id) \leq D\}$ é um conjunto finito, pois G é finitamente gerado. Como $z^{-1}z' \in \{g : d(g, \mathrm{id}) \leq D\}$, uma aplicação do Lema 3.2.7, fornece um limite uniforme para

$$|\log \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{z'} \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_h))(x, g) / \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_z \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_h))(x, g)|$$

que implica que (5.3) é válido para uma constante diferente.

Uma extensão da parte (I). Essa extensão será necessária para podermos deduzir o item (ii) da desigualdade de Ancona. Para fazer isso, observa-se que a indução depende de (5.4), e é obtida através de uma decomposição de órbitas. Portanto, desde que o conjunto Ω contenha $\bigcup_k B_k$, a equação (5.4) pode ser generalizada para

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_{B_i} \mathbb{G}_r(f \mathbf{X}_{B_k} | \Omega) &= \mathbf{X}_{B_i} \mathbb{G}_r(f \mathbf{X}_{B_k} | B_j^c \cap \Omega) + \\
&+ \begin{cases} \mathbf{X}_{B_i} \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{B_j} \mathbb{G}_r(f \mathbf{X}_{B_k} | \Omega) | B_j^c \cap \Omega) & : B_j \text{ esquerda de } z \\ \mathbf{X}_{B_i} \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{B_j} \mathbb{G}_r(f \mathbf{X}_{B_k} | B_j^c \cap \Omega) \Omega) & : B_j \text{ direita de } z, \end{cases}
\end{aligned}$$

Com isso, temos que uma versão da indução $E_k + \sum_{i=0}^{k-1} D_i$ é válida em relação às órbitas que nunca deixam Ω. Além disso, essa generalização não causa nenhum problema com a aplicação do Lema 5.2.4, já que, as estimativas podem melhorar.

No entanto, a estimativa (**??**) depende da existência de uma órbita conectando u e v, portanto, também é necessário que Ω contenha uma M-vizinhança do casco convexo de $\bigcup_k B_k$, com M, dependendo da transitividade topológica de T. Isto é, M deve ser escolhido de forma que, para qualquer $a \in \mathcal{W}$, $u \in B_k$, $v \in B_l$, exista $x \in [a]$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que a geodésica de u a v esteja contida em $\{u\kappa^j(x) : 0 \leq j \leq n\}$, a órbita $\{u\kappa^j(x) : 0 \leq j \leq n\} \subset \Omega$ e $\log n \ll d(u,v)$. À medida que as afirmações restantes seguem literalmente, obteremos a seguinte versão relativa do item (i), adicionando a estimativa trivial, desde que Ω contenha a M-vizinhança do casco convexo de $\bigcup_k B_k$.

$$\mathbb{G}_r\left(\mathbf{X}_z\mathbb{G}_r\left(\mathbf{X}_h|\Omega\right)|\Omega\right)(x,g) \leq \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_h|\Omega)(x,g) \leq C\mathbb{G}_r\left(\mathbf{X}_z\mathbb{G}_r\left(\mathbf{X}_h|\Omega\right)|\Omega\right)(x,g). \tag{5.6}$$

Parte (II). A adaptação dos argumentos em [9], para provarmos o item (ii), depende da teoria do potencial de medidas conformes e excessivas, a qual foi desenvolvida no Capítulo 4 deste trabalho.

Desse modo, nos referimos a uma medida de Radon m como λ-excessiva ou excessiva, se $\mathcal{L}^*(m) \leq \lambda m$, isto é, $\mathcal{L}^*(m)$ é absolutamente contínua em relação a m e $d\mathcal{L}^*(m)/dm \leq \lambda$. Além disso, dizemos que m é conforme em B, se $\mathcal{L}^*(m)|_B = \lambda m|_B$.

Comecemos com um argumento da geometria. Para $\xi, \eta \in G$, vamos escolher $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$D := d(\xi,\eta)/k \geq 2\max\{d(\mathrm{id},\kappa(x)) : x \in \Sigma_A\}.$$

Para $1 \leq j \leq k$, seja $z_j \in G$, o ponto mais próximo do arco geodésico de ξ para η com $(z_j \cdot \xi)_\eta > jD + D/2$ e o conjunto

$$\Omega_j := \{h \in G : (h \cdot \xi)_\eta \geq jD\}\,,\ \Lambda_j := \{h \in \Omega_j : (h \cdot \xi)_\eta \leq D/2 + jD\}\,.$$

Observa-se que $\Omega_j \supset \Omega_{j+1}$ e para $h \in \Omega_j$, a geodésica de h para η passa por $B(z_j,\delta)$, pela propriedade triângulo fino. Para $h \in \Omega_j$ e $g \in \Omega_j^c$, decorre da construção que $(h \cdot \xi)_\eta > (g \cdot \xi)_\eta$. Por aproximação, por uma árvore, a geodésica de h a g deve passar por $B(z_j, 4\delta)$. Se, além disso, $h \in \Omega_{j+1}$, decorre da escolha de D que qualquer órbita de h a g deve passar por Λ_j, digamos em z. Por uma aproximação adicional, por uma árvore, também a geodésica de h a z visita $B(z_j, 4\delta)$.

Esta construção geométrica, agora permite deduzir as seguintes estimativas. Decompondo órbitas em relação à última visita a Λ_j, segue de (5.5) e uma extensão do

Lema 3.2.7 para $\mathbb{G}_r(\cdot|\Omega_j)$ que existe $c \geq 1$ tal que, para qualquer $\omega \in \Sigma_A$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_g \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_h|\Omega_j) &= \mathbf{X}_g \sum_{z\in\Lambda_j} \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_z \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_h|\Omega_j)\ |\Omega_j \setminus \Lambda_j) \\
&= c^{\pm 1}\mathbf{X}_g \sum_{z\in\Lambda_j} \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_z \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{z_j}\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_h|\Omega_j)|\Omega_j)|\Omega_j \setminus \Lambda_j) \\
&= c^{\pm 2}\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_h|\Omega_j)(\omega, z_j)\ \cdot\ \mathbf{X}_g \sum_{z\in\Lambda_j} \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_z \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{z_j}|\Omega_j)|\Omega_j \setminus \Lambda_j) \\
&= \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_h|\Omega_j)(\omega, z_j)\ \cdot\ \mathbf{X}_g \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{z_j}|\Omega_j),
\end{aligned}$$

Agora assuma que, para algum $1 \leq j \leq k$, m é uma medida de Radon, $1/r$-conforme e não trivial em $\mathbb{X}_{\Omega_j}$ tal que $m\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}(\mathbb{X}_{\Omega_j})\right) = 0$. Em particular, temos que

$$A_k := T^{-k}(\mathbb{X}^c_{\Omega_j}) \cap \bigcap_{n=0}^{k-1} T^{-n}(\mathbb{X}_{\Omega_j}), \quad k = 1, 2, \ldots$$

é uma partição de Ω_j até um conjunto de medida zero, então, para $h \in \mathbb{X}_{\Omega_{j+1}}$,

$$\begin{aligned}
m(\mathbf{X}_h) &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} \mathbf{X}_h dm = \sum_{k=1}^{\infty} \int \mathbf{X}_{\Omega_j^c} r^{k-1} \mathcal{L}\left(\mathbf{X}_{\Omega_j} \mathcal{L}(\cdots \mathcal{L}(\mathbf{X}_h)\cdots)\right) dm \\
&= \frac{1}{r} \int \mathbf{X}_{\Omega_j^c} \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_h|\Omega_j) dm = \frac{c^{\pm 2}}{r} \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_h|\Omega_j)(\omega, z_j) \int \mathbf{X}_{\Omega_j^c} \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{z_j}|\Omega_j) dm \\
&= c^{\pm 2}\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_h|\Omega_j)(\omega, z_j)\ \cdot\ m(\mathbf{X}_{z_j}).
\end{aligned}$$

Tomando $h = \xi$, segue-se que $m(\mathbf{X}_{z_j}) = c^{\pm 2} m(\mathbf{X}_\xi)/\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_\xi|\Omega_j)(\omega, z_j)$, então, para ν_j definida da seguinte maneira

$$\int f d\nu_j := c^{-4} \frac{\mathbb{G}_r(f|\Omega_j)(\omega, z_j)}{\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_\xi|\Omega_j)(\omega, z_j)}$$

para qualquer $h \in \mathbb{X}_{\Omega_{j+1}}$, temos que

$$c^{-4} m(\mathbf{X}_h) \leq m(\mathbf{X}_\xi)\nu_j(\mathbf{X}_h) \leq c^4 m(\mathbf{X}_h). \tag{5.7}$$

Nota-se que (**??**) detém apenas em média, ou seja, $\mathbb{X}_h \subset \mathbb{X}_{\Omega_{j+1}}$ como na maioria dos casos, m e ν_j não são singulares, com respeito uma para a outra. Para aplicar (**??**), também para $m = \nu_{j-1}$, verifica-se que ν_j é $1/r$-conforme em $(T^{-1}(\Omega_j) \cap \Omega_j) \setminus \{(\omega, z_j)\} \supset \Omega_{j+1}$ e

$$\mathbb{G}_r(\mathcal{L}(f)|\Omega_j) = \frac{1}{r}\left(\mathbb{G}_r(f|\Omega_j) - f\right) + \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{\Omega_j^c}\mathcal{L}(f)|\Omega_j) - \mathbf{X}_{\Omega_j^c}\mathcal{L}(f),$$

e que, por construção, $\nu_j\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}(\mathbb{X}_{\Omega_{j+1}})\right) = 0$. Vale ressaltar que essas duas propriedades serão necessárias para o limite inferior de $(\mu_i - \nu)(\mathbf{X}_h)$, o qual obteremos logo abaixo, enquanto o limite superior é independente disso.

