Universidade Federal de Alagoas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

TESE DE DOUTORADO

A dimensão de Gelfand-Kirillov em característica positiva

por

Fernanda Gonçalves de Paula

Doutorado em Matemática - Maceió - AL

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Mota Alves

DEDICATÓRIA

Ao meu esposo Raul e meu filho Gustavo.
Aos meus pais Hilda e Antônio.
Às minhas irmãs Fabiana, Patrícia e Aline.
Aos meus tios Iracy e Carlos.
À minha prima Marina e minha avó Hamilta.

AGRADECIMENTOS

ABSTRACT

The verbally prime algebras are well understood in characteristic 0 while over a field of characteristic $p > 2$ little is known about them. In this work we discuss some sharp differences between these two cases for the characteristic. We discuss some properties about the algebras $A_{a,b}$ and $M_{a,b}(E) \otimes E$ in positive characteristic and we use this properties to compute the Gelfand-Kirillov dimension of the relatively free algebras of rank m in the varietie generated by $M_{a,b}(E) \otimes E$. We exhibit a construction of a generic model to the algebra $U_m(M_n(E) \otimes E)$. By using these models we compute the Gelfand-Kirillov dimension of the relatively free algebras of rank m in the varietie generated by $M_n(E) \otimes E$. As consequence we obtain the PI non equivalence of important algebras for the PI theory in positive characteristic. Finally, we launch a conjecture about the Gelfand-Kirillov dimension of the universal algebras, concerning the tensorial product of verbally prime algebras by Grassmann algebra.

RESUMO

As álgebras verbalmente primas são bem conhecidas em característica 0, já sobre corpos de característica $p > 2$ pouco sabemos sobre elas. Nesse trabalho vamos discutir algumas diferenças entre estes dois casos de característica sobre corpos infinitos. Discutiremos algumas propriedades envolvendo as álgebras $A_{a,b}$ e $M_{a,b}(E) \otimes E$ em característica positiva e usaremos estas propriedades para calcular a dimensão de Gelfand-Kirillov da álgebra relativamente livre de posto m na variedade gerada por $M_{a,b}(E) \otimes E$. Apresentaremos um modelo genérico para $U_m(M_n(E) \otimes E)$. Usando este modelo, calcularemos a dimensão de Gelfand-Kirillov das álgebras relativamente livres de posto m na variedade determinada pela álgebra $M_n(E) \otimes E$. Como conseqüência, obteremos a prova da não PI-equivalência entre álgebras importantes para PI-teoria em característica positiva. Por fim, lançaremos uma conjectura acerca da dimensão de Gelfand-Kirillov de álgebras universais, no que diz respeito ao produto tensorial de álgebras verbalmente primas pela álgebra de Grassmann.

CONTEÚDO

INTRODUÇÃO

A área do conhecimento matemático na qual este trabalho se insere é álgebra: teoria de anéis, e mais especificamente, na teoria das álgebras com identidades polinomiais (PI-álgebras).

As álgebras de matrizes sobre anéis, bem como as álgebras comutativas e as de dimensão finita são objetos de estudo de grande importância devido ao seu amplo aspecto de aplicações. Estas álgebras são exemplos de estruturas que compartilham o fato de satisfazerem relações polinomiais entre seus elementos. Mais precisamente, para cada uma das álgebras acima, existe um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n)$ com variáveis não comutando que se anula quando avaliado nos elementos das mesmas. A álgebra que cumpre esta condição é denominada uma álgebra com identidade polinomial, ou simplesmente uma PI-álgebra. Seu estudo, a grosso modo, consiste em relacionar o efeito das identidades polinomiais na estrutura das álgebras que as satisfazem.

Historicamente, o desenvolvimento da Teoria de Identidades Polinomiais começou na década de 30, com os trabalhos de Dëhn e Wagner. Nesses trabalhos aparecem, embora de forma implícita, algumas identidades polinomiais para as matrizes de ordem 2. Temos de ressaltar que tais conceitos encontram-se ainda em trabalhos de Sylvester, por volta de 1852. Mas a pesquisa das PI-álgebras começou a se intensificar por volta dos anos 1950, época do celebre Teorema de Amitsur e Levitzki, um resultado clássico mostrando que a álgebra das matrizes de ordem n com entradas num corpo satisfazem o polinômio standard de grau $2n$ (isto é, a somatória alternada de todos os produtos de $2n$ matrizes de ordem n é sempre igual a matriz nula). Na mesma época, algebristas reconhecidos deram contribuições importantes para a PI teoria. Podemos relacionar aqui os nomes de Jacobson, Kaplansky, Herstein, Malcev, Cohn, Shirshov, entre outros. Vários algebristas têm trabalhado na área; segue uma lista de nomes (sem qualquer pretensão de ser completa): Posner, Procesi, Regev, Razmyslov, Braun, Formanek, Swan, Latyshev, Bahturin, Zelmanov, Rowen, Kemer, Drensky, Giambruno, Zaicev, Berele.

As álgebras verbalmente primas desempenham um papel proeminente na PI-teoria. Lembramos que uma álgebra é verbalmente prima se seu T-ideal é primo na classe de todos os T-ideais na álgebra associativa livre. A maioria dos resultados conhecidos sobre álgebras verbalmente primas trata do caso de corpos de característica zero. A teoria estrutural de T-ideais desenvolvida por Kemer classificou as álgebras verbalmente primas sobre tais corpos. Mais ainda, Kemer mostrou que os T-ideais verbalmente semiprimos são intersecções finitas de T-ideais verbalmente primos, e finalmente que se $\mathcal{I}$ é um T-ideal então $\mathcal{J}^n \subseteq \mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$ para alguma escolha de n e de um T-ideal $\mathcal{J}$ verbalmente semiprimo.

Denotando por K o corpo de base, $\operatorname{char} K = 0$, de acordo com a teoria de Kemer as álgebras verbalmente primas são exatamente as seguintes: Primeiro as triviais; $\{0\}$ e $K\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre de posto infinito. Por conseguinte, $M_n(K)$, a álgebra das matrizes $n\times n$ com entradas em K. Denotamos por E a álgebra de Grassmann (ou exterior) do espaço vetorial V com base $\{e_1, e_2, \dots\}$. Então, E tem base consistindo dos elementos 1 e $e_{i_1}\dots e_{i_k}$ onde $i_1 < \cdots < i_k$ e $k = 1, 2, \dots$ e a multiplicação em E é induzida por $e_ie_j = -e_je_i$ para todos i e j. Outra classe de álgebras verbalmente primas é dada pela álgebra das matrizes $n \times n$ com entradas em E, denotada por $M_n(E)$. A álgebra E tem $\mathbb{Z}_2$-graduação natural definida como segue: Seja E_0 o centro de E, então E_0 é gerado como espaço vetorial por todos os monômios na base de E com comprimento par, denotamos por E_1 o espaço gerado pelos monômios de comprimento ímpar. Então, os elementos de E_1 anti-comutam. Definimos agora a última classe de álgebras verbalmente primas, denotada por $M_{a,b}(E)$. Esta é a subálgebra de $M_{a+b}(E)$ que consiste de todas as matrizes

$$\begin{pmatrix} M_a(E_0) & M_{a\times b}(E_1) \\ M_{b\times a}(E_1) & M_b(E_0) \end{pmatrix}.$$

Duas álgebras $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são ditas PI-equivalentes, escrevemos $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$, se elas satisfazem as mesmas identidades polinomiais. Como uma conseqüência de sua teoria estrutural Kemer descreveu a PI-equivalência nos produtos tensoriais de álgebras verbalmente primas.

Esta descrição é conhecida como

Teorema do Produto Tensorial(T.P.T.). Seja char $K = 0$. Então,

(1) $M_{a,b}(E) \otimes E \sim M_{a+b}(E)$;

(2) $M_{a,b}(E) \otimes M_{c,d}(E) \sim M_{ac+bd,ad+bc}(E)$;

(3) $E \otimes E \sim M_{1,1}(E)$.

Aqui, e no que segue, todos os produtos tensoriais são considerados sobre o corpo K.

Como conseqüência de sua teoria estrutural Kemer (1987) resolveu em afirmativo o famoso e antigo problema (1950) dado por Specht: Todo T-ideal é finitamente gerado como um T-ideal? Uma das principais ferramentas utilizadas nesta tarefa foram as identidades graduadas. Recomendamos a leitura de [22] para mais detalhes sobre a teoria estrutural de PI-álgebras e as contribuições de Kemer nesta teoria.

O Teorema do Produto Tensorial admite provas que independem da teoria estrutural. A primeira tal prova foi dada por Regev [31], e mais tarde Di Vincenzo; Di Vincenzo e Nardozza, provaram casos deste teorema, veja ([16],[17],[18]). Lembramos que todas estas provas foram construídas sob a hipótese que o corpo base é de característica zero. Outras provas elementares de casos do T.P.T. foram dadas em ([9],[10],[24]). Voltamos nossa atenção para o fato que em ([9],[10],[24]), o comportamento dos correspondentes T-ideais em característica positiva foi estudado. Nestes os autores provaram que o T.P.T. continua válido sobre corpos infinitos de característica positiva $p > 2$, restringindo-se somente as identidades polinomiais multilineares. Mais ainda, em [9], eles provaram que a terceira afirmação do T.P.T. falha e, em [10], também provaram que a primeira afirmação falha (quando $a = b = 1$).

Em [24] os autores construíram um modelo apropriado para a álgebra relativamente livre na variedade das álgebras determinadas por $E \otimes E$ quando char $K = p > 2$. Este modelo é a álgebra genérica de $\mathcal{A} = K \oplus M_{1,1}(E')$ onde E' denota a álgebra de Grassmann sem unidade. Eles provaram que as álgebras $\mathcal{A}$ e $E \otimes E$ satisfazem as mesmas identidades polinomiais ordinárias. Usando propriedades da álgebra $\mathcal{A}$, em [9], os autores provaram que $T(M_{1,1}(E)) \subsetneq T(E \otimes E)$ em característica positiva. Mais ainda, em [10], foram construídas subálgebras $A_{a,b}$ de $M_{a+b}(E)$(veja Exemplo 1.1.8) e $A_{1,1}$ foi utilizada para estabelecer a inclusão $T(M_2(E)) \subsetneq T(M_{1,1}(E) \otimes E)$. Também em [10], provaram que $M_{1,1}(E) \otimes E \sim A_{1,1}$.

A dimensão de Gelfand-Kirillov foi introduzida originalmente por Gelfand e Kirillov (1966) para estudar o crescimento de álgebras de Lie de dimensão finita, posteriormente tornou-se um importante invariante para álgebras afins, pois a mesma independe da escolha de seu conjunto de geradores (ao contrário das séries de Hilbert). Uma referência padrão sobre GK-dimensão é o livro de Krause e Lenagan (veja [25]), que também contém os principais resultados sobre GK-dimensão para PI-álgebras.

As álgebras relativamente livres (também chamadas de universais) de posto m, $U_m(M_n(E))$ e $U_m(M_{a,b}(E))$, nas variedades determinadas por $M_n(E)$ e $M_{a,b}(E)$, respectivamente, foram construídas por Berele em [11]. No que segue vamos assumir que o posto das respectivas álgebras relativamente livre é ≥ 2. Em [29], Procesi calculou a GK-dimensão da álgebra gerada por m matrizes genéricas de ordem n, ou seja, mostrou que $\mathrm{GKdim}\,[U_m(M_n(K))] = (m-1)n^2+1$. Em [11], Berele mostrou que $\mathrm{GKdim}\,[U_m(M_n(E))] = (m-1)n^2+1$ e $\mathrm{GKdim}\,[U_m(M_{a,b}(E))] = (m-1)(a^2+b^2)+2$.

Nos resultados obtidos nos artigos [5] e [6], Alves e Koshlukov, usando potências do polinômio standard, completaram a demonstração de que o Teorema do Produto Tensorial de Kemer não pode ser transportado para corpos infinitos de característica maior que dois. Mais ainda, através da construção de modelos genéricos apropriados, calcularam a dimensão de Gelfand-Kirillov das álgebras universais determinadas pelas álgebras: $E\otimes E$, $M_{a,a}(E)\otimes E$ e $A_{a,b}$ quando o corpo de base é infinito com $\mathrm{char}\, K = p > 2$. Como conseqüência, obtiveram a não PI-equivalência entre álgebras relacionadas com as mesmas, que desempenham um papel importante na PI-teoria.

Neste trabalho, apresentaremos os resultados obtidos nos artigos [4], [3] e [1]. A essência deste trabalho está na tentativa de generalizar métodos e resultados desenvolvidos por Procesi e Berele em característica zero.

Mais especificamente:

- Calculamos a GK-dimensão da álgebra relativamente livre de posto m, $U_m(M_{a,b}(E)\otimes E)$, na variedade gerada por $M_{a,b}(E)\otimes E$, em característica positiva $p > 2$.

- Obtemos, como consequência do item anterior, a não PI-equivalência das álgebras $M_{a,b}(E)\otimes E$ e $M_{a+b}(E)$ em característica positiva $p > 2$ e tambÃ©m respondemos à seguinte questão deixada em [10]:

Sabemos que $T(M_{a,b}(E)\otimes E) = T(M_{c,d}(E)\otimes E)$ quando $a+b=c+d$ e $\mathrm{char}\,K=0$. Isto é verdade quando $\mathrm{char}\,K=p>2$?

- Calculamos $\mathrm{GKdim}\,[U_m(M_n(E)\otimes E)]$ quando $\mathrm{char}\,K=p>2$ e $n>1$e obtemos, a partir deste cálculo, uma nova prova da não PI-equivalência das álgebras $M_{n,n}(E)$ e $M_n(E)\otimes E$.
- Com base nos itens anteriores, lançamos uma conjectura acerca da dimensão de Gelfand-Kirillov de álgebras universais, no que diz respeito ao produto tensorial de álgebras verbalmente primas pela álgebra de Grassmann.

O texto está organizado em quatro capítulos. Ressaltamos que procuramos torná-los o mais independente possível. Os capítulos foram estruturados da seguinte forma:

- O Capítulo 1 é dedicado às definições preliminares e apresentação de alguns dos nossos objetos de estudo, bem como alguns aspectos históricos e resultados clássicos que motivaram o desenvolvimento da teoria das Identidades Polinomiais, ou simplesmente PI-teoria. Este capítulo auxilia o leitor como referência aos resultados básicos. Ressaltamos que para um leitor com bom conhecimento básico da PI-teoria, este capítulo pode ser evitado sem comprometimento dos demais. Optamos por não discutir a dimensão de Gelfand-Kirillov neste capítulo e deixar isso para o capítulo 3.
- O Capítulo 2 é dedicado ao Teorema do Produto Tensorial de Kemer. Inicialmente, apresentamos um breve resumo sobre a teoria estrutural dos T-ideais desenvolvida por Kemer para álgebras sobre corpos de característica zero. Em seguida apresentamos o Teorema do Produto Tensorial de Kemer e os resultados conhecidos sobre o mesmo, até o início de nossos estudos, quando o corpo de base é infinito com característica $p>2$. Por último estabelecemos a inclusão $T(A_{a,b}(E))\subseteq T(M_{a,b}\otimes E)$ para $a\neq b$ em característica $p>2$.
- O Capítulo 3 é dedicado à dimensão de Gelfand-Kirillov. Iniciamos apresentando conceitos básicos e estudando o comportamento da GK-dimensão com respeito a altura. Apresentamos um breve estudo sobre a GK-dimensão das álgebras universais e alguns resultados importantes obtidos anteriormente aos nossos estudos. Calculamos a GK-dimensão da álgebra universal de posto m na variedade gerada por $M_{a,b}(E)\otimes E$ em

característica positiva e a partir deste cálculo concluímos que $M_{a,b}(E) \otimes E \nsim M_{a+b}(E)$. Apresentamos um modelo genérico apropriado para $U_m(M_n(E) \otimes E)$ e, a partir deste, calculamos a GK-dimensão do mesmo em característica positiva. A partir deste cálculo, obtemos uma nova prova de que as álgebras $M_{n,n}(E)$ e $M_n(E) \otimes E$ não são PI-equivalentes.

