Universidade Federal da Bahia
Instituto de Matemática e Estatística - IME
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Tese de Doutorado

Expansividade segundo Komuro para sumidouros hiperbólicos-seccionais.

Junilson Cerqueira da Silva

Salvador-BA
Junho/2019

Expansividade segundo Komuro para sumidouros hiperbólicos-seccionais.

Junilson Cerqueira da Silva

Tese de Doutorado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: **Prof. Dr. Vítor D. Martins de Araújo**

Salvador-BA
Junho/2019

Cerqueira da Silva, Junilson.
Expansividade segundo Komuro para sumidouros hiperbólicos-seccionais / Junilson Cerqueira da Silva. - 2019.
80 f. : il
Orientador: Vítor Domingos Martins de Araújo.
Tese (Doutorado - Matemática) - Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática e Estatística, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2019.
1. Dinâmica Hiperbólica. 2. Conjunto Hiperbólico-Seccional. 3. Expansividade. 4. Aplicação Global de Poincaré. 5. Dissipatividade Forte. I. Martins de Araújo, Vítor Domingos. II. Título.

CDU : 515.16
: 515.124

Expansividade segundo Komuro para sumidouros hiperbólicos-seccionais

Junilson Cerqueira da Silva

Tese apresentada ao Colegiado do Curso de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia - UFBA - como parte dos requisito parcial obtenção do Título de Doutor em Matemática.

Banca examinadora

Prof. Dr. Vítor Domingos Martins de Araujo (Orientador) - UFBA

Prof. Dr. Vilton Jeovan Viana Pinheiro - UFBA

Prof. Dr. Augusto Armando de Castro Júnior - UFBA

Profa. Dra. Luciana Silva Salgado - UFRJ

Prof. Dr. Felipe Fonseca dos Santos - UFRB

Dedico este trabalho a todo aquele
que se sente incapaz de vencer nesta vida.
Você não sabe o quão longe Deus pode lhe levar.
Confie. Dê o melhor de si. A vitória será uma questão de tempo.

Agradecimentos

A Deus, meu refúgio e fortaleza, socorro bem presente na hora da angústia! Jamais chegaria ao fim deste trabalho se não fosse sua misericórdia e auxílio. A sua mão me fez enfrentar e vencer os desafios que surgiram ao longo destes últimos anos. Nunca esquecerei, nunca mesmo, que tudo que tenho, tudo que sou e o que vier a ser vem de Deus. Viverei eternamente grato.

A Caroline, minha esposa amada, que sempre me apoiou em todos os momentos e vibrou comigo em cada avanço na pesquisa. Sua presença ao meu lado tornaram (e tornam!) os dias mais suaves e alegres. Te amo muito e para sempre.

Ao meu professor e orientador Vítor Araújo, por quem tenho muita admiração, carinho e respeito. É um exemplo de profissional para mim. Agradeço por sua paciência, compreensão e parceria. Agradeço pela maestria durante a orientação. Aprendi muito com ele e levarei comigo muitas lições importantes.

Aos professores da banca que se dispuseram a avaliar e corrigir este trabalho. Agradeço pelas relevantes contribuições.

A minha família, por todo suporte e orações ao longo dos últimos anos que, com certeza, me fortaleceram na caminhada. Agradeço especialmente a minha mãe, minhas avós Justina e Alice e meu avô Leonídio, sem estes eu jamais chegaria aqui.

Aos amigos queridos que fiz na UFBA e aqueles que já tinha desde os tempos de UEFS. A troca de experiência, conselhos e conhecimento entre nós foi muito importante ao longo desta jornada. Guardo todos em meu coração com muito carinho.

Por fim, agradeço a FAPESB e CAPES pelo apoio financeiro, indispensável para o sucesso deste trabalho.

"Eu te exaltarei, meu Deus e meu rei;
bendirei o teu nome para todo sempre!
Grande é o Senhor e digno de ser louvado.
A sua grandeza não tem limites."
Salmo 145.

Resumo

Neste trabalho provamos a expansividade segundo Komuro para sumidouros hiperbólicos-seccionais para uma variedade de dimensão $d \geq 3$. Para isto apresentamos dois resultados, o primeiro se restringe ao caso em que $d_{cu} = 2$, isto é, o subfibrado centro-instável do sumidouro tem dimensão 2 e o segundo é para o caso $d_{cu} > 2$. Neste último veremos que será necessário assumir que o sumidouro é 1-fortemente dissipativo. Construímos uma aplicação global de Poincaré, nossa principal ferramenta para o estudo da expansividade, e usamos a folheação estável ao longo da região armadilha contendo o sumidouro para analisar expansão de distâncias. Apresentamos ainda algumas consequências destes resultados.

Palavras-chave: Dinâmica hiperbólica, conjunto hiperbólico-seccional, expansividade, aplicação global de Poincaré, dissipatividade forte, folheação estável.

Abstract

In this paper we prove the expansiveness in the sense of Komuro for sectional-hyperbolic attracting sets in a manifold d-dimensional, where $d \geq 3$. For that, we present our two main results, the first one restricts to the case when $d_{cu} = 2$, that is, the center-unstable subfiber of the attracting set has dimension 2 and the second one is about the case $d_{cu} > 2$. To this last one it will be necessary to assume that the attracting set is 1-strongly dissipative. We construct a global Poincaré map, our main tool to study expansiveness, and use stabel foliation to the trapping region containing the attracting set in order to analyze the expanding of distances. We also present some consequences of these results.

Keywords: Hyperbolic dynamic, sectional-hyperbolic set, expansiveness, global Poincaré map, strong dissipativity, stable foliation.

Sumário

Lista de Figuras

Capítulo 1

Introdução

A teoria dos Sistemas Dinâmicos tem uma longa história que remonta às leis da Mecânica Clássica expressas em termos de equações diferenciais. Um exemplo relevante nessa teoria é o problema dos n-corpos: num campo gravitacional, este problema modela, por exemplo, o nosso sistema solar. É na busca da solução de problemas como esse que muitas ferramentas matemáticas foram desenvolvidas, aprofundando a teoria de sistemas dinâmicos.

Desde Poincaré, no final do século XIX, a ênfase ao desenvolvimento da teoria tem sido o estudo do comportamento assintótico das soluções das equações diferenciais, em vez de buscar explicitamente expressões para as soluções.

Destacaremos, dentre as possíveis linhas de pesquisa da teoria dos Sistemas Dinâmicos, a teoria de Sistemas Dinâmicos Hiperbólicos, desenvolvida nos anos 60 e 70, após o trabalho de Smale, Sinai, Ruelle, Bowen [14, 15, 43, 44] entre outros. Essa teoria busca entender o comportamento de conjuntos compactos invariantes Λ para fluxos e difeomorfismos em variedades compactas de dimensão finita tendo uma decomposição hiperbólica do espaço tangente. No entanto, apesar do trabalho bem-sucedido de pesquisa sobre tais sistemas, esta teoria não inclui importantes classes de sistemas dinâmicos, que não se encaixam nos critérios básicos da hiperbolicidade uniforme.

Um passo fundamental na teoria foi dado por Morales, Pacífico e Pujals [37], provando que um atrator robustamente transitivo invariante de um fluxo tridimensional que contêm alguma singularidade é *hiperbólico-singular*. Isto é, precisa ter uma decomposição invariante $E^s \oplus E^{cu}$ para o fibrado tangente onde o subfibrado unidimensional é contraído uniformemente e o subfibrado bidimensional é volume expansor. Anos depois, Metzger e Morales [35] introduzem uma nova classe de conjuntos compactos invariantes em variedades de dimensão $d \geq 3$ contendo os sistemas hiperbólicos, os sistemas hiperbólicos-singulares em variedades tridimensionais, o atrator de Lorenz multidimensional e os conjuntos robustamente transitivos com singularidades: são os conjuntos *hiperbólicos-seccionais*, caracterizados pelo fato de que a derivada dos fluxos correspondentes *expande área de paralelogramos ao longo do subfibrado central*.

Para o desenvolvimento da teoria da hiperbolicidade-seccional, é essencial investigar quais são as consequências desta para um conjunto invariante. O presente trabalho é uma contribuição para a teoria dos sistemas hiperbólicos-seccionais, trazendo consequências dinâmicas da hiperbolicidade-seccional. Provamos que o fluxo num conjunto hiperbólico-seccional é *expansivo*. Existem algumas diferentes noções de expansividade, mas usamos a definição de expansividade introduzida por Komuro [25] por ser mais compatível com a noção de hiperbolicidade trabalhada. A ideia por trás da expansividade é a de que quaisquer duas órbitas que permanecem juntas em todo tempo necessariamente têm que coincidir.

Existem outras noções similares, como a de "fluxos cinematicamente expansivos"que são consideradas em [16] e em [24] e exploradas em [17] e [10].

Para atratores hiperbólicos-singulares tridimensionais, a expansividade já foi provada em [7]. É natural tentar generalizar tal resultado para uma variedade de dimensão $d \geq 3$, mas para conjuntos hiperbólicos-seccionais. Motivados pelos trabalhos de Araújo, Pacífico, Pujals e Viana [7], juntamente com Araújo, Melbourne e Varandas [2, 4, 5, 8], os principais resultados deste trabalho trazem justamente isso, mas aqui não precisamos assumir transitividade do conjunto, basta termos um sumidouro

hiperbólico-seccional. Em um dos resultados assumimos 1-dissipatividade forte para o sumidouro hiperbólico-seccional, hipótese que vale para um aberto contendo o campo. A principal ferramenta para provar os resultados é a construção de uma Aplicação Global de Poincaré, ferramenta esta que será útil em muitos problemas futuros envolvendo sistemas hiperbólicos-seccionais e que foi primeiramente obtida em [7] para atratores hiperbólicos-singulares tridimensionais usando fortemente a transitividade e a baixa dimensão.

1.1 Organização do trabalho

Esta tese está organizada em 5 capítulos, incluindo o capítulo introdutório, onde apresentamos brevemente aspectos relacionados com a área de Sistemas Dinâmicos. No Capítulo 2, apresentamos as definições, ferramentas básicas e os resultados principais contidos na tese e provados nos capítulos posteriores.

No Capítulo 3, abordamos o nosso primeiro resultado principal, o Teorema A. Neste capítulo, apresentamos a ferramenta principal para provar os resultados envolvendo expansividade: a aplicação global de Poincaré. Decidimos incluí-la neste capítulo, reconsiderando-a no seguinte, por conta das muitas propriedades que esta possui e que serão utilizadas, facilitando, assim, sua localização no trabalho.

Finalizado o Capítulo 3, iniciamos o Capítulo 4 retomando a aplicação global de Poincaré e apresentando uma noção usada exclusivamente neste capítulo, a q-dissipatividade forte. Logo, em seguida, provamos o Teorema B, concluindo os resultados que provam expansividade para sumidouros hiperbólicos-seccionais.

No Capítulo 5, apresentamos alguns futuros passos da pesquisa. Se nos capítulos anteriores provamos a expansividade para sumidouros hiperbólicos-seccionais, no Capítulo 5 apresentamos dois teoremas, a serem provados futuramente, que dizem respeito sobre possíveis recíprocas para os Teoremas A e B. Apresentamos um panorama geral do que será feito e

algumas estratégias.

Capítulo 2

Definições básicas, principais ferramentas e resultados principais

Neste capítulo apresentamos as principais definições presentes ao longo do texto e que são nosso objeto de estudo. Apresentamos também o nossos resultados principais sobre expansividade e sumidouros hiperbólico-seccionais, os teoremas A e B.

No que segue:

- M denotará uma variedade compacta e sem bordo com estrutura Riemanniana suave de dimensão finita m.
- $\mathfrak{X}^r(M)$ é o conjunto de campo de vetores C^r em M dotado da topologia C^r, $r \geq 1$.
- M tem uma m-forma de volume, denotada por Leb, que é *chamada de medida de Lebesgue*.
- Um fluxo de classe C^r é uma família $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ de difeomorfismos de classe C^r que satisfazem $X_0 = Id$ e $X_{t+s} = X_t \circ X_s$, $\forall t, s \in \mathbb{R}$.

- Dado um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, o fluxo induzido por X é a família de difeomorfismos $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ tal que $\frac{d}{dt}(X_t(x))|_{t=t_0} = X(X_{t_0}(x))$.

- Uma *singularidade* de X é um ponto $\sigma \in M$ tal que $X_t(\sigma) = \sigma$ para todo $t \in \mathbb{R}$, isto é, é um ponto fixo de todas as aplicações X_t, correspondente ao zero do campo vetorial X associado: $X(\sigma) = 0$. Denotamos por $Sing(X)$ o conjunto de todas as singularidades do campo vetorial X. Cada ponto $p \in M$ que não é uma singularidade, isto é, $X(p) \neq 0$, é um ponto regular de X.

- Quando X induz um fluxo, uma órbita de X é o conjunto $\mathcal{O}(q) = \{X_t(q) : t \in \mathbb{R}\}$, para algum $q \in M$. Portanto $\sigma \in M$ é uma singularidade se, e somente se, $\mathcal{O}(\sigma) = \{\sigma\}$.

- Uma *órbita periódica* de X é uma órbita $\mathcal{O}(p)$ tal que $X_T(p) = p$ para algum $T > 0$ mínimo com esta propriedade. Denotamos por $Per(X)$ o conjunto de todas as órbitas periódicas de X.

- Um *elemento crítico* de um campo de vetores X dado é ou uma singularidade ou uma órbita periódica. O conjunto $C(X) = Sing(X) \cup Per(X)$ é o conjunto dos elementos críticos de X.

- Dizemos que $p \in M$ é um ponto não-errante de X se, para cada $T > 0$ e cada vizinhança de U de p existe $t > T$ tal que $X_t(U) \cap U \neq \emptyset$. O conjunto dos pontos não-errantes de X é denotado por $\Omega(X)$.

- Dado $q \in M$, definimos $\omega(q)$ como sendo o conjunto dos pontos de acumulação da órbita positiva $\{X_t(q) : t \geq 0\}$ de q.

- Se $x \in M$ e $[a, b] \subset \mathbb{R}$, então $X_{[a,b]}(x) = \{X_t(x), a \leq t \leq b\}$.

Seja Λ compacto invariante de X, isto é, $X_t(\Lambda) = \Lambda$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Dizemos que Λ é:

- transitivo, se $\Lambda = \omega(p)$ para algum p ponto regular para X.

- isolado, se existe aberto $U \supset \Lambda$ tal que $\Lambda = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} X_t(U)$.
- sumidouro, se é isolado com $\overline{X_t(U)} \subset U$ para $t > 0$. Neste caso, dizemos que U é uma região armadilha.
- atrator, se é um sumidouro transitivo.
- repulsor, se é atrator para $-X$.

Uma singularidade de X é chamada de *poço*, se for um atrator de X e é chamada de *fonte*, se for um repulsor de X. Um atrator diz-se próprio, se não é toda variedade e, não-trivial, se nem é uma órbita periódica e nem uma singularidade.

2.1 Hiperbolicidade seccional e expansividade

Definição 2.1.1. *Sejam Λ um compacto invariante de X, $c > 0$ e $0 < \lambda < 1$. Dizemos que uma decomposição sobre Λ, $T_\Lambda M = E^1 \oplus E^2$, é DX_t-invariante se $DX_t(x)E^i_x = E^i_{X_t(x)}$, para todo $x \in \Lambda$, com $i = 1, 2$. Dizemos que Λ tem uma (c, λ)-**decomposição dominada** se*

$$T_\Lambda M = E^1 \oplus E^2$$

é uma decomposição contínua do fibrado tangente sobre Λ, invariante por DX_t e para todo $x \in \Lambda$ e $t > 0$:

$$\|DX_t \mid_{E^1_x}\| \cdot \|DX_{-t} \mid_{E^2_{X_t(x)}}\| < c\lambda^t.$$

Definição 2.1.2. *Um subconjunto compacto invariante Λ desta variedade M diz-se **parcialmente hiperbólico** se existe uma (c, λ)-decomposição dominada tal que o subfibrado $E^1 = E^s$ é uniformemente contraído:*

$$\|DX_t \mid_{E^s_x}\| < c\lambda^t, \ \forall\, t > 0, \forall x \in \Lambda.$$

Neste caso a direção unidimensional do campo E^X_x está contida no subfibrado E^2 a

ser denotado por E^{cu} e chamado de subfibrado centro-instável, enquanto que E^s é o subfibrado estável. Além disso, $d_s = dimE^s \geq 1$ e $d_{cu} = dimE^{cu} \geq 2$. O índice de Λ é a dimensão do subfibrado uniformemente contraído, a ser denotado por Ind_X.

Observação 2.1.3. *Uma decomposição dominada é sempre contínua. Se $U_0 \subset M$ é uma pequena vizinhança positivamente invariante de Λ tal que $\Lambda = \bigcap_{t\geq 0} X_t(U_0)$, podemos estender a decomposição $T_\Lambda M = E^s \oplus E^{cu}$ sobre Λ a uma decomposição contínua (não necessariamente invariante) $T_{U_0}M = \tilde{E}^s \oplus \tilde{E}^{cu}$ sobre U_0.*

Definição 2.1.4. *Uma singularidade σ é **hiperbólica** se todos os autovalores de $DX(\sigma)$, a derivada do campo de vetores em σ, têm parte real diferente de zero. Uma órbita periódica $\mathcal{O}_X(p)$ de X é hiperbólica se todos os autovalores de $DX_T(p) : T_pM \to T_pM$ são todos diferentes de 1, onde $T > 0$ é o período de p.*

Os poços e fontes de um campo X são singularidades hiperbólicas. Para poços, todos os autovalores da derivada do campo têm parte real negativa e para fontes, todos têm parte real positiva. Se uma singularidade não é nem fonte e nem poço, dizemos que é do tipo *sela*.

Definição 2.1.5. *Um conjunto compacto invariante Λ é **hiperbólico** para um fluxo X_t se existe uma decomposição contínua DX_t-invariante do fibrado tangente $T_\Lambda M = E^s \oplus E^X \oplus E^u$, isto é, $DX_t(E^i_x) = E^i_{X_t(x)}$, $\forall x \in \Lambda$ e $t \in \mathbb{R}$, com $i = s, X, u$, e existem constantes $C, \lambda > 0$ tais que*

$$\|DX_t\,|_{E^s_x}\| \leq Ce^{-\lambda t}, \quad \|DX_{-t}\,|_{E^u_x}\| \leq Ce^{-\lambda t}, \quad x \in \Lambda \;\; e \;\; t \in \mathbb{R}.$$

Ou seja, E^s é uniformemente contraído e E^u é uniformemente expandido por DX_t. Na expressão acima E^X denota o subfibrado unidimensional gerado pela direção do campo. O índice de Λ é a dimensão de E^s.

Definição 2.1.6. *Considere uma variedade riemanniana tridimensional M e uma singularidade hiperbólica σ do campo X. Se $DX(\sigma)$ tem autovalores reais $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ satisfazendo $\lambda_3 < \lambda_2 < 0 < \lambda_1$ e $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$, então dizemos que σ é **tipo-Lorenz**.*

De forma geral, temos a seguinte definição.

Definição 2.1.7. *Considere uma variedade riemanniana tridimensional M e uma singularidade hiperbólica σ do campo X. Dizemos que σ é tipo-Lorenz generalizada se $DX|_\sigma|_{E^{cu}_\sigma}$ tem um autovalor real λ^s e $\lambda^u = inf\{\Re(\lambda) : \lambda \in sp(DX(\sigma)), \Re(\lambda) \geq 0\}$ satisfaz $-\lambda^u < \lambda^s < 0 < \lambda^u$.*

Vamos assumir neste trabalho que **todas as singularidades são tipo-Lorenz generalizada**.

Definição 2.1.8. *Seja $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ e $\Omega(X)$ o conjunto não-errante de X. Dizemos que X é Axioma A, se $\Omega(X)$ é hiperbólico e $\Omega(X) = \overline{Sing(X) \cup Per(X)}$.*

Teorema 2.1.9. *Se X é Axioma A, então $\Omega(X)$ decompõe-se em união finita de conjuntos transitivos $\Omega(X) = \Lambda_1 \cup ... \cup \Lambda_l$, chamados de peças básicas de X.*

Definição 2.1.10. *Um coleção de peças básicas $\Lambda_{i_1}, ..., \Lambda_{i_k}$ de X é chamada de um ciclo, se existem pontos $a_j \notin \Omega(X)$, $1 \leq j \leq k$, tais que $\alpha(a_j) \subset \Lambda_{i_j}$ e $\omega(a_j) \subset \Lambda_{i_{j+1}} (k+1 \equiv 1)$. Dizemos que um campo de vetores X Axioma A é sem ciclos se não existem ciclos entre as peças básicas de X*

Definição 2.1.11. *Para cada $x \in \Lambda$ e $t \in \mathbb{R}$, denotamos $J^c_t(x)$ o valor absoluto do determinante de*

$$DX_t\,|_{E^{cu}_x} \colon E^{cu}_x \to E^{cu}_{X_t(x)}.$$

*Dizemos que o sub-fibrado E^{cu}_Λ na decomposição parcialmente hiperbólica é **seccionalmente expansor** se $|detDX_t(x)|_{P_x}| \geq ce^{\theta t}$, para cada $x \in \Lambda$ e $t \geq 0$, para cada subespaço bidimensional $P_x \subset E^{cu}_x$. Se $|detDX_t(x)|_{E^{cu}_x}| \geq ce^{\theta t}$, para cada $x \in \Lambda$ e $t \geq 0$, E^{cu}_Λ é chamado de **volume expansor**.*

Definição 2.1.12. *Seja Λ um conjunto compacto invariante de X com singularidades. Dizemos que Λ é um conjunto **hiperbólico seccional** para X se todas as singularidades são hiperbólicas e Λ é parcialmente hiperbólico com o subfibrado centro-instável sendo seccionalmente expansor. Se, além de ser hiperbólico seccional, for também um sumidouro, dizemos que Λ é um **sumidouro hiperbólico seccional**.*

Se Λ for parcialmente hiperbólico com subfibrado centro-instável **volume expansor** temos a hiperbolicidade-singular. Mais precisamente:

Definição 2.1.13. *Seja Λ um conjunto compacto invariante de X com singularidades. Dizemos que Λ é um conjunto* ***hiperbólico-singular*** *para X se todas as singularidades são hiperbólicas e Λ é parcialmente hiperbólico com o subfibrado centro-instável sendo volume expansor. Se, além de ser hiperbólico-singular, for também um sumidouro, dizemos que Λ é um* ***sumidouro hiperbólico-singular****.*

Veja que hiperbolicidade-singular e hiperbolicidade-seccional coincidem quando $d_{cu} = dimE^{cu} = 2$.