Após essas colocações, estamos agora, em posição de provar o item (ii). Para fazer isso, tomemos $\alpha := 1 - c^{-4}$, $x_1, x_2 \in \Sigma$ e $g_1, g_2 \in \Omega_1^c$, seja μ_1, μ_2, ν referentes as medidas de Radon, definidas por

$$\mu_i(f) := \frac{\mathbb{G}_r(f)(x_i, g_i)}{\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_\xi)(x_i, g_i)}, \quad \nu := \sum_{j=1}^{k-1} \alpha^{j-1}\nu_j.$$

Aplicando, indutivamente (**??**) para $m = \mu$, para a estimativa de cima e $m = \nu_j$ para a estimativa abaixo, segue-se que, considerando $h \in \Omega_k$,

$$\begin{aligned}
(\mu_i - \nu)(\mathbf{X}_h) &= (\mu_i - \nu_1)(\mathbf{X}_h) - \sum_{j=2}^{k-1} \alpha^{j-1}\nu_j(\mathbf{X}_h) \leq \alpha\left(\mu_i(\mathbf{X}_h) - \sum_{j=2}^{k-1} \alpha^{j-2}\nu_j(\mathbf{X}_h)\right) \\
&\leq \alpha^{k-1}\mu_i(\mathbf{X}_h), \\
(\mu_i - \nu)(\mathbf{X}_h) &= (\mu_i - \nu_1)(\mathbf{X}_h) - \sum_{j=2}^{k-1} \alpha^{j-1}\nu_j(\mathbf{X}_h) \geq \alpha\left(\nu_1(\mathbf{X}_h) - \sum_{j=2}^{k-1} \alpha^{j-2}\nu_j(\mathbf{X}_h)\right) \\
&\geq \alpha^{k-1}\nu_{k-1}(\mathbf{X}_h) \geq 0.
\end{aligned}$$

Além disso, observa-se que (**??**) implica também que $\mu_1(\mathbf{X}_h) \asymp \mu_2(\mathbf{X}_h)$, então,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\mu_1(\mathbf{X}_h)}{\mu_2(\mathbf{X}_h)} - 1\right| &= \left|\frac{\mu_1(\mathbf{X}_h) - \mu_2(\mathbf{X}_h)}{\mu_2(\mathbf{X}_h)}\right| = \left|\frac{(\mu_1 - \nu)(\mathbf{X}_h) + (\mu_2 - \nu)(\mathbf{X}_h)}{\mu_2(\mathbf{X}_h)}\right| \\
&\leq \alpha^{k-1}\frac{\mu_1(\mathbf{X}_h) + \mu_2(\mathbf{X}_h)}{\mu_2(\mathbf{X}_h)} \ll \alpha^{k-1}\frac{\mu_2(\mathbf{X}_h) + \mu_2(\mathbf{X}_h)}{\mu_2(\mathbf{X}_h)} \ll \alpha^k.
\end{aligned}$$

Usando o resultado anterior para h e h' obtemos

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\mu_1(\mathbf{X}_h)}{\mu_2(\mathbf{X}_h)} \cdot \frac{\mu_2(\mathbf{X}_{h'})}{\mu_1(\mathbf{X}_{h'})} - 1\right| &= \left|\left(\frac{\mu_1(\mathbf{X}_h)}{\mu_2(\mathbf{X}_h)} - 1\right)\frac{\mu_2(\mathbf{X}_{h'})}{\mu_1(\mathbf{X}_{h'})} + \frac{\mu_2(\mathbf{X}_{h'})}{\mu_1(\mathbf{X}_{h'})} - 1\right| \\
&\leq \frac{\mu_2(\mathbf{X}_{h'})}{\mu_1(\mathbf{X}_{h'})}\left|\frac{\mu_1(\mathbf{X}_h)}{\mu_2(\mathbf{X}_h)} - 1\right| + \left|\frac{\mu_2(\mathbf{X}_{h'})}{\mu_1(\mathbf{X}_{h'})} - 1\right| \ll \alpha^k.
\end{aligned}$$

Assim, segue o item (ii) do teorema para $\lambda := \alpha^{1/D}$.

$\square$

Capítulo 6

A geometrização da fronteira de Martin

Neste capítulo trabalharemos com uma extensão por grupo um hiperbólico (X, T) de um subshift do tipo finito (Σ_A, θ), onde $X = \Sigma_A \times G$.

No presente capítulo, o Teorema A tem implicações imediatas para uma teoria de fronteira de extensões por grupos, uma vez que, indica o que podemos tomar como noção canônica da fronteira de Martin, por meio de uma geometrização. Já a segunda estimativa do Teorema A permite obter uma geometrização por uma equivalência Hölder da fronteira de Martin, com a fronteira visual de G.

6.1 Fronteira de Martin

A próxima definição será inspirada na construção clássica da fronteira de Martin, a qual dá origem a uma extensão contínua dos operadores de Green. Assumindo que T é transiente, para $h \in G$ e $r \leq R$ definamos a função

$$\mathbb{K}_r(h, \cdot) : \Sigma_A \times G \to \mathbb{R},\ (x, g) \mapsto \frac{\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_h)(x, g)}{\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{\mathrm{id}})(x, g)}$$

para cada $h \in G$, a função definida é limitada pelo Lema 3.2.7. Definamos agora o seguinte conjunto

$$M_r := \{(x, g) \in \Sigma_A \times G : |\kappa^n(x)| \to \infty \text{ e } \lim_{n\to\infty} \mathbb{K}_r(h, T^n(x, g)) \text{ existe para todo } h \in G\}.$$

Estabeleceremos a seguinte relação de equivalência em M_r, dizemos que (x, g) é equivalente à $(\tilde{x}, \tilde{g})$ no sentido de Martin, e escrevemos $(x, g) \sim (\tilde{x}, \tilde{g})$, se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{K}_r(h, T^n(x, g)) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{K}_r(h, T^n(\tilde{x}, \tilde{g}))$ para todo $h \in G$.

Em analogia à teoria conhecida de caminhos aleatórios, tomando como base os trabalhos de [19] referirmos-nos $\mathcal{M}_r := M_r/\sim$ como a fronteira de Martin da extensão por grupo (X, T). Como consequência do Teorema A, obteremos a proposição abaixo, a qual estabelece uma importante relação entre ∂G e $\mathcal{M}_r$.

Proposição 6.1.1. *Sejam G um grupo hiperbólico, T uma extensão por grupo transiente, simétrica,topologicamente transitiva de uma aplicação Gibbs-Markov do tipo finito. Para $r \leq R$, temos que*

i . Se $(x, g) \in \Sigma_A \times G$ tal que $(g\kappa^k(x))$ é uma sequência de Gromov então, $(x, g) \in M_r$. Além disso, para $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \Sigma \times G$ tal que $(g\kappa^k(x)) \sim (\tilde{g}\kappa^k(\tilde{x}))$, no sentido Gromov, então $(x, g) \sim (\tilde{x}, \tilde{g})$, no sentido de Martin.

ii . Para cada sequência (g_n) Gromov, existe $x \in \Sigma_A$ tal que $(\kappa^n(x))$ e (g_n) convergem para o mesmo limite no infinito.

Demonstração. Para provar o item (i), nota-se que, para $h \in G$ e N suficientemente grande, o item (ii) do Teorema A é aplicado a $\mathrm{id}, h, g\kappa^k(x)$ e $g\kappa^l(x)$ para $k, l \geq N$. Além disso, o n da configuração aproximada por uma árvore, pode ser escrito como

$$n = \frac{1}{2}\left((g\kappa^k(x) \cdot g\kappa^l(x))_{\mathrm{id}} + (g\kappa^k(x) \cdot g\kappa^l(x))_h - d(h, \mathrm{id})\right). \tag{6.1}$$

Como $(g\kappa^k(x) \cdot g\kappa^l(x)) \to \infty$ para $k, l \to \infty$ segue que

$$\left|\frac{\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_h) \circ T^k(x, g)}{\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{\mathrm{id}}) \circ T^k(x, g)} \cdot \frac{\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{\mathrm{id}}) \circ T^l(x, g)}{\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_h) \circ T^l(x, g)} - 1\right| \to \ 0.$$

Portanto, podemos concluir que $\log \mathbb{K}_r(h, T^k(x, g))$ é Cauchy, para todo $r \leq R$. Daí $\lim \mathbb{K}_r(h, T^k(x, g))$ existe. Portanto, $(x, g) \in M_r$.

Assim, para provarmos a segunda parte do item (i), suponhamos que $(g\kappa^k(x)) \sim (\tilde{g}\kappa^k(\tilde{x}))$ e substituindo $g\kappa^l(x)$ por $\tilde{g}\kappa^k(\tilde{x})$ em (**??**), com isso, obteremos:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{K}_r(h, T^n(x, g)) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{K}_r(h, T^n(\tilde{x}, \tilde{g}))$$

para todo $h \in G$. Sendo assim, $(x, g) \sim (\tilde{x}, \tilde{g})$ no sentido de Martin.