- O Capítulo 4 é dedicado à apresentação de uma conjectura acerca da dimensão de Gelfand-Kirillov de álgebras universais, no que diz respeito ao produto tensorial de álgebras verbalmente primas pela álgebra de Grassmann.

Acreditamos que os resultados contidos neste trabalho vão em direção a uma melhor compreensão dos T-ideais em característica positiva. Compreensão esta, ainda além dos nossos conhecimentos atuais.

CAPÍTULO 1

CONCEITOS PRELIMINARES

Nosso objetivo neste capítulo é relembrar definições e resultados importantes para uma melhor compreensão do texto. Em geral, não apresentaremos demonstrações, e em casos mais importantes, indicaremos as devidas referências bibliográficas.

1.1 Conceitos básicos sobre álgebras

Iniciamos com a definição do objeto central de nossos estudos.

Definição 1.1.1. *Diremos que um K-espaço vetorial $\mathcal{A}$ munido de uma operação binária, $* : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, denominada de multiplicação, tem estrutura de K-álgebra (ou $\mathcal{A}$ é uma álgebra sobre K, ou simplesmente que $\mathcal{A}$ é uma álgebra) se, para qualquer $\alpha \in K$ e quaisquer $a, b, c \in \mathcal{A}$, valer:*

(1) $(a + b) * c = a * c + b * c$;

(2) $a * (b + c) = a * b + a * c$;

(3) $\alpha(a * b) = (\alpha a) * b = a * (\alpha b)$

Para simplificar a notação, vamos escrever $\underline{ab}$ ao invés de $\underline{a * b}$.

Definição 1.1.2. *Seja $\mathcal{A}$ uma K-álgebra, diremos que:*

(1) $\mathcal{A}$ *é comutativa, se* $ab = ba$ *para quaisquer* $a, b \in \mathcal{A}$*;*

(2) $\mathcal{A}$ *é associativa, se* $(ab)c = a(bc)$ *para quaisquer* $a, b, c \in \mathcal{A}$*;*

(3) $\mathcal{A}$ *é unitária, se existir* $1_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$ *tal que* $1_{\mathcal{A}}a = a1_{\mathcal{A}} = a$ *para qualquer* $a \in \mathcal{A}$ *(vamos escrever* $\underline{1}$ *ao invés de* $\underline{1_{\mathcal{A}}}$*).*

Em praticamente todo texto vamos trabalhar com álgebras associativas unitárias tendo corpo de base infinito. Assim, no que segue, a menos que seja feita menção explícita em contrário, o termo <u>álgebra</u> deverá ser entendido como uma <u>K-álgebra associativa unitária</u>.

Definição 1.1.3. *Um* K*-subespaço vetorial* $\mathcal{B}$ *de uma álgebra* $\mathcal{A}$ *será denominado uma* K*-subálgebra de* $\mathcal{A}$*, se tiver estrutura de álgebra, isto é, se* $\mathcal{B}$ *for fechado com respeito a operação binária de* $\mathcal{A}$*. O subespaço* $\mathcal{B}$ *será denominado um ideal à esquerda de* $\mathcal{A}$*, se* $\mathcal{AB} \subseteq \mathcal{B}$*. De modo similar, definimos ideal à direita de* $\mathcal{A}$*. Um ideal bilateral será simplesmente denominado de ideal.*

Nos próximos sete exemplos recordamos as definições de algumas álgebras e subálgebras que serão utilizadas no decorrer do texto.

Exemplo 1.1.4. *Seja* $\mathcal{V}$ *um* K*-espaço vetorial com base enumerável* $\{e_i \mid i \in I\}$*. A álgebra de Grassmann (ou exterior)* $E = E(\mathcal{V})$ *é a álgebra associativa gerada por* $\{1, e_i \mid i \in I\}$ *satisfazendo as relações*

$$e_ie_j = -e_je_i \text{ para todos } i, j \in I.$$

Mais ainda, se $\mathrm{char}\, K = 2$*, impomos:*

$$e_i^2 = 0 \text{ para todo } i \in I.$$

Observe que $D = \{1, e_{i_1} \dots e_{i_r} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_r; r = 1, 2, \dots\}$ *é uma base para* E*. Além disso, se* $\mathcal{V}_n$ *é um subespaço de* $\mathcal{V}$ *gerado por* $\{e_1, \dots, e_n\}$ *denotaremos por* $E(\mathcal{V}_n)$ *sua correspondente álgebra de Grassmann.*

Exemplo 1.1.5. *O conjunto* $Z(\mathcal{A}) = \{a \in \mathcal{A} \mid ax = xa, \forall x \in \mathcal{A}\}$ *é uma subálgebra de* $\mathcal{A}$ *denominada o centro de* $\mathcal{A}$ *e seus elementos são ditos ser centrais. Se* $\mathcal{A} = E$ *(álgebra de Grassmann) é fácil ver que* $Z(E) = E_0$ *onde* E_0 *é o subespaço de* E *gerado pelo conjunto* $D_0 = \{1, e_{i_1} \dots e_{i_r} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_r; r = 2, 4, \dots\}$*.*

Exemplo 1.1.6. *O K-espaço vetorial das matrizes $n \times n$ com entradas no corpo K, denotado por $M_n(K)$, munido com a multiplicação usual de matrizes, tem estrutura de álgebra.*

Exemplo 1.1.7. *O K-espaço vetorial das matrizes $n \times n$ com entradas na álgebra de Grassmann E, denotado por $M_n(E)$, munido com a multiplicação usual de matrizes, tem estrutura de álgebra. Sejam $a, b \in \mathbb{N}$ com $a + b = n$, é fácil verificar através de multiplicação de matrizes, que o K-subespaço de $M_{a+b}(E)$*

$$M_{a,b}(E) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mid A \in M_a(E_0), B \in M_{a\times b}(E_1), C \in M_{b\times a}(E_1), D \in M_b(E_0) \right\},$$

tem estrutura de álgebra. Aqui, E_1 é o subespaço de E gerado por

$$D_1 = \{e_{i_1} \dots e_{i_r} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \ ; r = 1, 3, \dots\}.$$

Observamos que os elementos de E_1 anticomutam entre si.

Exemplo 1.1.8. *Sejam $a, b \in \mathbb{N}$ com $a + b = n$, é fácil verificar através de multiplicação de matrizes, que o K-subespaço de $M_{a+b}(E)$*

$$A_{a,b} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mid A \in M_a(E), B \in M_{a\times b}(E'), C \in M_{b\times a}(E'), D \in M_b(E) \right\}$$

tem estrutura de álgebra. Aqui, E' denota a álgebra de Grassmann sem unidade.

Exemplo 1.1.9. *Seja $\mathcal{A}'$ uma álgebra sem unidade. Podemos mergulhar $\mathcal{A}'$ numa álgebra com unidade. Com efeito, seja $\mathcal{A} = K \oplus \mathcal{A}'$ como soma direta de espaços vetoriais. Definimos em $\mathcal{A}$ a seguinte multiplicação, para todos $a, b \in \mathcal{A}'$ e para todos $\alpha, \beta \in K$*

$$(\alpha, a)(\beta, b) = (\alpha\beta, \alpha b + a\beta + ab).$$

Assim, $(1, 0)$ é unidade de $\mathcal{A}$ e a inclusão $\mathcal{A}' \hookrightarrow \mathcal{A}$ é um mergulho. Diremos que $\mathcal{A}$ é obtida a partir de $\mathcal{A}'$ por adjunção da unidade.

Exemplo 1.1.10. *Consideramos agora a subálgebra de $M_{a+b}(K)$ definida por:*

$$M_a M_b = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \mid A \in M_a(K); B \in M_{a\times b}(K) \text{ e } C \in M_b(K) \right\}.$$

Denotaremos por $\overline{M_a M_b}$ a subálgebra de $M_a M_b$ obtida considerando $B = 0$.

Definição 1.1.11. *Uma transformação linear $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ de álgebras é um homomorfismo, se $\Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b)$ para quaisquer $a, b \in \mathcal{A}$ e além disso $\Phi(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{B}}$. Analogamente às demais estruturas algébricas, chamamos Φ de isomorfismo quando Φ for um homomorfismo bijetor, mergulho quando Φ for injetor, endomorfismo quando Φ for um homomorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{A}$ e automorfismo quando Φ for um endomorfismo bijetor.*

1.2 Álgebras com identidades polinomiais

Nesta seção, introduziremos as álgebras com identidades polinomiais, uma classe muito importante de álgebras. Pois, além de surgirem como uma generalização das álgebras nilpotentes, comutativas e as de dimensão finita, elas mantém várias das boas propriedades destas classes.

Definição 1.2.1. *Para o conjunto $X = \{x_1, x_2, \ldots, \}$ de variáveis não comutativas, $K\langle X\rangle$ denotará a álgebra associativa livre, isto é, $K\langle X\rangle$ tem como base os elementos da forma*

$$x_{i_1} \ldots x_{i_n} \ ; x_{i_j} \in X \ ; n = 0, 1, 2, \ldots$$

e a multiplicação definida por

$$(x_{i_1} \ldots x_{i_k})(x_{j_1} \ldots x_{j_l}) = x_{i_1} \ldots x_{i_k} x_{j_1} \ldots x_{j_l} \text{ onde } x_{i_t}, x_{j_s} \in X.$$

Os elementos de $K\langle X\rangle$ são denominados de polinômios.

O subespaço $K\langle X\rangle' \subset K\langle X\rangle$ gerado pelos elementos da forma

$$x_{i_1} \ldots x_{i_n} \ ; x_{i_j} \in X \ ; n = 1, 2, \ldots$$

é uma subálgebra denominada de álgebra associativa livre sem unidade.

Observe que a álgebra $K\langle X\rangle$ definida acima é, noutras palavras, a álgebra dos polinômios não comutativos.

Definição 1.2.2. *Um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n) \in K\langle X\rangle$ (ou a expressão $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$) é denominado uma identidade polinomial da álgebra $\mathcal{A}$, se $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$. Uma álgebra com identidade polinomial (PI-álgebra) é uma álgebra que satisfaz uma identidade polinomial não trivial.*

Seguem alguns exemplos importantes de álgebras com identidades polinomiais, ou seja, de PI-álgebras.

Exemplo 1.2.3. *Toda álgebra comutativa $\mathcal{A}$ é uma PI-álgebra, pois o polinômio comutador $f(x_1, x_2) = [x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$ é uma identidade polinomial para $\mathcal{A}$.*

Exemplo 1.2.4. *A álgebra de Grassmann E é uma PI-álgebra, pois um cálculo direto usando os elementos da base de E mostra que o polinômio $f(x_1, x_2, x_3) = [[x_1, x_2], x_3]$ é uma identidade polinomial para E.*

Exemplo 1.2.5. *(Regev, [19]) Seja E' a álgebra de Grassmann sem unidade sobre um corpo infinito K com $\operatorname{char} K = p \neq 0$. Então, $f(x) = x^p$ é uma identidade polinomial para E'.*

Exemplo 1.2.6. *A álgebra $M_2(K)$ satisfaz a identidade $f(x_1, x_2, x_3) = [[x_1, x_2]^2, x_3]$ conhecida como a identidade de Hall. A verificação é simples, basta observarmos dois fatos:*

(1) Se $a, b \in M_2(K)$ então $tr([a, b]) = 0$;

(2) Se $a \in M_2(K)$ e $tr(a) = 0$ então $a^2 = \lambda I_2$ onde I_2 é a matriz identidade de $M_2(K)$.

Exemplo 1.2.7. *(Teorema de Amitsur-Levitzki, [19]) A álgebra $M_n(K)$ satisfaz o polinômio standard de grau $2n$*

$$s_{2n}(x_1, \ldots, x_{2n}) = \sum_{\sigma \in S_{2n}} (-1)^{\sigma} x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(2n)}$$

onde S_{2n} é o grupo das permutações de $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ e $(-1)^{\sigma}$ é o sinal da permutação σ. Ademais, não satisfaz identidades sob a forma, s_m^k, para todo k quando $m < 2n$.

Exemplo 1.2.8. *Uma K-álgebra $\mathcal{A}$ é dita ser uma Nil-álgebra se para cada $a \in \mathcal{A}$ existe um número natural n tal que $a^n = 0$. O menor inteiro n com tal propriedade é denominado índice de nilpotência do elemento a. Uma álgebra $\mathcal{A}$ é uma Nil-álgebra de índice n se $a^n = 0$ para todo $a \in \mathcal{A}$. Toda Nil-álgebra de índice limitado n é uma PI-álgebra, pois satisfaz o polinômio $f(x) = x^n$.*

Exemplo 1.2.9. *Uma K-álgebra $\mathcal{A}$ é dita ser nilpotente se existe um natural fixo n tal que o produto de quaisquer n elementos de $\mathcal{A}$ é igual a zero. O menor natural n com tal propriedade é denominado o índice de nilpotência da álgebra $\mathcal{A}$, e $\mathcal{A}$ é denominada uma álgebra nilpotente de classe $n-1$. Toda álgebra associativa nilpotente de classe $n-1$ é uma PI-álgebra, pois ela satisfaz o polinômio $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \ldots x_n$. (Observamos que neste exemplo e no anterior, as álgebras consideradas não possuem unidade.)*

Aqui mencionamos brevemente que o clássico Teorema de Nagata, Higman, Dubnov e Ivanov, afirma que em característica 0, toda nil-álgebra de índice limitado, é nilpotente. Ver para mais detalhes Capítulo 8 de [19].

Exemplo 1.2.10. *(Regev,[33]) O produto tensorial $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ de duas PI-álgebras é uma PI-álgebra.*

Após vários exemplos de PI-álgebras, surge uma pergunta inevitável: Existem álgebras que não são PI-álgebras ? A resposta é sim. A álgebra $K\langle X\rangle$, por exemplo, não satisfaz nenhuma identidade polinomial não nula. Isto pode ser compreendido por um argumento simples. Suponhamos, por absurdo, que $f(x_1, \ldots, x_n)$ seja uma identidade polinomial não nula de $K\langle X\rangle$. Assim, $f(f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)) = 0$ onde $f_i(x_i) = x_i$ para $i = 1, \ldots, n$, o que é um absurdo, pois $f(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$.