Definição 2.1.14. *Dizemos que $\Lambda \subset M$ é C^1****-genericamente hiperbólico seccional*** *(C^1****-genericamente hiperbólico-singular****), se existe um residual $\mathcal{R}$ em $\mathcal{X}^1(M)$ tal que, para uma vizinhança $U \subset \Lambda$ e todo $Y \in \mathcal{R}$, $\Lambda_Y(U)$ é hiperbólico-seccional (hiperbólico-singular) para Y.*

2.1.1 Folheação contrativa cobrindo vizinhança do sumidouro

No que segue, Λ é um sumidouro hiperbólico-seccional de $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ com decomposição dominada $T_\Lambda M = E^s \oplus E^{cu}$. Além disso, o lema a seguir garante que se a região armadilha U_0 for conexa, então o **sumidouro Λ é conexo**.

Lema 2.1.15 (Conexidade do sumidouro)**.** *Se U é subconjunto aberto e conexo de M tal que $X_t(\overline{U}) \subset U$ para todo $t > T$ para algum $T > 0$ fixado, então o sumidouro $\Lambda = \bigcap_{t>0} \overline{X_t(U)}$ é (compacto e) conexo.*

Demonstração. Pelas hipóteses sobre U, garantimos que $X_t(\overline{U})$ é compacto e conexo para todo $t > T$, por continuidade e invertibilidade do fluxo. Mas o sumidouro pode ser obtido como segue

$$\Lambda = \bigcap_{t>0} \overline{X_t(U)} = \lim_{t\to+\infty} \overline{X_t(U)},$$

onde o limite é entendido na topologia de Hausdorff da família de todos os compactos de M. Mais precisamente, temos para cada $\epsilon > 0$, um $T_0 > 0$ tal que para todo $T > T_0$ vale

$$\begin{aligned}\Lambda \subset \bigcap_{0<T\leq T_0} \overline{X_t(U)} &= \overline{X_{T_0}(U)} \\ &\subset B(\Lambda, \epsilon) \\ &= \bigcup_{x\in\Lambda} B(x, \epsilon).\end{aligned}$$

Consequentemente, se Λ não fosse conexo, então existiria uma cisão $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ com Λ_1, Λ_2 disjuntos, compactos, não-vazios e conexos. Portanto, existiriam também vizinhanças abertas e disjuntas W_i de Λ_i, $i = 1, 2$, com $W = W_1 \cup W_2$ vizinhança de Λ. Segue que existe $T_0 > 0$ para o qual $\overline{X_t(U)} \subset W$ para todo $t > T_0$ e, por conexidade, $\overline{X_t(U)}$ está contido em apenas um dos W_i. Mais ainda, por continuidade do fluxo, está contido sempre no mesmo W_i, digamos W_1.

Mas então $\Lambda = \bigcap_{t>0} \overline{X_t(U)} \subset \Lambda_1$ contrariando a existência da cisão. Esta contradição completa a prova do lema.

□

Observação 2.1.16. *Se o sumidouro não for conexo, então a região armadilha U não é conexa e, portanto, podemos considerar cada uma das componentes conexas e analisar separadamente a expansividade.*

É possível estender esta decomposição para uma pequena vizinhança $U_0 \supset \Lambda$ positivamente invariante. Seja $\tilde{E}^s \oplus \tilde{E}^{cu}$ esta extensão. Podemos, sem perda de generalidade, assumir que $\tilde{E}^s$ é invariante por DX_t (Proposição 3.2 de [2]). No caso de $\tilde{E}^{cu}$, não se pode garantir que este é invariante. No entanto, pode-se considerar uma família de cones em torno de U_0:

$$C_a^{cu}(x) = \{v = v^s + v^{cu} : v^s \in \tilde{E}_x^s \text{ e } v^{cu} \in \tilde{E}_x^{cu} \text{ com } \|v^s\| \leq a \cdot \|v^{cu}\|\}$$

que é positivamente invariante para $a > 0$:

$$DX_t(C_a^{cu}(x)) \subset C_a^{cu}(X_t(x)) \quad \text{para todo } t > 0 \text{ grande.}$$

No que segue E^s e E^{cu} denotarão $\tilde{E}^s$ e $\tilde{E}^{cu}$.
Para cada $x \in U_0$, definimos

$$\begin{aligned} W^{ss}(x) &= \{y \in M : dist(X_t(x), X_t(y)) \to 0 \text{ quando } t \to +\infty\}, \text{ e} \\ W^s(x) &= \bigcup_{t\in\mathbb{R}} W^{ss}(X_t(x)) = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} X_t(W^{ss}(x)). \end{aligned}$$

O conjunto $W^{ss}_\epsilon(x)$ é a variedade estável do ponto x de tamanho ϵ sendo

$$W^{ss}_\epsilon(x) = \{y \in M : dist(X_t(x), X_t(y)) \to_{t\to+\infty} 0 \;\; e \; dist(X_t(x), X_t(y) \leq \epsilon\}.$$

Denotando $E^{cs}_x = E^s_x \oplus E^X_x$, onde E^X_x é a direção do fluxo em x, segue que

$$T_x W^{ss}(x) = E^s_x \quad \text{e} \quad T_x W^s(x) = E^{cs}_x .$$

Denotemos por D^k o disco unitário aberto k-dimensional e $Emb^r(D^k, M)$ o conjunto dos mergulhos de classe C^r ,$\phi : D^k \to M$, dotado com a distância C^r.

Teorema 2.1.17 (Theorem 4.2,[2]). *Existem uma vizinhança U_0 positivamente invariante de Λ e uma constante $\nu \in (0, 1)$ tais que valem as seguintes:*

a) Para cada ponto $x \in U_0$, W^{ss}_x é um disco mergulhado d_s-dimensional tal que

1. *$T_x W^{ss}_x = E^s_x$;*
2. *$X_t(W^{ss}_x) \subset W^s_{X_t x}$ para todo $t \geq 0$;*
3. *$d(X_t x, X_t y) \leq \nu^t d(x, y)$ para todo $y \in W^{ss}_x$, $t \geq 0$.*

b) Os discos W^{ss}_x dependem continuamente de x na topologia C^0, isto é, existe aplicação contínua $\gamma : U_0 \to Emb^0(\mathbb{D}^{d_s}, M)$ tal que $\gamma(x)(0) = x$ e $\gamma(x)(D^{d_s}) = W^{ss}_x$.

c) A família de discos $\{W^{ss}_x : x \in U_0\}$ define uma folheação topológica de U_0.

2.1.2 Expansividade

O conceito de expansividade (também chamado de K^*-expansividade) que usaremos será o proposto por Komuro.

Denotamos $S(\mathbb{R})$ o conjunto de funções contínuas sobrejetivas crescentes $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Definição 2.1.18. *(Expansividade) Dizemos que o fluxo é* ***expansivo*** *se, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tais que, para quaisquer $x, y \in M$, para qualquer $h \in S(\mathbb{R})$,*

$$dist(X_t(x), X_{h(t)}(y)) \leq \delta \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists t_0 \in \mathbb{R},\ X_{h(t_0)}(y) \in X_{[t_0-\epsilon, t_0+\epsilon]}(x).$$

Dizemos que um subconjunto compacto invariante Λ de M é expansivo se a restrição de X_t a Λ é um fluxo expansivo.

Definição 2.1.19. *Um fluxo é* ***sensível ás condições iniciais*** *se existe $\delta > 0$ tal que, para qualquer $x \in M$ e qualquer vizinhança N de x, existe $y \in N \backslash \{x\}$ e $t \in \mathbb{R}$ tais que $dist(X_t(x), X_t(y)) > \delta$*

A expansividade implica sensibilidade ás condições iniciais e esta última é uma das caracterizações da caoticidade de sistemas; veja [28, 45, 1] e referências destes trabalhos.

2.2 Resultados principais

No Teorema A de [7], os autores mostram que o fluxo tridimensional restrito a um sumidouro transitivo hiperbólico-seccional é expansivo. Usando algumas ferramentas de [7], estenderemos este resultado mostrando que a expansividade é assegurada para todo sumidouro hiperbólico-seccional, não necessariamente transitivo. De fato, esta expansividade é obtida em uma vizinhança do sumidouro. Nós mostramos isso em dimensão $d \geq 3$, como foi estudado em [7] para dimensão 3, sendo que para o caso em que

$d_{cu} = dimE^{cu} > 2$, assumimos a q-dissipatividade forte para $q = 1$. Nosso resultados principais são apresentados a seguir.

2.2.1 Expansividade robusta

Definição 2.2.1. *Seja $\Lambda \subset M$ um sumidouro de um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}^r(M)$. Dizemos que Λ é C^r-**robustamente expansivo**, se existe uma vizinhança $\mathcal{U} \subset \mathfrak{X}^r(M)$ de X tal que todo campo $Y \in \mathcal{U}$ é expansivo.*

Nos enunciados seguintes, assumimos que o fibrado estável pode ter qualquer dimensão $d_s \geq 1$

Teorema A. *Todo sumidouro hiperbólico-seccional de um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}^1(M)$, com $d_{cu} = 2$, é C^1-robustamente expansivo.*

No caso de sumidouro hiperbólico-seccional com $d_{cu} > 2$, necessitamos de uma hipótese adicional sobre a dinâmica: a 1-dissipatividade forte.

Definição 2.2.2. *Seja $q > \frac{1}{d_s}$. Um sumidouro parcialmente hiperbólico Λ é **q-fortemente dissipativo** se*

(a) para qualquer singularidade $\sigma \in \Lambda$, os autovalores λ_j de $DX(\sigma)$, ordenados de forma que $\Re\lambda_1 \leq \Re\lambda_2 \leq \cdots \Re\lambda_d$, satisfazem $\Re(\lambda_1 - \lambda_{d_s+1} + q\lambda_d) < 0$;

(b) $\sup_{x\in\Lambda}\{divX(x) + (d_s q - 1)\|(DX)(x)\|_2\} < 0$, onde $\|\cdot\|_2$ denota a norma matricial dada por $\|A\|_2 = (\Sigma_{ij} a_{ij}^2)^{\frac{1}{2}}$ para uma matriz $A_{d\times d}$ (assumimos, sem perda de generalidade, que M está mergulhada em algum $\mathbb{R}^n$).

Usaremos a hipótese de dissipatividade forte para $q = 1$. Com isso, provamos o seguinte teorema.

Teorema B. *Todo sumidouro hiperbólico-seccional de um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ 1-fortemente dissipativo, com $d_{cu} > 2$, é C^1-robustamente expansivo.*

Notamos que a 1-dissipatividade forte é condição C^1 robusta, vale numa vizinhança do campo dado na topologia C^1. De fato, para campos suficientemente próximos de X os autovalores ainda satisfazem a relação dada na

definição e a segunda condição também se verifica já que está diretamente ligada com a norma do campo.

Apresentamos agora alguns exemplos ilustrativos dos teoremas enunciados. Começamos com sumidouros hiperbólicos-secionais em dimensão três.

2.3 Exemplos

Exemplo 2.3.1. *Seja $X : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o fluxo definido pelas equações de Lorenz. Existe um elipsóide E no qual toda órbita positiva do fluxo X_t associado a X entra em algum momento. Além disso, E é transversal ao fluxo X_t. Portanto, a região aberta V limitada por E é uma região armadilha para X; veja figura 2.1.*

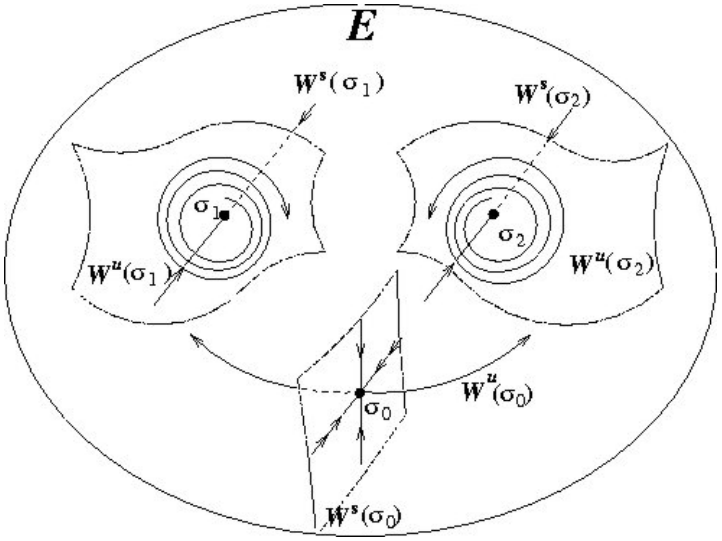

Figura 2.1: O elipsóide E e as singularidades σ_0,σ_1 e σ_2 do campo X

Simulações numéricas mostram que existe um subconjunto B homeomorfo ao bitoro, conforme figura 2.2, tal que cada trajetória positiva atravessa B transversalmente e nunca a abandona. Portanto, o conjunto aberto U limitado por B é o melhor candidato para a região armadilha de X contida em E. É neste conjunto que está o atrator de Lorenz $\Lambda = \cap_{t>0} X_t B$.

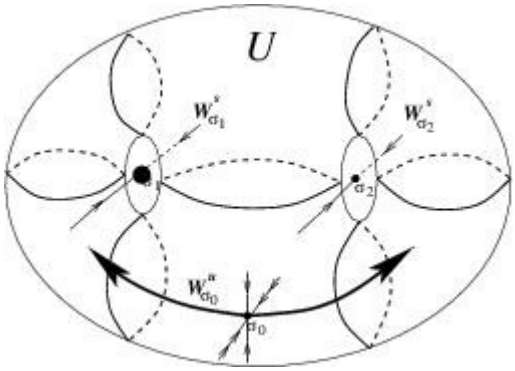

Figura 2.2: O bitoro B que contém o atrator de Lorenz

O atrator de Lorenz unido às variedades instáveis das singularidades σ_1 e σ_2 forma o maximal invariante no elipsóide que é um sumidouro hiperbólico-seccional. Note que σ_0 é singularidade tipo-Lorenz, enquanto as restantes σ_1, σ_2 não são tipo-Lorenz.

Exemplo 2.3.2. *Em [6], os autores constroem um sumidouro hiperbólico-seccional, modificando a construção do atrator geométrico de Lorenz : adiciona-se duas singularidades σ_1 e σ_2 para o fluxo localizadas em $W^u(\sigma)$ como indicada na figura 2.3.*

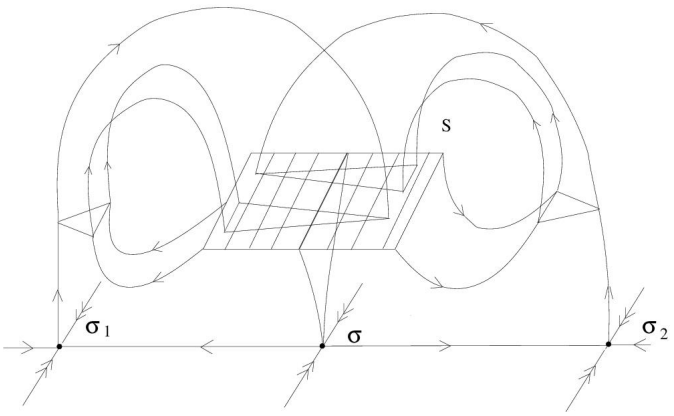

Figura 2.3: Construção de um sumidouro hiperbólico-seccional

Em seguida, cola-se duas cópias deste fluxo ao longo da variedade instável da

singularidade σ obtendo a figura 2.4 abaixo.

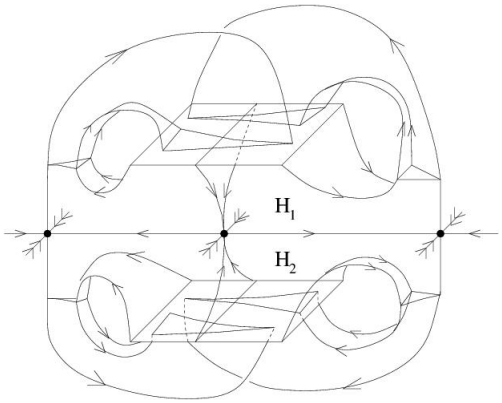

Figura 2.4: O sumidouro hiperbólico-seccional

O resultado desta construção é um sumidouro hiperbólico-seccional possuindo um conjunto denso de órbitas periódicas e três singularidades que, neste caso, são todas tipo-Lorenz. Para mais detalhes desta construção, veja a seção 9.1 *em [6].*

Exemplo 2.3.3. *No trabalho "Examples of singular-hyperbolic attracting sets", ainda numa variedade tridimensional, Morales prova a existência de um sumidouro hiperbólico-seccional sem singularidades tipo-Lorenz para um campo de vetores de classe C^∞, descrevendo detalhes da construção; veja [Teorema A, [36]]. Veremos que nesta situação as órbitas regulares do sumidouro não se acumulam nas singularidades, ou seja, estas são isoladas dentro do sumidouro.*

Exemplo 2.3.4. *Considere agora uma variedade de dimensão maior que 3. Para construir um sumidouro hiperbólico-seccional com $d_s > 1$, podemos fazer uma simples modificação das equações de Lorenz: tome no sistema de Lorenz em x, y, z com os parâmetros de Lorenz e considere $w \in \mathbb{R}^k$ e a EDO*

$$w' = g(w)$$

onde g é uma função diferenciável que tem poço. Denote por W a bacia de atração desse poço e U a bacia do sumidouro de Lorenz. Em $U \times W$ considere o sistema de equações em $\mathbb{R}^{k+3}$ dado por

$$\begin{cases} (x,y,z)' &= L(x,y,z) \\ w' &= g(w) \end{cases}$$

onde L é o sistema de Lorenz. Então $U \times W$ é a bacia de atração de um sumidouro cuja decomposição do fibrado tangente é o produto direto da decomposição do sumidouro de Lorenz com o subfibrado contrativo. Então, para esta decomposição, $d_s = 1 + k$.

Exemplo 2.3.5. *Para construir um sumidouro hiperbólico-seccional com $d_{cu} > 2$, Bonatti, Pumariño e Viana descrevem a construção do atrator de Lorenz multidimensional em [13]. Ela também pode ser encontrada em [6] na seção 5.2. Resumimos a seguir os principais passos desta construção.*

Considere um conjunto como o solenóide, construído a partir de uma aplicação uniformemente expansora $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ de um toro k-dimensional, para algum $k \geq 2$. Isto é, seja $\mathbb{D}$ o disco unitário em $\mathbb{R}^2$ e considere um mergulho suave $F : \mathbb{T}^k \times \mathbb{D} \to \mathbb{T}^k \times \mathbb{D}$ de $N = \mathbb{T}^k \times \mathbb{D}$ em si mesmo que preserva e contrai a folheação

$$\mathcal{F}^s = \left\{\{z\} \times \mathbb{D} : z \in \mathbb{T}^k\right\},$$

e, além disso, a projeção natural $\pi : N \to \mathbb{T}^k$ conjuga F a f:$\pi \circ F = f \circ \pi$.

Agora, considere o fluxo linear em $M = N \times [0,1]/\backsim$ dado pelo campo de vetores em $TN \times \mathbb{R}$ onde fazemos a identificação $(x,0) \backsim (x,1)$ para todo $x \in N$. Modifique o fluxo no cilindro $U \times \mathbb{D} \times [0,1]$ em torno da órbita de um ponto $p = (z,0)$, onde U é uma vizinhança de z em $\mathbb{T}^k$, de tal forma a criar uma singularidade hiperbólica σ do tipo-sela com k autovalores expansores e 3 autovalores contrativos, como descrito na figura 2.5.

Este fluxo modificado define uma aplicação de transição L de $\Sigma_0 = \mathbb{T}^k \times \{0\}$ a $\Sigma_1 = \mathbb{T}^k \times \{1\}$ com a qual a identificação dada por $(w,1) \backsim_F (F(w),0)$ define a aplicação de retorno à seção transversal global Σ_0 de um fluxo Y no espaço $M^F = M/\backsim_F$.

Em [13] é provado que, se a taxa de expansão de f é suficientemente grande, então o conjunto

$$\Lambda = \bigcup_{T>0} \overline{\bigcap_{t>T} Y_t(\Sigma_0)}$$

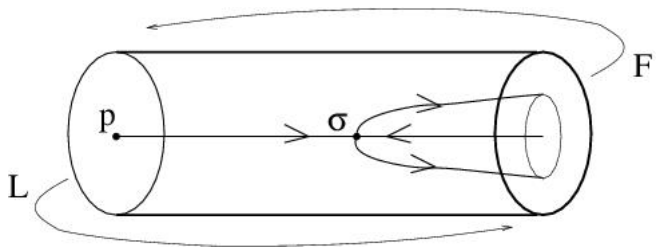

Figura 2.5: Um esboço da construção do Lorenz multidimensional

é um atrator hiperbólico parcialmente robusto com singularidades.