A afirmação (ii) decorre do fato de que a transitividade de T permite construir $x \in \Sigma_A$, tal que $(\kappa^n(x))$ permanece uniformemente próximo ao arco geodésico por partes, com vértices (g_n). Dessa forma, $(\kappa^n(x))$ e (g_n) converge para o mesmo limite no infinito. □

Como resultado imediato da proposição anterior, temos a seguinte aplicação

$$\psi : \partial G \to \mathcal{M}_r, \ \eta \mapsto \left\{(x, g) \in M_r : \lim_{n\to\infty} g\kappa^n(x) = \eta\right\} /_{\sim}$$

que está bem definida.

Para analisar as propriedades topologicas de ψ, comecemos com a construção de uma métrica, compatível com a compactificação de Martin de $\Sigma_A \times G$. No entanto,

para obter Hölder continuidade, verifica-se que precisamos fazer uma pequena modificação na definição clássica, tomando logaritmo da seguinte forma: Pelo Lema 3.2.7, $\|\log \mathbb{K}_r(h,\cdot)\|_\infty < \infty$, portanto, existe $\{c_h > 0 : h \in G\}$ tal que

$$\Delta_r((x,g),(\tilde{x},\tilde{g})) := \sum_{h\in G} c_h \left|\log \mathbb{K}_r(h,(x,g)) - \log \mathbb{K}_r(h,(\tilde{x},\tilde{g}))\right| \ll 1$$

para todo $(x,g),(\tilde{x},\tilde{g}) \in \Sigma_A \times G$. Além disso, para $(x,g),(\tilde{x},\tilde{g}) \in M_r$, definamos

$$d^r_{\text{Martin}}((x,g),(\tilde{x},\tilde{g})) := \lim_{n\to\infty} \Delta_r(T^n(x,g),T^n(\tilde{x},\tilde{g})).$$

Lema 6.1.2. *A função d^r_{Martin} é uma métrica em $\mathcal{M}_r$.*

Demonstração. Seja $(\omega,g),(\tilde{\omega},\tilde{g}),(y,h) \in M_r$, supondo que $(\omega,g) \sim (\tilde{\omega},\tilde{g})$, então, para $\epsilon > 0$, existe um subconjunto finito $K \subset G$ tal que

$$\sum_{h\notin K} c_h \|\log \mathbb{K}_r(h,\cdot)\|_\infty < \epsilon.$$

Além disso, como K é finito e $(\omega,g) \sim (\tilde{\omega},\tilde{g})$, existe N tal que,

$$\left|\log \mathbb{K}_r(h,T^n(\omega,g)) - \log \mathbb{K}_r(h,T^n(\tilde{\omega},\tilde{g}))\right| \leq \frac{\epsilon}{|K|c_h}$$

para cada $n \geq N$. Consequentemente,

$$\begin{aligned}
&|d^r_{\text{Martin}}((\omega,g),(y,h)) - d^r_{\text{Martin}}((\tilde{\omega},\tilde{g}),(y,h))| \\
\leq &\sup_{n\geq N}\Bigg\{\sum_{h\in K} c_h \left|\log \mathbb{K}_r(h,T^n(\omega,g)) - \log \mathbb{K}_r(h,T^n(\tilde{\omega},\tilde{g}))\right| \\
&+ \sum_{h\notin K} c_h \left|\log \mathbb{K}_r(h,T^n(\omega,g)) - \log \mathbb{K}_r(h,T^n(\tilde{\omega},\tilde{g}))\right|\Bigg\} \leq 2\epsilon.
\end{aligned}$$

Disso, $d^r_{\text{Martin}}((\omega,g),(y,h)) = d^r_{\text{Martin}}((\tilde{\omega},\tilde{g}),(y,h))$, como d^r_{Martin} é simétrica, segue que d^r_{Martin} é bem definida em $\mathcal{M}_r$, sendo as outras afirmações imediatas. □

No intuito de mostrarmos que ψ é invertível, vamos usar as ideias de Ancona e de Schwartz, em [3, 15]. Observe que, para $\omega \in \mathcal{M}_r$ e (x,g), na classe de equivalência de ω, pode-se definir a aplicação

$$\mathbb{K}_r : G \times \mathcal{M}_r \to \mathbb{R}, \quad (h,\omega) \mapsto \lim_{n\to\infty} \mathbb{K}_r(h,T^n(x,g))$$

que está bem definida e estende a definição de $\mathbb{K}_r$. Contudo, em contraste com a configuração de cadeias de Markov, a função $h \mapsto \mathbb{K}_r(h,\omega)$ não está relacionada para uma função r-harmônica. No entanto, assumindo a transiência, a definição de $\mathbb{K}_r$, se estende

para $\mathcal{H}_{\text{loc}} \times \overline{X}$, onde $\overline{X} := X \cup \mathcal{M}_r$, para $r \leq R$ (veja Prop. 3.2.6). Em particular, como h é identificado com $\mathbf{X}_h$, pode-se mostrar que

$$\mathbb{K}_r(\mathcal{L}(\mathbf{X}_h), \omega) = \frac{1}{r}\mathbb{K}_r(\mathbf{X}_h, \omega) \tag{6.2}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\mathbb{K}_r(\mathcal{L}(\mathbf{X}_h), \omega) &= \lim_n \mathbb{K}_r(\mathcal{L}(\mathbf{X}_h), T^n(x,g)) = \lim_n \frac{\mathbb{G}(\mathcal{L}(\mathbf{X}_h)) \circ T^n(x,g)}{\mathbb{G}(\mathbf{X}_{id}) \circ T^n(x,g)} \\
&= \lim_n \frac{(\sum_{k=0}^{\infty} r^k \mathcal{L}^k(\mathcal{L}(\mathbf{X}_h))) \circ T^n(x,g)}{\mathbb{G}(\mathbf{X}_{id}) \circ T^n(x,g)} \\
&= \lim_n \frac{(\sum_{k=0}^{\infty} r^k \mathcal{L}^{k+1}(\mathbf{X}_h)) \circ T^n(x,g)}{\mathbb{G}(\mathbf{X}_{id}) \circ T^n(x,g)} \\
&= \lim_n \frac{(\sum_{m=1}^{\infty} r^{m-1} \mathcal{L}^m(\mathbf{X}_h)) \circ T^n(x,g)}{\mathbb{G}(\mathbf{X}_{id}) \circ T^n(x,g)} \\
&= \lim_n \frac{(\sum_{m=0}^{\infty} r^m \frac{1}{r} \mathcal{L}^m(\mathbf{X}_h)) \circ T^n(x,g)}{\mathbb{G}(\mathbf{X}_{id}) \circ T^n(x,g)} - \frac{1}{r}\frac{\mathbf{X}_h \circ T^n(x,g)}{\mathbb{G}(\mathbf{X}_{id}) \circ T^n(x,g)} \\
&= \lim_n \frac{1}{r}\left(\frac{\mathbb{G}(\mathbf{X}_h) \circ T^n(x,g)}{\mathbb{G}(\mathbf{X}_{id}) \circ T^n(x,g)} - \frac{\mathbf{X}_h \circ T^n(x,g)}{\mathbb{G}(\mathbf{X}_{id}) \circ T^n(x,g)}\right) \\
&= \frac{1}{r} \lim_n \frac{\mathbb{G}(\mathbf{X}_h) \circ T^n(x,g)}{\mathbb{G}(\mathbf{X}_{id}) \circ T^n(x,g)} \\
&= \frac{1}{r}\mathbb{K}_r(\mathbf{X}_h, \omega).
\end{aligned}$$

6.2 Teorema B

Na seção anterior, mostramos que qualquer elemento na fronteira visual define um elemento na fronteira de Martin. Já o próximo Teorema, dar-nos-á direção inversa, uma vez que mostraremos que qualquer ponto na fronteira de Martin define uma medida conforme e minimal, sendo que essa medida determina um único ponto na fronteira visual. Com isso, conseguiremos uma identificação entre essas fronteiras.