O próximo teorema mostra que toda álgebra de dimensão finita é também uma PI-álgebra.

Teorema 1.2.11. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de dimensão finita, digamos n. Então, ela satisfaz o polinômio standard de grau $n+1$, isto é, o polinômio*

$$s_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{\sigma \in S_{n+1}} (-1)^{\sigma} x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n+1)}.$$

Prova: Da definição de polinômio standard é imediato que ele é igual a zero, se dois de seus argumentos forem iguais. Por multilinearidade, é suficiente verificarmos numa base de $\mathcal{A}$, digamos $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Observe que $s_{n+1}(e_{i_1}, \ldots, e_{i_{n+1}})$ é tal que ao menos dois dos e_{i_j} são iguais. Daí, s_{n+1} é identidade polinomial para $\mathcal{A}$. ■

Definição 1.2.12. *Um ideal $\mathcal{I}$ de uma álgebra $\mathcal{A}$ é dito ser um T-ideal, se $\mathcal{I}$ for invariante sob todos os endomorfismos Φ de $\mathcal{A}$, isto é, se $\Phi(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{I}$ para todo endomorfismo $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$.*

Teorema 1.2.13. *O ideal $T(\mathcal{A})$ das identidades da álgebra $\mathcal{A}$ é um T-ideal de $K\langle X\rangle$.*

Prova: Sejam $f(x_1, \ldots, x_n) \in T(\mathcal{A})$ e $\Phi : K\langle X\rangle \to K\langle X\rangle$ um endomorfismo. Como $\Phi(f(x_1, \ldots, x_n)) = f(\Phi(x_1), \ldots, \Phi(x_n))$ e $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$, obtemos que, $\Phi(f(x_1, \ldots, x_n)) \in T(\mathcal{A})$. Portanto, $\Phi(T(\mathcal{A})) \subseteq T(\mathcal{A})$. ■

Teorema 1.2.14. *Se $\mathcal{I}$ é um T-ideal de $K\langle X\rangle$, então, $\mathcal{I} = T(K\langle X\rangle/\mathcal{I})$.*

Prova: Sejam $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{I}$ e $f_1, \ldots, f_n \in K\langle X\rangle$. Como $f(f_1, \ldots, f_n) \in \mathcal{I}$, temos que

$$f(f_1 + \mathcal{I}, \ldots, f_n + \mathcal{I}) = f(f_1, \ldots, f_n) + \mathcal{I} = \mathcal{I}.$$

Logo, $\mathcal{I} \subseteq T(K\langle X\rangle/\mathcal{I})$. Por outro lado, supondo-se que $f(x_1, \ldots, x_n) \in T(K\langle X\rangle/\mathcal{I})$, obtemos $\mathcal{I} = f(x_1 + \mathcal{I}, \ldots, x_n + \mathcal{I}) = f(x_1, \ldots, x_n) + \mathcal{I}$. Donde, $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{I}$. ■

Definição 1.2.15. *Seja B um conjunto gerador de $T(\mathcal{A})$ para uma álgebra $\mathcal{A}$, diremos que B é uma base de identidades de $\mathcal{A}$. Se B não contém propriamente nenhuma base de $\mathcal{A}$, B será denominada uma base minimal de $T(\mathcal{A})$. Se $\mathcal{S}$ é um subconjunto de $K\langle X\rangle$, o T-ideal gerado por $\mathcal{S}$ é denotado por $\langle\mathcal{S}\rangle^T$. Noutras palavras, $\langle\mathcal{S}\rangle^T$ é o ideal de $K\langle X\rangle$ gerado pelos polinômios*

$$\{f(g_1, \ldots, g_n) \mid f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{S}; g_i \in K\langle X\rangle\}.$$

Se um polinômio $f \in K\langle X\rangle$ pertence a $\langle\mathcal{S}\rangle^T$ dizemos que f segue de $\mathcal{S}$, ou que f é uma conseqüência de $\mathcal{S}$. Dois subconjuntos de $K\langle X\rangle$ são equivalentes se eles geram o mesmo T-ideal.

Um dos principais problemas da teoria de identidades polinomiais é encontrar, para uma dada álgebra, bases para suas identidades polinomiais. Seguem alguns exemplos de bases de identidades polinomiais.

Exemplo 1.2.16. *(veja, [19]) A álgebra $M_2(K)$ quando K é um corpo de característica zero, tem por base minimal*

$$s_4(x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ e } h(x_1, x_2, x_3) = [[x_1, x_2]^2, x_3].$$

Exemplo 1.2.17. *Regev e Krakowski, em [19], mostraram que sobre corpos de base com característica zero todas as identidades da álgebra de Grassmann seguem da identidade polinomial $[[x_1, x_2], x_3] = 0$. Este último resultado generaliza-se facilmente para o caso de corpos infinitos com característica positiva e diferente de dois (quando $char(K) = 2$, a álgebra é comutativa, logo não muito "interessante" do ponto de vista da PI teoria. Pois, neste caso, um raciocínio simples mostra que qualquer identidade polinomial que não seja conseqüência da comutatividade, implica na nilpotência da álgebra). Ressaltamos ainda que a álgebra de Grassmann E de um espaço vetorial $\mathcal{V}$ de dimensão infinita é um exemplo de uma PI-álgebra que não satisfaz nenhuma identidade standard, quando o corpo base é de característica zero.*

Quando, $char K = p > 2$, a álgebra E satisfaz a identidade standard de grau $p + 1$. Um teorema devido a Kemer, veja [23], afirma que neste último caso, toda PI-álgebra satisfaz alguma identidade standard.

Em 1950, Specht [35] formulou o seguinte problema para álgebras associativas sobre corpos de característica zero: Toda álgebra possui uma base finita para suas identidades polinomiais ? Esta pergunta, que ficou conhecida como o problema de Specht, passou a ser uma das questões centrais da teoria de identidades polinomiais e foi finalmente respondida de modo positivo por Kemer em 1987 (veja, [22]). Por volta de 1973; Krause e Lvov, separadamente, provaram que este problema tem resposta positiva para álgebras finitas. A resposta para o problema de Specht é negativa no caso de álgebras sobre corpos infinitos e de característica positiva. Não vamos entrar em detalhes sobre o avanço na resolução do problema de Specht, pois o assunto merece atenção especial, envolvendo métodos e técnicas sofisticadas, e não está diretamente relacionado com o conteúdo da presente tese. Mais adiante, faremos uma exposição resumida sobre alguns pontos da teoria desenvolvida por Kemer, com a finalidade de justificar o nosso interesse no estudo das identidades em álgebras matriciais e de Grassmann.

1.3 Variedades e álgebras relativamente livres

Nesta seção, apresentaremos as variedades (de álgebras associativas) que classificam as PI-álgebras de acordo com as identidades que estas satisfazem. Dentro das variedades, encontram-se seus elementos mais importantes, as álgebras livres. Através destes conceitos, desenvolve-se o estudo das álgebras e suas identidades polinomiais.

Definição 1.3.1. *Seja $\mathcal{I}$ um subconjunto de $K\langle X\rangle$. A variedade de álgebras $var(\mathcal{I})$ definida pelo conjunto $\mathcal{I}$ é a classe de todas as álgebras que satisfazem cada identidade de $\mathcal{I}$, o conjunto $\mathcal{I}$ é o conjunto de identidades que definem a variedade $var(\mathcal{I})$. É fácil verificar que o conjunto $\mathcal{I}$ está contido no núcleo de qualquer homomorfismo da álgebra livre $K\langle X\rangle$ numa álgebra da variedade $var(\mathcal{I})$. A variedade trivial é a classe de álgebras que contém apenas a álgebra nula (noutras palavras, é a variedade definida pelo conjunto $K\langle X\rangle$).*

Definição 1.3.2. *Se $\mathcal{V}$ é uma classe de álgebras, o conjunto*

$$T(\mathcal{V}) = \{f \in K\langle X\rangle \mid f \in T(\mathcal{A}) \text{ para cada } \mathcal{A} \in \mathcal{V}\}$$

é um ideal de $K\langle X\rangle$ chamado ideal das identidades que definem a variedade $\mathcal{V}$.

O próximo teorema mostra que toda variedade tem uma álgebra livre.

Teorema 1.3.3. *Sejam $\mathcal{V}$ uma variedade não trivial de álgebras e $\Pi : K\langle X\rangle \to K\langle X\rangle/T(\mathcal{V})$ a projeção canônica. Então,*

(1) A restrição de Π à X é injetora;

(2) A álgebra $K\langle X\rangle/T(\mathcal{V})$ é livre na variedade $\mathcal{V}$ com conjunto gerador livre $\Pi(X)$.

Prova: Sejam x_1 e x_2 dois elementos distintos de X tais que $\Pi(x_1) = \Pi(x_2)$. Consideramos uma álgebra não nula $\mathcal{A}$ de $\mathcal{V}$ e um elemento não nulo a de $\mathcal{A}$. Então, existe homomorfismo $\Psi : K\langle X\rangle \to \mathcal{A}$ tal que $\Psi(x_1) = a$ e $\Psi(x_2) = 0$. Como $T(\mathcal{V})$ está contido no núcleo de Ψ, existe um homomorfismo $\Phi : K\langle X\rangle/T(\mathcal{V}) \to \mathcal{A}$ para o qual $\Phi \circ \Pi = \Psi$. Mas,

$$a = \Psi(x_1) = \Phi \circ \Pi(x_1) = \Phi \circ \Pi(x_2) = \Psi(x_2) = 0$$

o que é uma contradição.

A álgebra $K\langle X\rangle/T(\mathcal{V})$ é gerada pelo conjunto $\Pi(X)$ e pertence a $\mathcal{V}$ desde que satisfaz todas identidades de $T(\mathcal{V})$. Vamos mostrar que esta álgebra é livre em $\mathcal{V}$, com conjunto gerador livre $\Pi(X)$. Sejam $\mathcal{A} \in \mathcal{V}$ e σ uma aplicação de $\Pi(X)$ em $\mathcal{A}$. Como $K\langle X\rangle$ é álgebra livre com conjunto gerador X, a aplicação $\sigma \circ \Pi : X \to \mathcal{A}$ estende-se a um homomorfismo $\Phi : K\langle X\rangle \to \mathcal{A}$. Existe homomorfismo $\Psi : K\langle X\rangle/T(\mathcal{V}) \to \mathcal{A}$ para o qual $\Psi \circ \Pi = \Phi$, pois $T(\mathcal{V}) \subseteq Ker(\Phi)$. Se $x \in X$, temos que

$$\Psi(\Pi(x)) = \Psi \circ \Pi(x) = \Phi(x) = \sigma \circ \Pi(x) = \sigma(\Pi(x))$$

ou seja, o homomorfismo Ψ estende a aplicação σ. Logo, Ψ é o homomorfismo procurado. Portanto, $K\langle X\rangle/T(\mathcal{V})$ é uma álgebra livre na variedade $\mathcal{V}$, tendo como conjunto gerador livre $\Pi(X)$. ■

Uma variedade de álgebras é claramente fechada sob as operações de tomar subálgebras, imagem homomórfica e produto cartesiano. Uma variedade $\mathcal{V}$ de álgebras é gerada por uma classe $\mathcal{U}$ de álgebras se, toda álgebra de $\mathcal{V}$ pode ser obtida das álgebras de $\mathcal{U}$ por uma seqüência finita de aplicações das operações citadas acima: denotamos este fato por $\mathcal{V} = var(\mathcal{U})$ ou, por $\mathcal{V} = var(\mathcal{A})$ quando a classe $\mathcal{U}$ contém apenas uma álgebra $\mathcal{A}$. O clássico Teorema de Birkhoff (veja, [19]) demonstra que uma classe não vazia de álgebras é variedade se, e somente se, ela é fechada com respeito às três operações acima descritas.

No próximo Teorema, listamos algumas das propriedades básicas das variedades (omitimos a prova, pois a mesma é bastante direta). É importante frisar que ele só é válido devido ao conjunto X ser infinito.

Teorema 1.3.4. *Sejam $\mathcal{U}_1$ e $\mathcal{U}_2$ duas classes de álgebras e $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebras. Então,*

(1) $T(\mathcal{U}_1) = \cap_{\mathcal{A}\in\mathcal{U}_1} T(\mathcal{A}) = T(var(\mathcal{U}_1))$;

(2) Se $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_2 \Rightarrow T(\mathcal{U}_2) \subseteq T(\mathcal{U}_1)$;

(3) $U_1 \subseteq \mathcal{V} \Leftrightarrow T(\mathcal{V}) \subseteq T(U_1)$;

(4) Se $\mathcal{F}$ é uma álgebra livre em $\mathcal{V}$ então $T(\mathcal{V}) = T(\mathcal{F})$.

Corolário 1.3.5. *Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra então $T(var(\mathcal{A})) = T(\mathcal{A})$.*

Vários resultados e definições apresentados nesta seção podem ser generalizados para álgebras não necessariamente associativas (álgebras de Lie, de Jordan, Alternativas, entre outras), sobre anéis comutativos com identidade. Porém, como as álgebras tratadas neste texto são principalmente a álgebra de matrizes e a álgebra de Grassmann, nós restringimos as definições às álgebras associativas sobre corpos.

Definição 1.3.6. *Para um conjunto fixo Y, a álgebra $U_Y(\mathcal{V}) \in \mathcal{V}$ é chamada uma álgebra relativamente livre de $\mathcal{V}$, se $U_Y(\mathcal{V})$ é livre na classe $\mathcal{V}$ (livremente gerada por Y). A cardinalidade de Y é chamada o posto de $U_Y(\mathcal{V})$.*

A proposição a seguir caracteriza as álgebras relativamente livre em qualquer variedade.

Proposição 1.3.7. *Sejam $\mathcal{V}$ a variedade definida por $\{f_i \mid i \in I\}$, Y um conjunto qualquer e $\mathcal{J}$ o ideal de $K\langle Y\rangle$ gerado por*

$$\{f_i(g_1, \ldots, g_{n_i}) \mid g_i \in K\langle X\rangle; i \in I\}.$$

Então, a álgebra $U = K\langle X\rangle/\mathcal{J}$ é a álgebra relativamente livre em $\mathcal{V}$ com conjunto de geradores livre $\overline{Y} = \{y + \mathcal{J} \mid y \in Y\}$. Duas álgebras relativamente livres de mesmo posto em $\mathcal{V}$ são isomorfas.

Prova:

(1) Vamos mostrar que $U \in \mathcal{V}$. Seja $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ uma das identidades que definem $\mathcal{V}$ e sejam $\overline{g}_1, \ldots, \overline{g}_n \in \mathcal{F}$ onde $\overline{g}_j = g_j + \mathcal{J}$ com $g_j \in K\langle Y\rangle$. Então, $f_i(g_1, \ldots, g_n) \in \mathcal{J}$. Logo, $f_i(\overline{g}_1, \ldots, \overline{g}_n) = 0$. Isto mostra que $f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$ é identidade polinomial para U. Daí, $U \in \mathcal{V}$.