A construção descrita acima pode ser facilmente adaptada para conter várias singularidades, toda tipo-Lorenz generalizada.

Capítulo 3

Expansividade para sumidouros hiperbólicos-seccionais com $d_{cu} = 2$

Neste capítulo, demonstramos o Teorema A para o caso $d_{cu} = 2$, isto é, quando o fibrado centro-instável for bidimensional. Veja que, em particular, demonstramos a expansividade dos sumidouros no caso tridimensional, estendendo o resultado de [7]. As ferramentas descritas na seguinte seção são essenciais para a demonstração dos Teoremas A e B, este último a ser demonstrado no próximo capítulo. No que segue, Λ é um sumidouro hiperbólico-seccional em uma variedade de dimensão $d \geq 3$ e $d_{cu} = 2$. Mesmo no caso $d_{cu} = 2$ os resultados e ferramentas são, em sua maioria, enunciados e ilustrados quando $d = 3$, isto é, para variedades tridimensionais. Isto facilita a compreensão das ideias para o caso mais geral no capítulo posterior.

3.1 Folheações estáveis em seções-transversais

Seja Σ uma seção-transversal ao fluxo, isto é, um disco compacto mergulhado C^2 transversal. Assumimos que Σ está contida na vizinhança U_0 dada no teorema 2.1.17. Para cada $x \in \Sigma$, definimos $W^s(x, \Sigma)$ **como a com-**

ponente conexa de $W^s(x) \cap \Sigma$ **que contém** x. Com isso definimos uma folheação $\mathcal{F}^s_\Sigma$ de Σ em subvariedades de classe C^1 com codimensão 1.

Observação 3.1.1. *Por causa do Teorema 2.1.17, dada uma seção transversal Σ e um ponto x em seu interior, podemos sempre encontrar uma seção transversal menor, com x em seu interior, que é imagem de um quadrado $[0,1]^2$ por um homeomorfismo h que envia linhas verticais $\eta \times [0,1]$ em folhas $W^s(y,\Sigma)$ de $\mathcal{F}^s_\Sigma$. Denotaremos por $\partial^s\Sigma$ a fronteira estável imagem de $\{0,1\} \times [0,1]$ e por $\partial^{cu}\Sigma$ a fronteira centro instável imagem de $[0,1] \times \{0,1\}$. Denotamos também $\partial\Sigma = \partial^s\Sigma \cup \partial^u\Sigma$. Além disso, $int\Sigma$ denotará o interior da seção Σ. No que segue, as seções transversais Σ satisfazem tal propriedade e estão contidas em U_0, de modo que a cada $x \in \Sigma$, $\omega(x) \subset \Lambda$. Esta maneira de olhar Σ como imagem de um quadrado é feita em dimensão 3, mas usa-se de maneira análoga em dimensão qualquer.*

Observação 3.1.2. *Em geral, não podemos escolher seção transversal tal que $W^s(x,\Sigma) \subset W^{ss}_\epsilon(x)$, mas podemos considerar uma seção transversal cujas folhas têm diâmetro menor que ϵ, escolher qualquer curva $\gamma \subset \Sigma$ atravessando transversalmente todas as folhas de $\mathcal{F}^s_\Sigma$ e considerar uma aplicação de Poincaré (local)*

$$R_\Sigma : \Sigma \to \Sigma(\gamma) = \bigcup_{z\in\gamma} W^{ss}_\epsilon(z)$$

com tempo de Poincaré perto de zero e $R_\Sigma(W^s(x,\Sigma)) \subset W^{ss}_\epsilon(R_\Sigma(x))$ (veja figura 3.1)

3.1.1 Aplicação de Poincaré e suas propriedades

Dada duas seções-transversais ao fluxo, Σ e $\tilde{\Sigma}$, vamos assumir que existe um $x \in int\Sigma$ e $\tau > 0$ tal que $X_\tau(x) \in int\tilde{\Sigma}$. A diferenciabilidade do fluxo implica que existe uma vizinhança aberta U_x de $x \in \Sigma$ e uma aplicação de Poincaré diferenciável $R : U_x \subset \Sigma \to \tilde{\Sigma}$, $R(x) = X_{t(x)}(x)$ onde $t : U_x \to \mathbb{R}^+$ é a função tempo de retorno com $t(x) = \tau$. A função t é escolhida de tal forma que $R|_{U_x}$ torna-se um difeomorfismo sobre $V_{Rx} = R(U_x)$ de $Rx \in \tilde{\Sigma}$ e é da mesma classe de diferenciabilidade que o campo X.

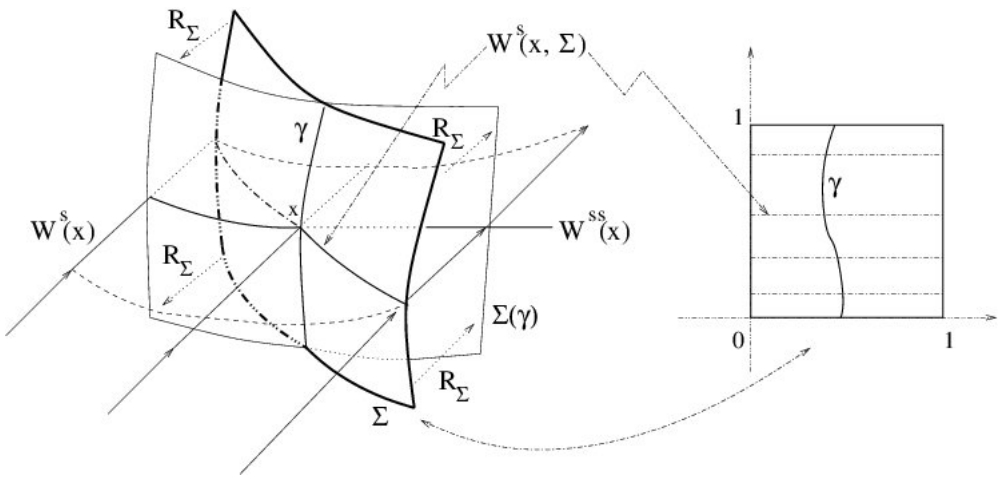

Figura 3.1: Uma curva atravessando transversalmente a seção

Notamos que, em geral, R não precisa corresponder ao primeiro tempo de visita das órbitas de $U_x \subset \Sigma$ a $\tilde{\Sigma}$, nem está necessariamente definida em todos os pontos de Σ.

A decomposição $E^s \oplus E^{cu}$ sobre U_0 induz uma decomposição contínua $E^s_\Sigma \oplus E^{cu}_\Sigma$ do fibrado tangente $T\Sigma$ a Σ (e analogamente para $\tilde{\Sigma}$), definida por

$$E^s_\Sigma(y) = E^{cs}_y \cap T_y\Sigma \text{ and } E^{cu}_\Sigma(y) = E^{cu}_y \cap T_y\Sigma$$

Se o tempo de Poincaré $t(x)$ é suficientemente grande, então a decomposição acima é hiperbólica para uma transformação R nas seções-transversais, pelo menos restrita a Λ, no seguinte sentido.

Proposição 3.1.3. *[[6], Proposição 6.15] Seja $R : \Sigma \to \Sigma'$ uma aplicação de Poincaré com tempo $t(\cdot)$. Então $DR_x(E^s_\Sigma(x)) = E^s_{\Sigma'}(R(x))$ para cada $x \in \Sigma$ e $DR_x(E^{cu}_\Sigma(x)) = E^{cu}_{\Sigma'}(R(x))$ em cada $x \in \Lambda \cap \Sigma$.*

Além disso, para cada $0 < \lambda < 1$ existe $T_1 = T_1(\Sigma, \Sigma', \lambda)$ tal que, se $t(\cdot) > T_1$ em cada ponto, então

$$\| DR_x(E^s_\Sigma(x)) \| < \lambda \text{ e } \| DR_x(E^{cu}_\Sigma(x)) \| > \frac{1}{\lambda}.$$

Dada uma seção-transversal Σ, um número positivo ρ e um ponto $x \in \Sigma$, definimos o cone instável de largura ρ em x por

$$C^u_\rho(x) = \{v = v^s + v^u : v^s \in E^s_\Sigma(x), v^u \in E^{cu}_\Sigma(x) \quad \text{e} \parallel v^s \parallel \leq \rho \parallel v^u \parallel\}.$$

Seja $\rho > 0$ uma constante pequena. Na seguinte consequência da proposição anterior, assumimos que a vizinhança U foi escolhida suficientemente pequena, dependendo de ρ e do limitante dos ângulos entre o fluxo e seções-transversais.

Usaremos a notação $\Sigma(\Sigma')$ para denotar o conjunto $\{x \in \Sigma : R(x) \in \Sigma'\}$.

Corolário 3.1.4. *[[6], Corolário 6.17] Para qualquer $R : \Sigma \to \Sigma'$ como na proposição 3.1.3, com $t(\cdot) > T_1(\Sigma, \Sigma')$, e qualquer $x \in \Sigma$, temos $DR(x)(C^u_\rho(x)) \subset C^u_{\frac{\rho}{2}}(R(x))$ e $\parallel DR_x(v) \parallel \geq \frac{5}{6}\lambda^{-1} \cdot \parallel v \parallel$, para todo $v \in C^u_\rho(x)$.*

Este corolário está diretamente relacionado com a expansão das chamadas cu-curvas. Uma curva é a imagem do intervalo compacto $[a, b]$ por uma aplicação C^1. Usamos $l(\gamma)$ para denotar seu comprimento. Por uma *cu*-curva em Σ queremos dizer uma curva contida na seção-transversal Σ e cuja direção tangente está contida no cone instável: $T_z\gamma \subset C^u_\rho(z)$ para todo $z \in \gamma$. O corolário 3.1.4 assegura que a imagem de uma *cu*-curva pela aplicação de Poincaré entre seções-transversais é outra *cu*-curva.

O próximo lema diz que *o comprimento de cu-curvas ligando folhas estáveis de pontos próximos x, y* tem que ser limitado pela distância entre x e y. O lema será essencial para a prova do teorema A, onde $d_{cu} = 2$. No lema d é a distância intrínseca na superfície Σ de classe C^2, isto é, o comprimento da menor curva suave em Σ conectando dois pontos em Σ.

Lema 3.1.5. *[[6], Lema 6.18](Lema essencial) Dados Σ e ρ fixados suficientemente pequenos, existe uma constante $\kappa > 0$ tal que, para qualquer par de pontos $x, y \in \Sigma$ e qualquer cu-curva γ ligando x a algum ponto de $W^s(y, \Sigma)$, temos que $l(\gamma) \leq \kappa \cdot d(x, y)$.*

Prova do lema 3.1.5. Consideramos coordenadas Σ nas quais x corresponde à origem, $E^{cu}_\Sigma(x)$ corresponde ao eixo vertical e $E^s_\Sigma(x)$ corresponde ao eixo

horizontal; com estas coordenadas identificamos Σ com um subconjunto do seu espaço tangente x, dotado da métrica euclidiana. Em geral esta identificação não é uma isometria, mas a distorção é uniformemente limitada, o que é levado em conta através das constantes C_1 a C_4 nas estimativas a seguir.

A hipótese que γ é uma *cu*-curva implica que o vetor velocidade $\dot{\gamma}(s)$ está contido no cone de abertura $C_1 \cdot \rho$ centrado na direção tangente a $\gamma(s)$ para todos os valores do parâmetro s. Nas coordenadas descritas acima isto significa que podemos escrever $\gamma(s) = (\xi(s), s)$ para alguma função $\xi : [0, s_0] \to \mathcal{D}^s$, de classe C^1, onde $\mathcal{D}^s$ é um disco de dimensão d_s, com $\xi(0) = 0$, $\xi_i(s) > 0$. para todo $s > 0$ e $i = 1, ..., d_s$, com $\|\dot{\xi}\| \leq C_1\rho$.

Por outro lado, folhas estáveis são quase horizontais, isto é, fixando alguma folha estável passando por $y \in \Sigma$, podemos escrevê-la como o gráfico de uma função $\eta : \mathcal{D}^s \to \mathbb{R}$ de classe C^1 com $\eta(0) = d > 0$ e $\|\dot{\eta}\| \leq C_2\rho$, ou seja, $W^s(y, \Sigma) = \{(u, \eta(u)) : u \in \mathcal{D}^s\}$.

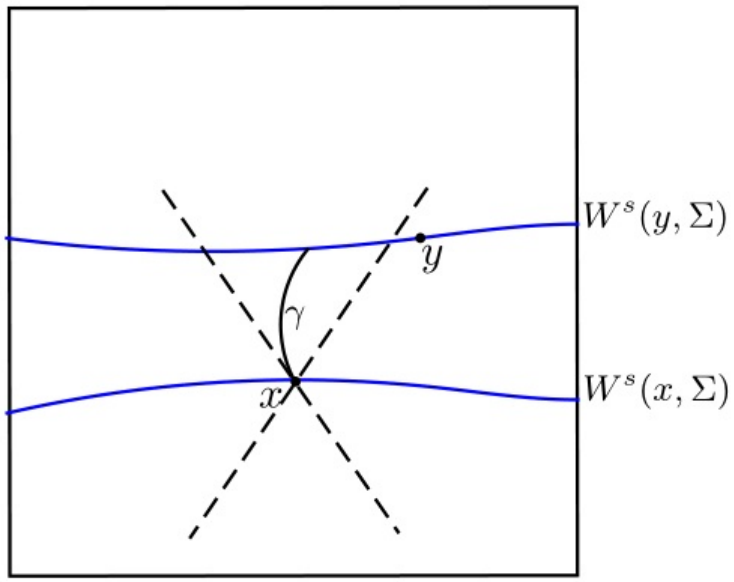

Figura 3.2: Uma cu-curva limitada pela distância dos pontos

Observe agora que, como γ é uma cu-curva ligando x a um ponto $z \in W^s(y, \Sigma)$, com $z = \gamma(s_0)$, para algum $s_0 > 0$, então $h = \eta \circ \xi : [0, s_0] \to \mathbb{R}$

satisfaz

$$|h'| \leq \delta = C_1 C_2 \rho^2 \text{ e } h(0) = (\eta \circ \xi)(0) = \eta(0) = d > 0,$$

com $\gamma(s_0) = (\xi(s_0), s_0) = (u_0, \eta(u_0))$. Logo,

$$h(s_0) = (\eta \circ \xi)(s_0) = \eta(u_0) = s_0.$$

Assim, $g(s) = s - h(s)$ satisfaz $g(0) = -d < 0 = g(s_0)$. Como $g' = 1 - h' > 1 - \delta > 0$ (se ρ é suficientemente pequeno), pelo Teorema do Valor Médio, temos que:

$$g(s_0) - g(0) = d = g'(t)s_0 > (1 - \delta)s_0,$$

logo $s_0 < d/(1 - \delta)$.

Temos uma interseção entre γ e a folha estável passando por y cuja distância a x ao longo de γ, isto é, $\ell(\gamma)$, é limitada por:

$$\begin{aligned}
\ell(\gamma) &= \int_0^{s_0} \|D\gamma'(t)\| dt \\
&= \int_0^{s_0} \sqrt{|D\xi(t)|^2 + 1} dt \\
&\leq s_0 \sqrt{1 + (C_1\rho)^2} \\
&< \frac{d\sqrt{1 + (C_1\rho)^2}}{1 - C_1 C_2 \rho^2} \\
&< d(1 + C_3\rho),
\end{aligned}$$

onde C_3 é uma constante positiva dependendo apenas de C_1 e C_2.

Finalmente y tem coordenadas $(u_1, \eta(u_1))$, com $\|u_1\| < 1$, e usando a Desigualdade do Valor Médio para η, obtemos

$$\|\eta(u_1) - d\| = \|\eta(u_1) - \eta(0)\| \leq \sup_{t \in \mathcal{D}^s} \|D\eta(t)\| \cdot \|u_1\| \leq C_2 \rho \|u_1\|,$$

logo $\eta(u_1) \geq d - C_2\rho\|u_1\|$.

Temos que ou $d > 2C_2\rho\|u_1\|$, ou $d \leq 2C_2\rho\|u_1\|$. Seja $C_4 > 0$ tal que $d(x, y) \geq C_4\|x - y\|$, onde $\|\cdot\|$ é a norma euclidiana.

Se $d \leq 2C_2\rho\|u_1\|$, então, como $\|u_1\| < \|x-y\|$, concluímos que

$$d(x,y) \geq C_4\|x-y\| > C_4\frac{d}{2C_2} \geq C_4\frac{\ell(\gamma)}{2C_2(1+C_3\rho)}.$$

Se $d > 2C_2\rho\|u_1\|$, então, como $\|\eta(u_1)\| < \|x-y\|$

$$\|x-y\| > \eta(u_1) \geq (d - C_2\rho\|u_1\|) = d\Big(1 - \frac{C_2\rho\|u_1\|}{d}\Big) > \frac{d}{2} \geq \frac{\ell(\gamma)}{2(1+C_3\rho)}.$$

Concluímos que

$$d(x,y) \geq C_4\frac{\ell(\gamma)}{2(1+C_3\rho)}.$$

Tomando $M = \max\{2, 2C_2\} \cdot (1 + C_3\rho)$, chegamos em

$$\ell(\gamma) < \kappa \cdot d(x,y),$$

onde $\kappa = M/C_4$. □

Observação 3.1.6. *Este lema é importante na prova do teorema principal para o caso $d_{cu} = 2$, mas não pode ser usado para $d_{cu} > 2$ e isto se deve à dimensão do cone centro-instável C^{cu}_{Σ} no espaço tangente $T\Sigma$. De fato, pensando no problema em $\mathbb{R}^d$ para o caso $d_{cu} = 2$, E^{cu}_{Σ} tem dimensão 1 e, assim, o cone centro-instável é unidimensional. Assim, em cada ponto $\gamma(s)$, fixada uma direção paralela a E^{cu}_{Σ}, o ângulo entre $\gamma'(s)$ e $\gamma'_{cu}(s)$ é muito pequeno. Esta direção paralela está contida em E^{cu}_{Σ}, podendo ser apenas unidimensional. Isto impede que tenhamos, por exemplo, uma cu-curva que espirale de forma arbitrária. Para $d_{cu} > 2$, não existe este tipo de limitação para uma cu-curva, pois, devido à dimensão do cone (agora maior que 1), a direção do vetor tangente de uma cu-curva pode variar arbitrariamente de ponto a ponto.*

3.1.2 Caixas de fluxo em torno de singularidades tipo-Lorenz

Usando a linearização dada pelo teorema de Hartman-Grobman[38] (não será necessário exigir a suavidade para aplicação que realiza a linearização), órbitas do fluxo numa vizinhança pequena U da singularidade

são soluções de uma equação linear, módulo uma mudança contínua ou suave de coordenadas, respectivamente.

Então, nós podemos escolher seções transversais contidas em U tais que

- $\Sigma^{o\pm}$ em pontos $y\pm$ em diferentes componentes de $W^u_{loc}(\sigma)\backslash\{\sigma\}$
- $\Sigma^{i\pm}$ em pontos $x^\pm$ em diferentes componentes de $W^s_{loc}(\sigma)\backslash\ W^{ss}_{loc}(\sigma)$

e aplicações de Poincaré com tempo de primeira entrada $R^\pm : \Sigma^{i\pm}\backslash l^\pm \to \Sigma^{o-} \cup \Sigma^{o+}$, onde $l^\pm = \Sigma^{i\pm} \cap W^s_{loc}(\sigma)$, satisfazendo

1. cada órbita no atrator passando por uma pequena vizinhança de σ intersecta alguma seção transversal de entrada $\Sigma^{i\pm}$;
2. $R^\pm$ leva cada componente conexa de $\Sigma^{i\pm}\backslash l^\pm$ difeomorficamente dentro de um seção transversal de saída diferente $\Sigma^{o\pm}$, preservando a folheação estável correspondente.

Veja que no caso tridimensional $W^u_{loc}(\sigma)$ tem dimensão 1 e a codimensão de $W^{ss}(\sigma)$ em $W^s(\sigma)$ é 1, e portanto $W^{ss}(\sigma)$ separa localmente $W^s(\sigma)$ em duas componentes.

Estas seções transversais podem ser escolhidas para serem planas em relação a algum sistema de coordenadas linearizante próximo a σ, isto é, para algum $\epsilon > 0$

$$\Sigma^{i\pm} = \{(x_1, x_2, \pm 1) : |x_1| \leq \epsilon, |x_2| \leq \epsilon\}$$

$$\Sigma^{o\pm} = \{(\pm 1, x_2, x_3) : |x_2| \leq \epsilon, |x_3| \leq \epsilon\},$$

onde o eixo x_1 corresponde a variedade instável próximo de σ, o eixo x_2 corresponde a variedade estável forte e o eixo x_3 à variedade estável fraca da singularidade que, por sua vez, corresponde á origem.

Observação 3.1.7. *Apesar de usarmos a vizinhança U_σ da singularidade tipo-Lorenz generalizada σ dada pelo teorema de Hartman-Grobman, não usamos as*

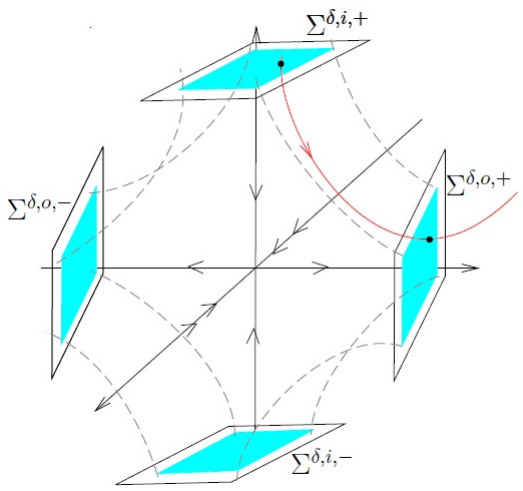

Figura 3.3: Vizinhança singular tridimensional

coordenadas linearizantes fornecidas pelo teorema em nosso trabalho. A importância desta vizinhança é, como foi mostrado acima, para a construção da cobertura de Λ. Além disso, podem existir sumidouros hiperbólicos-seccionais que não possuem singularidades tipo-Lorenz generalizada (veja o exemplo 2.3.3), mas, como já mencionado, assumimos que as singularidades são tipo-Lorenz.