Teorema B. *Suponha que G é um grupo hiperbólico, T uma extensão por grupo transiente, simétrica, topologicamente transitiva de uma aplicação Gibbs-Markov do tipo finito. Então temos*

i . Se $\omega \in \mathcal{M}_r$ e (x,g) é um elemento da classe de equivalência de ω e $f \in \mathcal{H}_{loc}$, $f \geq 0$ com suporte compacto, então

$$\mu_\omega(f) := \lim_n \mathbb{K}_r(f, T^n(x,g)),$$

existe e define uma medida $1/r$-conforme e minimal. Além disso, qualquer medida $1/r$-conforme e minimal é obtida dessa maneira.

ii . Para cada medida conforme μ, existe uma única medida finita ν em ∂G tal que $d\mu = d\mu_\sigma d\nu(\sigma)$, isto é, para cada $f \in \mathcal{H}_{loc}$,

$$\mu(f) = \int_{\partial G} \mathbb{K}_r(f, \sigma) d\nu(\sigma).$$

iii . Se $\tilde{\sigma} \neq \sigma$, então $\lim_{\gamma \to \sigma} \mu_\sigma(\mathbf{X}_\gamma) = \infty$ e $\lim_{\gamma \to \sigma} \mu_{\tilde{\sigma}}(\mathbf{X}_\gamma) = 0$. Em particular, $\mu_{\tilde{\sigma}} \neq \mu_\sigma$.

iv . Se $\tilde{\sigma} \neq \sigma$, então $g \to \log \mu_\sigma(\mathbf{X}_g)/\mu_{\tilde{\sigma}}(\mathbf{X}_g)$ estende-se a uma função contínua em $\overline{G} \setminus \{\tilde{\sigma}, \sigma\}$, onde $\overline{G} := G \cup \partial G$. Além disso, se $g, h \in \overline{G}$ e $\sigma, \tilde{\sigma} \in \partial G$ estão em configuração, como na figura 5.2, então, com C, λ como no Teorema A,

$$\left| \frac{\mu_\sigma(\mathbf{X}_g)}{\mu_{\tilde{\sigma}}(\mathbf{X}_g)} \cdot \frac{\mu_{\tilde{\sigma}}(\mathbf{X}_h)}{\mu_\sigma(\mathbf{X}_h)} - 1 \right| \leq C\lambda^n.$$

v . O operador $\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_g)$ converge para 0 uniformemente e exponencialmente rápido, isto é

$$\limsup_{n \to \infty} \max_{y \in \Sigma, |\gamma| = n} \sqrt[n]{\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_g)(y, \gamma)} < 1.$$

Demonstração. Para melhor compreensão, dividiremos a prova deste teorema em alguns passos, com a seguinte estratégia: Começaremos com a construção de um ponto de acumulação de $\mu_n(f) := \mathbb{K}_r(f, T^n(x, g))$, em relação a um determinado x (Passo 1), e então aplicaremos a desigualdade de Ancona-Gouëzel-Lalley, para identificar uma região, onde a medida limite é comparável a uma medida reduzida para uma dada medida conforme (passo 2). Dessa descrição, concluímos que o ponto de acumulação é mínimo (Passo 3) e, portanto, único, o que implica convergência para cada (x, g) na classe de equivalência de ω (Passo 4). Uma aplicação do argumento no Passo 3, permite então, provar os itens (iii-v) do teorema (Passos 5 e 6). Já na etapa 7, mostraremos como deduzir a afirmação restante do trabalho de Schwartz, em [15].

Passo 1: Medida Limite. Suponha que $\sigma \in \partial G$ e que existe $x \in \Sigma_A$ como na proposição 6.1.1, ou seja, existe uma subsequência (n_k) tal que $\kappa^{n_k}(x) \to \sigma$ e $\kappa^{n_k}(x)$ fica dentro de uma distância limitada, do segmento geodésico $[id, \sigma]$.

Para construir a medida limite, observa-se que $\mu_{n_k}(f)$ define uma medida para cada $k \in N$, e, além disso, $\lim \mu_n(\mathbf{X}_h) = \mathbb{K}_r(\mathbf{X}_h, \omega)$ para todo $h \in G$.

Assim, por compacidade de $\Sigma_A \times \{h\}$ e por um argumento diagonal, existe uma subsequência adicional, também denotada por (n_k), tal que, $\mu := \lim_k \mu_{n_k}$ converge fracamente, em conjuntos compactos. Além disso, (**??**) implica que μ é conforme, uma vez

que

$$\begin{aligned}\int f d\mathcal{L}^*(\mathbb{K}_r(\cdot,\omega)) &= \int \mathcal{L}(f) d\mathbb{K}_r(\cdot,\omega)\\ &= \mathbb{K}_r(\mathcal{L}(f),\omega) = \frac{1}{r}\mathbb{K}_r(f,\omega)\\ &= \frac{1}{r}\int f d\mathbb{K}_r(.,\omega)\end{aligned}$$

Em particular, resulta da distorção limitada que, para cada $w \in \mathcal{W}^n$,

$$\mu([w,h]) \asymp \Phi_w r^{-n}\mu(\mathbf{X}_{h\kappa_w}) = \Phi_w r^{-n} \lim_n \mathbb{K}_r(\mathbf{X}_h, T^n(x,g)). \tag{6.3}$$

Passo 2: Medida reduzida e desigualdade de Ancona-Gouëzel-Lalley. Inicialmente, fixe $g \in G$. Por construção $\kappa^{n_k}(x) \to \sigma$ e $\kappa^{n_k}(x)$ fica dentro de uma distância limitada, do segmento geodésico $[\mathrm{id}, \sigma]$. Então, existe K tal que $\kappa^{n_k}(x)$ fica dentro de uma distância limitada do segmento geodésico $[g, \sigma]$ para qualquer $k \geq K$. Consequentemente, (5.3) do Teorema A é aplicável a $g, \kappa^{n_k}(x), \kappa^{n_l}(x)$ para $K < k < l$. Agora dividindo (5.3) por $\mathbb{G}_r(\mathbb{X}_{\mathrm{id}})(T^{n_l}(x,\mathrm{id}))$ e aplicando o Lema 3.2.7 para qualquer $y \in \Sigma_A$, obtemos:

$$\begin{aligned}\mu(\mathbf{X}_g) &= \lim_{l\to\infty} \mathbb{K}_r\left(\mathbf{X}_g, T^{n_l}(x,g)\right) = \lim_{l\to\infty} \frac{\mathbb{G}_r\left(\mathbf{X}_g\right)\left(T^{n_l}(x,\mathrm{id})\right)}{\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{\mathrm{id}})(T^{n_l}(x,\mathrm{id}))}\\ &\asymp \lim_{l\to\infty} \frac{\mathbb{G}_r\left(\mathbf{X}_{\kappa^{n_k}(x)}\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_g)\right)\left(T^{n_l}(x,\mathrm{id})\right)}{\mathbb{G}_r\left(\mathbf{X}_{\mathrm{id}}\right)\left(T^{n_l}(x,\mathrm{id})\right)} = \int \mathbf{X}_{\kappa^{n_k}(x)}\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_g) d\mu\\ &\asymp \mathbb{G}_r\left(\mathbf{X}_g\right)\left(y, \kappa^{n_k}(x)\right)\ \mu\left(\mathbf{X}_{\kappa^{n_k}(x)}\right).\end{aligned} \tag{6.4}$$

Seja $h = \kappa^{n_k}(x)$, como y é arbitrário, integrando com relação a $\nu(\mathbf{X}_h)^{-1}\nu|_{\mathbb{X}_h}$ para alguma medida ν temos,

$$\mu(\mathbf{X}_g) \asymp \frac{\mu(\mathbf{X}_h)}{\nu(\mathbf{X}_h)} \int \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_g) d\nu|_{\mathbb{X}_h} = \frac{\mu(\mathbf{X}_h)}{\nu(\mathbf{X}_h)}\ (\mathbb{G}_r^*(\nu|_{\mathbb{X}_h}))(\mathbb{X}_g). \tag{6.5}$$

Agora, assumindo, que $a \in W^1$, então, pelo Teorema 4.3.1

$$\mathbb{G}_r^*(\nu|_{[a,h]})(\mathbf{X}_g) = R_{[a,h]}(\mathbb{G}_r^*(\nu|_{[a,h]}))(\mathbf{X}_g).$$

Além disso, se ν for uma medida conforme, então, pelo Teorema 4.2.2 a medida reduzida é obtida aplicando o operador $\mathcal{F}^*_{[a,h]}$, ou seja, $R_{[a,h]}(\mathbb{G}_r^*(\nu|_{[a,h]}))(\mathbb{X}_g) =$

$\mathcal{F}^*_{[a,h]}(\mathbb{G}^*_r(\nu|_{[a,h]}))(\mathbb{X}_g)$, portanto

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}^*_r(\nu|_{[a,h]})(\mathbf{X}_g) &= R_{[a,h]}(\mathbb{G}^*_r(\nu|_{[a,h]}))(\mathbf{X}_g) = \mathcal{F}^*_{[a,h]} \circ \mathbb{G}^*_r(\nu|_{[a,h]})(\mathbf{X}_g) \\
&= \int \mathbf{1}_{[a,h]}\mathbb{G}_r(\mathbf{1}_{[a,h]}\mathcal{F}_{[a,h]}(\mathbb{X}_g))d\nu \\
&\leq \sup_{z\in[a,h]} \mathbb{G}_r(\mathbf{1}_{[a,h]})(z) \sup_{z\in[a,h]} \mathcal{F}_{[a,h]}(\mathbf{X}_g)(z)\nu([a,h]) \\
&\overset{(\dagger)}{\leq} C_\varphi \sup_{z\in[a,h]} \mathbb{G}_r(\mathbf{1}_{[a,h]})(z) \int \mathcal{F}_{[a,h]}(\mathbf{X}_g)d\nu \\
&\overset{(\ddagger)}{=} C_\varphi \sup_{z\in[a,\mathrm{id}]} \mathbb{G}_r(\mathbf{1}_{[a,\mathrm{id}]})(z) R_{[a,h]}(\nu)(\mathbf{X}_g) \ll R_{[a,h]}(\nu)(\mathbf{X}_g),
\end{aligned}$$

onde (†) segue da distorção limitada de φ e (‡) do fato de $\varphi(x,g)$ não depender da segunda coordenada. Em particular, por construção de $\mathcal{F}_{\mathbb{X}_h}$,

$$\mathbb{G}^*_r(\nu|_{\mathbb{X}_h})(\mathbf{X}_g) = \sum_{a\in\mathcal{W}^1} \mathbb{G}^*_r(\nu|_{[a,h]})(\mathbf{X}_g) \ll \sum_{a\in\mathcal{W}^1} \mathcal{F}^*_{[a,h]}(\nu)(\mathbf{X}_g) \leq \mathcal{F}^*_{\mathbb{X}_h}(\nu)(\mathbf{X}_g) = R_{\mathbb{X}_h}(\nu)(\mathbf{X}_g).$$