(2) Agora vamos provar a propriedade universal de $\mathcal{F}$. Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de $\mathcal{V}$ e seja $\Psi : \overline{Y} \to \mathcal{A}$ uma função arbitrária. Definimos a função $\Theta : Y \to \mathcal{A}$ pondo $\Theta(y) = \Psi(\overline{y})$ e estendemos Θ a um homomorfismo (também denotado por Θ) $\Theta : K\langle Y\rangle \to \mathcal{A}$. Isto é sempre possível, porque $K\langle Y\rangle$ é álgebra associativa livre. Para provar que Ψ pode ser estendido a um homomorfismo $U \to \mathcal{A}$, é suficiente mostrarmos que $\mathcal{J} \subseteq Ker(\Theta)$. Seja $f \in \mathcal{J}$, isto é,

$$f = \sum_{i \in I} u_i f_i(\overline{g}_{i_1}, \ldots, \overline{g}_{i_n}) v_i \text{ onde } g_{i_j}, u_i, v_i \in K\langle Y\rangle$$

para $r_{i_1}, \ldots, r_{i_n} \in \mathcal{A}$, o elemento $f_i(r_{i_1}, \ldots, r_{i_n})$ é igual a zero em $\mathcal{A}$, e isto implica que $\Theta(f) = 0$, isto é, $\mathcal{J} \subseteq Ker(\Theta)$ e $U \simeq U_{\overline{Y}}(\mathcal{V})$ é a álgebra relativamente livre em V, livremente gerada por $\overline{Y}$.

(3) Se $|Y| = |Z|$ com $Y = \{y_i \mid i \in I\}$ e $Z = \{Z_i \mid i \in I\}$. Sejam $F_Y(\mathcal{V})$ e $F_Z(\mathcal{V})$ suas correspondentes álgebras relativamente livres. Sendo ambas relativamente livres, podemos definir homomorfismos

$$\Psi : F_Y(\mathcal{V}) \to F_Z(\mathcal{V}) \text{ e } \Phi : F_Z(\mathcal{V}) \to F_Y(\mathcal{V})$$

pondo $\Psi(y_i) = z_i$ e $\Phi(z_i) = y_i$. Assim, Ψ e Φ são isomorfismos.

A partir de (1), (2) e (3) temos o requerido. ■

Observação 1.3.8. *A partir da Proposição 1.3.7, temos que o T-ideal de $K\langle X\rangle$ gerado por $\{f_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ consiste de todas as combinações lineares dos elementos sob a forma*

$$u_i f_i(g_{i_1}, \ldots, g_{i_n}) v_i \textit{ onde } g_{i_j}, u_i, v_i \in K\langle X\rangle.$$

1.4 Identidades polinomiais homogêneas, multilineares e próprias

Nesta seção, verificamos que sob determinadas condições podemos simplificar as identidades que estamos trabalhando. A primeira vista, estes resultados parecem apenas simplificar as técnicas, mas sua importância vai muito além disso, como veremos no decorrer do texto.

Definição 1.4.1. *Um monômio $\mathcal{M}$ tem grau k em x_i se, a variável x_i ocorre em $\mathcal{M}$ exatamente k vezes. Um polinômio é homogêneo de grau k em x_i, se todos os seus monômios tem grau k em x_i, denotamos este fato por $\deg_{x_i} f = k$. Um polinômio linear em x_i é um polinômio de grau 1 em x_i.*

Definição 1.4.2. *Um polinômio é multihomogêneo, se para cada variável x_i todos os seus monômios têm o mesmo grau em x_i. Um polinômio é multilinear se é linear em cada variável. O grau de um polinômio é o grau do seu maior monômio.*

Definição 1.4.3. *Sejam f um polinômio de $K\langle X\rangle$ de grau n e x_k uma variável de f. Podemos escrever f como uma soma, $f = \sum_{i=0}^{n} f_i$, onde cada polinômio f_i é homogêneo de grau i na variável x_k. Cada polinômio f_i é a componente homogênea de grau i em x_k do polinômio f.*

Os polinômios multilineares e multihomogêneos, desempenham um papel importante na busca de bases para as identidades polinomiais sobre determinados tipos de corpos. Este fato já observado por Specht em 1950 está desenvolvido no próximo lema.

Lema 1.4.4. *Seja $f(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i=0}^{n} f_i(x_1, \ldots, x_m) \in K\langle X\rangle$ onde f_i é a componente homogênea de f com grau i em x_i.*

(i) Se o corpo K contém mais que n elementos então as identidades $f_i = 0$ onde $i = 1, 2, \ldots, n$ seguem de $f = 0$;

(ii) Se a característica do corpo é zero ou maior que o grau de f então $f = 0$ é equivalente a um conjunto de identidades polinomiais multilineares.

Prova: (i) Seja $\mathcal{I} = \langle f\rangle^T$ o T-ideal de $\langle X\rangle$ gerado por f. Escolhemos $n+1$ elementos distintos $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ de K. Como $\mathcal{I}$ é um T-ideal, obtemos que

$$f(\alpha_j x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_j^i f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathcal{I}\ ;\ j = 0, 1, \ldots, n.$$

Consideramos estas equações como um sistema linear com incógnitas f_i para $i = 0, 1, \ldots, n$. Sendo o determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_0 & \cdots & \alpha_0^n \\ 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \cdots & \alpha_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (\alpha_j - \alpha_i)$$

o determinante de Vandermonde que é diferente de 0, temos que cada $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathcal{I}$, ou seja, as identidades polinomiais $f_i = 0$ são conseqüências de $f = 0$.
(ii) Pela parte (i), podemos assumir que $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ é multihomogêneo. Seja $k = \deg_{x_1} f$. Escrevemos $f_i(y_1 + y_2, x_2, \ldots, x_m) \in \mathcal{I}$ sob a forma

$$f(y_1 + y_2, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{i=0}^{k} f_i(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_m)$$

onde f_i é a componente homogênea de grau i em y_1. Logo, $f_i \in \mathcal{I}$ para $i = 0, 1, \ldots, k$. Como $\deg_{y_j} f_i < k$; $i = 1, 2, \ldots, k - 1$; $j = 1, 2$, podemos aplicar argumentos indutivos e obtemos um conjunto de conseqüências multilineares de $f = 0$. Para ver que estas identidades multilineares são equivalentes a $f = 0$ é suficiente observarmos que

$$f_i(y_1, y_1, x_2, \ldots, x_m) = \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} f(y_1, x_2, \ldots, x_m)$$

e que o coeficiente binomial é diferente de 0, pois temos por hipótese que $char(K) = 0$ ou $\operatorname{char} K \geq \deg(f)$. ■

Observamos que o item (i) do lema acima significa que o polinômio f gera o mesmo T-ideal como o gerado pelos polinômios f_i para $i = 0, 1, \ldots, n$.

Corolário 1.4.5. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra. Então,*

(i) Se o corpo K é infinito todas identidades polinomiais de $\mathcal{A}$ seguem de suas identidades multihomogêneas;

(ii) Se o corpo K tem característica zero todas as identidades polinomiais de $\mathcal{A}$ seguem de suas identidades multilineares.

Quando a álgebra é unitária podemos restringir a nossa busca de identidades polinomiais a um determinado tipo de polinômios, conforme explicamos a seguir.

Definição 1.4.6. *O comutador de comprimento n é definido indutivamente a partir de $[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$ tomando $[x_1, x_2, \ldots, x_n] = [[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}], x_n]$ para $n > 2$. Um polinômio $f \in K\langle X\rangle$ é chamado polinômio próprio (ou comutador), se ele é uma combinação linear de produtos de comutadores, isto é,*

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \sum \alpha_{i,..,j}[x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}] \ldots [x_{j_1}, \ldots, x_{j_q}] \ ; \ \alpha_{i,..,j} \in K.$$

(Assumindo que 1 é um produto de um conjunto vazio de comutadores.) Denotamos por $\mathcal{B}(X)$ o conjunto de todos os polinômios próprios de $K\langle X\rangle$.

O próximo lema mostra a importância dos polinômios comutadores para encontrar uma base das identidades de uma álgebra unitária. Sua prova não é complicada e pode ser encontrada em ([19], proposição 4.3.3, pp 42-44). A demonstração está baseada no fato que $K\langle X\rangle$ é a álgebra universal envolvente de $L\langle X\rangle$ conhecido como Teorema de Witt.

Lema 1.4.7. *Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra unitária sobre um corpo infinito então todas as identidades polinomiais de $\mathcal{A}$ seguem das suas identidades próprias (ou seja, daquelas em $T(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}(X)$). Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra unitária sobre um corpo de característica 0 então todas identidades polinomiais de $\mathcal{A}$ seguem das suas identidades próprias multilineares.*

1.5 Identidades graduadas

Ao estudarmos identidades polinomiais ordinárias, em alguns momentos é interessante tratarmos de outros tipos de identidades, através das quais podemos obter informações sobre as identidades ordinárias. Desta idéia surgiram, por exemplo: as identidades polinomiais fracas, as identidades com involução e as identidades com graduação (graduadas). O nosso interesse nas últimas é que as mesmas estão relacionadas com as ordinárias. Nesta seção, vamos trabalhar com tais identidades e fazer um breve resumo da importante teoria estrutural dos T-ideais desenvolvida por Kemer. No que segue, fixamos G como um grupo abeliano aditivo.

Definição 1.5.1. *Uma álgebra $\mathcal{A}$ é dita ser G-graduada, se $\mathcal{A} = \oplus_{g\in G}\mathcal{A}_g$ onde $\mathcal{A}_g$ é subespaço de $\mathcal{A}$ para todo $g \in G$ e $\mathcal{A}_g\mathcal{A}_h \subseteq \mathcal{A}_{g+h}$ para todos $g, h \in G$. Um elemento $\mathbf{a} \in \cup_{g\in G}\mathcal{A}_g$ é chamado homogêneo. Para todo elemento homogêneo $\mathbf{a}$, temos $\mathbf{a} \in \mathcal{A}_g$ para algum $g \in G$. Dessa forma, o grau homogêneo de $\mathbf{a}$ é igual a g, e denotamos $w_G(\mathbf{a}) = g$. Se $\mathbf{a} = \sum_{\mathbf{a}_g\in\mathcal{A}_g} \mathbf{a}_g$, chamamos $\mathbf{a}_g$ de componente homogênea de grau g em $\mathbf{a}$.*

Definição 1.5.2. *Um subespaço $\mathcal{B}$ de uma álgebra G-graduada $\mathcal{A}$ é dito ser G-graduado, se*

$$\mathcal{B} = \sum_{g \in G} \mathcal{B}_g \text{ onde } \mathcal{B}_g = \mathcal{B} \cap \mathcal{A}_g,$$

os quais denominaremos de subespaços homogêneos.

Definição 1.5.3. *Uma aplicação $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ entre álgebras G-graduadas é chamada homomorfismo G-graduado, se Φ é um homomorfismo que satisfaz $\Phi(\mathcal{A}_g) \subseteq \mathcal{B}_g$ para todo $g \in G$. De modo análogo, definimos isomorfismo, endomorfismo e automorfismo G-graduado.*

Os próximos dois lemas são de demonstrações imediata.

Lema 1.5.4. *Seja $\mathcal{A}$ é uma álgebra G-graduada e $\mathcal{B}$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) $\mathcal{B}$ é subálgebra G-graduada de $\mathcal{A}$;

(2) $\mathcal{B}$ é álgebra G-graduada tal que $\mathcal{B}_g \subseteq \mathcal{A}_g$ para todo $g \in G$;

(3) As componentes homogêneas de cada elemento de $\mathcal{B}$ pertencem a $\mathcal{B}$;

(4) $\mathcal{B}$ é gerada por elementos homogêneos.

Lema 1.5.5. *Se $\mathcal{I}$ é um ideal G-graduado de uma álgebra G-graduada $\mathcal{A}$ então $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ é uma álgebra G-graduada considerando $(\mathcal{A}/\mathcal{I})_g = \{a + \mathcal{I} / a \in \mathcal{A}_g\}$.*

Observação 1.5.6. *Seja $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um homomorfismo G-graduado de álgebras. Então, o $Ker(\Phi)$ é um ideal G-graduado de $\mathcal{A}$ e $\Phi(\mathcal{A})$ é uma subálgebra G-graduada de $\mathcal{B}$ tal que $(\Phi(\mathcal{A}))_g = \Phi(\mathcal{A}_g)$. Noutras palavras, pelo Lema 1.5.5, vale a versão graduada do teorema do Isomorfismo, isto é, a álgebra quociente $\mathcal{A}/\ker\Phi$ é isomorfa (como álgebra graduada) à $Im\Phi = \Phi(\mathcal{A})$.*

Em seguida, apresentaremos alguns exemplos de álgebras graduadas. Desde que uma mesma álgebra pode ter diferentes graduações, estes exemplos serão importantes para apresentarmos as graduações que usaremos no decorrer do texto, também denominadas de graduações canônicas (ou usuais).

Exemplo 1.5.7. *A álgebra de Grassmann E é $\mathbb{Z}_2$-graduada. De fato, seja E_0 o subespaço de E gerado por $\{1, e_{i_1} \dots e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \ ; k = 2, 4, \dots\}$ e seja E_1 o subespaço de E gerado por $\{e_{i_1} \dots e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \ ; k = 1, 3, \dots$. Assim, $E = E_0 \oplus E_1$ e facilmente podemos verificar que $E_i E_j \subseteq E_{i+j}$ para todos $i, j \in \mathbb{Z}_2$*

Exemplo 1.5.8. *A partir da graduação do Exemplo 1.5.7 construiremos uma $\mathbb{Z}_2$-graduação para o quadrado tensorial da álgebra de Grassmann $E \otimes E$. Para tanto é suficiente considerarmos*

$$(E \otimes E)_0 = (E_0 \otimes E_0) \oplus (E_1 \otimes E_1) \text{ e } (E \otimes E)_1 = (E_0 \otimes E_1) \oplus (E_1 \otimes E_0).$$

Usando o fato que o produto tensorial é distributivo em relação a soma direta, é imediato verificar que

$$E \otimes E = (E \otimes E)_0 \oplus (E \otimes E)_1.$$

Além disso, verifica-se diretamente que

$$(E \otimes E)_i (E \otimes E)_j \subseteq (E \otimes E)_{i+j} \text{ para todos } i, j \in \mathbb{Z}_2.$$

Portanto a álgebra $E \otimes E$ é $\mathbb{Z}_2$-graduada.