3.1.3 Cobertura de Λ por caixas de fluxo

Para cada ponto regular $x \in \Lambda$, podemos tomar uma seção-transversal Σ_x ao campo X, contendo x em seu interior. Consideramos o conjunto $\Sigma_x^{\delta_x} := \{y \in \Sigma : d(y, \partial\Sigma_x) > \delta_x\}$, para algum $\delta_x > 0$. Escolha um $\epsilon_0 > 0$, com $\epsilon_0 < 1$, e considere a caixa de fluxo

$$\Sigma_x^{\delta_x}(\epsilon_0) := \{X_s(y) : y \in int(\Sigma_x^{\delta_x}), s \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)\}$$

para cada ponto regular x.

Próximo a cada singularidade σ_k de Λ existe uma vizinhança U_{σ_k}, descrita na seção anterior, contendo σ_k em seu interior. Denotemos por $U_{\sigma_k}^{\delta}$ esta vizinhança com as subseções $\Sigma_\sigma^{\delta,*,\pm}$, $* = i, o$. Seja $Sing(\Lambda)$ o conjunto finito de singularidades contidas em Λ, que são todas do tipo-Lorenz.

Denotamos por $\mathcal{S}^\delta$ a família de todas as subseções $\Sigma_\sigma^{\delta,*,\pm}$ próximas a singularidades de Λ.

Agora, considere o conjunto aberto $V_s = \bigcup_{\sigma \in Sing(\Lambda)} U_\sigma$ e o subconjunto compacto $\Lambda_1 := \Lambda \backslash V_s$ de Λ. Para qualquer $x \in \Lambda_1$ sabemos que x é um ponto regular. A coleção $\{\Sigma_x^{\delta_x}(\epsilon_0) : x \in \Lambda_1\}$ é uma cobertura aberta do compacto Λ_1. Fixamos uma subcobertura finita $\mathcal{C}_r = \{\Sigma_{x_1}^{\delta_{x_1}}(\epsilon_0), ..., \Sigma_{x_k}^{\delta_{x_k}}(\epsilon_0)\}$. Tomamos $\delta = \min\{\delta_{x_1}, ..., \delta_{x_k}\}$ para construir as subseções Σ^δ tais que $\{\Sigma_{x_1}^\delta(\epsilon_0), ..., \Sigma_{x_k}^\delta(\epsilon_0)\}$ ainda é uma cobertura finita de Λ_1 (veja a figura 3.4) e é esta que usaremos a partir de agora denotando-a também por $\mathcal{C}_r$.

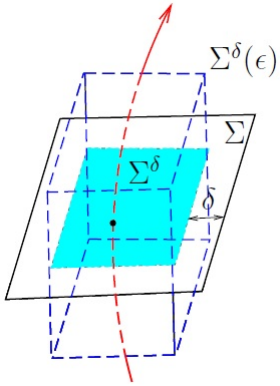

Figura 3.4: Vizinhança regular tridimensional

Denominamos $\Sigma_x^\delta(\epsilon_0)$ de **vizinhança regular** de x e $U_{\sigma_k}^\delta$, vizinhança com as subseções $\Sigma_\sigma^{\delta,*,\pm}$, $* = i, o$, de **vizinhança singular** de σ_k. Consideramos a família finita de seções transversais $\Theta^\delta = \{\Sigma_{x_1}^\delta, ..., \Sigma_{x_k}^\delta\}$. Agora, seja $T_1 = \max\{T_1(\Sigma, \Sigma'), \Sigma, \Sigma' \in \Theta\}$. Diminuindo $U_{\sigma_k}^\delta$, se necessário, podemos escolher as vizinhanças singulares com o tempo de saída em cada vizinhança maior que T_1:

O menor tempo necessário para uma órbita positiva de um ponto em $\Sigma^{\delta,i,\pm}$ alcançar $\Sigma^{\delta,o,\pm}$ é maior que T_1.

Unimos $\mathcal{C}_r$ a V_s e temos uma cobertura $\mathcal{C}$ de todo Λ. No que segue, consideramos a família finita de seções transversais $\Theta^\delta = \{\Sigma_{x_1}^\delta, ..., \Sigma_{x_k}^\delta\}$. Denotaremos $\Xi^\delta = \Theta^\delta \cup \mathcal{S}^\delta$ como a família de todas as **subseções-transversais** escolhidas nos passos acima e Ξ a respectiva família de **seções-transversais**.

Observação 3.1.8. *(Expansividade na vizinhança U_0 de Λ) Podemos assumir que a vizinhança U_0 está contida em*

$$\mathcal{C} = \Big(\bigcup_{i=1}^{k} \Sigma_{x_i}^{\delta}(\epsilon_0)\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{j=1,\dots,l} U_{\sigma_j}^{\delta}\Big).$$

De fato, temos que região U_0 é positivamente invariante, isto é, $X_t(U_0) \subset U_0$ e $\Lambda = \bigcap_{t>0} X_t(U_0)$. Assim, haverá um $t_0 > 0$ tal que $X_t(U_0) \subset \mathcal{C}$. Isto nos permitirá definir R também em U_0 e então a ***expansividade pode ser provada para*** *U_0.*

Após a construção dessa cobertura, podemos reformular o lema 3.1.5. Neste lema, a constante $\kappa = \kappa(\Sigma)$ depende da seção Σ considerada. Como temos um número finito de seções em Ξ, podemos tomar $\kappa = \max\{\kappa(\Sigma) : \Sigma \in \Xi\}$. Com isso, temos a seguinte reformulação do lema 3.1.5 que será essencial na prova do teorema A.

Lema 3.1.9. *(Lema essencial reformulado) Vamos assumir que ρ tem sido fixado suficientemente pequeno. Então existe uma constante κ tal que, para toda seção $\Sigma \in \Xi$, qualquer par de pontos $x, y \in \Sigma$ e qualquer cu-curva γ ligando x a algum ponto de $W^s(y, \Sigma)$, nós temos que $l(\gamma) \leq \kappa \cdot d(x, y)$*

3.2 A aplicação de retorno de Poincaré global

Denotamos por $T_2 > 0$ o limitante superior para o tempo que qualquer ponto $z \in \Sigma_{x_i}^{\delta}(\epsilon_0)$, $i = 1, \dots, k$, deixe esta vizinhança tubular sobre a ação do fluxo. Seja $T_3 > max\{T_1, T_2\}$ e considere o valor de $T > T_3$ tal que

$$diam(X_t(W_x^s(\Sigma))) \leq c\lambda^t diam(W_z^s(\Sigma)) < \tfrac{\delta}{100}, \text{ para toda } \Sigma \in \Xi, \text{ com } t > T.$$

Defina $\Gamma_0 = \{z \in \Xi : X_{T+1}(z) \in \bigcup_{\sigma \in Sing(\Lambda) \cap U_0} (W_{loc}^s(\sigma) \backslash \{\sigma\})\}$ e $\Xi' = \Xi \backslash \Gamma_0$. Se $z \in \Xi'$, então $X_{T+1}(z)$ não pode permanecer na vizinhança singular $U_{\sigma_k}^{\delta}$ e então $X_{T+1}(z) \in \Sigma_i^{\delta}(\epsilon_0)$, para alguma vizinhança regular $\Sigma_i^{\delta}(\epsilon_0)$. Já que $\epsilon_0 < 1$, então existe um $t > T$ tal que $X_t(z) \in \Sigma_i^{\delta}$.

Definição 3.2.1 (Aplicação global de primeiro retorno)**.** *Para cada,* $z \in U_0$ *definimos a aplicação global de Poincaré* C^r $(r \geq 1)$ *por pedaços* $R : \Xi' \to \Xi^\delta$, $R(z) = X_{\tau(z)}(z)$, *onde* $\tau(w) = \inf\{t > T : X_t(w) \in \Xi^\delta\}$. *Além disso,* $\tau : \Xi' \to [T, +\infty)$ *é também de classe* C^r *por pedaços.*

Veja na figura 3.5 uma ideia de como se constrói esta aplicação.

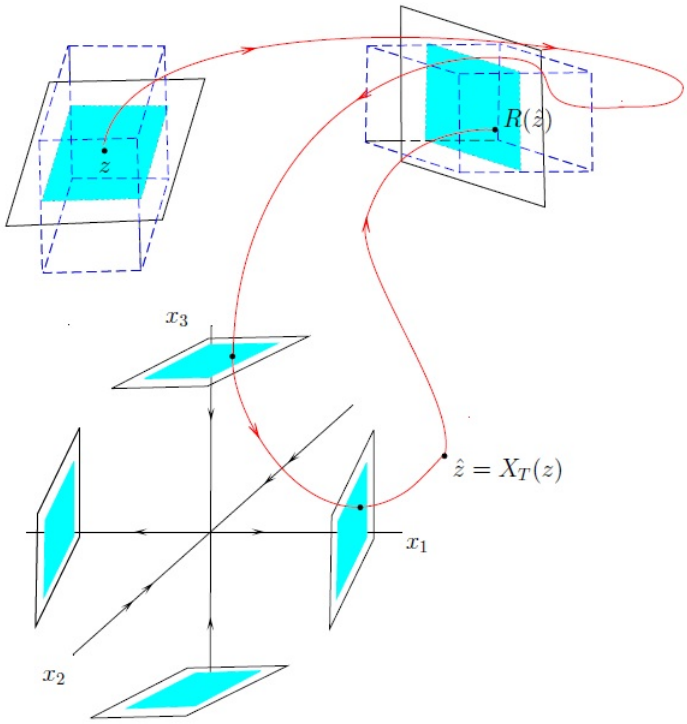

Figura 3.5: A aplicação global de Poincaré

Lema 3.2.2 ([2], Lema 3.2)**.** *Se* $\Sigma_y \cap \Gamma_0 = \emptyset$, *então* $\tau_{\Sigma_y} \leq T + 2$. *Em geral, existe* $C > 0$ *tal que* $\tau(x) \leq -C \log d(x, \Gamma_0)$ *para todo* $x \in \Xi'$. *Em particular,* $\tau(x) \to +\infty$, *quando* $d(x, \Gamma_0) \to 0$.

Definimos a folheação topológica $\mathcal{F}^s(\Xi) = \bigcup_{j=1}^{l} \mathcal{F}^s(\Sigma_{x_i})$ de Ξ com folhas $W^s(x, \Xi)$ passando por cada $x \in \Xi$. Da contração uniforme das folhas estáveis juntamente com a definição de $\mathcal{F}^s(\Xi)$ e a invariância de $\mathcal{F}^s$ pelo fluxo, obtemos resultado análogo a proposição 3.2.5:

Proposição 3.2.3 ([2], Proposição 3.4)**.** *Para $T > T_3$ grande o suficiente, $R(W^s_x(\Xi)) \subset W^s_{Rx}(\Xi)$ para todo $x \in \Xi'$.*

Observação 3.2.4. *Observe que a forma como construímos a cobertura $\mathcal{C}$ e, consequentemente, a aplicação global R, nos fornece uma propriedade específica para R:* ***se existe um ponto z no domínio de R cuja órbita passa por uma vizinhança singular, então $R(z)$ está em uma das seções de saída $\Sigma^{\delta,o,\pm}$.*** *De fato, por construção, ao passar por uma vizinhança singular, o tempo que a órbita de z leva para chegar a $\Sigma^{\delta,i,\pm}$ é maior ou igual ao $T > 0$ especificado na definição da aplicação global de Poincaré. Assim, o ponto $X_T(z)$ deve estar em algum região dentro da vizinhança singular e ao atingir $\Sigma^{\delta,o,\pm}$, definimos $R(z)$. Esta propriedade nos permite ter maior controle sobre a visitação da órbita de um ponto às vizinhanças singulares.*

Por construção τ não está definida em pontos $w \in U_0$ que não retornam a nenhuma subseção de Ξ^δ, o que é somente possível se $X_T(w) \in W^s_{loc}(\sigma)$ para alguma $\sigma \in Sing(\Lambda)$, já que caixas de fluxos pelas seções de Ξ^δ fornecem uma cobertura aberta para Λ.

Seja $dom(R)_\delta = \{x \in \Xi^\delta : R(x) \in \Xi^\delta\}$. Pela escolha de T, temos que, para cada $x \in \Xi^\delta$, existem seções $\Sigma_1, \Sigma_2 \in \Xi$ tais que

$$R(W^s(x, \Sigma_1)) \subset \Sigma_2^{\delta/2}.$$

Isto significa que todos os pontos $W^s(x, \Sigma_1)$ (e não apenas de $W^s(x, \Sigma_1) \cap \Sigma_1^\delta$) retornam a $\Sigma_2^{\delta/2}$. Denotamos então $dom(R) = \{x \in \Xi : R(x) \in \Xi\}$. Veja que, para todo $x \in dom(R)$, $d(x, \partial^s\Sigma) \geq \delta$. Com isso, provamos que:

Proposição 3.2.5. *[[3], Proposição 6.6] Existe uma cobertura de Λ por caixas de fluxo de seções-transversais e uma aplicação de retorno de Poincaré $R : dom(R) \to \Sigma$ tal que, para todo $x \in dom(R)$, existem $\Sigma, \tilde{\Sigma}$ tais que $R(W^s(x, \Sigma)) \subset \tilde{\Sigma}^{\delta/2}$ e então $R(W^s(x, \Sigma)) \subset int(W^s(R(x), \tilde{\Sigma}))$.*

Observação 3.2.6. *Quando existirem $\Sigma, \tilde{\Sigma}$ tais que $x \in \Sigma$ e $R(x) \in \tilde{\Sigma}$, escreveremos $\Sigma(\tilde{\Sigma}) = \{x \in \Sigma : R(x) \in \tilde{\Sigma}\}$.*

Lema 3.2.7. *[[6],Lema 6.29] O conjunto de pontos de descontinuidade de R juntamente com pontos onde R não está definida em $\Xi^\delta \backslash \partial^s \Xi^\delta$ está contido no conjunto de pontos $x \in \Xi^\delta \backslash \partial^s \Xi^\delta$ tais que*

1. *ou $R(x)$ está definida e pertence a $\partial^s \Xi^\delta$;*
2. *ou existe algum $0 < t \leq T$ tal que $X_t(x) \in W^s_{loc}(\sigma)$ para algum $\sigma \in Sing(\Lambda)$*

Além disso, este conjunto está contido em um número finito de folhas estáveis de pontos das subseções-transversais de $\Sigma^\delta \in \Xi^\delta$.

Observação 3.2.8. *A cobertura $\mathcal{C} = \{\Sigma^\delta_{x_i}(T_2), U^\delta_{\sigma_j}, i = 1, .., k \text{ e } j = 1, ..., l\}$ dada na observação 3.1.8 foi construída dependendo de um $\delta > 0$ considerado. Podemos construir uma outra cobertura $\overline{\mathcal{C}} = \{\Sigma^{\overline{T_2}}_{x_i}(\overline{\delta}), U^{\overline{\delta}}_{\sigma_j}, i = 1, .., k \text{ e } j = 1, ..., l\}$ a partir de um $0 < \overline{\delta} < \delta$. Esta cobertura nos fornece outra aplicação global de Poincaré que chamaremos de $\overline{R}$. Uma vez que $\overline{\delta} < \delta$, temos que $\overline{R}$ estende R ás duas regiões, denotadas por $F(\delta\overline{\delta}-)$ e $F(\delta\overline{\delta}+)$, de pontos delimitados pelas fronteiras de $\Sigma^{\overline{\delta}}$ e Σ^δ. No caso de uma variedade tridimensional $F(\delta\overline{\delta}-)$ e $F(\delta\overline{\delta}+)$ representam faixas como ilustra a figura 3.6.*

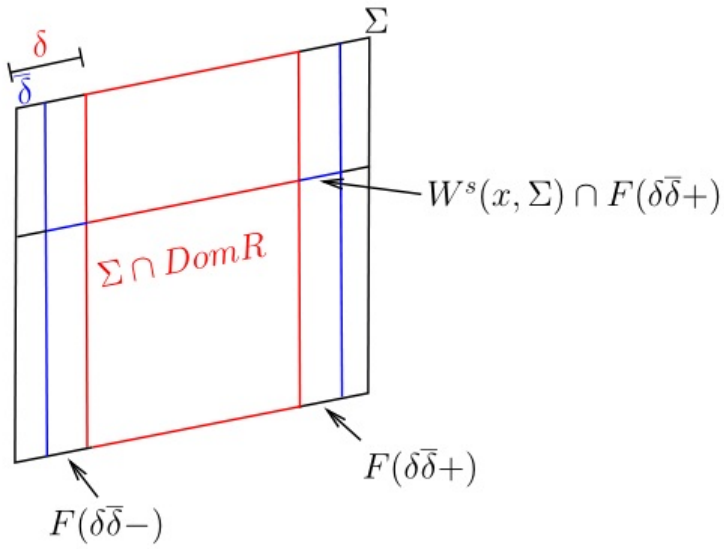

Figura 3.6: Extensão de R ás faixas laterais em dimensão 3

Estas faixas aparecem em quantidade finita, já que estamos usando um número finito de seções.

Definição 3.2.9. ***(Domínio de suavidade)*** *Dizemos que uma subfaixa F_Σ de Σ é um domínio de suavidade de R se o fluxo entre F_Σ e $R(F_\Sigma)$ não atravessa vizinhanças singulares e existe um difeomorfismo de F_Σ em $R(F_\Sigma)$. Escolhemos em cada Σ, a máxima subfaixa F_Σ compacta que seja um domínio de suavidade..*

Observação 3.2.10. *A existência de domínio de suavidade para R implica que o tempo de viagem é limitado e as derivadas de R em F_Σ são limitadas. Além disso, por $R|_{F_\Sigma}$ ser um difeomorfismo, existem constantes $c, d > 0$ uniformes (por causa da compacidade de F_Σ) para todo $z \in F_\Sigma$, tais que $R(B(z,c)) \supset B(Rz,d)$, com $B(z,c) \subset F_\Sigma$.*

Seja Γ o conjunto finito de folhas estáveis em pontos de Ξ^δ fornecidas pelo lema 3.2.7 juntamente com $\partial^s\Xi^\delta$. Então o complemento $\Xi^\delta \backslash \Gamma$ deste conjunto é formado por finitas faixas abertas em cada Σ, cujas fronteiras estáveis são formadas por folhas de Γ. Assim, as fronteiras destas faixas são formadas por folhas estáveis caracterizadas pelo lema acima. Vamos denotar estas folhas por $L_1, L_2, ..., L_l$ e chamá-las de linha singular, se seus pontos satisfazem o item 2, ou linha não-singular, se seus pontos satisfazem o item 1. No que segue, a faixa cuja fronteira estável é formada por W_i e W_{i+1} será denotada por Ω_i.