Consequentemente, $R_{\mathbb{X}_h}(\nu)(\mathbf{X}_g) \asymp \mathbb{G}^*_r(\nu|_{\mathbb{X}_h})(\mathbf{X}_g)$. Nesse sentido, combinando esse fato e a estimativa (6.3) obteremos $\mu(\mathbf{X}_g) \asymp \frac{\mu(\mathbf{X}_h)}{\nu(\mathbf{X}_h)} R_{\mathbb{X}_h}(\nu)(\mathbf{X}_g)$, como ν é uma medida conforme qualquer, podemos substituir ν por μ na equivalência anterior e obteremos duas equivalências

$$R_{\mathbb{X}_h}(\mu)(\mathbf{X}_g) \asymp \mu(\mathbf{X}_g) \asymp \frac{\mu(\mathbf{X}_h)}{\nu(\mathbf{X}_h)} R_{\mathbb{X}_h}(\nu)(\mathbf{X}_g) \leq \frac{\mu(\mathbf{X}_h)}{\nu(\mathbf{X}_h)} \nu(\mathbf{X}_g), \tag{6.6}$$

desde que h seja suficientemente próximo de $[g,\sigma)$.

Agora, supondo que $w \in W^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e $g \in G$, decorre da conformalidade, como em (6.1) que $\nu([w,g]) \asymp \varphi_w r^{-n} \nu(\mathbb{X}_{g\kappa^n(w)})$. No entanto, pela escolha de x, existe $K(g,w) \in \mathbb{N}$, tal que, $h = \kappa^{n_k}(x)$ está suficientimente próximo de $(g\kappa^n(w),\sigma)$, para todo $k \geq K(g,w)$. Isso prova que

$$\mu([w,h]) \ll \frac{\mu(\mathbb{X}_{\kappa^{n_k}(x)})}{\nu(\mathbb{X}_{\kappa^{n_k}(x)})} \nu([w,h]) \quad \forall k \geq K(g,w). \tag{6.7}$$

Passo 3: Minimalidade. Provaremos que μ é minimal, para isso, assuma que há uma medida ν, conforme, tal que, $\nu \leq \mu$. Dessa forma, mostremos que existe $\alpha > 0$, tal que, $\nu \geq \alpha\mu$. Definamos $b := \text{ess inf } d\nu/d\mu$ e $a := \text{ess sup } d(\nu - b\mu)/d\mu$. Se $a = 0$ então $\nu = b\mu$, assim, segue o resultado. Se $a > 0$, considere $\nu_1 := \dfrac{1}{a}(\nu - b\mu)$, logo

$$\text{ess inf } \frac{d\nu_1}{d\mu} = \frac{1}{a}(\text{ess inf } \frac{d\nu}{d\mu} - b) = 0, \ \text{ess sup } \frac{d\nu_1}{d\mu} = \frac{1}{a}(\text{ess sup } \frac{d\nu}{d\mu} - b) = 1.$$

Definamos agora $\nu_2 = \mu - \nu_1$, usando as igualdades acima, obteremos:

$$\text{ess inf } \frac{d\nu_2}{d\mu} = 0 \text{ e ess sup } \frac{d\nu_2}{d\mu} = 1.$$

Então, para cada $\varepsilon > 0$, o conjunto $A := \{z; \frac{d\nu_2}{d\mu}(z) < \varepsilon\}$ é de μ-medida positiva. Como μ é σ-finita, existe um conjunto Ω de medida finita tal que $\mu(A \cap \Omega) > 0$. Dessa forma, pelo teorema de extensão de medidas de Caratheodory, existem para qualquer $\delta > 0$ cilindros $[w_1, h_1], ..., [w_k, h_k]$ e $B_\delta := \cup_{i=1}^{k}[w_i, h_i]$ tal que $\mu(A \cap \Omega \Delta B_\delta) = \delta$. Nota-se que $\mu(B_\delta \setminus A) < \delta$ e $\mu(A) - \mu(A \cap B) < \delta$. Desse modo,

$$\begin{aligned}\frac{\mu(B_\delta \setminus A)}{\mu(B_\delta)} < \varepsilon &\Leftrightarrow \mu(B_\delta \setminus A)(1-\epsilon) < \epsilon\mu(A \cap B_\delta) \\ &\Leftrightarrow \mu(B_\delta \setminus A) < \frac{\epsilon}{1-\epsilon}\frac{\mu(A \cap B_\delta)}{\mu(A)}\mu(A).\end{aligned}$$

Escolhendo $\delta \to 0$, teremos $\mu(B_\delta \setminus A) \to 0$ e $\frac{\mu(A \cap B_\delta)}{\mu(A)} \to 1$. Assim, para todo $\epsilon > 0$,

$$\mu(B_\delta \setminus A) < \frac{\epsilon}{1-\epsilon}\mu(A)$$

para δ suficientemente pequeno. Portanto, para essa escolha de δ

$$\frac{\mu(B_\delta \setminus A)}{\mu(B_\delta \setminus A) + \mu(A \cap B_\delta)} < \varepsilon \text{ para todo } \varepsilon > 0.$$

Utilizando as estimativas (6.4) e (6.5) obteremos:

$$\nu_2(B_\delta) \gg \frac{\nu_2(\mathbf{X}_{\kappa^{n_k}(x)})}{\mu(\mathbf{X}_{\kappa^{n_k}(x)})} R_{\kappa^{n_k}(x)}(\mu)(B_\delta) \gg \frac{\nu_2(\mathbf{X}_{\kappa^{n_k}(x)})}{\mu(\mathbf{X}_{\kappa^{n_k}(x)})}\mu(B_\delta).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{\nu_2(\mathbf{X}_{\kappa^{n_k}(x)})}{\mu(\mathbf{X}_{\kappa^{n_k}(x)})}) \ll \frac{\nu_2(B_\delta)}{\mu(B_\delta)} &= \frac{\nu_2(B_\delta \cap A)}{\mu(B_\delta)} + \frac{\nu_2(B_\delta \setminus A)}{\mu(B_\delta)} \\ &\leq \frac{\nu_2(B_\delta \cap A)}{\mu(B_\delta \cap A)} + \frac{\nu_2(B_\delta \setminus A)}{\mu(B_\delta \setminus A) + \mu(B_\delta \cap A)} \\ &\leq \frac{\nu_2(B_\delta \cap A)}{\mu(B_\delta \cap A)} + \frac{\mu(B_\delta \setminus A)}{\mu(B_\delta \setminus A) + \mu(B_\delta \cap A)} < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.\end{aligned}$$

Assim,

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\nu_2(\mathbf{X}_{\kappa^{n_k}(x)})}{\mu(\mathbf{X}_{\kappa^{n_k}(x)})} = 0 \Rightarrow \limsup_{k\to\infty}(\frac{\mu(\mathbf{X}_{\kappa^{n_k}(x)})}{\mu(\mathbf{X}_{\kappa^{n_k}(x)})} - \frac{\nu_1(\mathbf{X}_{\kappa^{n_k}(x)})}{\mu(\mathbf{X}_{\kappa^{n_k}(x)})}) = 0.$$

$$\Rightarrow \limsup_{k\to\infty}(1-\frac{\nu_1(\mathbf{X}_{\kappa^{n_k}(x)})}{\mu(\mathbf{X}_{\kappa^{n_k}(x)})})=0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty}\frac{\nu_1(\mathbf{X}_{\kappa^{n_k}(x)})}{\mu(\mathbf{X}_{\kappa^{n_k}(x)})}=1.$$

Agora, usando a estimativa (6.4) para ν_1 e passando o limite

$$\nu_1(B) \gg \lim_{k\to\infty}(\frac{\nu_1(\mathbf{X}_{\kappa^{n_k}(x)})}{\mu(\mathbf{X}_{\kappa^{n_k}(x)})})\mu(B) \Rightarrow \nu_1(B) \gg \mu(B).$$

Usando novamente o argumento de aproximação por cilindros, e levando em consideração o fato de $\nu_1 = \dfrac{1}{a}(\nu - b\mu)$, obteremos $\nu \geq \alpha\mu$. Logo μ é minimal.