Exemplo 1.5.9. *A álgebra $M_{1,1}(E)$ é $\mathbb{Z}_2$-graduada. De fato, consideramos*

$$M_{1,1}(E) = (M_{1,1}(E))_0 \oplus (M_{1,1}(E))_1$$

onde

$$(M_{1,1}(E))_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in E_0 \right\} \text{ e } (M_{1,1}(E))_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \mid b, c \in E_1 \right\}$$

e verificamos diretamente que

$$(M_{1,1}(E))_i (M_{1,1}(E))_j \subseteq (M_{1,1}(E))_{i+j} \text{ para todos } i, j \in \mathbb{Z}_2.$$

Seja $\{X_g \mid g \in G\}$ uma família de conjuntos disjuntos e enumeráveis. Considerando $X = \cup_{g \in G} X_g$, a álgebra $K\langle X \rangle$ é denominada de álgebra livre G-graduada. Para uma variável $x \in X$, definimos $w_G(x) = g$ se $x \in X_g$. Recordamos que o conjunto de monômios $\{1, x_{i_1} \dots x_{i_k} \mid x_{i_j} \in X \text{ e } n = 1, 2, \dots\}$ é uma base de $K\langle X \rangle$. Para um tal monômio, digamos $m = x_{i_1} \dots x_{i_n}$, definimos $w_G(m) = \sum_{j=1}^{n} w_G(x_{i_j})$ como sendo o grau homogêneo do monômio, e desta forma podemos estender esta definição para todos os elementos de $K\langle X\rangle$. Se $g \in G$, denotamos por $K\langle X\rangle_g$ o subespaço gerado pelos monômios de grau g. Observando que

$$K\langle X\rangle_g K\langle X\rangle_h \subseteq K\langle X\rangle_{g+h} \text{ para todos } g, h \in G$$

concluímos que $K\langle X\rangle$ é de fato G-graduada.

Definição 1.5.10. *Um ideal $\mathcal{I}$ numa álgebra G-graduada $\mathcal{A}$ é chamado de T_G-ideal se $\mathcal{I}$ é invariante por todos os endomorfismos G-graduados de $\mathcal{A}$, isto é, $\Phi(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{I}$ para todo endomorfismo G-graduado Φ de $\mathcal{A}$.*

Definição 1.5.11. *Um polinômio $0 \neq f = f(x_1, \ldots, x_n) \in K\langle X\rangle$, ou mesmo a expressão $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$, é uma identidade polinomial G-graduada da álgebra G-graduada $\mathcal{A}$, se*

$$f(a_1, \ldots, a_n) = 0 \textit{ para todo } a_i \in \mathcal{A}_{g_i} \textit{ onde } g_i = w_G(x_i) \textit{ e } i = 1, 2, \ldots, n.$$

O conjunto $T_G(\mathcal{A})$ de todas as identidades G-graduadas de $\mathcal{A}$ é um T_G-ideal de $K\langle X\rangle$, denominado de ideal das identidades G-graduadas da álgebra A.

De modo análogo ao caso ordinário, as álgebras com identidades polinomiais graduadas possuem as mesmas propriedades no que diz respeito a T-ideais, variedades, polinômios lineares, polinômios homogêneos, etc. Assim, por exemplo, dizemos que $h \in K\langle X\rangle$ é T_G conseqüência de f (ou h segue de f como identidade graduada) se h pertence ao T_G-ideal gerado por f em $K\langle X\rangle$. Bem como dado um conjunto de polinômios $\{f_i(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) \in K\langle X\rangle \mid i \in I\}$ a classe V de todas as álgebras G-graduadas satisfazendo as identidades $f_i = 0$ para todo i é chamada uma variedade de álgebras G-graduadas determinada pelo sistema de identidades $\{f_i \mid i \in I\}$. Deste modo adaptamos as propriedades das identidades ordinárias para as identidades graduadas.

Os resultados a seguir fornecem informações sobre identidades ordinárias a partir de identidades graduadas.

Lema 1.5.12. *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas álgebras G-graduadas com respectivos T-ideais de identidades G-graduadas $T_G(\mathcal{A})$ e $T_G(\mathcal{B})$. Se $T_G(\mathcal{A}) \subseteq T_G(\mathcal{B})$ então $T(\mathcal{A}) \subseteq T(\mathcal{B})$.*

Prova: Seja $f(x_1, \ldots, x_m)$ uma identidade qualquer de $\mathcal{A}$ e sejam

$$b_1 = \sum_{g\in G} b_{1_g}, \ldots, b_m = \sum_{g\in G} b_{m_g} \in \mathcal{B}.$$

Como $f \in T(\mathcal{A})$, temos que

$$f(\sum_{g\in G} x_{1_g}, \ldots, \sum_{g\in G} x_{m_g}) \in T_G(\mathcal{A}) \subseteq T_G(\mathcal{B})$$

daí, vem que, $f(b_1, \ldots, b_m) = f(\sum_{g\in G} b_{1_g}, \ldots, \sum_{g\in G} b_{m_g}) = 0$.
Portanto, $T(\mathcal{A}) \subseteq T(\mathcal{B})$. ■

Corolário 1.5.13. *Se $T_G(\mathcal{A}) = T_G(\mathcal{B})$ então $T(\mathcal{A}) = T(\mathcal{B})$.*

Observação 1.5.14. *(Contra-exemplo) Consideramos na álgebra de Grassmann E duas graduações. A primeira é a $\mathbb{Z}_2$-graduação $E = E_0 \oplus E_1$, a segunda é a graduação trivial onde $y_1y_2 = y_2y_1$ não é uma identidade graduada. Portanto, uma mesma álgebra pode ter identidades graduadas diferentes conforme sua graduação.*

CAPÍTULO 2

O TEOREMA DO PRODUTO TENSORIAL

Neste capítulo apresentaremos a teoria estrutural dos T-ideais desenvolvida por Kemer para álgebras sobre corpos de característica zero. Estabeleceremos os resultados obtidos até então que provam que o Teorema do Produto Tensorial de Kemer e não podem ser transportados para corpos infinitos com característica positiva maior que dois. Também estudaremos o comportamento das identidades polinomiais satisfeitas pelas álgebras verbalmente primas e provaremos a inclusão $T(A_{a,b}(E)) \subseteq T(M_{a,b} \otimes E)$ para $a \neq b$ em característica $p > 2$.

2.1 A Teoria de Kemer

Nesta seção faremos um breve resumo sobre a teoria estrutural dos T-ideais desenvolvida por Kemer para álgebras sobre corpos de característica zero. No que segue, K denotará, um corpo de característica zero. O leitor interessado poderá encontrar mais informação nas monografias [22], [15].

A teoria desenvolvida por Kemer mostrou que as PI álgebras sobre corpos de característica 0, satisfazem muitas propriedades "boas" que as aproximam às álgebras comutativas. Começamos com os conceitos de T-ideais T-primos e T-semiprimos, que têm um papel extremamente importante nessa teoria.

Definição 2.1.1. *Diremos que:*

(1) *Um T-ideal $\mathcal{S}$ é T-semiprimo se, para qualquer T-ideal $\mathcal{J}$ com $\mathcal{J}^n \subseteq \mathcal{S}$ implicar que $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{S}$;*

(2) *Um T-ideal $\mathcal{I}$ é T-primo se, para quaisquer T-ideais $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$ tais que $\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{I}$ implicar que $\mathcal{J}_1 \subseteq \mathcal{I}$ ou $\mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{I}$.*

Os próximos resultados podem ser encontrados nas seções 2 e 3 do capítulo I de [22], e recomendamos este livro para mais detalhes e informações sobre esta teoria.

Teorema 2.1.2. *(Kemer)*

(1) *Seja $\mathcal{V} \neq \emptyset$ uma variedade. Então $\mathcal{V} = \mathcal{N}_m\mathcal{W}$, onde $\mathcal{N}_m$ é a maior variedade de todas as álgebras nilpotentes de índice menor ou igual a m, $\mathcal{W}$ é a maior subvariedade semiprima de $\mathcal{V}$ e o produto de duas variedades $\mathcal{N}\mathcal{M}$ consiste das álgebras $\mathcal{A}$ tendo um ideal $\mathcal{I}$ contido em $\mathcal{N}$ e cujo quociente $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ está em $\mathcal{M}$;*

(2) *O T-ideal $\mathcal{I}$ é semiprimo se, e somente se, $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{I}_q$ onde os T-ideais $\mathcal{I}_j$ são T-primos.*

(3) *Os únicos T-ideais T-primos não triviais são:*

$$T(M_n(K)) \text{ , } T(M_n(E)) \text{ e } T(M_{a,b}(E)).$$

Se $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$ é uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada então

$$E(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_0 \otimes E_0 \oplus \mathcal{A}_1 \otimes E_1$$

é denominada o envelope de Grassmann de $\mathcal{A}$.

Kemer demonstrou ainda os seguintes resultados, veja [22].

(1) Todo T-ideal não trivial coincide com o T-ideal do envelope de Grassmann de uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada e finitamente gerada;

(2) O T-ideal de qualquer álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada e finitamente gerada coincide com o T-ideal de alguma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada de dimensão finita;

(3) De (1) e (2), segue que todo T-ideal não trivial coincide com o T-ideal do envelope de Grassmann de alguma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada de dimensão finita.

Dentre as conseqüências mais importantes dos resultados acima, está a resposta afirmativa para o problema de Specht.

Ressaltamos que recentemente foi provado por Belov [14], Grishin [21] e Shchigolev [34] que o problema de Specht resolve-se em negativo sobre corpos de característica positiva.

2.2 Álgebras genéricas

Podemos observar no resumo sobre a teoria de Kemer, a importância das PI-álgebras $M_n(K)$, $M_n(E)$ e $M_{a,b}(E)$. Existem construções algébricas genéricas para as álgebras relativamente livre destas álgebras. Para a álgebra $M_n(K)$ esta é a álgebra das matrizes genéricas introduzidas por Procesi [29], e para $M_n(E)$ e $M_{a,b}(E)$ as construções genéricas foram dadas por Berele [11]. Vamos fazer um breve resumo sobre estas construções, para mais casos, veja as referências citadas acima.

Sejam $Y = \{y_1, y_2, \dots\}$ e $Z = \{z_1, z_2, \dots\}$ conjuntos de variáveis com $Y \cap Z = \emptyset$. Tomando $X = Y \cup Z$ denotamos por $K\langle X\rangle$ a álgebra livre gerada por X. Freqüentemente, denominamos os elementos de Y de pares e os elementos de Z de ímpares. Noutras palavras, definimos $w = w_{\mathbb{Z}_2} : X \to \mathbb{Z}_2$ pondo $w(x) = 0$ se $x \in Y$ e $w(x) = 1$ se $x \in Z$. Deste modo, os elementos de Y também são denominados de 0-variáveis e os de Z de 1-variáveis. Se $f = x_1x_2\dots x_k$ é um monômio, definimos $w(f) = w(x_1) + w(x_2) + \cdots + w(x_k)$ (aqui consideramos a somatória módulo 2), e chamamos f de par se $w(f) = 0$, e de ímpar se $w(f) = 1$. Assim, $K\langle X\rangle = K\langle X\rangle_0 + K\langle X\rangle_1$ é $\mathbb{Z}_2$-graduado onde $K\langle X\rangle_0$ é o subespaço de $K\langle X\rangle$ gerado pelos monômios pares e $K\langle X\rangle_1$ é o subespaço de $K\langle X\rangle$ gerado pelos monômios ímpares.

Definição 2.2.1. *Seja $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$ uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada. Os elementos de $\mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1$ são denominados de homogêneos. Além disso, cada elemento homogêneo* $\mathbf{a}$ *possui um grau w em $\mathbb{Z}_2$, isto é, $w(\mathbf{a}) = 0$ ou 1. A álgebra $\mathcal{A}$ é dita supercomutativa, se*

$$\mathbf{ab} = (-1)^{w(\mathbf{a})w(\mathbf{b})}\mathbf{ba} \text{ para todos } \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1.$$

Exemplo 2.2.2. *A álgebra de Grassmann é sem dúvida o exemplo mais importante de álgebra supercomutativa.*

Definição 2.2.3. *Seja $K\langle X\rangle = K\langle X\rangle_0 + K\langle X\rangle_1$ a álgebra livre $\mathbb{Z}_2$-graduada definida como acima. Para os monômios $f, g \in K\langle X\rangle$, consideramos as relações $fg = (-1)^{w(f)w(g)}gf$ e seja $\mathcal{I}$ o ideal $\mathbb{Z}_2$-graduada gerado por estas relações. Quando $\operatorname{char} K = p > 0$, adicionamos $\{y_i^p \mid y_i \in Y\}$ ao conjunto de gerados de $\mathcal{I}$. A álgebra $K\langle Y; Z\rangle = K\langle X\rangle/\mathcal{I}$ é naturalmente $\mathbb{Z}_2$-graduada (pois herda a graduação de $K\langle X\rangle$) e é chamada de álgebra livre supercomutativa.*

Lema 2.2.4. *Sejam $K[Y]$ a álgebra de polinômios comutativos gerada por Y e $E(Z)$ a álgebra de Grassmann gerada pelo espaço vetorial com base Z. Então, as álgebras $K\langle Y; Z\rangle$ e $K[Y] \otimes E(Z)$ são isomorfas.*

Prova: Seja $\Psi : K[Y] \otimes E(Z) \to K\langle Y; Z\rangle = K\langle X\rangle/\mathcal{I}$ a aplicação definida por $\Psi(a \otimes b) = ab + \mathcal{I}$. É imediato que esta aplicação é um homomorfismo (de álgebras) sobrejetor. Sejam $a = y_1 \dots y_n \in K[Y]$ e $b = z_1 \dots z_m \in E(Z)$, ambos não nulos. Fazendo as substituições $y_1 = \cdots = y_n = 1$ e $z_1 = e_1, \dots, z_m = e_m$ onde $\{e_1, \dots, e_m\}$ é subconjunto da base de E, temos que $ab \notin T_2(E)$. Por outro lado, como $K\langle X\rangle/\mathcal{I}$ é a álgebra livre supercomutativa, temos que $\mathcal{I} = \cap\{Q \mid Q$ é T_2 ideal de alguma álgebra supercomutativa$\}$. Em particular, $\mathcal{I} \subseteq T_2(E)$ e disto segue a injetividade de Ψ, como queríamos. ■

Lema 2.2.5. *(a) A álgebra $K\langle Y; Z\rangle$ é canonicamente $\mathbb{Z}_2$-graduada e livre na classe de todas as álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas supercomutativas. Noutras palavras, para toda álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada supercomutativa $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$, toda função $\Phi : Y \cup Z \to \mathcal{A}$ tal que $\Phi(Y) \subseteq \mathcal{A}_0$ e $\Phi(Z) \subseteq \mathcal{A}_1$ pode ser estendido a um homomorfismo de álgebras;*

(b) Se $Y = \{y_1, y_2, \dots\}$, $Z = \{z_1, z_2, \dots\}$ e $x_i = y_i + z_i$ onde $i = 1, 2, \dots$. Então, toda função $\Phi : x_i \to \mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$; $i = 1, 2, \dots$ pode ser estendido a um homomorfismo homogêneo de $K\langle Y; Z\rangle \to \mathcal{A}$ de álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas.