3.3 A prova da expansividade para o caso $d_{cu} = 2$

Como observado em 3.1.8, provaremos a expansividade para a região U_0 que contêm Λ. Suponha por contradição que o fluxo não é expansivo em U_0, o aberto contendo o sumidouro hiperbólico-singular Λ, isto é, existe $\epsilon > 0$ tal que $\forall \delta > 0$, é possível encontrar $x, y \in U_0$ e uma função $h \in S(\mathbb{R})$ tais que:

$$dist(X_t(x), X_{h(t)}(y)) \leq \delta, \forall t \in \mathbb{R}, \ mas \ X_{h(t)}(y) \notin X_{[t-\epsilon,t+\epsilon]}(x), \forall t \in \mathbb{R}$$

Tome então $\delta_n \to 0$, $x_n, y_n \in U_0$ e $h_n \in S(\mathbb{R})$:

$$d(X_t(x_n), X_{h_n(t)}(y_n)) \leq \delta_n, \forall t \in \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

mas

$$X_{h_n(t)}(y_n) \notin X_{[t-\epsilon,t+\epsilon]}(x_n), \forall t \in \mathbb{R} \tag{3.2}$$

Observação 3.3.1. *(**A sequência** δ_n) Veja que a existência de uma sequência $\delta_n \to 0$, nos permite escolher, sempre que necessário, para qualquer $\delta > 0$, n suficientemente grande tal que $dist(X_t(x_n), X_{h_n(t)}(y_n)) \leq \delta_n \leq \delta$. Vamos,inicialmente, tomar n tal que $\delta_n < D := max\{d(\Sigma_\sigma^{o,-}, \Sigma_\sigma^{o,+}), \sigma \in Sing(\Lambda)\}$.*

Agora, afirmamos que:

Lema 3.3.2. *Existe um ponto regular $z \in \Lambda$ que é acumulado pela sequência de conjuntos $\omega(x_n)$.*

Demonstração. De fato, veja que $\omega(x_n) \neq \emptyset$, para todo n, e $\omega(x_n) \subset \Lambda$, pois U_0 é um sumidouro.Tome, para cada $n \in \mathbb{N}$, $z_n \in \omega(x_n)$, por compacidade (passando a uma subsequência, se necessário), temos que $(z_n)_n$ converge a um certo $z \in \Lambda$. Se z for um ponto regular, acabamos de provar a afirmação feita. Caso z seja uma singularidade σ, então, usamos a dinâmica do fluxo nas proximidades desta. Vejamos:

Cada singularidade de um sumidouro hiperbólico-seccional com $d_{cu} = 2$, acumulada por órbitas regulares, tem que ser tipo-Lorenz (generalizada) como visto no lema **??**. Assim, como z_n tende a σ, a partir de certo n_0 teremos que a distância entre os conjuntos $\omega(x_n)$ e a interseção da variedade instável local de σ com uma seção de saída da correspondente vizinhança singular tende a zero, para $n \geq n_0$. Agora, basta tomar z', ponto regular, nesta interseção tal que $(z'_n)_n \to z'$, $n \to \infty$, com $z'_n \in \omega(x_n)$. □

Já que $\mathcal{C}$ é uma cobertura de Λ e $\omega(x) \subset \Lambda$, podemos assumir, sem perda de generalidade que z está no interior de alguma seção $\Sigma^\delta \in \Xi^\delta$ uma subseção-transversal contendo z em seu interior. Isto garante que

$d(z, \partial^s\Sigma) > \delta$. Nós podemos escolher uma vizinhança V de z contida em $\Sigma^\delta(\epsilon_0)$ para qual existe um n_0 tal que $z_n \in V$, $n \geq n_0$. Já que órbitas x_n retornam infinitas vezes a uma vizinhança de z_n, temos que, para n suficientemente grande, a órbita de x_n visita V infinitas vezes e cada vez mais perto de z_n que antes. Por isso, podemos escolher um δ_n suficientemente pequeno tal que a órbita de y_n também visita V infinitas vezes. Seja t_n o tempo correspondente a primeira interseção da órbita de x_n com Σ^δ. Substituindo x_n,y_n, t e h_n por $x^{(n)} = X_{t_n}(x_n)$, $y^{(n)} = X_{h_n(t_n)}(y_n)$, $\tilde{t} = t - t_n$ e $\tilde{h}_n(\tilde{t}) = h_n(\tilde{t} + t_n) - h_n(t_n)$ ainda temos que

$$d(X_{\tilde{t}}(x^{(n)}), X_{\tilde{h}_n(\tilde{t})}(y^{(n)})) \leq \delta_n \tag{3.3}$$

e também

$$X_{\tilde{h}_n(\tilde{t})}(y^{(n)}) \notin X_{[\tilde{t}-\epsilon,\tilde{t}+\epsilon]}(x^{(n)}) \tag{3.4}$$

Além disso, pela construção da vizinhança, concluímos:

Proposição 3.3.3. *[Theorem 7.13, [6]] Existe $K > 0$, tal que, para cada $n \geq 0$, existem sequências $(\tau_{n,j})$, com $\tau_{n,0} = 0$, e $(\upsilon_{n,j})$ tais que:*

- $x_{n,j} = X_{\tau_{n,j}}(x^{(n)}) \in \Sigma^\delta$
- $\tau_{n,j} - \tau_{n,j-1} > \max\{T_1, T_2\}$
- $y_{n,j} = X_{\upsilon_{n,j}}(y) \in \Sigma^\delta$ *para todo* $j \geq 0$, *onde* $\upsilon_{n,j} = h(\tau_{n,j}) + \epsilon_{n,j}$
- $|\upsilon_{n,j} - h(\tau_{n,j})| < K\delta_n$
- $d(x_{n,j}, y_{n,j}) < K\delta_n$

Aqui $K > 0$ é uma constante que depende somente do ângulo entre Σ e a direção do fluxo (conforme figura 3.7).

Escrevemos $x = x^{(n)}$ e $y = y^{(n)}$. Veja que nunca estão em alguma $W^s_{loc}(\sigma)$, $\sigma \in Sing(\Lambda)$,para qualquer $s, t \in \mathbb{R}$, já que isto implicaria que as órbitas

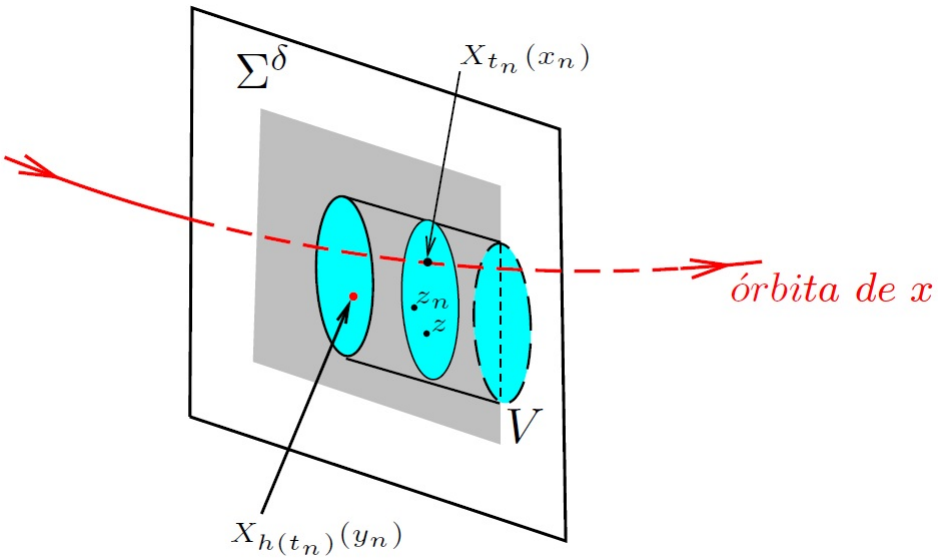

Figura 3.7: A vizinhança V

destes pontos não voltam a Σ^δ. Assim, $R^j(x)$ e $R^j(y)$ estão definidos para todo $j \geq 0$. Denotemos por $x_j = R^j(x)$ e $y_j = R^j(y)$, com $j \geq 0$.

Observação 3.3.4. *Sempre que $R(x_j) = X_{\tau(x_j)}(x_j)$ e $R(y_j) = X_{\tau(y_j)}(y_j)$ pertencem a mesma Σ, podemos fazer uma estimativa como na proposição 3.3.3 e garantir que $\tau(y_j) = \tau(x_j) + \epsilon_j$ e então $d(R(x_j), R(y_j)) < K(\Sigma)\delta_n$, onde $K(\Sigma)$ é uma constante que depende somente do ângulo entre Σ e a direção do fluxo. Como existe um número finito de seções em Ξ podemos tomar uma constante uniforme K tal que $d(R(x_j), R(y_j)) < K\delta_n$ para toda seção Σ tal que $R(x_j)$,$R(y_j) \in \Sigma$.*

Observação 3.3.5. *Se x_j e y_j não estão em um mesmo domínio de suavidade de Σ, podemos supor que x_j e y_j estão em domínios adjacentes. Isto é sempre possível pois podemos tomar $K\delta_n < m := min\{d(\Sigma_j, \Sigma_k)$, onde Σ_j, Σ_k são domínios não-adjacentes$\}$. Assim, caso $x_j \in \Sigma_j$ e $y_j \in \Sigma_k$, com Σ_j e Σ_k não-adjacentes, então $d(x_j, y_j) > m > K\delta_n$, contradizendo a construção destes pontos.*

Parte essencial da prova é mostrar que

Afirmação 3.3.6. $y_j \in W^s(x_j, \Sigma)$.

Faremos isso na subseção 3.3.2. Por ora, supondo que $y_j \in W^s(x_j, \Sigma)$, concluiremos a prova da expansividade.

3.3.1 Conclusão assumindo a afirmação 3.3.6

Assumindo a afirmação acima, fixemos $\epsilon > 0$ dado pela negação da expansividade. Para concluir a prova, uma vez que $y_j \in W^s(x_j, \Sigma)$, vamos ver agora que

$$X_{h(\tau_j)}(y) \in W^{ss}_{\epsilon}(X_{[\tau_j-\epsilon,\tau_j+\epsilon]}(x)).$$

Já que a variedade forte-estável é localmente invariante pelo fluxo e $X_{h(\tau_j)}(y)$ está na órbita de $y_j = X_{v_j}(y)$, então $X_{h(\tau_j)}(y) \in W^s(x_j) = W^s(X_{\tau_j}(x))$. Nós temos que $|v_j - h(\tau_j)| < K\delta_n$ e, pela observação 3.1.2, existe um pequeno $\epsilon_1 > 0$ tal que

$$R_{\Sigma}(y_j) = X_t(y_j) \in W^{ss}_{\epsilon}(x_j) \text{ com } |t| < \epsilon_1.$$

Portanto o segmento de órbita $\mathcal{O}_y = X_{[v_j-K\cdot\delta_n-\epsilon_1, v_j+K\cdot\delta_n+\epsilon_1]}(y)$ contém $X_{h(\tau_j)}(y)$. Notamos que isto vale para todo valor de $\delta_n > 0$ suficientemente pequeno fixado. Veja a figura 3.8.

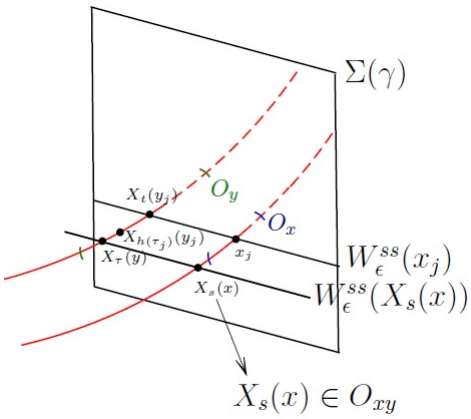

Figura 3.8: Vizinhanças na órbita

Vamos considerar o segmento de órbita $\mathcal{O}_x = X_{[\tau_j-\epsilon,\tau_j+\epsilon]}(x)$ e o segmento

de órbita de x cuja variedade forte-estável intersecta $\mathcal{O}_y$, isto é,

$$\mathcal{O}_{xy} = \{X_s(x) : \exists \tau \in [v_j - K \cdot \delta_n - t, v_j + K \cdot \delta_n + t] \quad \text{tal que} X_\tau(y) \in W^{ss}_\epsilon(X_s(x))\}.$$

Já que $y_j \in W^s(x_j)$ concluímos que $\mathcal{O}_{xy}$ é uma vizinhança de $x_j = X_{\tau_j}(x)$ que pode ser feita tão pequena quanto queiramos tomando δ_n e ϵ_1 pequenos o suficiente. Em particular nós podemos assegurar que $\mathcal{O}_{xy} \subset \mathcal{O}_x$ e então $X_{h(\tau_j)}(y) \in W^{ss}_\epsilon(X_{[\tau_j-\epsilon,\tau_j+\epsilon]}(x))$, como queríamos.

Usaremos agora o seguinte lema. Em [7], este lema é usado no contexto é que Λ é transitivo, no entanto, na ausência de transitividade, o lema ainda é válido, conforme a demonstração a seguir.

Lema 3.3.7 (Lema 3.2,[7]). *(Controle de ângulos) Existe um $\rho > 0$ pequeno e $c > 0$, dependendo somente do fluxo, tal que se z_1, z_2, z_3 são pontos em Λ satisfazendo $z_3 \in X_{[-\rho,\rho]}(z_2)$ e $z_2 \in W^{ss}_\rho(z_1)$, então*

$$d(z_1, z_3) \geq c \cdot max\{d(z_1, z_2), d(z_2, z_3)\}.$$

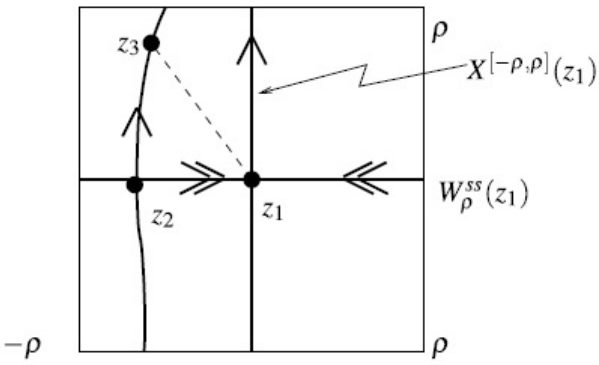

Figura 3.9: Distâncias numa vizinhança

Demonstração. Esta desigualdade é uma consequência direta do fato de que o ângulo entre E^{ss} e a direção do fluxo é afastada de zero, visto que a direção do fluxo está contido em E^{cu}. De fato, considere um $\rho > 0$ pequeno tal que $X_{[-\rho,\rho]}(W^{ss}_\rho(z_1))$ seja um disco de classe C^1. Assim, a métrica Riemanniana

é uniformemente perto da Euclidiana, podendo assim escolher $[-\rho, \rho]$ tal que z_1 corresponda a origem, $W^{ss}(z_1)$ corresponda ao segmento $\{0\} \times [-\rho, \rho]$ e $X_{[-\rho,\rho]}(z_1)$ corresponda a $[-\rho, \rho] \times \{0\}$. Assim, o ângulo entre $X_{[-\rho,\rho]}(z_2)$ e o segmento vertical é limitado por baixo e longe de zero e a constante c é obtida por argumentos da métrica Euclidiana padrão.

□

Tomamos $\delta_n < c\rho$. Temos que $X_{h(\tau)}(y) \in W^{ss}_{\epsilon}(X_{[\tau-\epsilon,\tau+\epsilon]}(x))$. Em outras palavras, existe $|\omega| < \epsilon$ tal que $X_{h(\tau)}(y) \in W^{ss}_{\epsilon}(X_{\tau+\omega}(x))$. A Propriedade (3.4) implica que $X_{h(\tau)}(y) \neq X_{\tau+\omega}(x)$. Já que variedades fortes-estáveis são expandidas para o passado, existe $\theta > 0$ máximo tal que

$$X_{h(\tau)-t}(y) \in W^{ss}_{\rho}(X_{\tau+\omega-t}(x)) \quad \text{e} \quad X_{h(\tau+\omega-t)}(y) \in X_{[-\rho,\rho]}(X_{h(\tau)-t}(y))$$

para todo $0 \leq t \leq \theta$, veja figura 3.10.

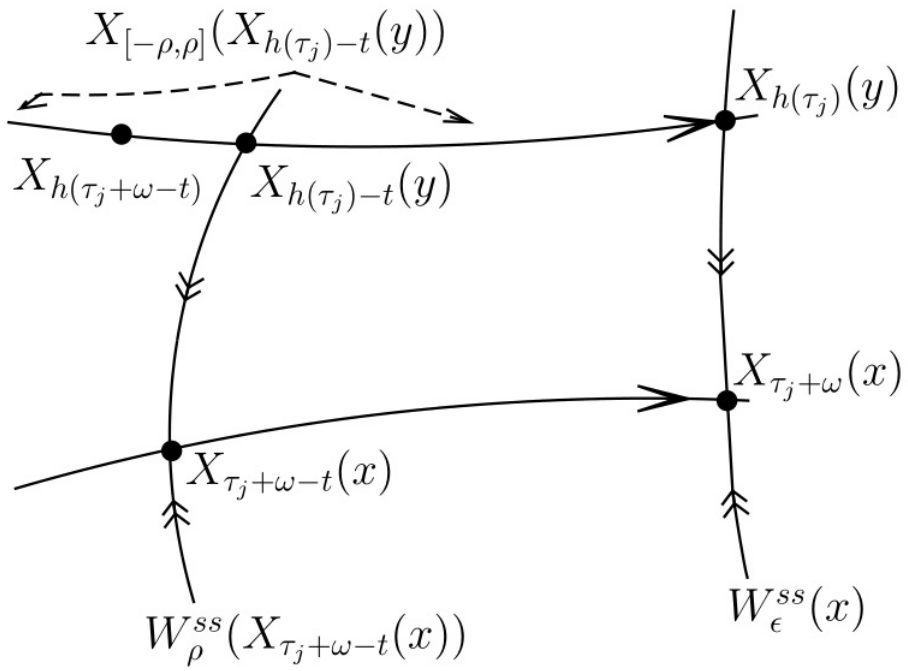

Figura 3.10: Esboço das posições relativas da variedade estável-forte e das órbitas

Para $t = \theta$, o máximo que pode acontecer é:

$$dist(X_{h(\tau)-t}(y), X_{\tau+\omega-t}(x)) = \rho \text{ ou } dist(X_{h(\tau+\omega-t)}(y), X_{h(\tau)-t}(y)) = \rho$$

Usando o lema 3.3.7, com $z_1 = X_{\tau+\omega-t}(x), z_2 = X_{h(\tau)-t}(y)$ e $z_3 = X_{h(\tau+\omega-t)}(y)$, concluímos que $dist(X_{\tau+\omega-t}(x), X_{h(\tau+\omega-t)}(y)) \geq c\rho > \delta_n$, uma contradição já que mostramos para $h = \tilde{h}_n$ que $dist(X_t(x), X_{h(t)}(y)) \leq \delta_n$.

Esta contradição finaliza a prova e, portanto, o fluxo é expansivo no aberto U_0 contendo Λ. Segue da uniformidade da escolha das seções e dos domínios de suavidade por pequenas perturbações do campo ou fluxo que $X|_{U_0}$ é C^1-robustamente expansivo, isto é, a expansividade vale para todo campo Y em uma C^1 vizinhança de X.

Resta agora provar que $y_j \in W^s(x_j, \Sigma)$.

3.3.2 Prova da afirmação 3.3.6

Queremos mostrar que $y_j \in W^s(x_j, \Sigma)$. Para isso, provaremos que x_j e y_j estão sempre na mesma seção estendida a fim de obtermos, usando o corolário 4.4.1 sobre expansão de distâncias, que a distância entre $W^s(y_j, \Sigma)$ e $W^s(x_j, \Sigma)$ é expandida por um fator maior que $\frac{5}{6}\lambda^{-1} > 1$. Como isso valerá para todo $j \geq 0$, inevitavelmente, por indução em $j > 0$, teremos $d(W^s(y_j, \Sigma), W^s(x_j, \Sigma)) > K\delta_n$, para algum j, contradizendo o fato de que $d(W^s(y_j, \Sigma), W^s(x_j, \Sigma)) \leq d(y_j, x_j) \leq K\delta_n$.

Mas, se para algum $j \geq 0$, x_j e y_j estão em seções diferentes, digamos Σ_1 e Σ_2, respectivamente? Vejamos como resolver este problema.

Caso x_j e y_j estejam em faixas adjacentes e, portanto, $R(x_j)$ e $R(y_j)$ estejam em faixas distintas.

Se isto acontece, então a linha que separa x_j e y_j é ou uma linha singular ou uma linha não-singular. Se fosse uma linha singular, então $R(x_j)$ e $R(y_j)$ estariam em diferentes componentes conexas de $\Sigma^{i,\pm} \backslash l^{\pm}$ e isto implicaria que a dinâmica do fluxo na vizinhança da singularidade, conforme figura 3.11, separaria os dois pontos a uma distância maior que a distância D entre

as seções $\Sigma_\sigma^{o,+}$ e $\Sigma_\sigma^{o,-}$, isto é, existiria r tal que $d(X_r(x^{(n)}), X_{h(r)}(y^{(n)}) > D > \delta_n$, uma contradição pela observação 3.3.1.

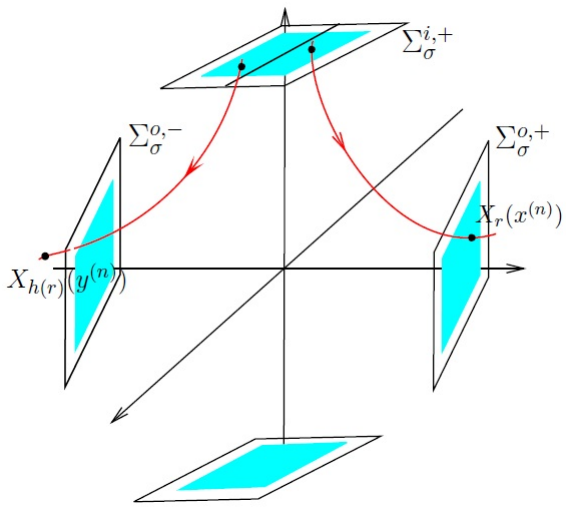

Figura 3.11: A dinâmica do fluxo separa os pontos

Portanto, **necessariamente** L **tem que ser uma linha não-singular**. Isto implica, por causa da descontinuidade, que $R(x_j)$ e $R(y_j)$ estão em subseções diferentes, digamos Σ_1 e Σ_2 respectivamente, veja a figura 3.12. Denote por $\Sigma(y_j)$ a faixa de pontos entre a linha L e $W^s(y_j, \Sigma)$. Digamos que $\tau(x_j) > \tau(y_j)$(o outro caso é análogo). Então $\Sigma(y_j)$ é levada por R na faixa $\Sigma_2(R(y_j))$ de pontos entre a linha tracejada e $W^s(R(y_j), \Sigma_2)$ em Σ_2. Enquanto isso, R leva $\Sigma(x_j)$, a faixa de pontos entre a linha L e $W^s(x_j, \Sigma)$, na faixa $\Sigma_1(R(x_j))$ em Σ_1,como mostra a figura 3.12.

Temos que $R(x_j) = X_{\tau(x_j)}(x_j) \in \Sigma_1$ e $X_{h(\tau_{x_j})}(y_j)$ estão a uma distância menor que δ por (3.3), então existe um $\alpha \geq 0$ tal que $X_{h(\tau_{x_j})+\alpha}(y_j) \in \Sigma_1$. Veja que $h(\tau_{x_j}) + \alpha > \tau(y_j) > T$, onde T vem da definição da aplicação de Poincaré. Temos então uma aplicação local de Poincaré $\tilde{R} : \Sigma(\Sigma_1) \to \Sigma_1$ tal que $\tilde{R}(x_j) = R(x_j) = X_{\tau_{x_j}}(x_j)$ e $\tilde{R}(y_j) = X_{h(\tau_{x_j})+\alpha}(y_j)$. Como escolhemos T de tal forma que $h(\tau_{x_j}) + \alpha, \tau_{x_j} > T$, temos que $\tilde{R}(W^s(x_j, \Sigma)) \subset \tilde{\Sigma}^{\delta/2}$ e então $\tilde{R}(W^s(x_j, \Sigma)) \subset W^s(\tilde{R}(x_j), \Sigma_1)$.