Passo 4: Existência do Limite. Suponha que μ e $\widetilde{\mu}$ sejam pontos de acumulação das subsequências μ_{n_k} e μ_{m_k} respectivamente. Então $\mu(\mathbf{X}_g) = \widetilde{\mu}(\mathbf{X}_g)$. Dessa forma, pela equação (6.1), $\mu \asymp \widetilde{\mu}$. Daí, existe $c > 0$ tal que $\mu \geq c\widetilde{\mu}$. Mas μ é minimal, então existe $\alpha > 0$ tal que $\widetilde{\mu} = \alpha\mu$. Como $\mu(\mathbf{X}_g) = \widetilde{\mu}(\mathbf{X}_g)$ então $\alpha = 1$, portanto $\mu = \widetilde{\mu}$. Portanto, toda subsequência de μ_n possui uma subsubsequência convergindo para o mesmo ponto. Assim, existe o limite de $\mu_n(f)$, ou seja, existe o limite de $\mu_\omega(f)$ e define uma medida $1/r$-conforme e minimal. Daí, cada $\omega \in \mathcal{M}_r$ determina uma medida $1/r$-conforme e minimal.

Passo 5: Unicidade. Supondo que $\mu_\sigma(\mathbf{X}_g) \asymp \mu_{\tilde{\sigma}}(\mathbf{X}_g)$ em relação a uma constante que é independente de $g \in G$, além disso, assumindo que h e $\tilde{h}$ são elementos da geodésica de σ para $\tilde{\sigma}$, escolhendo h e $\tilde{h}$ suficientemente distantes um do outro, segue-se que para cada $g \in G$, ou h está suficientemente perto de $[g, \sigma)$ ou $\tilde{h}$ está suficientemente perto de $[g, \tilde{\sigma})$. Então, por (6.4) aplicado simultaneamente a μ_σ e $\mu_{\tilde{\sigma}}$,

$$\mu_\sigma(\mathbf{X}_g) \asymp \mu_{\tilde{\sigma}}(\mathbf{X}_g) \ll R_{\mathbb{X}_h}(\mu_\sigma)(\mathbf{X}_g) + R_{\mathbb{X}_{\tilde{h}}}(\mu_{\tilde{\sigma}})(\mathbf{X}_g) =: \nu(\mathbf{X}_g). \tag{6.8}$$

Além disso, como ν é uma medida excessiva, mas não conforme, segue para $w \in \mathcal{W}^n$ que

$$\nu([w,g]) = \int \mathbf{1}_{[w,g]} d\nu \geq r^n \int \mathbf{1}_{[w,g]} d(\mathcal{L}^n)^*(\nu) = r^n \int \mathcal{L}^n(\mathbf{1}_{[w,g]}) d\nu \asymp r^n \varphi_w \nu(T^n([w,g])).$$

Repetindo o argumento para uma coleção finita de palavras disjuntas (u_i), contidas em $\theta^n([w])$, tal que, $\kappa^{|u_i|}(u_i) = \mathrm{id}$ e $\bigcup_i \theta^{|u_i|}([u_i]) = \Sigma_A$,

$$\begin{aligned}\nu([w,g]) &\gg r^n \varphi_w \nu(T^n([w,g])) \geq r^n \varphi_w \sum_i \nu([u_i, g\kappa^n(w)]) \\ &\gg r^n \varphi_w \sum_i r^{|u_i|} \varphi_{u_i} \nu(\mathbf{X}_{g\kappa^n(w)}) \gg r^n \varphi_w \nu(\mathbf{X}_{g\kappa^n(w)}).\end{aligned}$$

Portanto, combinando essa estimativa com (6.1) e com (6.6), existe $C > 0$ tal que $\mu_\sigma([w,g]) \leq C\nu([w,g])$, para todo $w \in \mathcal{W}^n$, $n \in \mathbb{N}$ e $g \in G$, então, $\mu_\sigma \leq C\nu$. Contudo, como ν é um potencial, isto é, pode ser escrito como $\nu = \mathbb{G}_r^*(m)$, a decomposição de Riesz

implica que $\mu_\sigma = 0$, que é uma contradição.

Passo 6: Limite de $\mu_\sigma(\mathbf{X}_g)$, $\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_g)$ e $\mu_\sigma(\mathbf{X}_g)/\mu_{\tilde{\sigma}}(\mathbf{X}_g)$. Como acima, supondo que σ e $\tilde{\sigma}$ sejam em ∂G, e que h e $\tilde{h}$ sejam elementos da geodésica de σ para $\tilde{\sigma}$ por (6.4),

$$\frac{\mu_\sigma(\mathbf{X}_{\tilde{h}})}{\mu_{\tilde{\sigma}}(\mathbf{X}_{\tilde{h}})} \ll \frac{\mu_\sigma(\mathbf{X}_g)}{\mu_{\tilde{\sigma}}(\mathbf{X}_g)} \ll \frac{\mu_\sigma(\mathbf{X}_h)}{\mu_{\tilde{\sigma}}(\mathbf{X}_h)},$$

para todos os g, tais que, os raios geodésicos $[g, \sigma)$ e $[g, \tilde{\sigma})$ estão suficientemente próximos de h e $\tilde{h}$, respectivamente. Isso é ilustrado na figura 6.1, para o caso de G atuando isometricamente no disco de Poincaré. Na figura, a parte cinza representa os possíveis locais de g.

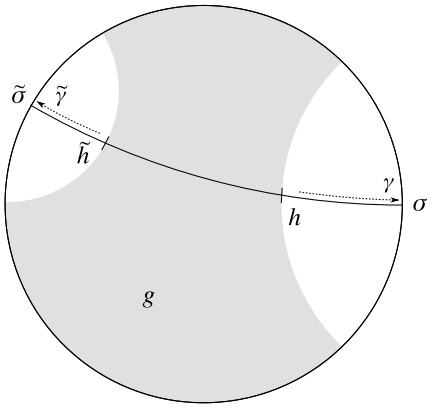

Figura 6.1: As posições de $\sigma, \tilde{\sigma}$ e $h, \tilde{h}$.

Além disso, para γ, tal que, $[\gamma, \tilde{\sigma})$ passa suficientemente perto de h, o mesmo argumento mostra que $\mu_\sigma(\mathbf{X}_g)/\mu_{\tilde{\sigma}}(\mathbf{X}_g) \gg \mu_\sigma(\mathbf{X}_h)/\mu_{\tilde{\sigma}}(\mathbf{X}_h)$.

Como $\mu_\sigma(\mathbf{X}_\gamma) \asymp \mu_{\tilde{\sigma}}(\mathbf{X}_\gamma)$ para γ em uma subsequência convergindo para σ implicaria que $\mu_\sigma = \mu_{\tilde{\sigma}}$, temos que $\lim_{\gamma\to\sigma} \mu_\sigma(\mathbf{X}_\gamma)/\mu_{\tilde{\sigma}}(\mathbf{X}_\gamma) = \infty$. Repetindo o argumento para $\tilde{\gamma} \to \tilde{\sigma}$, obtém-se isto

$$0 \xleftarrow{\tilde{\gamma}\to\tilde{\sigma}} \frac{\mu_\sigma(\mathbf{X}_{\tilde{\gamma}})}{\mu_{\tilde{\sigma}}(\mathbf{X}_{\tilde{\gamma}})} \ll \frac{\mu_\sigma(\mathbf{X}_{\tilde{h}})}{\mu_{\tilde{\sigma}}(\mathbf{X}_{\tilde{h}})} \ll \frac{\mu_\sigma(\mathbf{X}_g)}{\mu_{\tilde{\sigma}}(\mathbf{X}_g)} \ll \frac{\mu_\sigma(\mathbf{X}_h)}{\mu_{\tilde{\sigma}}(\mathbf{X}_h)} \ll \frac{\mu_\sigma(\mathbf{X}_\gamma)}{\mu_{\tilde{\sigma}}(\mathbf{X}_\gamma)} \xrightarrow{\gamma\to\sigma} \infty.$$

Se, além disso, g for um elemento da geodésica de σ para $\tilde{\sigma}$, então (6.2) e a simetria vão implica em

$$\frac{\mu_\sigma(\mathbf{X}_\gamma)}{\mu_{\tilde{\sigma}}(\mathbf{X}_\gamma)} \asymp \frac{\mathbb{G}_r\left(\mathbf{X}_g\right)(y,\gamma)^{-1}\,\mu_\sigma(\mathbf{X}_g)}{\mathbb{G}_r\left(\mathbf{X}_\gamma\right)(y,g)\,\mu_{\tilde{\sigma}}(\mathbf{X}_g)} \asymp \mathbb{G}_r\left(\mathbf{X}_g\right)(y,\gamma)^{-2}\,\frac{\mu_\sigma(\mathbf{X}_g)}{\mu_{\tilde{\sigma}}(\mathbf{X}_g)}.$$

Então, $\mathbb{G}_r\left(\mathbf{X}_g\right)(y,\gamma) \to 0$, quando $\gamma \to \sigma$ e, pela compacidade de $\overline{G}$, $\mathbb{G}_r\left(\mathbf{X}_g\right)(y,\gamma) \to 0$ uniformemente, quando $|\gamma| \to \infty$. Portanto, uma aplicação adicional da parte (i) do Teorema A implica que a convergência é exponencial, ou seja,

$$\limsup_{n\to\infty} \max_{y\in\Sigma,|\gamma|=n} \sqrt[n]{\mathbb{G}_r\left(\mathbf{X}_g\right)(y,\gamma)} < 1.$$

Além disso, por (6.2) temos que $\lim_{\gamma\to\sigma}\mu_\sigma(\mathbf{X}_\gamma) = \infty$ e $\lim_{\gamma\to\sigma}\mu_{\tilde{\sigma}}(\mathbf{X}_\gamma) = 0$ se $\tilde{\sigma} \neq \sigma$. Para analisar o comportamento de $\mu_\sigma(\mathbf{X}_g)/\mu_{\tilde{\sigma}}(\mathbf{X}_g)$, para g distante da geodésica de σ para $\tilde{\sigma}$, fixe $g_n \to g_\infty \in \partial G \setminus \{\sigma, \tilde{\sigma}\}$. Então a parte (ii) do Teorema A implica, como na proposição 6.1.1, que $\log(\mu_\sigma(\mathbf{X}_{g_n})/\mu_{\tilde{\sigma}}(\mathbf{X}_{g_n}))$ é uma sequência de Cauchy, e que a função $g \to \log(\mu_\sigma(\mathbf{X}_g)/\mu_{\tilde{\sigma}}(\mathbf{X}_g))$ se estende continuamente para $\overline{G} \setminus \{\sigma, \tilde{\sigma}\}$, sendo a afirmação restante, um corolário imediato da parte (ii) do Teorema A.