Prova: Veja introdução de [11]. ■

Sejam n e m inteiros positivos e consideramos os conjuntos

$$Y = \{y_{ij}^{(q)} \mid i, j = 1, \dots, n; q = 1, \dots, m\} \text{ e } Z = \{z_{ij}^{(q)} \mid i, j = 1, \dots, n; q = 1, \dots, m\}.$$

Combinando a construção de Procesi com a de Berele, definimos as seguintes matrizes com entradas em $K\langle Y; Z\rangle$:

(1) As $n \times n$ matrizes genéricas

$$A_q = \sum_{i,j=1}^{n} y_{ij}^{(q)} E_{ij} \text{ onde } q = 1, \dots, m;$$

(2) As $n \times n$ matrizes genéricas com entradas supercomutativas

$$B_q = \sum_{i,j=1}^{n} (y_{ij}^{(q)} + z_{ij}^{(q)}) E_{ij} \text{ onde } q = 1, \ldots, m;$$

(3) As (a, b) matrizes genéricas$(n = a + b)$

$$C_q = \sum_{i,j=1}^{n} t_{ij}^{(q)} E_{ij} \text{ onde } t_{ij}^{(q)} = y_{ij}^{(q)} \text{ se } (i,j) \in \Delta_0 \text{ e } t_{ij}^{(q)} = z_{ij}^{(q)} \text{ se } (i,j) \in \Delta_1 \text{ e } q = 1, \ldots, m.$$

Teorema 2.2.6. *(Procesi (i) e Berele ((ii),(iii)))*

(i) (veja [29])A álgebra gerada por $A_1, \ldots, A_m$ é isomorfa à álgebra relativamente livre de posto m na variedade definida por $M_n(K)$, isto é, a álgebra $U_m(M_n(K))$;

(ii) (veja [11])A álgebra gerada por $B_1, \ldots, B_m$ é isomorfa à álgebra relativamente livre de posto m na variedade definida por $M_n(K)$, isto é, a álgebra $U_m(M_n(E))$;

(iii) (veja [11])A álgebra gerada por $C_1, \ldots, C_m$ é isomorfa à álgebra relativamente livre de posto m na variedade definida por $M_n(K)$, isto é, a álgebra $U_m(M_{a,b}(E))$.

2.3 O que era conhecido

Nesta seção vamos apresentar os resultados conhecidos sobre o assunto até o inicio de nossos estudos, os resultados apresentados vêm acompanhados das devidas referências bibliográficas. Iniciamos com nosso principal objeto de estudo do capítulo, o Teorema do Produto Tensorial de Kemer (TPT), para detalhes veja [22].

Teorema 2.3.1. *(TPT) Seja K um corpo com $\operatorname{char} K = 0$. Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Então,*

(1) $T(M_{a,b}(E) \otimes E) = T(M_{a+b}(E))$;

(2) $T(M_{a,b}(E) \otimes M_{c,d}(E)) = T(M_{ac+bd,ad+bc}(E))$;

(3) $T(M_{1,1}(E)) = T(E \otimes E)$.

A seguir apresentaremos duas conseqüências imediatas do Teorema 2.3.1

Corolário 2.3.2. *Seja K um corpo com* $\operatorname{char} K = 0$. *Sejam* $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ *com* $a+b = c+d$. *Então,*

$$T(M_{a,b}(E) \otimes E) = T(M_{c,d}(E) \otimes E).$$

Prova: Sendo $a + b = c + d$, do Teorema 2.3.1(1), vem que

$$T(M_{a,b}(E) \otimes E) = T(M_{a+b}(E)) = T(M_{c+d}(E)) = T(M_{c,d}(E) \otimes E).$$

Portanto,

$$T(M_{a,b}(E) \otimes E) = T(M_{c,d}(E) \otimes E)$$

como queríamos. ■

Corolário 2.3.3. *Seja K um corpo com* $\operatorname{char} K = 0$. *Sejam* $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{N}$ *com* $ac + bd = eg + fh$ *e* $ad + bc = eh + fg$. *Então,*

$$T(M_{a,b}(E) \otimes M_{c,d}(E)) = T(M_{e,f}(E) \otimes M_{g,h}(E)).$$

Prova: Sendo $ac + bd = eg + fh$ e $ad + bc = eh + fg$, do Teorema 2.3.1(2), vem que:

$$T(M_{a,b}(E)\otimes M_{c,d}(E)) = T(M_{ac+bd,ad+bc}(E)) = T(M_{eg+fh,eh+fg}(E)) = T(M_{e,f}(E)\otimes M_{g,h}(E)).$$

Portanto,

$$T(M_{a,b}(E) \otimes M_{c,d}(E)) = T(M_{e,f}(E) \otimes M_{g,h}(E))$$

como queríamos. ■

No que segue, vamos relembrar o que era conhecido sobre os resultados acima quando o corpo de base é infinito de característica positiva $p > 2$. Para mais detalhes, veja ([9], [10], [5]).

Observação 2.3.4. *Seja* $\mathcal{A} = K \oplus M_{1,1}(E')$ *a álgebra obtida de* $M_{1,1}(E')$ *por adjunção da unidade. Em [9], os autores provaram que*

$$T(M_{1,1}(E)) \subsetneq T(\mathcal{A}) = T(E \otimes E).$$

Daí, o T.P.T.(3) é falso, neste caso.

Observação 2.3.5. *Seja* $\mathcal{A} = A_{1,1}$. *Em [10], os autores provaram que*

$$T(M_2(E)) \subsetneq T(\mathcal{A}) = T(M_{1,1}(E) \otimes E).$$

Daí, o T.P.T.(1) é falso, para $a = b = 1$.

Observação 2.3.6. *Em [10], usando identidades graduadas, os autores provaram que*

$$T(M_{a+b}(E)) \subseteq T(M_{a,b}(E) \otimes E).$$

Também em [10], os autores deram a seguinte versão multilinear para o Teorema do Produto Tensorial de Kemer. Seja $\mathcal{I}$ um T-ideal em $K\langle X\rangle$ e denote por $P(\mathcal{I})$ o conjunto de todos polinômios multilineares em $\mathcal{I}$.

Teorema 2.3.7. *Seja K um corpo com $\operatorname{char} K \neq 2$. Então,*

(1) $P(T(M_{a,b}(E) \otimes E)) = P(T(M_{a+b}(E)))$;

(2) $P(T(M_{a,b}(E) \otimes M_{c,d}(E))) = P(T(M_{ac+bd,ad+bc}(E)))$;

(3) $P(T(M_{1,1}(E))) = P(T(E \otimes E))$.

Em [5] os autores apresentaram uma identidade polinomial para a álgebra $M_{a,b}(E) \otimes E$ que não é uma identidade polinomial para a álgebra $M_{a+b}(E)$. Observamos que este fato generaliza um dos resultados de [10], a saber, que o T.P.T (1) falha para todos os valores de a e b. Mais precisamente, existe um inteiro $k > 1$ tal que s_{2a}^k é identidade para a álgebra $M_{a,b}(E) \otimes E$. Concluíram, assim, que:

Teorema 2.3.8. *As álgebras $M_{a,b}(E) \otimes E$ e $M_{a+b}(E)$ não são PI-equivalentes.*

Prova: Ver [5]. ■

Além disso, ainda em [5] ficou estabelecido que a inclusão $T(M_{a+b}(E)) \subset T(M_{a,b}(E) \otimes E)$ é própria.

É sabido que as álgebras $M_{a,b}(E) \otimes E$ e $M_{c,d}(E) \otimes E$ são PI-equivalentes em característica zero, como vimos no Corolário 2.3.2. O próximo resultado de [5] mostra que esse resultado não pode ser transportado para corpos infinitos com característica positiva maior que dois.

Teorema 2.3.9. *Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ tais que $a \geq b$, $c \geq d$, $a \neq c$ e $a + b = c + d$. Então, as álgebras $M_{a,b}(E) \otimes E$ e $M_{c,d}(E) \otimes E$ não são PI-equivalentes.*

Ainda em [5] os autores exibiram uma identidade polinomial para a álgebra $M_{a,b}(E) \otimes M_{c,d}(E)$ que não é identidade polinomial para a álgebra $M_{ac+bd,ad+bc}(E)$. Esta seção completa a prova de que o Teorema do Produto Tensorial de Kemer não pode ser transportado para corpos infinitos de característica positiva maior que dois.

As álgebras $A_{a,b}$ surgiram em ([9], [10]) quando os autores estudavam a PI-equivalência entre as álgebras $M_{a+b}(E)$ e $M_{a,b}(E) \otimes E$ tendo como base corpos infinitos de característica positiva maior que dois.

Seja Δ_0 o conjunto de todos os (i, j) tais que ou $1 \leq i, j \leq a$ ou $a+1 \leq i, j \leq a+b = n$, e seja Δ_1 o conjunto dos (i, j) com ou $1 \leq i \leq a$, $a+1 \leq j \leq a+b$, ou $1 \leq j \leq a$, $a+1 \leq i \leq a+b$. Então $M_{a,b}(E)$ consiste das matrizes em $M_n(E)$ tais que a (i, j)-th entrada pertence a E_β quando $(i, j) \in \Delta_\beta$. Define-se $A_{a,b}$ como a subálgebra de $M_{a+b}(E)$ consistindo de todas as matrizes (a_{ij}) tais que $a_{ij} \in E$ se $(i, j) \in \Delta_0$ e $a_{ij} \in E'$ se $(i, j) \in \Delta_1$.

Por exemplo, a álgebra $A_{1,1}$ foi usada em [10] para provar a não PI-equivalência entre as álgebras $M_2(E)$ e $M_{1,1}(E) \otimes E$ tendo como base corpos infinitos com característica positiva maior que dois. Apresentaremos os resultados obtidos em [7] e em [6] envolvendo tais álgebras. Em particular, foi mostrado que, $T(M_{a+b}(E)) \subsetneq T(A_{a,b})$ e $M_{a,a}(E) \otimes E \sim A_{a,a}$, respondendo em positivo duas questões deixadas em [10].

A menos que seja feita menção explícita em contrário, vamos considerar corpos infinitos com característica positiva $p > 2$. Se $\operatorname{char} K = 0$ as álgebras $A_{a,b}$ e $M_{a+b}(E)$ são PI-equivalentes, pois E e E' o são. O mesmo vale para as álgebras $E' \otimes E'$, veja [28].

Em [7] o autor provou o seguinte:

Lema 2.3.10. *Seja s_n o polinômio standard de grau n. Se $a \geq b$ então a álgebra $A_{a,b}$ satisfaz a identidade s_{2a}^k para algum $k > 1$, mas não satisfaz s_{2a} nem identidades sob a forma s_m^k para todo k quando $m < 2a$.*

Teorema 2.3.11. *A inclusão $T(M_{a+b}(E)) \subset T(A_{a,b})$ é própria.*

Prova: Sendo $A_{a,b} \subseteq M_{a+b}(E)$, segue imediatamente que

$$T(M_{a+b}(E)) \subseteq T(A_{a,b}). \tag{2.1}$$

De acordo com o Lema anterior existe inteiro $t > 1$ tal que

$$s_{2a}^t \in T(A_{a,b}). \tag{2.2}$$

Sabemos que

$$s_{2a}^t \notin T(M_{a+b}(E)). \tag{2.3}$$

O resultado segue trivialmente usando (2.1), (2.2) e (2.3). ■

E assim ficou provado que $M_{a+b}(E)$ e $A_{a,b}$ não são PI-equivalentes quando char $K = p > 2$.

Lembramos que sobre corpos de característica zero as álgebras $M_{a,b}(E) \otimes E$ e $M_{a+b}(E)$ são PI-equivalentes. Foi provado, em ([10],Corolário 24), que as álgebras $A_{1,1}$ e $M_{1,1}(E) \otimes E$ satisfazem as mesmas identidades polinomiais. Em [6] Alves mostrou que as álgebras $A_{k,k}$ e $M_{k,k}(E) \otimes E$ satisfazem as mesmas identidades polinomiais para todo $k > 1$.

Teorema 2.3.12. *As álgebras $A_{k,k}$ e $M_{k,k} \otimes E$ são PI-equivalentes.*

Prova: Veja ([6], Teorema 8). ■

Corolário 2.3.13. *Seja $k \geq 1$. Então, as álgebras $M_{k,k}(E) \otimes E$ e $M_{2k}(E)$ não são PI-equivalentes.*

Prova: Sendo $M_{k,k}(E) \otimes E \sim A_{k,k}$ e $A_{k,k} \nsim M_{2k}(E)$, o resultado segue imediatamente. ■

Corolário 2.3.14. *Para todo inteiro $k \geq 1$ temos que $T(M_{2k}(E)) \subsetneq T(M_{k,k}(E) \otimes E)$.*

Prova: Usando o Teorema 2.3.11 e o Teorema 2.3.12, obtemos que

$$T(M_{2k}(E)) \subsetneq T(A_{k,k}) = T(M_{k,k}(E) \otimes E)$$

para todo $k \geq 1$. ■

2.4 As álgebras $A_{a,b}$ e $M_{a,b}(E) \otimes E$

Nesta seção estabeleceremos a inclusão $T(A_{a,b}(E)) \subseteq T(M_{a,b} \otimes E)$ para $a \neq b$ em característica $p > 2$. Os resultados obtidos nesta seção estão publicados em [4].

Já mencionamos que em [6, Section 3] Alves mostrou que $A_{b,b} \sim M_{b,b}(E) \otimes E$ e em [7, Theorem 1] foi provado que $A_{a,b}$ e $M_{a+b}(E)$ não são PI equivalentes, em característica $p > 2$.

Inicialmente denotaremos por G o grupo $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$, $n = a + b$. Lembramos que a álgebra $A_{a,b}$ possui uma G-graduação natural herdada de $M_{a+b}(E)$.

Sejam $X = Y \cup Z \cup W$ onde $Y = \{y_i^{(d)} \mid d \in \mathbb{Z}_n,\, i \geq 1\}$, $Z = \{z_i^{(d)} \mid d \in \mathbb{Z}_n,\, i \geq 1\}$, $W = \{w_i^{(d)} \mid d \in \mathbb{Z}_n,\, i \geq 1\}$ e considere $\Omega = \Omega(Y, Z, W)$ a álgebra livre supercomutativa.

Vamos definir uma G-graduação em $M_n(\Omega)$. Denotaremos por $\omega(x_i) = (\alpha(x_i), \beta(x_i))$ o G-grau of $x_i \in X$. Como em [10, Theorem 4] colocaremos $A_i = (a_{rs}^{(i)})$ sendo a matriz onde

$$a_{rs}^{(i)} = \begin{cases} y_i^{\overline{r-1}} + z_i^{\overline{r-1}}, & \text{se } (r,s) \in \Delta_0 \text{ e } \overline{s-r} = \alpha \\ z_i^{\overline{r-1}}, & \text{se } (r,s) \in \Delta_1 \text{ e } \overline{s-r} = \alpha \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \text{ quando } \omega(x_i) = (\alpha, 0); \text{ e}$$

$$a_{rs}^{(i)} = \begin{cases} w_i^{\overline{r-1}}, & \text{se } \overline{s-r} = \alpha \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \text{ quando } \omega(x_i) = (\alpha, 1).$$

Denote por F a subalgebra G-graduada de $M_n(\Omega)$ gerada pelas matrizes A_i, $i \geq 1$.