Dessa forma, a aplicação de Poincaré original restrita a $\Sigma(x_j)$, $R : \Sigma(x_j) \to \Sigma_1(R(x_j))$, pode ser estendida a uma nova aplicação de Poincaré entre as

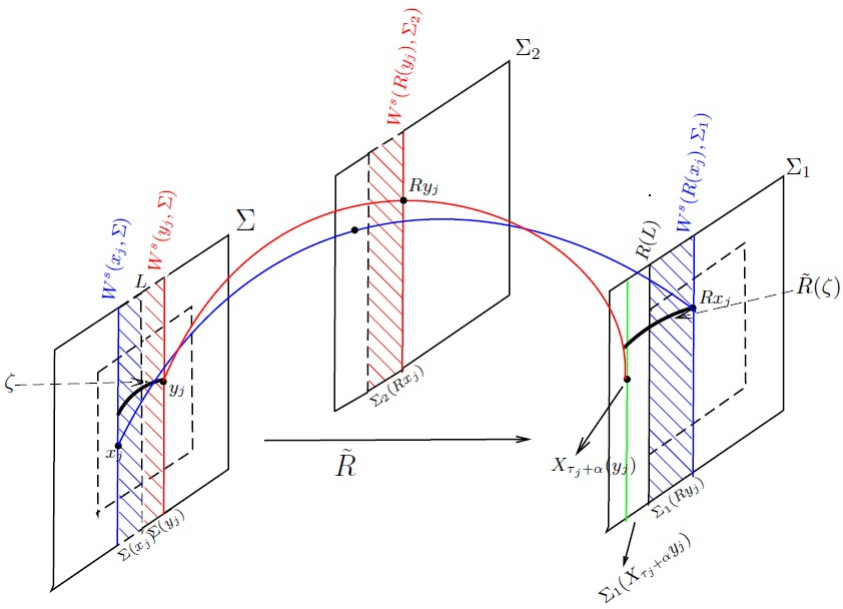

Figura 3.12: A aplicação $\tilde{R}$ onde $\tilde{R}(y_j) = X_{\tau_j+\alpha}(y_j)$ e $\tilde{R}(x_j) = R(x_j)$

seções Σ e Σ_1, $\tilde{R} : \overline{\Sigma(x_j) \cup \Sigma(y_j)} \to \overline{R(\Sigma(x_j)) \cup \Sigma_1(X_{\tau_{x_j}+\alpha}(y_j))}$, conforme figura 3.12, tal que $\tilde{R}|_{\Sigma(x_j)} = R$, com $\tilde{R}(y_j) = X_{\tau_{x_j}+\alpha}(y_j)$ e $\tilde{R}(x_j) = R(x_j)$. Provamos assim a seguinte proposição:

Proposição 3.3.8. *Para cada $x_j = R^j(x_j) = X_{t_j}(x)$, $j > 0$, existe $s_j = h(t_j) + a_j$, com $|a_j| < \epsilon$, tal que $y_j = \tilde{R}(y_{j-1}) = X_{s_j}(y)$ e x_j estão na mesma seção estendida Σ_j, assim como as respectivas variedades estáveis $W^s(y_j, \Sigma_j)$ e $W^s(x_j, \Sigma_j)$.*

Conclusão da prova da afirmação 3.3.6

Assim, acabamos de construir uma aplicação $\tilde{R}$ tal que $\tilde{R}(x_j)$ e $\tilde{R}(y_j)$ estão na mesma seção estendida, neste caso Σ_1. O tempo $t(\cdot)$ de $\tilde{R}$ é maior que $T = max\{T_2, T_1(\Sigma, \Sigma'), \Sigma, \Sigma' \in \Xi\}$ (que é, claramente, maior que $T_1(\Sigma, \Sigma_1)$). Agora, tomando uma cu-curva γ_j conectando x_j e y_j, qualquer cu-curva, o Lema Essencial 3.1.9 garante que $l(\gamma_j) \leq \kappa d(x_j, y_j)$. No entanto, o corolário 3.1.4 afirma que $\tilde{R}(\gamma_j)$ é uma cu-curva e esta conecta $x_{j+1} = \tilde{R}x_j$ e $y_{j+1} = \tilde{R}y_j$. Como $\tilde{R}^k(\gamma_j)$ é uma cu-curva que estará no mesmo domínio de suavidade de $\tilde{R}$ para todo k, então o corolário 3.1.4 garante que o comprimento da

cu-curva satisfaz

$$\ell(\tilde{R}^k\gamma_j) > (5\lambda^{-1}/6)^k,$$

para todo $k > 1$, e consequentemente haverá um certo $k > 0$ tal que

$$\ell(\tilde{R}^k\gamma_j) > K\delta_n \cdot \kappa.$$

Logo, pelo Lema Esesencial reformulado,

$$d(x_{j+k}, y_{j+k}) \geq \ell(\tilde{R}^k\gamma_j)/\kappa > K\delta_n,$$

o que contradiz a escolha de x_n, y_n e δ_n do início da prova da expansividade. Portanto, devemos ter $y_j \in W^s(x_j, \Sigma)$.

Capítulo 4

A expansividade para sumidouros hiperbólico-seccionais com $d_{cu} > 2$

Neste capítulo faremos a prova do nosso resultado principal sobre expansividade no caso $d_{cu} > 2$, o teorema B. Algumas considerações precisam ser feitas neste caso e uma hipótese a mais é assumida aqui, a 1-dissipatividade forte, para podermos ter uma folheação C^1 do sumidouro e prosseguirmos com a prova de maneira semelhante ao caso anterior. Não podemos usar o Lema Essencial, mas conseguimos obter estimativas de expansão da aplicação global de Poincaré. Refazemos algumas construções da seção anterior dando um aspecto mais topológico aos conceitos definidos anteriormente.

4.1 Aplicação global de Poincaré nas seções adaptadas

4.1.1 1-dissipatividade forte e a folheação C^1 do sumidouro

Conforme o teorema B, assumimos que Λ é 1-fortemente dissipativo. Com isso, o teorema a seguir, nos garante que a folheação do sumidouro U_0 fornecida pelo teorema 2.1.17 é C^1:

Teorema 4.1.1. *(Teorema 5.2,[2]) Seja Λ um atrator hiperbólico-seccional. Su-*

ponha que Λ seja q-fortemente dissipativo para algum $q \in (\frac{1}{d_s}, [r]]$. Então existe uma vizinhança U_0 de Λ tal que $\{W^s_x : x \in U_0\}$ define uma folheação C^1 de U_0.

Neste teorema, r determina a regularidade do campo. Ao assumirmos que X é um campo C^1, então $r = 1$, e podemos tomar $q = 1$ no teorema acima para garantir folheação C^1 para uma vizinhança U_0 de Λ.

4.1.2 Construção de uma seção-transversal adaptada global

Neste caso $d_{cu} > 2$, reconsideramos e generalizamos a seguir as construções feitas no capitulo anterior, dando uma descrição mais topológica ás seções-transversais definidas anteriormente.

Escrevemos $\rho_0 > 0$ para o raio de injetividade da aplicação exponencial $\exp_z : T_zM \to M$ para todo $z \in U_0$, tal que $\exp_z\big|_{B_z(0,\rho_0)} : B_z(0,\rho_0) \to M$, $v \mapsto \exp_z v$, é um difeomorfismo com $B_z(0,\rho_0) = \{v \in T_zM : \|v\| \leq \rho_0\}$ e $D\exp_z(0) = Id$ e também $d(z, \exp_z(v)) = \|v\|$ para todo $v \in B_z(0,\rho_0)$.

Seja $y \in \Lambda$ um ponto regular ($X(y) \neq 0$). Então existe uma caixa de fluxo aberta $V_y \subset U_0$ contendo y. Isto é, se fixarmos $\epsilon_0 \in (0,1)$ pequeno, então podemos encontrar um difeomorfismo $\chi : \mathcal{D}^{d-1} \times (-\epsilon_0, \epsilon_0) \to V_y$ com $\chi(0,0) = y$ tal que $\chi^{-1} \circ X_t \circ \chi(z,s) = (z, s+t)$. Definimos assim a seção-transversal

$$\Sigma_y = \chi(\mathcal{D}^{d-1} \times \{0\}).$$

Observação 4.1.2. *Assumimos que $\Sigma_y \subset \exp_y(B_y(0,\rho_0/3) \cap X(y)^\perp)$ e $\|D(\exp_y)_x^{-1}\| \leq 2$ para todo $x \in \Sigma_y$ sem perda de generalidade.*

Para cada $x \in \Sigma_y$, seja

$$W^s(x, \Sigma_y) = \bigcup_{|t|<\epsilon_0} X_t(W^s_x) \cap \Sigma_y.$$

Isto define uma folheação topológica $\mathcal{W}^s(\Sigma_y)$ de Σ_y. Podemos assumir também que Σ_y é difeomorfo a $\mathcal{D}^{d_{cu}-1} \times \mathcal{D}^{d_s}$ reduzindo o tamanho de Σ_y se necessário. A fronteira estável $\partial^s\Sigma_y \cong \partial\mathcal{D}^{d_{cu}-1} \times \mathcal{D}^{d_s} \cong \mathcal{S}^{d_{cu}-2} \times \mathcal{D}^{d_s}$ é uma variedade mergulhada difeomorfa ao cilindro de folhas estáveis, já que $\mathcal{W}^s$ é uma folheação topológica C^1, por conta da 1-dissipatividade forte.

Denotemos por $\mathcal{D}_a^{d_s}$ o disco aberto de raio $a \in (0,1]$ em $\mathbb{R}^{d_s}$. Definimos a subseção-transversal $\Sigma_s(a) \cong \mathcal{D}^{d_{cu}-1} \times \mathcal{D}_a^{d_s}$ e a subcaixa de fluxo tubular correspondente $V_y(a) \cong \Sigma_y(a) \times (-\epsilon_0, \epsilon_0)$ consistindo de trajetórias em V_y que passam por $\Sigma_y(a)$. No que segue, fixamos $a_0 = \frac{3}{4}$.

Para cada singularidade $\sigma \in \Lambda$, seja U_σ uma vizinhança aberta de σ na qual o fluxo é linearizável. Sejam $W^s_{loc}(\sigma)$ e $W^u_{loc}(\sigma)$ as variedades estável e instável local de σ dentro de U_σ. Trajetórias de pontos começando em U_σ permanecem em U_σ para todo tempo futuro se, e somente se, os pontos estão em $W^s_{loc}(\sigma)$. Defina agora

$$V_s = \bigcup_{\sigma \in Sing(X) \cap U_0} U_\sigma.$$

Diminuímos estas vizinhanças, se necessário, para que sejam disjuntas entre si. Temos que $\Lambda \subsetneq V_s$ e $W^u_{loc}(\sigma) \cap \partial U_\sigma \subset V_y(a_0)$ para algum ponto regular $y = y(\sigma)$.

Por compacidade de Λ, existe $l \in \mathbb{Z}^+$ e pontos regulares $y_1, ..., y_l \in \Lambda$ tal que $\Lambda \backslash V_s \subset \bigcup_{j=1}^l V_{y_j}(a_0)$. Incluímos no conjunto $\{y_j\}$ os pontos $y(\sigma)$ mencionados acima. Ajustamos a posição das seções-transversais Σ_{y_j}, se necessário, para assegurar que são disjuntas e definimos a **seção-transversal global**

$$\Xi = \bigcup_{j=1}^{l} \Sigma_{y_j}$$

e sua subseção $\Xi(a) = \bigcup_{j=1}^l \Sigma_{y_j}(a)$ para cada $a \in (0,1)$. Seja

$$\Gamma_0 = \{x \in \Xi : X_t(x) \in \bigcup_{\sigma \in Sing(X) \cap U_0} (W^s_{loc}(\sigma) \backslash \{\sigma\})\}$$

e considere $\Xi' = \Xi \backslash \Gamma_0$. A aplicação global de Poincaré fica definida da mesma maneira que no capítulo anterior:

$$R : \Xi' \to \Xi(a_0) = \bigcup_{j=1}^{l} \Sigma_j(a_0).$$

Observação 4.1.3. *(Extensão de R) Assim como fizemos para o caso tridimensional, podemos construir a aplicação global de Poincaré $\bar{R}$, extensão de R, escolhendo um $b > a$, construindo a seção adaptada global $\Xi(b) = \bigcup_{j=1}^{l} \Sigma_{y_j}(b)$ para cada $b \in (0,1)$ e definindo $\bar{R} : \Xi' \to \Xi(b)$.*

Definimos a folheação topológica $\mathcal{W}^s(\Xi) = \bigcup_{j=1}^{l} \mathcal{W}^s(\Sigma_{y_j})$ de Ξ com folhas $W^s_x(\Xi)$ passando por $x \in \Xi$.

Definimos agora $\partial^s\Xi(a_0) = \bigcup_{j=1}^{l} \partial^s\Sigma_{y_j}(a_0)$ e $\Gamma_1 = \{x \in \Xi' : Rx \in \partial^s\Xi(a_0)\}$ e então escrevemos $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, com $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$.

Lema 4.1.4. *(1) Γ_0 é uma d_s-subvariedade de Ξ dada pela união finita de folhas estáveis $W^s_{x_i}(\Xi)$, $i = 1, .., k$.*

(2) Γ_1 é uma subvariedade mergulhada de dimensão $(d-2)$ folheada de folhas estáveis de $\mathcal{W}^s(\Xi)$ e com um número finito de componentes conexas.

Demonstração. Para todo $x \in \Gamma$, temos $W^s_x(\Xi) \subset \Gamma$ e então Γ é folheada por folhas estáveis. Afirmamos que Γ é precisamente o conjunto de pontos de Ξ que são enviados à fronteira de Ξ ou nunca visitam Ξ no futuro.

De fato, se $x_0 \in \Xi' \backslash \Gamma_1$, então $Rx_0 = X_{\tau(x_0)}(x_0) \in \Sigma'$ para alguma $\Sigma' \in \Xi(a_0) = \{\Sigma_{y_j}(a_0)\}$. Para x próximo de x_0, segue da continuidade do fluxo que $Rx \in \Sigma'$ (com $\tau(x)$ próximo de $\tau(x_0)$). Portanto, $x \in \Xi' \backslash \Gamma_1$ e já que $\Xi' = \Xi \backslash \Gamma_0$, então provamos o afirmado e, além disso, mostramos que Γ é fechado.

Para o item (1), notamos que $\Gamma_0 \subset \Xi \cap X^{-1}_{[0,T_1+1]}\Big(\bigcup_\sigma W^s_{loc}(\sigma)\Big)$ e podemos assumir, sem perda de generalidade, que a união acima compreende somente singularidade tipo-Lorenz generalizada conforme lema **??**). Portanto $T_w W^s_{loc}(\sigma) = E^{cs}_w$ para $w \in W^s(\sigma)_{loc} \backslash \{\sigma\}$. Assim Γ_0 está contida na interseção transversal entre (d_s+1)-subvariedade compacta e uma $(d-1)$-variedade compacta e então Γ_0 é uma d_s-subvariedade compacta diferenciável de M e Ξ. Além disso, já que Ξ_0 é folheada por folhas estáveis de dimensão d_s, temos que Γ_0 tem um número finito de componentes conexas em Ξ.

Para o item (2), note que, para cada $x \in \Gamma_1$, temos que $Rx \in \partial\Sigma_j(a_0) \subset \Sigma_j$. Assim, existe uma vizinhança W_x de $x \in \Xi$ e V_{Rx} de Rx em Σ_j tal que $R|_{W_x} : W_x \to V_{Rx}$ é um difeomorfismo. Portanto $\Gamma_1 \cap W_x = (R|_{W_x})^{-1}(V_x \cap \partial^s\Sigma(a_0))$ é

homeomorfa a um disco de dimensão $(d_{cu} - 2 + d_s)$. Além disso, isto mostra que a topologia de Γ_1 é uma subvariedade mergulhada de dimensão $d - 2$.

Resta agora descartar a possibilidade de existência de infinitas componentes conexas Γ_1^m, $m \in \mathbb{Z}^+$ de Γ_1 em Ξ. Já que Ξ contém apenas um número finito de seções, então existem seções-transversais Σ_j, Σ_i em Ξ e, tomando uma subsequência se necessário, um conjunto $\tilde{\Gamma}$ com $\tilde{\Gamma} = \lim_m \Gamma_1^m$ dentro do fecho $\overline{\Sigma_j}$ tal que $R(\Gamma_1^m) \subset \partial^s \Sigma_i(a_0)$ para todo $m \geq 1$. Pela continuidade da folheação estável, $\tilde{\Gamma}$ é a união de folhas estáveis.

Os tempos de Poincaré $\tau(x_m)$ para $x_m \in \Gamma_1^m, m \geq 1$ são uniformemente limitados por cima. De fato, se assim não for, a trajetória $X_{[0,\tau(x_m)]}(x_m)$ intersecta V_σ para algum $\sigma \in Sing(X) \cap U$ e acumula-se em σ. Portanto, pelo comportamento local das trajetórias próximas a selas e a escolha da seções-transversais próximas a V_σ, obtemos que $\tilde{\Gamma} \subset \Sigma_i(a_0)$ não está contido na fronteira da seção-transversal, uma contradição. Assim, seja T o limitante superior para $\tau(x_m)$.

Então, para um ponto de acumulação $x \in \tilde{\Gamma}$ de $(x_m)_{m\geq 1}$ temos que as trajetórias $X_{[0,T]}(x_m)$ convergem na topologia C^1 (tomando uma subsequência, se necessário) para uma curva limite $X_{[0,T]}(x)$ e então $R(x) = X_{\tau(x)}(x) \in \partial^s \Sigma_i(a_0)$. Assim podemos encontrar vizinhanças W_x de x e V_{Rx} de $Rx \in \Xi$ tal que para um m arbitrariamente grande temos que $R_{W_x} : W_x \to V_{Rx}$ é um difeomorfismo e $\Gamma_1 \cap W_x = (R_{W_x})^{-1}(V_x \cap \partial^s \Sigma_i(a_0))$, o que contradiz a regularidade de Γ_1 como subvariedade topológica.

Concluímos assim a prova do item (2) e também o lema.

□

Observação 4.1.5. *Γ_0 é um subvariedade suave de Ξ com codimensão $d_{cu} - 1$ e separa Ξ se, e somente se, $d_{cu} = 2$. Já Γ_1 é uma subvariedade de codimensão 1 de Ξ e separa Ξ.*

Seja $\Xi'' = \Xi(a_0) \backslash \Gamma$. Então $\Xi'' = S_1 \cup \cdots \cup S_m$ para algum $m \geq 1$, onde cada faixa S_i é um *domínio de suavidade* conexo difeomorfa a: $(i) \mathcal{D}^{d_{cu}} \times \mathcal{D}^{d_s}$, se $\Gamma_0 \cap \overline{S_i} = \emptyset$, ou $(ii) \mathcal{D}^{d_{cu}} \times (\mathcal{D}^{d_s} \backslash \{0\})$, caso contrário. As faixas satisfazendo o caso (ii) serão chamadas de *faixas singulares*, que são também suaves.

A aplicação global de Poincaré restrita a cada S_i, $R|_{S_i} : S_i \to \Xi(a_0)$, é um

difeomorfismo em sua imagem, com $\tau|_{S_i} : S_i \to [T_1, +\infty)$ suave para cada i, $\tau|_{S_i} \leq T_1 + 2$ nas faixas não-singulares S_i e também numa vizinhança de $\partial^s(S_i \cup \Gamma_0)$ para faixas singulares S_i. A folheação $\mathcal{W}^s(\Xi)$ restringe-se a uma folheação $\mathcal{W}^s(S_i)$ em cada S_i, $i = 1, ..., m$.

4.2 Hiperbolicidade da Aplicação global de Poincaré

Aquelas propriedades hiperbólicas de R que vimos no capítulo anterior serão retomadas aqui com pequenas modificações úteis para o caso atual. Para $T_1 > 1$, a Aplicação Global de Poincaré $R : \Xi'' \to \Xi$ é uniformemente hiperbólica (com descontinuidades e singularidades).

Sejam $S \in \{S_i\}$ uma das faixas regulares. Então existem seções-transversais $\Sigma, \tilde{\Sigma} \in \Xi$ tais que $S \subset \Sigma$ e $R(\Sigma) \subset \tilde{\Sigma}$. A decomposição $T_{U_0}M = E^s \oplus E^{cu}$ induz a decomposição contínua $T\Sigma = E^s(\Sigma) \oplus E^u(\Sigma)$, como exibimos no capítulo anterior.

Proposição 4.2.1. *A decomposição $T\Sigma = E^s(\Sigma) \oplus E^u(\Sigma)$ é*

***invariante**: $DR \cdot E^s_x(\Sigma) = E^s_{Rx}(\tilde{\Sigma})$ para todo $x \in S$ e $DR \cdot E^u_x(\Sigma) = E^u_{Rx}(\tilde{\Sigma})$ para todo $x \in \Lambda \cap S$*

***uniformemente hiperbólica**: para cada $\lambda_1 \in (0, 1)$ existe $T_1 > 0$ tal que se $inf\tau > T_1$, então $\|DR|_{E^s_x(\Sigma)}\| \leq \lambda_1$ e $\|(DR|_{E^u_x(\Sigma)})^{-1}\| \geq \lambda_1^{-1}$ para todo $x \in S$ e $S \in \{S_i\}$.*

Além disso, existe $0 < \tilde{\lambda} < \lambda_1$ tal que, para todo x numa faixa não-singular S, ou para x numa vizinhança de $\partial^s(S \cup \Gamma_0)$ de uma faixa singular S temos $\tilde{\lambda} \leq \|(DR|_{E^s_x(\Sigma)})^{-1}\|$ e $\|DR|_{E^u_x(\Sigma)}\| \leq \tilde{\lambda_1}^{-1}$.