Passo 7: REPRESENTAÇÃO DA INTEGRAL. Agora, assumindo que μ é uma medida conforme e minimal, segue-se do corolário 3.9, em [15], que μ pode ser representada por $\int f d\mu = c\mathbb{K}_r(f, w)$, para algum $c > 0$ e $w \in \mathcal{M}_r$. Tomemos $(x, g) \in \Sigma_A \times G$, tal que, $T^n(x, g) \to w, n \to \infty$ em $\mathcal{M}_r$. Além disso, vamos tomar $\sigma \in \partial G$ um ponto de acumulação de $(g\kappa^n(x))$. Logo, pela primeira afirmação em (i), $\mu = c\mu_\sigma$. Em particular, ∂G pode ser identificada com o conjunto de medidas conformes minimais, o que prova a segunda afirmação em (i). A representação da medida conforme arbitrária é um corolário do Teorema 3.12 em [15].

□

6.3 Equivalência entre a Fronteira de Martin e a Fronteira visual

Nesta seção, provaremos que a aplicação $\psi : (\partial G, d_{\text{visual}}) \to (\mathcal{M}_r, d^r_{\text{Martin}})$ é um homeomorfismo e que ψ e ψ^{-1} são Hölder continuas. Assim, para vermos que ψ é uma bijeção, basta assumir que $z \in \mathcal{M}_r$ e definir $m_z(\mathbf{X}_h) := \lim_{n\to\infty}\mathbb{K}_r(h, T^n(z))$. Segue, como na prova do item (i) do Teorema B, que m_z se estende a uma medida conforme e minimal. Portanto, existe $\sigma \in \partial G$ único, tal que, $\mu_\sigma = m_z$, o que prova o seguinte corolário:

Corolário 6.3.1. *A aplicação $\psi : \partial G \to \mathcal{M}_r$ é uma bijeção.*

Agora, já estamos em condições de provar que a aplicação $\psi : (\partial G, d_{\text{visual}}) \to (\mathcal{M}_r, d^r_{\text{Martin}})$ é um homeomorfismo. Mas, antes, observe que os Teoremas A e B nos permitem obter informações e estimativas para $|\log \mathbb{K}_r(h, .)|$ e $|\log \mathbb{K}_r(h, \cdot) - \log \mathbb{K}_r(h, \cdot\cdot)|$. Isso dá origem a seguinte definição de c_h, para $h \in G$ e λ, como no Teorema A

$$c_h := \frac{\lambda^{2|h|}}{\#\{g \in G : |g| = |h|\}\,|\log \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_h)(x, \text{id})|}. \tag{6.9}$$

Além disso, observa-se que a sequência $(\log \#\{g \in G : |g| = n\})$ é subaditiva, o

que implica que existe a seguinte taxa de crescimento exponencial $\mathfrak{h}$

$$\mathfrak{h} := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\#\{g \in G : |g| = n\}}.$$

Teorema C. *Supondo que G é um grupo hiperbólico, T uma extensão por grupo transiente, simétrica, topologicamente transitiva de uma aplicação Gibbs-Markov do tipo finito, φ simétrica e que $r \leq R$, então $\psi : (\partial G, d_{visual}) \to (\mathcal{M}_r, d^r_{Martin})$ é um homeomorfismo e, se c_h na definição de d^r_{Martin} é definido como (**??**), então*

$$d_{visual}(\sigma, \tilde{\sigma})^\beta \ll d^r_{Martin}(\psi(\sigma), \psi(\tilde{\sigma})) \ll d_{visual}(\sigma, \tilde{\sigma})^\alpha,$$

para $\alpha = \log\lambda / \log\lambda_{visual}$, $\beta = (2\log\lambda - \log(\mathfrak{h} + \epsilon))/\log\lambda_{visual}$ para um $\epsilon > 0$ arbitrário. Em particular, ψ e ψ^{-1} são Hölder contínuas com expoentes α e $1/\beta$, respectivamente.

Demonstração. Para deduzir a Hölder continuidade, começamos com uma descrição geométrica da métrica visual. Supondo que $\sigma, \tilde{\sigma} \in \partial G$, pela proposição 6.1.1, existem $x, \tilde{x} \in \Sigma_A$, tal que, $\lim \kappa^n(x) = \sigma$ e $\lim \kappa^n(\tilde{x}) = \tilde{\sigma}$. Além disso, das estimativas feitas no Capítulo 2 para a métrica visual, decorre que

$$\begin{aligned} d_{\text{visual}}(\sigma, \tilde{\sigma}) &\geq C\lambda_{\text{visual}}^{(\sigma\cdot\tilde{\sigma})} \geq C\lambda_{\text{visual}}^{\liminf_{m,n\to\infty}(\kappa^m(x)\cdot\kappa^n(\tilde{x}))+2\delta} \\ &= \left(C\lambda^{2\delta}\right)\lambda_{\text{visual}}^{\liminf_{m,n\to\infty}(\kappa^m(x)\cdot\kappa^n(\tilde{x}))}. \end{aligned}$$

Nota-se que, como as sequências $(\kappa^n(x))$ e $(\kappa^n(\tilde{x}))$ convergem no infinito, então essas sequências deixam qualquer subconjunto finito de G. Supondo que $\liminf_{m,n\to\infty}(\kappa^m(x)\cdot\kappa^n(\tilde{x})) = N$, então existem m, n arbitrariamente grandes, tal que $(g \cdot \tilde{g}) = N$, para $g := \kappa^m(x)$ e $\tilde{g} := \kappa^n(\tilde{x})$. Em particular, $d_{\text{visual}}(\sigma, \tilde{\sigma}) \asymp \lambda^N_{\text{visual}}$.

Diante disso, essa caracterização geométrica nos permite empregar os Teoremas A e B, a fim de obtermos estimativas refinadas para $|\log \mathbb{K}_r(h, \cdot)|$ e $|\log \mathbb{K}_r(h, \cdot) - \log \mathbb{K}_r(h, \cdot\cdot)|$. Para $g, \tilde{g} \in G$, e, $\xi \in G$ um elemento do arco geodésico $[\text{id}, h]$, mais próximo de g, e $\xi_1, \xi_2 \in G$, elementos do arco geodésico $[g, \tilde{g}]$, mais perto de h e id, respectivamente (ver Figura **??**).

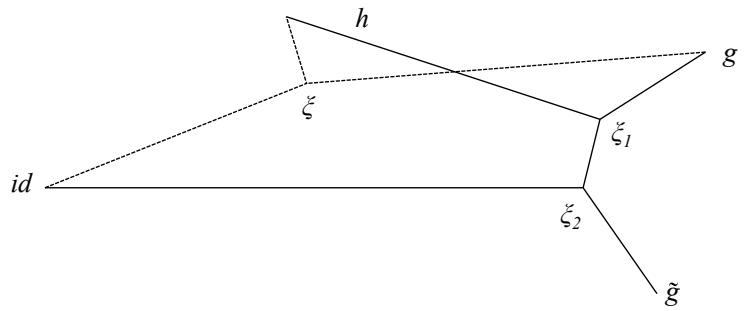

Figura 6.2: A configuração de $g, \tilde{g}$ e h, id com $\xi_1 \neq \xi_2$

i . Aplicando o item (i), do Teorema A, temos que, para alguma constante uniforme $C > 0$,

$$|\log \mathbb{K}_r(h,(x,g))| = |\log \mathbb{K}_r(h,(x,\xi))| \pm C.$$

Além disso, segue da simetria $\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_g)(x,\mathrm{id}) \asymp \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{\mathrm{id}})(x,g)$, e uma aplicação adicional do item (i) do Teorema A que

$$\mathbb{K}_r(h,(x,\xi)) \asymp \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_h)(x,\mathrm{id})/\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_\xi)(x,\mathrm{id})^2.$$

Como $\mathbb{G}_r(\mathbf{X}_h)(x,\mathrm{id}) \gg \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_\xi)(x,\mathrm{id})$, obtemos que

$$\begin{aligned}|\log \mathbb{K}_r(h,(x,g))| &= |\log \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_h)(x,\mathrm{id}) - 2\log \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_\xi)(x,\mathrm{id})| \pm C \\ &\leq |\log \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_h)(x,\mathrm{id})| + C.\end{aligned}$$