De modo análogo para o caso das matrizes genéricas, obtemos o seguinte:

Lema 2.4.1. *A álgebra G-graduada F é relativamente livre na variedade das álgebras G-graduadas geradas por $A_{a,b}$.*

Sejam $M_G(\mathcal{A}) = \{f \in T_G(\mathcal{A}) \mid f \text{ é monômio } \}$ e $\mathcal{S}$ o seguinte conjunto de polinômios G-graduados:

polinômio	$(\alpha(x_1), \beta(x_1))$	$(\alpha(x_2), \beta(x_2))$	$(\alpha(x_3), \beta(x_3))$
$x_1x_2 - x_2x_1$	(0,0)	(0,0)	-
$x_1x_2 - x_2x_1$	(0,0)	(0,1)	-
$x_1x_2 + x_2x_1$	(0,1)	(0,1)	-
$x_1x_2x_3 - x_3x_2x_1$	$(\alpha, 0)$	$(-\alpha, 0)$	$(\alpha, 0)$
$x_1x_2x_3 - x_3x_2x_1$	$(\alpha, 1)$	$(-\alpha, 0)$	$(\alpha, 0)$
$x_1x_2x_3 - x_3x_2x_1$	$(\alpha, 0)$	$(-\alpha, 1)$	$(\alpha, 0)$
$x_1x_2x_3 + x_3x_2x_1$	$(\alpha, 1)$	$(-\alpha, 1)$	$(\alpha, 1)$
$x_1x_2x_3 + x_3x_2x_1$	$(\alpha, 0)$	$(-\alpha, 1)$	$(\alpha, 1)$
$x_1x_2x_3 + x_3x_2x_1$	$(\alpha, 1)$	$(-\alpha, 0)$	$(\alpha, 1)$

Observação 2.4.2. *Em [10], os autores provaram que as identidades G-graduadas da álgebra $M_{a,b}(E) \otimes E$ seguem de $\mathcal{S}$ e $M_G(M_{a,b}(E) \otimes E)$.*

Denotemos por I o ideal das identidades G-graduadas gerado pelo conjunto S e por todos os monômios em $T_G(A_{a,b})$. Como $A_{a,b} \subseteq M_{a+b}(E)$ temos $I \subseteq T_G(A_{a,b})$.

Teorema 2.4.3. *Se $a+b=n$ então as identidades G-graduadas de $A_{a,b}$ seguem de I.*

Prova: Basta repetir o mesmo raciocínio das provas de [10, Proposition 14 and Theorem 15]. ■

Observação 2.4.4. *Usando o Teorema precedente, observamos que, para comparar os T-ideais G-graduados das álgebras $M_{a,b}(E)\otimes E$ e $A_{a,b}$ é suficiente compararmos seus monômios.*

Em [10], tal comparação foi feita para o caso $a=b=1$ obtendo que

$$T_G(A_{1,1}) = T_G(M_{1,1}(E)\otimes E).$$

Por conseguinte,

$$T(A_{1,1}) = T(M_{1,1}(E)\otimes E).$$

A álgebra $P = M_{a,b}(E)\otimes E$ é G-graduada do seguinte modo: $P_{(\alpha,\beta)} = (M_{a,b}(E))_{(\alpha,\beta)}\otimes E_0 \oplus (M_{a,b}(E))_{(\alpha,\beta+1)}\otimes E_1$. Agora, fixemos $\tilde{\Omega} = \Omega(Z,W)$, a álgebra livre supercomutativa com Z e W como no início desta seção. Como em [10, Section 4] definimos as matrizes $\tilde{A}_i = (a^{(i)}_{rs}), \tilde{B}_i = (b^{(i)}_{rs}) \in M_{a+b}(\tilde{\Omega})$ como segue: $a^{(i)}_{rs} = z_i^{\overline{r-1}}$ quando $\omega(x_i) = (\alpha,\beta) = (\overline{s-r},0)$ e $a^{(i)}_{rs} = 0$ caso contrário; analogamente $b^{(i)}_{rs} = w_i^{\overline{r-1}}$ quando $\omega(x_i) = (\alpha,\beta) = (\overline{s-r},1)$, e $b^{(i)}_{rs} = 0$ caso contrário.

Denotemos por SC outra cópia da álgebra livre supercomutativa; SC é livremente gerada pelas variáveis pares $\{z_i\}$ e ímpares $\{w_i\}$.

Agora vamos definir $C_i \in M_{a+b}(\tilde{\Omega})\otimes SC$ como segue: $C_i = \tilde{A}_i\otimes z_i + \tilde{B}_i\otimes w_i$, se $\beta(x_i)=0$, e $C_i = \tilde{B}_i\otimes z_i + \tilde{A}_i\otimes w_i$, se $\beta(x_i)=1$.

A subalgebra $\tilde{F}$ de $M_{a+b}(\tilde{\Omega})\otimes SC$ gerada por C_i, $i\geq 1$, é G-graduada de modo natural e, pelo [10, Lemma 11], temos $T_G(P) = T_G(\tilde{F})$.

Observamos que as matrizes $\tilde{A}_i, \tilde{B}_i \in M_{a+b}(\tilde{\Omega})$, $i\geq 1$ são bem similares às matrizes $A_i \in F \subseteq M_{a+b}(\Omega)$, $i\geq 1$. Este fato será usado na prova do seguinte

Lema 2.4.5. *Sejam $a\neq b$. Se $f\in K\langle X\rangle$ é um monômio tal que f não está em $T_G(M_{a,b}(E)\otimes E)$. Então $f\notin T_G(A_{a,b})$.*

Prova: Seja $f(x_1,\ldots,x_m) = x_{i_1}\cdots x_{i_q} \notin T_G(P) = T_G(\tilde{F})$. Então existem $d_k = C^{(k)}_1 + \ldots + C^{(k)}_{n_k} \in \tilde{F} \subseteq M_{a+b}(\tilde{\Omega})\otimes SC$, $k=1,\ldots,m$ tais que cada d_k tem o mesmo G-grau de x_k e $f(d_1,\ldots,d_m)\neq 0$. Se $\omega(d_k) = (\alpha,0)$ então $\omega(C^{(k)}_j) = (\alpha,0)$ and $C^{(k)}_j$ tem a forma

$C_j^{(k)} = \tilde{A}_j^{(k)} \otimes z_j + \tilde{B}_j^{(k)} \otimes w_j$, para todo j. Neste caso, definimos

$$l_k = \sum_j A_j^{(k)},$$

onde $A_j^{(k)} \in F \subseteq M_{a+b}(\Omega)$ é a matriz obtida de $\tilde{A}_j^{(k)}$ adicionando $y_j^{\overline{r-1}}$ as entradas que estão em Δ_0, e preservando as outras entradas. Note que cada l_k tem o mesmo G-grau (em $M_{a+b}(\Omega)$) de d_k e por construção temos $f(l_1, \ldots, l_m) \neq 0$.

Agora, se $\omega(d_k) = (\alpha, 1)$ então $\omega(C_j^{(k)}) = (\alpha, 1)$ e $C_j^{(k)}$ é da forma $C_j^{(k)} = \tilde{B}_j^{(k)} \otimes z_j + \tilde{A}_j^{(k)} \otimes w_j$, para todo j. Neste caso, definimos

$$l_k = \sum_j B_j^{(k)},$$

onde cada $B_j^{(k)}$ é da forma $B_j^{(k)} = \sum_i \tilde{B}_i^{(k)} \in F \subseteq M_{a+b}(\Omega)$ com escolhas convenientes das entradas $w_i^{\overline{r-1}}$ das matrizes $\tilde{B}_j^{(k)}$ tais que $w_{i_1}^{\overline{r-1}} \neq w_{i_2}^{\overline{r-1}}$ sempre que $i_1 \neq i_2$. Note que cada l_k tem o mesmo G-grau (em $M_{a+b}(\Omega)$) de d_k e por construção temos $f(l_1, \ldots, l_m) \neq 0$.

Ou seja, ambos os casos nos garantem $f \notin T_G(F) = T_G(A_{a,b})$, como desejado. ■

Finalmente estamos em condições de provar o resultado principal desta seção.

Teorema 2.4.6. *Let char $K = p > 2$ and $a \neq b$. Then $T(A_{a,b}) \subseteq T(M_{a,b}(E) \otimes E)$.*

Prova: Pelo Teorema 2.4.3, $T_G(A_{a,b})$ é gerado, como T_G-ideal por $I = \langle S \cup M_G(A_{a,b}) \rangle^{T_G}$, onde $M_G(\cdot)$ é o conjunto dos monômios que são identidades G-graduadas.
De acordo com [10, Theorem 15], $T_G(M_{a,b}(E) \otimes E) = \langle S \cup M_G(M_{a,b}(E) \otimes E) \rangle^{T_G}$. Agora, aplicando o Lema 2.4.5 temos $M_G(A_{a,b}) \subseteq M_G(M_{a,b}(E) \otimes E)$. Então

$$T_G(A_{a,b}) = \langle S \cup M_G(A_{a,b}) \rangle^{T_G} \subseteq$$

$$\subseteq \langle S \cup M_G(M_{a,b}(E) \otimes E) \rangle^{T_G} = T_G(M_{a,b}(E) \otimes E).$$

Finalmente, o Lema 1.5.12 garante que $T(A_{a,b}) \subseteq T(M_{a,b}(E) \otimes E)$, como queríamos. ■

CAPÍTULO 3

GK-DIMENSÃO DE ÁLGEBRAS

Neste capítulo vamos construir modelos genéricos para algumas álgebras importantes da PI-teoria. A partir destes modelos, vamos calcular a dimensão de Gelfand-Kirillov (GK-dimensão) das álgebras universais por elas determinadas. Como aplicação vamos obter a não PI-equivalência entre algumas álgebras.

3.1 Conceitos Básicos e Propriedades

Nesta seção apresentaremos conceitos básicos e propriedades da teoria de GK-dimensão necessárias para uma boa compreensão do capítulo (tais conceitos e propriedades não aparecem no capítulo 1, pois só neste capítulo faremos uso dos mesmos). Iniciamos com a definição do nosso principal objeto de estudos, a dimensão de Gelfand-Kirillov.

Definição 3.1.1. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra gerada pelo conjunto finito $\{r_1, \ldots, r_m\}$, consideramos $\mathcal{V}^n = span\{r_{i_1} \ldots r_{i_n} / r_{i_j} = 1, \ldots, m\}$; $n = 1, 2, \ldots$ e $\mathcal{V}^0 = K$. A função de argumento inteiro e não-negativo n, definida por*

$$g_{\mathcal{V}}(n) = \dim_K(\mathcal{V}^0 + \cdots + \mathcal{V}^n) \ ; \ n = 1, 2, \ldots$$

é denominada a função de crescimento da álgebra $\mathcal{A}$ (com respeito a $\mathcal{V} = \mathcal{V}^1$).

A dimensão de Gelfand-Kirillov da álgebra $\mathcal{A}$ é definida por

$$GK\dim(\mathcal{A}) = \limsup_{n\to\infty} \log_n[g_{\mathcal{V}}(n)] = \limsup_{n\to\infty}\{\frac{\log[g_{\mathcal{V}}(n)]}{\log(n)}\}.$$

O próximo resultado trata da independência da GK-dimensão de uma álgebra, no que diz respeito, ao seu conjunto de geradores.

Lema 3.1.2. *A GK-dimensão de uma álgebra finitamente gerada $\mathcal{A}$ não depende da escolha do conjunto de geradores.*

Prova: Sejam $\mathcal{V} = span\{r_1, \ldots, r_m\}$ e $\mathcal{W} = span\{s_1, \ldots, s_l\}$ espaços gerados por dois conjuntos de geradores da álgebra $\mathcal{A}$. Sejam $\text{GKdim}_{\mathcal{V}}(\mathcal{A})$ e $\text{GKdim}_{\mathcal{W}}(\mathcal{A})$ as GK-dimensões de $\mathcal{A}$ definidas por $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$, respectivamente. Como $r_1, \ldots, r_m$ geram a álgebra $\mathcal{A}$, existe inteiro p tal que para todo $j = 1, \ldots, l$ temos que $s_j \in \mathcal{V}^0 + \cdots + \mathcal{V}^{pn}$. Assim,

$$\mathcal{W}^0 + \cdots + \mathcal{W}^n \subseteq \mathcal{V}^0 + \cdots + \mathcal{V}^{pn} \ ; \ n = 0, 1, \ldots$$

Daí, obtemos que

$$g_{\mathcal{W}}(n) = \dim_K(\mathcal{W}^0 + \cdots + \mathcal{W}^n) \leq \dim_K(\mathcal{V}^0 + \cdots + \mathcal{V}^{pn}) = g_{\mathcal{V}}(pn)$$

e aplicando logaritmo, vem que

$$\log_n(g_{\mathcal{W}}(n)) \leq \log_n(g_{\mathcal{V}}(pn)) = \frac{\log_{pn}(g_{\mathcal{V}}(pn))}{\log_{pn}(n)} = \frac{\log_{pn}(g_{\mathcal{V}}(pn))}{1 - \log_{pn}(p)}.$$

Aplicando limite, vem que

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \log_n[g_{\mathcal{W}}(n)] &\leq \limsup_{n\to\infty}\{\frac{\log_{pn}[g_{\mathcal{V}}(pn)]}{1 - \log_{pn}(p)}\} = \limsup_{pn\to\infty} \log_{pn}[g_{\mathcal{V}}(pn)] \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \log_n[g_{\mathcal{V}}(n)]. \end{aligned}$$

Agora, da definição, obtemos que

$$\text{GKdim}_{\mathcal{W}}(\mathcal{A}) \leq \text{GKdim}_{\mathcal{V}}(\mathcal{A}).$$

De modo similar obtemos a desigualdade contrária, e portanto

$$\text{GKdim}_{\mathcal{W}}(\mathcal{A}) = \text{GKdim}_{\mathcal{V}}(\mathcal{A})$$

como queríamos. ■

Exemplo 3.1.3. *Seja* $\mathcal{A} = K[x_1, x_2, \ldots x_m]$ *a álgebra polinomial. Então,* $GK\mathrm{dim}\,(\mathcal{A}) = m$.

Prova: Observe que o número de monômios de grau menor ou igual que n em m variáveis é igual ao número de monômios de grau n em $m+1$ variáveis, pois se $a_1 + \cdots + a_m \leq n$, temos a seguinte correspondência biunívoca:

$$x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_m^{a_m} \leftrightarrow x_0^{a_0} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_m^{a_m} \text{ onde } a_0 = n - (a_1 + \ldots a_m)$$

entre estes conjuntos. Agora, com respeito ao conjunto usual de geradores de $\mathcal{A}$, temos

$$g(n) = \begin{pmatrix} n+m \\ m \end{pmatrix} \; ; n = 1, 2, 3, \ldots$$

que é um polinômio de grau m. A partir da definição de GK-dimensão, obtemos que

$$\mathrm{GKdim}\,(\mathcal{A}) = \limsup_{n\to\infty} \log_n [g_{\mathcal{V}}(n)] = m$$

como desejado. ■

No próximo resultado apresentaremos algumas propriedades básicas da dimensão de Gelfand-Kirillov, para demonstrações e mais detalhes recomendamos uma leitura de ([19],[25]).