Demonstração. Ver [[2], Proposição 4] com a adaptação direta ao usar expansão de área ao longo dos subespaços bidimensionais em $E^u_x(\Sigma)$ para obter a expansão uniforme; ver [[4], Lema 8.25]. A última afirmação da proposição segue da limitação de τ nos domínios dados; ver o Lema 3.2.2. □

Para $a > 0$, $x \in \Sigma$ e $\Sigma \in \Xi$, considere o cone instável em x como $\mathcal{C}^u_a(x, \Sigma) = \{w = w^s + w^u \in E^s_x(\Sigma) \oplus E^u_x(\Sigma) : \|w^s\| \leq a\|w^u\|\}$.

Observação 4.2.2. *Assumimos que* $\mathcal{C}^u_a(x,\Sigma_y) \subset D(exp_y)_{exp_y^{-1}x} \cdot \mathcal{C}^u_{2a}(y,\Sigma_y)$ *para todo* $x \in \Sigma_y$ *e cada* $\Sigma_y \in \Xi$ *sem perda de generalidade (veja observação 4.1.2). Consequentemente, sendo* $\pi^u : E^s_y(\Sigma_y) \oplus E^u_y(\Sigma_y) \to E^u_y(\Sigma_y)$ *a projeção canônica, obtemos que* $\frac{\|\pi^u w\|}{\|w\|} \in (1-2a, 1+2a)$ *para todo* $w \in \mathcal{C}^u_a(x,\Sigma_y)$*, onde identificamos, implicitamente,* $\mathcal{C}^u_a(x,\Sigma_y)$ *com um subcone de* $\mathcal{C}^u_{2a}(y,\Sigma_y)$*, para* $x \in \Sigma_y$ *e* $\Sigma_y \in \Xi$.

Proposição 4.2.3. *Para qualquer* $a > 0$, $\lambda_1 \in (0,1)$*, podemos aumentar* T_1 *e reduzir* U_0 *de tal forma que se* $\inf \tau > T_1$*, então* $DR(x) \cdot \mathcal{C}^u_a(x,S) \subset \mathcal{C}^u_a(Rx,S')$ *e* $\|DR(x)w\| \geq \|\pi^u DR(x)w\| \geq \lambda_1^{-1}\|w\|$ *para todo* $w \in \mathcal{C}^u_a(x,S)$ *e todo* $x \in S$ *tal que* $Rx \in S'$*, para* $S, S' \in \{S_i\}$*. Além disso,* $\|DR(x)w\| \leq \tilde{\lambda_1}^{-1}\|w\|$ *para* x *em uma faixa não-singular* S *ou* x *numa vizinhança de* $\partial^s(S \cup \Gamma_0)$ *para uma faixa singular* S.

Demonstração. Ver [[2], Proposição 4.2], usando $\tilde{\lambda_1}$ da Proposição 4.2.1 e obtendo a estimativa em $\|\pi^u\|$ através da Observação 4.2.2. □

Considerando a união dos domínios de suavidade S, os resultados anteriores mostram que obtemos uma decomposição uniformemente hiperbólica e contínua $T\Xi'' = E^s(\Xi) \oplus E^u(\Xi)$ no seguinte sentido.

Teorema 4.2.4. *Para dado* $a > 0$ *e* $\lambda_1 \in (0,1)$*, obtemos uma aplicação global de Poincaré* R *tal que o fibrado estável* $E^s(\Xi)$ *e a decomposição restrita a* Λ *dada por* $T_\Lambda\Xi'' = E^s_\Lambda(\Xi) \oplus E^u_\Lambda(\Xi)$ *são DR-invariante e* $DR \cdot \mathcal{C}^u_a(x,\Xi) \subset \mathcal{C}^u_a(Rx,\Xi)$ *e* $\|\pi^u DR(x)w\| \geq {\lambda_1}^{-1}\|w\|$ *para todo* $x \in \Xi''$ *e* $w \in \mathcal{C}^u_a(x,\Xi)$.

Observação 4.2.5. *(Extensão de R) Já que R envia* Ξ'' *dentro de subseções* $\Xi(a_0)$ *de* $\Xi = \Xi(1)$*, então existem extensões* $\tilde{R}_i : \tilde{S}_i \to \Xi$ *de* $R|_{S_i} : S_i \to \Xi(a_0)$*, onde* $\tilde{S} \supset \overline{S_i} \backslash \Gamma_0$ *e em* $\tilde{S}_i \backslash \overline{S_i}$*, a aplicação* $\tilde{R}_i$ *têm as mesmas propriedades hiperbólicas que* R.

4.3 Construção de uma carta local C^1 através da 1-dissipatividade forte

Vimos que a folheação topológica $\mathcal{W}^s$ de U_0 induz uma folheação topológica $\mathcal{F}^s = \{W^s(x,\Sigma)\}_{x\in\Sigma}$ em cada Σ. Para um campo X de classe C^1 que seja

1-fortemente dissipativo, o teorema 2.1.17 nos garante que esta folheação é C^1, isto é, a aplicação

$$\mathcal{F}^s : \Sigma \to Emb^1(D^{d_s}, \Sigma)$$

tal que $\mathcal{F}^s(x) = \phi(x) \in Emb^1(D^{d_s}, \Sigma)$ com $\phi(x)(D^{d_s}) = W^s(x, \Sigma)$, é C^1 com respeito à topologia da distância d em Σ e à topologia C^1 em $Emb^1(D^{d_s}, \Sigma)$.

Com isso, construiremos uma carta local em cada Σ que retifica as folhas estáveis da mesma. Isto será muito importante para obter estimativas de comparação entre a distância riemanniana e a distância euclidiana que serão fundamentais no estudo da expansividade.

Considere um disco W transversal a Σ, isto é, cada folha estável em Σ intercepta W em apenas um ponto. Podemos supor que W é difeomorfo a um disco $\mathcal{D}^{d_{cu}}$ de um $\mathbb{R}^{d_{cu}}$. Definimos agora a carta local $\psi : \mathcal{D}^{d_{cu}} \times \mathcal{D}^{d_s} \to \Sigma$ por $\psi(x, y) = \gamma_x(y)$, onde usamos a mesma notação do Teorema 2.1.17. Veja que $\psi(\{x\} \times \mathcal{D}^{d_s}) = \gamma_x(D^{d_s}) = W^s(x, \Sigma)$.

Por construção, ψ é C^1 em cada uma das variáveis (fixado x, ψ_x é um mergulho C^1 e ψ_y é C^1 pois $\mathcal{F}^s$ o é). Assim as derivadas parciais são contínuas e portanto esta aplicação ψ é de classe C^1. Além disso, ψ é um homeomorfismo, por construção da folheação estável numa seção. Logo temos uma carta C^1 para Σ que retifica a folheação $\mathcal{F}^s$ de Σ.

Lema 4.3.1. *Existem constantes $K, L > 0$ tais que*

$$Ld_e(x, y) \leq d(W^s(x, \Sigma), W^s(y, \Sigma)) \leq Kd_e(x, y),$$

onde d e d_e denotam a distância riemanniana e a distância euclidiana.

Temos que $d(W^s(x, \Sigma), W^s(y, \Sigma)) = \inf_\xi \ell(\xi)$, onde ξ é uma curva conectando $W^s(x, \Sigma)$ a $W^s(y, \Sigma)$ em Σ. Já que ψ é um homeomorfismo, ξ é imagem de alguma curva $\tilde{\xi} \in \mathcal{D}^{d_{cu}-1} \times \mathcal{D}^{d_s}$ que conecta $\{x\} \times \mathcal{D}^{d_s}$ a $\{y\} \times \mathcal{D}^{d_s}$. Assim, por definição de $\ell(\xi)$:

$$\ell(\xi) = \int_a^b \|D\psi(\tilde{\xi}) \cdot \tilde{\xi}'(t)\| dt.$$

Tomando desde o início Σ para ser compacta, temos que existe $K > 0$ tal que $K = \sup \|D\psi(x)\|$, para todo $x \in \mathcal{D}^{d_{cu}-1} \times \mathcal{D}^{d_s}$, e assim $\ell(\xi) \leq K\ell(\tilde{\xi})$. Como $\tilde{\xi}$ representa qualquer curva conectando $\{x\} \times \mathcal{D}^{d_s}$ a $\{y\} \times \mathcal{D}^{d_s}$ (inclusive o segmento que realiza a distância entre estas folhas), temos que:

$$\begin{aligned} d(W^s(x,\Sigma), W^s(y,\Sigma)) &= \inf_{\xi} \ell(\xi) \\ &\leq K \inf_{\xi} \ell(\tilde{\xi}) \\ &= K \cdot d_e(\{x\} \times \mathcal{D}^{d_s}, \{y\} \times \mathcal{D}^{d_s}) \\ &= K \cdot d_e(x,y) \end{aligned}$$

Analogamente, existe $L > 0$ tal que $L = \inf \|D\psi^{-1}(x)\|^{-1}$, para todo $x \in \mathcal{D}^{d_{cu}-1} \times \mathcal{D}^{d_s}$. Assim,

$$\ell(\xi) = \int_a^b \|D\psi(\tilde{\xi}) \cdot \tilde{\xi}'(t)\| dt \geq L \int_a^b \|\tilde{\xi}'(t)\| dt.$$

Logo, $\ell(\xi) \geq L\ell(\tilde{\xi})$ e chegamos em

$$\begin{aligned} d(W^s(x,\Sigma), W^s(y,\Sigma)) &= \inf_{\xi} \ell(\xi) \\ &\geq L \inf_{\xi} \ell(\tilde{\xi}) \\ &= L \cdot d_e(\{x\} \times \mathcal{D}^{d_s}, \{y\} \times \mathcal{D}^{d_s}) \\ &= L \cdot d_e(x,y). \end{aligned}$$

Portanto,

$$Ld_e(x,y) \leq d(W^s(x,\Sigma), W^s(y,\Sigma)) \leq Kd_e(x,y).$$

4.4 A aplicação quociente de Poincaré nas seções transversais

Considere agora um domínio de suavidade $S \in \{S_i\}_{i=1}^m$. Então existem seções-transversais $\Sigma, \Sigma' \in \Xi$ tais que $S \subset \Sigma$ e $R(\Sigma) \subset \Sigma'$. A folheação $\mathcal{W}^s(\Sigma)$ de Σ é C^1 (estamos usando a 1-dissipatividade forte para garantir isso). Escolhemos uma variedade centro-instável W_Σ transversal a Σ, isto é, cada folha estável $W^s(x, \Sigma)$ atravessa W_Σ em um único ponto, para cada $x \in \Sigma$. Podemos definir então uma projeção $\pi : \Sigma \to W_\Sigma$ em cada $\Sigma \in \Xi(a_0)$ que

a cada ponto $x \in \Sigma$ associa o ponto $\pi(x)$ tal que $W^s(x, \Sigma) \cap W_\Sigma = \{\pi(x)\}$.

Agora, quocientamos Σ usando esta projeção de forma que $\pi(x) = \pi(y)$ sempre que x, y pertencerem a mesma folha estável. Assim, a seção quocientada Σ_π é o conjunto

$$\{\hat{x} : W^s(\pi^{-1}\hat{x}, \Sigma) \cap W_\Sigma = \{\hat{x}\}\} \cong W_\Sigma.$$

Usando que a folheação $\mathcal{W}^s(\Sigma)$ é preservada por R, isto é, $R(W^s(x, \Sigma)) \subset W^s(Rx, \Sigma')$, com $R(x) \in \Sigma'$, definimos a aplicação quociente de Poincaré $f : W_\Sigma \to W_\Sigma$ dada por $f \circ \pi(x) = \pi \circ R(x)$.

4.4.1 A aplicação quociente f é expansora nos domínios de suavidade

Cada Σ pode ser representada nas coordenadas locais por $\mathcal{D}^{d_{cu}-1} \times \mathcal{D}^{d_s}$ e a folheação estável é dada por $\{\{a\} \times \mathcal{D}^{d_s}\}_{a \in \mathcal{D}^{d_{cu}-1}}$ e $W_\Sigma \cong D^{d_{cu}-1}$. Logo, em coordenadas locais, a projeção é dada pela projeção canônica em $\mathbb{R}^{d_{cu}-1}$, $\pi : \mathcal{D}^{d_{cu}-1} \times \mathcal{D}^{d_s} \to \mathcal{D}^{d_{cu}-1}$ e podemos escrever $f : \mathcal{D}^{d_{cu}-1} \to \mathcal{D}^{d_{cu}-1}$ com $f = \pi \circ R|_{\mathcal{D}^{d_{cu}-1}}$. Vamos nos restringir agora aos pontos de W_Σ que estão num domínio de suavidade, isto é, $W_\Sigma \cap S_i$.

Dado um vetor $v \in \mathbb{R}^{d_{cu}-1}$, considere a derivada $Df(x)v$ com $x \in W_\Sigma \cap S_i$. Por definição, existe uma curva $\gamma : I \to \mathcal{D}^{d_{cu}-1}$ com $\gamma(0) = x$ e $\gamma'(0) = v$. Tal

curva γ contida em $\mathcal{D}^{d_{cu}-1}$ é assim uma *cu*-curva e

$$Df(x)v = D(\pi \circ R)(x)(v) = D\pi(R(x))DR(x)v = \pi(R(x))DR(x)v.$$

Existe $\beta > 0$ tal que a norma mínima $m(\pi_{R(x)}|_{\gamma}) \geq \beta > 0$. Isto acontece pois, para todo $v \in T_x\gamma$, $DR(x)v$ está no cone centro-instável e $\frac{\|\pi(DR(x)v)\|}{\|DR(x)v\|}$ é cosseno do ângulo entre $\pi(DR(x)v)$ e $DR(x)v$. O ângulo entre $DR(x)v$ e o disco $\{R(x)\} \times D^{d_s}$ é afastado de zero para todo $x \in \mathcal{D}^{d_{cu}-1}$, por causa da dominação hiperbólica-seccional. Logo, $\inf \frac{\|\pi(DR(x)v)\|}{\|DR(x)v\|} \geq \beta > 0$, para todo $\|DR(x)v\|$.

Além disso, $\|DR(x)v\| \geq \sigma\|v\|$, com $\sigma = \frac{5}{6}\lambda^{-1} \geq 1$, pois $v = \gamma'(0)$ e γ é uma *cu*-curva. Assim:

$$\|Df(x)v\| = \|\pi(R(x))DR(x)v\| \geq \beta\|DR(x)v\| \geq \beta\sigma\|v\|.$$

Podemos tomar σ grande o suficiente (escolhendo λ pequeno o suficiente na proposição 3.1.3) para que $\beta\sigma > 1$. Assim,

$$\|Df(x)\| \geq \mu > 1,$$

para todo $x \in W_{\Sigma} \cap S_i$, com $\mu = \beta\sigma$. Portanto,

$$d_e(f\hat{x}, f\hat{y}) \geq \mu d_e(\hat{x}, \hat{y}) \tag{4.1}$$

para $\hat{x}$,$\hat{y}$ no domínio de suavidade $\pi^u(S_i)$ de f, onde d_e denota a distância euclidiana.

Corolário 4.4.1. *A aplicação global de Poincaré expande distância entre folhas estáveis $W^s(x, \Sigma)$ e $W^s(y, \Sigma)$ do mesmo domínio de suavidade S_i.*

Demonstração. Dadas duas folhas $W^s(x, \Sigma)$ e $W^s(y, \Sigma)$ em $\Sigma \cap S_i$, em coordenadas locais são $\{\hat{x}\} \times D^{d_s}$ e $\{\hat{y}\} \times D^{d_s}$, respectivamente, para $\hat{x}, \hat{y} \in \mathcal{D}^{d_{cu}}$. Lembre que $f \circ \pi^u = \pi^u \circ R$, com $\pi^u(x) = \hat{x}$. Nestas coordenadas,

$$d_e(W^s(x, \Sigma), W^s(y, \Sigma)) = d_e(\hat{x}, \hat{y}).$$

E também

$$
\begin{aligned}
d(R(W^s(x,\Sigma)), R(W^s(y,\Sigma))) &\geq d(W^s(Rx,\Sigma), W^s(Ry,\Sigma)) \\
&\overset{\text{lema 4.3.1}}{\geq} Ld_e(Rx, Ry) \\
&\geq Ld_e(\pi^u \circ Rx, \pi^u \circ Ry) \\
&= Ld_e(f\hat{x}, f\hat{y}) \\
&\overset{4.1}{\geq} L\mu d_e(\hat{x}, \hat{y}) \\
&\overset{\text{lema 4.3.1}}{\geq} \frac{L}{K}\mu d(W^s(\hat{x},\Sigma), W^s(\hat{y},\Sigma)) \\
&= \frac{L}{K}\mu d(W^s(x,\Sigma), W^s(y,\Sigma))
\end{aligned}
$$

Como conhecemos L/K quando fixamos as seções, então podemos, na proposição 3.1.3, escolher λ pequeno o suficiente para que, além de $\beta\sigma > 1$, $(L/K)\mu \geq 1$. Portanto, temos que R expande distâncias entre folhas estáveis em cada domínio de suavidade.

□

4.5 Prova da expansividade no caso $d_{cu} > 2$

Para provar a expansividade, prosseguimos como no capítulo anterior, encontrando pontos $x, y \in U_0$ para os quais as sequências $(y_j)_{j\geq 0}$ e $(x_j)_{j\geq 0}$ satisfazem $d(x_j, y_j) \leq K\delta_n$, sempre que x_j e y_j pertencem a mesma seção, onde $x_j = R^j(x)$ e $y_j = R^j(y)$. Veja a proposição 3.3.3. Usamos muitas ideias usadas no caso anterior e parte principal da demonstração, que difere do que foi feito no caso $d_{cu} = 2$, está na seção seguinte.

4.5.1 Prova da Afirmação 3.3.6: $y_j \in W^s(x_j, \Sigma)$

Vamos agora mostrar que $y_j \in W^s(x_j, \Sigma)$. Suponhamos que $y_j \notin W^s(x_j, \Sigma)$ para chegar a uma contradição.

Observação 4.5.1. *Suponha que x_j e y_j estejam no mesmo domínio S_i de R e, portanto, $\hat{x}_j = \pi^u(x_j)$ e $\hat{y}_j = \pi^u(y_j)$ estão no domínio $\hat{S}_i = \pi^u(S_i)$ de f. Agora, pensando no espaço R^d, os domínios de suavidade no caso $d_{cu} > 2$ não têm que ser convexos, o que implica que o segmento $[\hat{x}_j, \hat{y}_j]$ pode não estar contido no mesmo domínio de suavidade $\hat{S}_i$, havendo pontos de $p \in (\hat{x}_j, \hat{y}_j) \cap \Gamma_1$, por exemplo. Para evitarmos isso, se a bola $B(\hat{x}_j, \delta_n)$ não estiver totalmente contida em $\hat{S}_i$, podemos tomar δ_n o menor possível e então a bola $B(\hat{x}_j, \delta_n)$ estará totalmente contida em $\hat{\bar{S}}_i$, um domínio de suavidade da extensão $\bar{f}$, a aplicação quociente da extensão de R (veja observação 4.1.3).*

Se x_j **e** y_j **estão no mesmo domínio de suavidade** S_i, podemos aplicar o corolário 4.4.1 para garantir que

$$d(R(W^s(x_j, \Sigma), R(W^s(y_j, \Sigma)))) \geq \alpha d(W^s(x_j, \Sigma), W^s(y_j, \Sigma)),$$

onde $\alpha = \frac{K}{L}\mu > 1$.

Repetindo este processo, haverá um $m > 0$ tal que

$$d(R^m(W^s(x_j, \Sigma), R^m(W^s(y_j, \Sigma)))) \geq \alpha^m d(W^s(x_j, \Sigma), W^s(y_j, \Sigma)) > K\delta_n,$$

mas, por construção das sequências x_j e y_j,

$$d(R^m(W^s(x_j,\Sigma),R^m(W^s(y_j,\Sigma)))) \leq d(R^m(x_j),R^m(y_j)) \leq K\delta_n.$$

Logo, temos uma contradição e, portanto, $y_j \in W^s(x_j,\Sigma)$.