Além disso, pela parte (v) do Teorema B, implica que o limite cresce linearmente em $|h|$.

ii . Se $g, \tilde{g}$ e h, id estão em uma configuração, como na parte (ii) do Teorema A, então $\xi_1 = \xi_2$ e

$$|\log \mathbb{K}_r(h,(x,g)) - \log \mathbb{K}_r(h,(\tilde{x},\tilde{g}))| \ll \lambda^{(g\cdot\tilde{g})-|h|}.$$

iii . Se $g, \tilde{g}$ e h, id não estão em uma configuração (ver Figura **??**), então (i) implica que

$$|\log \mathbb{K}_r(h,(x,g)) - \log \mathbb{K}_r(h,(\tilde{x},\tilde{g}))| = 2\,|\log \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{\xi_1})(x,\xi_2)| \pm C.$$

Começamos limitando d^r_{Martin} superiormente. Para fazer isso, observe que

$$|\log \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_h)(x,\mathrm{id})|^{-1}$$

tende a 0 quando $|h| \to \infty$ por (v) do Teorema B, segue que $\sum_{h\in G} c_h < \infty$. Além disso, usando aproximação por um grafo, podemos assumir que $N = |\xi_2|$. Ademais, temos que $|h| \leq N/2$, assim, h, id e $g, \tilde{g}$ estão em uma configuração como em (ii) do Teorema A, então

$$\begin{aligned}d^r_{\mathrm{Martin}}(\psi(\sigma),\psi(\tilde{\sigma})) &= \lim_{g\to\sigma,\tilde{g}\to\tilde{\sigma}} \sum_{|h|\leq N/2} c_h\,|\log \mathbb{K}_r(h,(x,g)) - \log \mathbb{K}_r(h,(\tilde{x},\tilde{g}))| \\ &\quad + \lim_{g\to\sigma,\tilde{g}\to\tilde{\sigma}} \sum_{|h|> N/2} c_h\,|\log \mathbb{K}_r(h,(x,g)) - \log \mathbb{K}_r(h,(\tilde{x},\tilde{g}))| \\ &\ll \sum_{n=1}^{N/2}\sum_{|h|=n} c_h\lambda^{(g\cdot\tilde{g})-|h|} + \sum_{|h|>N/2} c_h \ll \lambda^N \sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n + \sum_{n=N/2}^{\infty}\lambda^{2n} \ll \lambda^N.\end{aligned}$$

Já para a limitação de d^r_{Martin} por baixo, basta considerar o termo com $h = \xi_1 = \xi_2$. Ou seja, decorre de (iii) que

$$\begin{aligned} d^r_{\text{Martin}}(\psi(\sigma), \psi(\tilde{\sigma})) &\geq \lim_{g \to \sigma, \tilde{g} \to \tilde{\sigma}} c_{|\xi_2|} \, |\log \mathbb{K}_r(\xi_2, (x, g)) - \log \mathbb{K}_r(\xi_2, (\tilde{x}, \tilde{g}))| \\ &\gg \frac{\lambda^{2N}}{\kappa_N} |\log \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{\xi_2})(x, \mathrm{id})|^{-1}. \end{aligned}$$

Como $|\log \mathbb{G}_r(\mathbf{X}_{\xi_2})(x, \mathrm{id})|$ cresce linearmente, segue-se que $d^r_{\text{Martin}}(\psi(\sigma), \psi(\tilde{\sigma})) \geq C_\epsilon(\lambda^2/(\mathfrak{h}+\epsilon))^N$, para cada $\epsilon > 0$ e uma constante $C_\epsilon > 0$. Assim,

$$d_{\text{visual}}(\sigma, \tilde{\sigma})^\beta \asymp \lambda^{\beta N}_{\text{visual}} = \frac{\lambda^{2N}}{(\mathfrak{h} + \epsilon)^N} \ll d^r_{\text{Martin}}(\psi(\sigma), \psi(\tilde{\sigma})) \ll \lambda^N = \lambda^{\alpha N}_{\text{visual}} \asymp d_{\text{visual}}(\sigma, \tilde{\sigma})^\alpha,$$

para $\alpha = \log \lambda / \log \lambda_{\text{visual}}$ e $\beta = (2 \log \lambda - \log(\mathfrak{h} + \epsilon)) / \log \lambda_{\text{visual}}$.

$\square$

Perspectivas Futuras

Antes de adentrarmos as perspectivas futuras, cabe fazer algumas considerações.

Primeiramente, o Teorema do limite local para passeios aleatórios simétricos consiste em determinar bons comportamentos assintóticos para as probabilidades de transição $p_n(x, y)$.

Dessa forma, Gouëzel e Lalley em [9] mostraram que em grupo Funchsiano co-compacto, o comportamento assintótico da probabilidade de transição é dado por:

$$p_n(x, y) \approx C(x, y)R^{-n}n^{-3/2}$$

onde $R := \limsup_n \sqrt[n]{p_n(\mathrm{id}, \mathrm{id})}$.

Já em [8], Gouëzel mostrou que o comportamento assintótico das probabilidades de transição em grupos hiperbólicos continua o mesmo mostrado anteriormente para grupos Funchsiano co-compacto. Para isso, ele obteve o comportamento assintótico da função de Green $G_r(\mathrm{id}, \mathrm{id})$. Assim, deduziu o comportamento assintótico de $p_n(\mathrm{id}, \mathrm{id})$, usando teoremas tauberianos. O comportamento assistótico de $p_n(x, y)$ é provado da mesma forma.

Isso posto, nosso objetivo para o futuro será generalizar esse resultado de Gouëzel para extensões por grupos hiperbólicos, ou seja, pretendemos mostrar que o comportamento assintótico do operador de Ruelle para uma extensão por grupo é dado por

$$\mathcal{L}^n(\mathbf{X}_{\mathrm{id}})(x, \mathrm{id}) \approx R^{-n}n^{-3/2}$$

onde $R := \limsup_n \sqrt[n]{\mathcal{L}^n(\mathbf{X}_{\mathrm{id}})(x, \mathrm{id})}$.

Referências Bibliográficas

[1] J. Aaronson. *An introduction to infinite ergodic theory*, volume 50 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[2] J. Aaronson, M. Denker, and M. Urbański. Ergodic theory for Markov fibred systems and parabolic rational maps. *Trans. Am. Math. Soc.*, 337(2):495–548, 1993.

[3] A. Ancona. Negatively curved manifolds, elliptic operators, and the Martin boundary. *Ann. of Math. (2)*, 125(3):495–536, 1987.

[4] M. Coornaert and A. Papadopoulos. *Symbolic dynamcs and hyperbolic groups.* Lecture Notes in Math. 1539, Springer-Verlag, Berlin 1993.

[5] P. Gerl e W. Woess. Local limits and harmonic functions for nonisotropic random walks on free groups. *Probab. Theory Relat. Fields.*, 71(3):341–355, 1986.

[6] E. Ghys e P. de la Harpe. Espaces métriques hyperboliques. In G. de la Harpe, editor, *Sur les Groupes Hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, volume 83 of *Progress in Mathematics*, pages 27–46. Birkhäuser Basel, 1990.

[7] E. Ghys and P. de la Harpe. Le bord d'un espace hyperbolique. In G. de la Harpe, editor, *Sur les Groupes Hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, volume 83 of *Progress in Mathematics*, pages 117–134. Birkhäuser Basel, 1990.

[8] S. Gouëzel. Local limit theorem for symmetric random walks in Gromov-hyperbolic groups. *J. Amer. Math. Soc.*, 27(3):893–928, 2014.

[9] S. Gouëzel and S. P. Lalley. Random walks on co-compact fuchsian groups. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4).*, 46:129–173, 2013.

[10] M. Gromov. Hyperbolic groups. volume 8, pages 75–263. 1987.

[11] V.A. Kaimanovich e A.M. Vershik. Random walks on discrete groups: boundary and entropy. *Ann. Probab.*, 11: (1983) 457-490.

[12] B. Kitchens. Symbolic Dynamics: One-sided, Two-sided and Countable State Markov Shifts. Springer, 1998.

[13] G. Pólya. Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die Irrfahrt im Straßennetz. *Math. Ann.*, (1921)(84) 149–160.

[14] O. M. Sarig. Existence of Gibbs measures for countable Markov shifts. *Proc. Am. Math. Soc.*, 131(6):1751–1758, 2003.

[15] O. Shwartz. Thermodynamic formalism for transient potential functions. *Comm.Math.Phys.*, 366(2): 737–779, 2019.

[16] M. Stadlbauer. An extension of Kesten's criterion for amenability to topological Markov chains. *Adv. Math.*, 235:450–468, 2013.

[17] M. Stadlbauer. On conformal measures and harmonic functions for group extensions. In Springer, editor, *New Trends in One-dimensional Dynamics, celebrating the 70th birthday of Welington de Melo*, 2019.

[18] W. Woess. *Denumerable Markov chains.* EMS Textbooks in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2009. Generating functions, boundary theory, random walks on trees.

[19] W. Woess; *Random walks on infinite graphs and groups* Cambridge Tracts in Mathematics 138. Cambridge University Press 2000.

[20] R. J. Zimmer. Amenable ergodic group actions and an application to Poisson boundaries of random walks. *J. Functional Analysis.*, 27(3):350–372, 1978.