Se x_j e y_j não estão no mesmo domínio de suavidade S_i, podemos assumir, assim como fizemos no caso $d_{cu} = 2$ (veja observação 3.3.5) que estão em domínios adjacentes para prosseguir com a demonstração. No entanto, observe que, a esta altura, no caso $d_{cu} = 2$, analisamos o fato da fronteira comum do domínio ser o que chamamos de *linha singular* ou *linha não-singular*. Relembre o que foi feito na seção 3.3.2. Faremos algo semelhante aqui, mas a análise exige maiores cuidados. Vejamos:

i) x_j e y_j estão em faixas adjacentes e $\overline{S_i} \cap \Gamma_0 = \emptyset$

Se x_j e y_j estão em faixas adjacentes, digamos S_i e S_j, e o fecho $\overline{S_i}$ (ou $\overline{S_j}$) for tal que $\overline{S_i} \cap \Gamma_0 = \emptyset$, então as faixas estáveis que formam a fronteira de S_i são folhas que estão em Γ_1. Usando então a observação 4.1.3, usamos uma extensão $\tilde{R}$ de $R|_{S_i}$ para qual x_j e y_j pertencem ao mesmo domínio $\tilde{S}_i \supset \overline{S_i}\backslash\Gamma_0$ de $\tilde{R}$. Com isso aplicamos novamente o corolário 4.4.1 como fizemos inicialmente e garantimos a expansão da distância das folhas $W^s(x_j,\Sigma)$ e $W^s(y_j,\Sigma)$, prosseguindo desta maneira com o mesmo argumento anterior.

ii) x_j e y_j estão em faixas adjacentes e $\overline{S_i} \cap \Gamma_0 \neq \emptyset$

Para o caso $d_{cu} = 2$, se a fronteira fosse uma linha singular, então teríamos que a dinâmica do fluxo separaria os dois pontos, chegando a uma contradição. Agora, a análise é mais rigorosa: se x_j e y_j estão em faixas adjacentes e $\overline{S_i} \cap \Gamma_0 \neq \emptyset$, a curva γ que minimiza a distância entre x_j e y_j pode ter interseção com Γ_0 e então não faz sentido falar em $R\gamma$ já que R não estaria definida em algum ponto de γ. Para analisar a expansão da distância $d(x_j,y_j)$ neste caso, lembramos que $R|_{S_i}$ é um difeomorfismo em sua imagem e, por isso, $f_{\hat{S}_i} = \pi^u \circ R$ também será, onde $\hat{S}_i$ é um domínio de suavidade correspondente de f. Como $Df(x) = D\pi^u(Rx)DR(x)$ é expansora

em cada domínio de suavidade, Df^{-1} é contratora na imagem de cada um deles, isto é, $\|Df^{-1}(fx)\| < \mu^{-1} < 1$. Vejamos agora as estimativas para $d(x_j, y_j)$.

Pela observação 3.2.4, se um ponto z passa por uma vizinhança de uma singularidade, devemos ter que Rz pertence a uma seção-transversal de saída e esta não tem interseção com variedade estável local de σ. Assim, tomando δ_n pequeno o suficiente para que a bola de raio $K\delta_n$ esteja na imagem $f(\hat{S}_i)$ ou na imagem $\bar{f}(\hat{\bar{S}}_i)$ da extensão de f, x_{j+1} e y_{j+1} pertencerão à imagem do mesmo domínio de suavidade e teremos que toda curva ζ que conecta $f(x_j)$ a $f(y_j)$ na seção de saída não tem interseção com a variedade estável local, com $f^{-1}\zeta$ tendo seu comprimento contraído:

$$d(x_j, y_j) = d(f^{-1}(fx_j), f^{-1}(fy_j)) = \int_a^b \|Df^{-1}(\zeta(t))\zeta'(t)\| \leq \mu^{-1} d(f(x_j), f(y_j)).$$

Equivalentemente, temos:

$$d(f(x_j), f(y_j)) \geq \mu d(x_j, y_j).$$

Com isso, como fizemos anteriormente, conseguimos mostrar

$$d(R(x_j), R(y_j)) > \mu d(x_j, y_j)$$

e garantimos a expansão da distância entre folhas estáveis, prosseguindo o mesmo argumento anterior.

4.5.2 Conclusão do teorema

Uma vez que provamos que $y_j \in W^s(x_j, \Sigma)$, procedemos como feito no caso $d_{cu} = 2$ e mostramos que

$$X_{h(\tau_j)}(y) \in W^{ss}_{\epsilon}(X_{[\tau_j - \epsilon, \tau_j + \epsilon]}(x)).$$

Usamos agora novamente o lema 3.3.7 a seguir cuja demonstração sofre pequenas alterações devido à dimensão.

Lema 4.5.2. *Existe um $\rho > 0$ pequeno e $c > 0$, dependendo somente do fluxo, tal que se z_1, z_2, z_3 são pontos em Λ satisfazendo $z_3 \in X_{[-\rho,\rho]}(z_2)$ e $z_2 \in W^{ss}_{\rho}(z_1)$, então*

$$dist(z_1, z_3) \geq c \cdot max\{dist(z_1, z_2), dist(z_2, z_3)\}.$$

Demonstração. Consideramos um $\rho > 0$ pequeno tal que $X_{[-\rho,\rho]}(W^{ss}_{\rho}(z_1))$ seja um disco de classe C^1 de dimensão $d_s + 1$. Assim, a métrica Riemanniana é uniformemente próxima da Euclidiana e escolhemos $[-\rho, \rho]$ tal que z_1 corresponda a origem, $W^{ss}(z_1)$ corresponda ao bloco $\{0\} \times [-\rho, \rho]^{d_s}$ e $X_{[-\rho,\rho]}(z_1)$ corresponda a $[-\rho, \rho] \times \{0\}$. Assim, o ângulo entre $X_{[-\rho,\rho]}(z_1)$ e $W^{ss}(z_1)$ é limitado por baixo e longe de zero. □

Com isso, nós concluímos o teorema da mesma forma que fizemos no caso de codimensão 2, provando que o fluxo é expansivo no aberto U_0 contendo Λ. Segue da uniformidade da escolha das seções e dos domínios de suavidade por pequenas perturbações do campo ou fluxo que $X|_{U_0}$ é C^1-robustamente expansivo, isto é, a expansividade vale para todo campo Y em uma C^1 vizinhança de X.

Capítulo 5

Perspectivas futuras: implicações da C^1-expansividade robusta em um sumidouro

Neste capítulo apresentamos as perspectivas futuras para este trabalho envolvendo a expansividade.

5.1 Afirmação recíproca do Teorema principal

Se nos capítulos anteriores mostramos que, sob as devidas hipóteses, todo sumidouro hiperbólico-seccional é C^1-robustamente expansivo, para a continuidade da pesquisa, partimos da seguinte questão:

Se Λ for C^1-robustamente expansivo, o que pode se afirmar sobre Λ? Este conjunto possui algum tipo de hiperbolicidade?

Em [6], no teorema 5.14, Araújo-Pacífico mostram que, em uma variedade tridimensional, um atrator Λ robusto de um campo de vetores C^1 ou é hiperbólico ou hiperbólico-singular. Para uma variedade de dimensão maior que 3, Metzger-Morales mostram, com hipóteses adicionais, que um conjunto C^1 transitivo robusto com singularidades é hiperbólico-seccional ([35],teorema A). Motivados por estes e outros trabalhos é que

buscamos responder questões como a supracitada, estudando as implicações da C^1-expansividade robusta para um sumidouro Λ de um campo C^1 e investigando a possível reciprocidade dos teoremas A e B dos capítulos anteriores. O teorema 5.1.3 nos fornece algumas respostas para fluxos estrelas e homogêneos.

Neste processo, precisamos conhecer melhor duas classes de campos: campos estrela e campos homogêneos.

Definição 5.1.1. *Um campo X é dito de **estrela**, se existe um aberto $\mathcal{U} \in \mathfrak{X}^1(M)$ de X tal que cada singularidade e cada órbita periódica de $Y \in \mathcal{U}$ é hiperbólica.*

Definição 5.1.2. *Um campo X é chamado de **homogêneo**, se existem abertos $U \subset M$ e $\mathcal{U} \in \mathfrak{X}^1(M)$ de X tais que:*

1. *Para todo $Y \in \mathcal{U}$, as singularidades de Y em $\tilde{U}$ são do tipo sela.*
2. *Cada elemento crítico de $Y \in \mathcal{U}$ em $\Lambda_Y(U)$ é hiperbólico.*
3. *Existe um inteiro não-negativo I tal que, para todo Y, o índice Ind_Y de cada elemento crítico de Y em $\Lambda_Y(U)$ é I.*

Veja que, pela definição, homogeneidade implica homogeneidade robusta, ou seja, se X é um campo homogêneo, então existe vizinhança $\mathcal{U}$ de X tal que, para todo $Y \in \mathcal{U}$, Y é homogêneo. A homogeneidade de Y é garantida tomando-se uma bola aberta contendo Y dentro de $\mathcal{U}$.

5.1.1 Recíprocas parciais

Utilizando resultados recentes de Gan-Wen, Li-Gan-Wen, Bonnati-da Luz e as construções de Morales-Pacífício-Pujals descritas em [6], buscamos provar o seguinte resultado dando respostas para a questão levantada inicialmente.

Teorema 5.1.3. *Seja Λ um sumidouro em uma variedade riemanniana M e $X|_\Lambda$ um campo C^1-robustamente expansivo, então $X|_\Lambda$ é um campo estrela. Em particular,*

1. *se $dimM = 3$, então, Λ é hiperbólico-seccional;*

2. *se* $dimM > 3$ *e* $X|_\Lambda$ *for um campo homogêneo, então* Λ *é hiperbólico-seccional e robustamente homogêneo;*

3. *se* $\Lambda = M$ *e não tem singularidades, então* X *é Axioma A sem ciclos.*

4. *se* $dimM = 3$ *ou* 4*, então* Λ *é* C^1*-genericamente hiperbólico-singular.*

Para obter as particularidades de que trata o teorema, precisamos provar e usar o seguinte:

Teorema 5.1.4. *Vamos assumir que para uma* C^1 *vizinhança* $\mathcal{U}$ *do campo de vetores* X *em* $\mathcal{X}^1(M)$ *existe um inteiro* $i \geq 1$ *tal que*

H1) todas as órbitas periódicas numa região armadilha U *são hiperbólicas do tipo-sela com índice* i*; e*

H2) as singularidades em U *são todas do tipo-Lorenz com índice* $i + 1$.

Então o sumidouro $\Lambda_X(U) = \cap_{t>0}\overline{X_t(U)}$ *é hiperbólico-seccional (onde* X_t *é o fluxo gerado por* X*).*

São estes os dois teoremas principais que pretendemos provar nos próximos passos da pesquisa. A seguir, apresentamos algumas estratégias para isso.

5.2 Estratégias para a prova do teorema 5.1.4 e 5.1.3

De acordo com o teorema 5.1.3, precisamos mostrar que campos C^1-robustamente expansivos são campos estrelas, isto é, para todo $Y \in \mathcal{X}^1(M)$ suficientemente próximo de um campo X robustamente expansivo, todas as suas singularidades e órbitas periódicas são hiperbólicas.

Provar a hiperbolicidade de tais elementos críticos é algo que surge em muitos trabalhos como consequência de outras características de um sistema. Por exemplo, em [33], Moriyasu-Sakai-Sumi provam que se X é um campo C^1 *topologicamente estável* pertencente ao interior do conjunto

de campos C^1 topologicamente estáveis, então X é um campo estrela (veja [[33], Proposição A]). Já em [9], Arbieto-Senos-Sodero mostram que se $X|_\Lambda$ tem *robustamente* a *propriedade de especificação fraca*, então suas singularidades e órbitas periódicas são hiperbólicas (veja [[9], Corolário 4.4, Teorema 6.2].

Para provarmos que C^1-expansividade robusta de $X|_\Lambda$ implica campo estrela, utilizaremos algumas ideias em [9] e os lemas encontrados em [33].

Estes lemas são essenciais para a prova de que as singularidades e órbitas periódicas são hiperbólicas. A ideia por trás destes lemas é que, para qualquer que seja o isomorfismo suficientemente próximo de $DX(p)$, podemos obter um campo que coincide com X fora de uma pequena vizinhança de p, que tem p como singularidade e cuja derivada seja o isomorfismo dado inicialmente e, quando quisermos provar que órbitas periódicas são hiperbólicas, usaremos uma ideia similar, mas para uma aplicação de Poincaré associada ao fluxo definida a seguir de tal forma que se p pertencer a uma órbita periódica, p será um ponto fixo para aplicação de Poincaré.

Na topologia C^1 é possível fazer ainda mais do que estes lemas trazem: podemos obter um campo C^1 próximo que coincida com sua derivada numa pequena vizinhança de p (ver [[33], lemas 1.2 e 1.3] e o lema de Franks em [19]).

Estes lemas juntamente com algumas técnicas encontradas em [9] são as ferramentas que usaremos para obter a parte principal do teorema 5.1.3: se $X|_\Lambda$ for C^1-robustamente expansivo, então $X|_\Lambda$ é um campo estrela.

A estratégia para provar o teorema 5.1.4 é assumir hiperbolicidade robusta de órbitas periódicas e usar as técnicas da prova do resultado principal em Morales-Pacífico-Pujals[37] estendido para variedades de dimensão maior que 3 em [35] para deduzir que o subconjunto não-errante $\Omega_\Lambda = \Lambda \cap \Omega(X)$ do sumidouro Λ é hiperbólico-seccional e então deduzir a hiperbolicidade-seccional para Λ.

Assumimos então que C^1-expansividade robusta implica hiperbolicidade das órbitas periódicas, de acordo com a primeira parte do teorema 5.1.3. Em uma variedade tridimensional, as hipóteses $H1$) e $H2$) são válidas para qualquer campo de vetores, com $i = 1$. Assim, assumindo o teorema

5.1.4 acima, prova-se que se M é uma variedade tridimensional, então Λ é hiperbólico-seccional.

E se dimensão de M for maior que 3? Já não vale mais as hipóteses $H1$) e $H2$), em geral. Introduzimos então a hipótese de que o campo $X|_\Lambda$ é homogêneo em U, assegurando $H1$) e $H2$). Com isso, conseguimos garantir o item 2) do teorema 5.1.3.

Quanto à existência de singularidades, se Λ não as possui, baseado no trabalho de Gan-Wen[20], precisamente no teorema seguinte, obtemos como corolário o item 3) ao supor $\Lambda = M$.

Teorema 5.2.1 ([20],Theorem A)**.** *Todo campo estrela sem singularidades é Axioma A e sem ciclos.*

Se Λ possui singularidades em dimensão 3 ou 4, Gan, Shi e Wen provam em [21] que existe um conjunto genérico G_* de campos estrelas tal que, para todo campo $X \in G_*$, X é hiperbólico-singular. Usamos este resultado e chegamos no item 4).

Por fim, combinando os teoremas A e B provados nos capítulos anteriores com o teorema 5.1.3 que pretendemos provar futuramente, podemos estabelecer os seguintes corolários:

Corolário 5.2.2. *Seja $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ e Λ um sumidouro contido em M, com $dimM = 3$. Então X é hiperbólico-seccional se, e somente se Λ é C^1-robustamente expansivo.*

Corolário 5.2.3. *Seja $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ e Λ um sumidouro contido em M, com $dimM > 3$, 1-fortemente dissipativo e homogêneo. Então X é hiperbólico-seccional se, e somente se Λ é C^1-robustamente expansivo.*

Bibliografia

[1] E. Akin, E. Glasner, W. Huang, S. Shao e X. Ye, Sufficient conditions under which a transitive system is chaotic, Ergodic Theory Dynam. Systems 30 (2010), no. 5, 1277-1310.

[2] V. Araújo, I. Melbourne: Existence and smoothness of the stable foliation for sectional hyperbolic attractors. Bull. London Math. Soc. 49 (2017) 351-367.

[3] V. Araújo, I. Melbourne: Smooth foliations versus decay of correlations for flows, 2017.

[4] V. Araújo, I. Melbourne, Mixing properties and statistical limit theorems for singular hyperbolic flows without a smooth stable foliation. ArXiv e-prints, 1711.08665, Nov. 2017.

[5] V. Araújo, I. Melbourne, P. Varandas, Rapid mixing for the Lorenz attractor and statistical limit laws for their time-1 maps. Commun. Math. Phys. 340, 901-938 (2015).

[6] V. Araújo, M. J. Pacifico, Three-dimensional flows, Vol. 53 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*, Springer, Heidelberg (2010), ISBN 978-3-642-11413-7. With a foreword by Marcelo Viana.

[7] V. Araújo, E. Pujals, M.J. Pacífico, M. Viana, : Singular-hyperbolic attractors are chaotic, Trans. Am. Math. Soc. 361, 2431-2485 (2009).

[8] V. Araújo, P. Varandas, Robust exponential decay of correlations for singular-flows. Commun. Math. Phys. (2012) 311:215-246.

[9] A. Arbieto, L. Senos, T. Sodero, The specification property for flows from the robust and generic viewpoint, J. Differential Equations 253 (2012) 1893-1909.

[10] A. Artigue, Kinematic expansive flows, Ergod. Th. e Dynam. Sys.(2016), 36, 390-421.

[11] M. Bessa, J. Rocha, Three-dimensional conservative star flows are Anosov. Discrete and Continuous Dynamical Systems-A, 26 (3), 839-846 (2010).

[12] C. Bonatti, Díaz, L. J., Viana, M., Dynamics beyond uniform hyperbolicity, volume 102 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 2005. A global geometric and probabilistic perspective, Mathematical Physics, III.

[13] C. Bonatti, A. Pumariño, M. Viana: Lorenz attractors with arbitrary expanding dimension. C. R. Acad. Sci., Sér. 1 Math. 325(8), 883-888 (1997).

[14] R. Bowen, Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms, *Lect. Notes in Math.*, Vol. 470, Springer Verlag. 1975.

[15] R. Bowen, D. Ruelle, The ergodic theory of Axiom A flows, *Invent. Math.*, 29, 181–202. 1975.

[16] R. Bowen, P. Walters. Expansive one-parameter flows. J. Differential Equations 12(1972), 180-193.

[17] M. Cerminara, J. Lewowicz. Some open problems concerning expansive systems. Rend. Instit. Mat. Univ. Trieste 42(2010), 129-141.

[18] C. Doering, A. Lopes, Equações Diferenciais Ordinárias. 3 ed. Rio de Janeiro:IMPA,2008. (Coleção Matemática Universitária)

[19] J. Franks. Necessary conditions for the stability of diffeomorphisms. Trans. A.M.S., 158:301-308, 1971.

[20] S. Gan, L. Wen, Nonsingular star flows satisfy Axiom A and no-cycle condition, Invent. Math. 164 (2006) 279-315.

[21] S. Gan, Y. Shi, L. Wen, On the singular hyperbolicity of star flows. Journal of Modern Dynamics. October, 2013.

[22] P. Hartman, : Ordinary differential equations. 2002 (Classics in Applied Mathematics)

[23] S. Hayashi, Connecting invariant manifolds and the solution of the C^1 stability and Ω-stability conjectures for flows, *Annals of Math.*, 145, no. 1, 81-137. 1997.

[24] H. B. Keynes, M. Sears. F-expansive transformation group. Gen. Topology Appl.(1979), 67-85.

[25] M. Komuro. Expansive properties of Lorenz attractors. In the theory of dynamical systems and its applications to nonlinear problems, pages 4-26. World Sci. Publishing, Kyoto, 1984. MR797594 (86j: 58082).

[26] J. Lewowicz, Lyapunov functions and topological stability, J. Differential Equations, 38(2), 192-209. 1980.

[27] S. Liao, On the stability conjecture, *Chinese Ann. of Math.*, 1, 9-30. 1980.

[28] T. Y. Li, J. A. Yorke, Period three implies chaos, Amer. Math. Monthly 82 (1975), no. 10, 985-992. MR 0385028 (525898)

[29] E.N. Lorenz, Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.* 20, 130-141 (1963).

[30] R. Mañé, Contributions to the stability conjecture, *Topology*, 17, 383-396. 1978.

[31] R. Mañé, A proof of C^1-stability conjecture, *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.*, 66, 161-210. 1988.

[32] C.A. Morales, M. J. Pacífico and E. R. Pujals. Robust transitive singular sets for 3-flows are partially hyperbolic attractors or repellers. Ann. of Math. (2), 160(2):375-432, 2004.

[33] K. Moriyasu, K. Sakai, N. Sumi, Vector fields with topological stability, Trans. Amer. Math. Soc. 353 (8) (2001) 3391-3408.

[34] M. Do Carmo, Geometria riemanniana, 5 ed. Coleção projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

[35] R. Metzger, C. Morales, Sectional-hyperbolic systems, *Ergodic Theory and Dynamical System*, 28 1587–1597. 2008.

[36] C. Morales, Examples of singular-hyperbolic attracting sets, *Dynamical Systems: An International Journal*, 22:3, 339-349.

[37] C. Morales, M. J. Pacifico, E. R. Pujals, , Robust transitive singular sets for 3-flows are partially hyperbolic attractors or repellers, *Ann. of Math.*, (2), 160, no. 2, 375–432. 2004.

[38] J. Palis, W. De Melo, Introdução aos Sistemas Dinâmicos. *Instituto de Matemática Pura e Aplicada*. Rio de Janeiro:1977.

[39] J. Palis, S. Smale, Structural stability theorems, *Proc. A. M. S. Symp. Pure Math.*, 14, 223-232. 1970.

[40] V. Pliss, On a conjecture due to Smale, *Differ. Uravn.*, 8, 262–268. 1972.

[41] L. S. Salgado, Sobre hiperbolicidade fraca para fluxos singulares. Tese de doutorado em matemática. Rio de Janeiro UFRJ/PGPIM, 2012.

[42] M. Sambarino, Hiperbolicidad y estabilidad, *XXII Escuela venezolana de matematicas*. Merida, Venezuela, 09/09/2009.

[43] S. Smale, Differentiable dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, Vol. 73. 747-817. 1967.

[44] Y. Sinai, Markov partitions and C-diffeomorphisms, *Func. Anal. and Appl.*, 2, 64–89. 1968.

[45] J. Smital, Chaotic functions with zero topological entropy, Trans. Amer. Math. Soc. 297 (1986), no.1, 269-282.

[46] W. Tucker, The Lorenz attractor exists, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 328, Série I, 1197–1202. 1999.

[47] P. Zgliczyski, . Topological shadowing and the Grobman-Hartman theorem. *Topol. Methods Nonlinear Anal* .50 (2017), no. 2, 757-785. doi: 10.12775/TMNA.2017.044

Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática e Estatística / Colegiado da Pós-Graduação em Matemática

Av. Adhemar de Barros, s/n, Campus Universitário de Ondina, Salvador - BA
CEP: 40170 -110
<http://www.pgmat.ufba.br>