Proposição 3.1.4. *Seja* $\mathcal{A}$ *uma álgebra.*

(1) Sejam $\mathcal{I}$ *um ideal de* $\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{S}$ *uma subálgebra de* $\mathcal{A}$*. Então*

$$GK\mathrm{dim}\,(\mathcal{S}), GK\mathrm{dim}\,(\mathcal{A}/\mathcal{I}) \leq GK\mathrm{dim}\,(\mathcal{A});$$

(2) Seja $\mathcal{B}$ *uma álgebra que é imagem homomórfica de* $\mathcal{A}$*. Então*

$$GK\mathrm{dim}\,(\mathcal{B}) \leq GK\mathrm{dim}\,(\mathcal{A});$$

(3) $GK\mathrm{dim}\,(\mathcal{A}) = 0$ *se, e somente se,* $\mathcal{A}$ *é um espaço vetorial de dimensão finita. Nos outros casos, temos que*

$$GK\mathrm{dim}\,(\mathcal{A}) = 1 \text{ ou } GK\mathrm{dim}\,(\mathcal{A}) \geq 2;$$

(4) Se $\mathcal{B} = \mathcal{A}[x_1, \ldots, x_m]$ *com* $x_1, \ldots, x_m$ *variáveis comutando. Então*

$$GK\mathrm{dim}\,(\mathcal{B}) = GK\mathrm{dim}\,(\mathcal{A}) + m;$$

(5) *Seja $\mathcal{A}$ comutativa. Então, a GK-dimensão de $\mathcal{A}$ é igual ao grau de transcendência de $\mathcal{A}$, isto é, ao número máximo de elementos algebricamente independentes;*

(6) $GK\mathrm{dim}\,(\mathcal{A}) < \infty$ *se, e somente se, a função de crescimento de $\mathcal{A}$ com respeito a algum conjunto finito de geradores é de crescimento polinomial.*

A seguir apresentaremos dois exemplos de álgebras que não possuem GK-dimensão finita. No primeiro a álgebra é finitamente gerada e no segundo a álgebra não é finitamente gerada.

Exemplo 3.1.5. *Seja $m > 1$. A álgebra associativa livre $\mathcal{A} = K\langle x_1, \ldots, x_m\rangle$ (polinômios não comutativos) não tem GK-dimensão finita.*

Prova: Para o conjunto usual de geradores de $\mathcal{A}$, a função de crescimento é dada por

$$g(n) = 1 + m + m^2 + \cdots + m^n \ ; \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Como esta função cresce mais rápido que qualquer função polinomial, da Proposição 3.1.4(6), obtemos que a GK-dimensão da álgebra $\mathcal{A}$ não pode ser finita. ■

Exemplo 3.1.6. *Seja $\mathcal{A} = \mathbb{R}[[x]]$ a $\mathbb{R}$-álgebra das séries de potências de x com coeficientes em $\mathbb{R}$. Então, $GK\dim(\mathcal{A}) = \infty$.*

Prova: Vamos mostrar que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma subálgebra $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ satisfazendo $GK\dim(\mathcal{B}) \geq n$, daí concluímos facilmente que $GK\dim(\mathcal{A}) = \infty$.

Seja $\{r_i \mid i = 1, 2, \ldots\}$ um conjunto enumerável infinito de números reais que é linearmente independente sobre $\mathbb{Q}$. Então, o conjunto das funções $\{f_i(x) = e^{r_i x} \mid i = 1, 2, \ldots\}$ é algebricamente independente sobre $\mathbb{R}$. Agora, via série de Maclaurin cada função deste conjunto pode ser pensada como um elemento da álgebra $\mathcal{A}$. Logo, $\mathcal{A}$ contém uma subálgebra isomorfa a álgebra polinomial

$$\mathbb{R}[y_1, y_2, \ldots y_n] \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Usando a Proposição 3.1.4(1) e o Exemplo 3.1.3, para cada n, obtemos que:

$$GK\dim(\mathcal{A}) \geq n.$$

Portanto

$$GK\dim(\mathcal{A}) = \infty$$

como queríamos. ■

Agora vamos analisar como a GK-dimensão se comporta com respeito a altura de uma álgebra. Para mais informações e detalhes, veja ([8], [19], [20]).

Definição 3.1.7. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra gerada por $r_1, r_2, \ldots, r_m$. Seja $\mathcal{H}$ um conjunto finito de monômios nos $r_i's$. Diremos que $\mathcal{A}$ é de altura $h = h_{\mathcal{H}}(A)$ com respeito a $\mathcal{H}$ se, h é o menor inteiro positivo tal que $\mathcal{A}$ pode ser gerada, como espaço vetorial, pelos produtos*

$$U_{i_1}^{j_1} U_{i_2}^{j_2} \ldots U_{i_t}^{j_t} \text{ onde } U_{i_k} \in \mathcal{H} \text{ e } t \leq h.$$

Exemplo 3.1.8. *Sejam $\mathcal{A} = K[x_1, x_2, \ldots, x_m]$ e $\mathcal{H} = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. Então, $h_{\mathcal{H}}(A) = m$.*

Prova: Como espaço vetorial, $\mathcal{A}$ é gerada pelos produtos $x_1^{k_1} \ldots x_m^{k_m}$ e os monômios que possuem todas as variáveis não podem ser escritos como combinação linear de monômios com menos que m potências distintas de x_i. ■

O seguinte teorema, conhecido como Teorema de Shirshov sobre a altura, é um dos resultados de grande importância na teoria combinatorial das PI álgebras.

Teorema 3.1.9. *(Shirshov) Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra gerada por $r_1, r_2, \ldots, r_m$. Assuma que $\mathcal{A}$ satisfaz uma identidade polinomial de grau $d > 1$. Então, $\mathcal{A}$ tem altura finita com respeito ao seguinte conjunto de monômios*

$$\{r_{i_1} r_{i_2} \ldots r_{i_s} \mid i_j = 1, 2, \ldots m \text{ e } s < d\}$$

Prova: Veja ([19], Capítulo 9). ■

O próximo resultado é devido a A. Berele (1982), daremos uma idéia de sua demonstração via Teorema de Shirshov (a prova original pode ser encontrada em [25]).

Teorema 3.1.10. *(Berele) Toda PI-álgebra finitamente gerada $\mathcal{A}$ tem GK-dimensão finita.*

Prova: (Idéia) Seja $\mathcal{A}$ gerada por $\mathcal{V} = span\{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$ satisfazendo uma identidade polinomial de grau $d > 1$. Pelo Teorema de Shirshov, existe h, a altura de $\mathcal{A}$, tal que $\mathcal{A}$ é gerada pelos monômios

$$U_{i_1}^{j_1} U_{i_2}^{j_2} \ldots U_{i_t}^{j_t} \text{ onde } t \leq h$$

e os monômios $U_{i_1}, \ldots, U_{i_t}$ são de comprimento menor que d. Agora, $\mathcal{V}^n$ é gerado pelos monômios com $k_1|U_{i_1}| + \cdots + k_t|U_{i_t}| = n$. Daí, $\mathcal{V}^0 + \cdots + \mathcal{V}^n$ é subespaço do espaço gerado pelos monômios

$$U_{i_1}^{k_1} U_{i_2}^{k_2} \ldots U_{i_h}^{k_h} \text{ onde } k_1 + \cdots + k_h \leq n.$$

Seja p o número de monômios com comprimento menor que d ($p = 1 + m + \cdots + m^{d-1}$). O número de seqüências de índices $(i_1, \ldots, i_h)$ é limitado por p^h. Assim, a dimensão $g_{\mathcal{V}}(n)$ de $\mathcal{V}^0 + \cdots + \mathcal{V}^n$ é limitada pelo produto entre o número de seqüencias $(i_1, \ldots, i_h)$ e o número de monômios de grau $\leq n$ em h variáveis

$$g_{\mathcal{V}}(n) \leq p^h \begin{pmatrix} n+m \\ m \end{pmatrix}$$

que é um polinômio de grau h. Daí, obtemos que

$$GK\dim(\mathcal{A}) \leq h$$

onde h é a altura de $\mathcal{A}$. ■

3.2 Sobre a GK-dimensão de $U_m(\mathcal{A})$

Nesta seção discutiremos alguns resultados envolvendo a GK-dimensão da álgebra universal determinada por uma álgebra $\mathcal{A}$. Estes resultados são de importância fundamental para o restante do capítulo.

Definição 3.2.1. *A álgebra relativamente livre (também chamada de universal) de posto m na variedade gerada pela álgebra $\mathcal{A}$ é definida por*

$$U_m(\mathcal{A}) = K\langle x_1, \ldots, x_m\rangle/(T(\mathcal{A}) \cap K\langle x_1, \ldots, x_m\rangle).$$

Lema 3.2.2. *Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são duas álgebras PI-equivalentes então*

$$U_m(\mathcal{A}) = U_m(\mathcal{B}) \ \text{e}\ GK\dim[U_m(\mathcal{A})] = GK\dim[U_m(\mathcal{B})].$$

Prova: Sendo $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ álgebras PI-equivalentes, temos que $T(\mathcal{A}) = T(\mathcal{B})$. Daí, vem que $T_m(\mathcal{A}) = T_m(\mathcal{B})$ e $U_m(\mathcal{A}) = K\langle x_1, \ldots, x_m\rangle/T_m(\mathcal{A}) = K\langle x_1, \ldots, x_m\rangle/T_m(\mathcal{B}) = U_m(\mathcal{B})$. Portanto, $\mathrm{GKdim}[U_m(\mathcal{A})] = \mathrm{GKdim}[U_m(\mathcal{B})]$. ■

Observação 3.2.3. *Por várias vezes, no decorrer do texto, vamos usar a contra-positiva do Lema 3.2.2, isto é, PI-álgebras que possuem álgebras universais com dimensões de Gelfand-Kirillov diferentes não são PI-equivalentes.*

Lema 3.2.4. *Se $T(\mathcal{A}) \subseteq T(\mathcal{B})$ então $GK\dim[U_m(\mathcal{A})] \geq GK\dim[U_m(\mathcal{B})]$.*

Prova: Sendo $T(\mathcal{A}) \subseteq T(\mathcal{B})$ obtemos que $T_m(\mathcal{A}) \subseteq T_m(\mathcal{B})$. A partir disso obtemos o seguinte homomorfismo sobrejetor

$$\begin{array}{rccc} \Psi: & U_m(\mathcal{A}) & \longrightarrow & U_m(\mathcal{B}) \\ & f + T_m(\mathcal{A}) & \longmapsto & f + T_m(\mathcal{B}). \end{array}$$

Daí, $U_m(\mathcal{B})$ é imagem homomórfica de $U_m(\mathcal{A})$ e da Proposição 3.1.4(2), obtemos que

$$\mathrm{GKdim}\,[U_m(\mathcal{A})] \geq \mathrm{GKdim}\,[U_m(\mathcal{B})]$$

como queríamos. ■

Lema 3.2.5. *Se $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ então $GK\mathrm{dim}\,[U_m(\mathcal{A})] \leq GK\mathrm{dim}\,[U_m(\mathcal{B})]$.*

Prova: Como $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, temos $T(\mathcal{A}) \supseteq T(\mathcal{B})$ e em seguida usamos o Lema 3.2.4. ■

O próximo resultado é devido a Procesi e Berele, para mais detalhes e demonstrações sugerimos uma leitura de ([29],[11]).

Teorema 3.2.6. *(Procesi (i) e Berele ((ii),(iii))) Seja K um corpo infinito de característica arbitrária. Então:*

(i) $GK\mathrm{dim}\,[U_m(M_n(K))] = (m-1)n^2 + 1$;

(ii) $GK\mathrm{dim}\,[U_m(M_n(E))] = (m-1)n^2 + 1$;

(iii) $GK\mathrm{dim}\,[U_m(M_{a,b}(E))] = (m-1)(a^2 + b^2) + 2$.

A prova do Teorema acima em sua parte (ii), dada por Berele em [11], também nos fornece uma fórmula para calcular $\mathrm{GKdim}\,[U_m(\mathcal{A})]$ quando $T(\mathcal{A}) = T(M_{n_1}(K)) \ldots T(M_{n_s}(K))$. A saber

$$\mathrm{GKdim}\,[U_m(\mathcal{A})] = \sum_{i=1}^{s} \mathrm{GKdim}\, U_m(M_{n_i}(K)).$$

Corolário 3.2.7. *Seja K um corpo com $\mathrm{char}\, K = 0$. Então:*

(i) $GK\mathrm{dim}\,[U_m(E \otimes E)] = 2m$;

(ii) $GK\mathrm{dim}\,[U_m(M_{a,b}(E) \otimes E)] = (m-1)(a+b)^2 + 1$;

(iii) $GK\mathrm{dim}\,[U_m(M_{a,b}(E) \otimes M_{c,d}(E))] = (m-1)[(ac+bd)^2 + (ad+bc)^2] + 2$.

Prova: De acordo com o Teorema do Produto Tensorial de Kemer, sabemos que $T(E \otimes E) = T(M_{1,1}(E))$, $T(M_{a,b}(E) \otimes E) = T(M_{a+b}(E))$ e $T(M_{a,b}(E) \otimes M_{c,d}(E)) = T(M_{ac+bd,ad+bc}(E))$.
Agora aplicando, o Lema 3.2.2 e o Teorema 3.2.6 a prova segue. ■

O próximo resultado nos fornece uma cota inferior para a álgebra universal determinada pela álgebra $A_{a,b}$.

Lema 3.2.8. $GK\dim[U_m(A_{a,b})] \geq (m-1)(a^2+b^2)+2$.

Prova: Iniciamos observando que, $M_{a,b}(E) \subseteq A_{a,b}$. Do Lema 3.2.5, sabemos que

$$\text{GKdim}\,[U_m(M_{a,b}(E))] \leq \text{GKdim}\,[U_m(A_{a,b})].$$

De acordo com o Teorema 3.2.6(iii), obtemos que

$$(m-1)(a^2+b^2)+2 \leq \text{GKdim}\,[U_m(A_{a,b})]$$

como queríamos. ■

3.2.1 As álgebras $E \otimes E$ e $M_{1,1}(E)$

Em ([5]) os autores construíram um modelo genérico para a álgebra $U_m(E \otimes E)$, sobre corpos infinitos com char $K = p > 2$, e usaram este modelo para calcular $GK\dim[U_m(E \otimes E)]$. Além disso, apresentaram uma nova prova da não PI-equivalência das álgebras $E \otimes E$ e $M_{1,1}(E)$.

Para char $K = 0$, já vimos que

$$\text{GKdim}\,[U_m(E \otimes E)] = \text{GKdim}\,[U_m(M_{1,1}(E))] = 2m.$$

Para char $K = p > 2$; Azevedo, Fidelis e Koshlukov em ([9], [10]), usando identidades graduadas mostraram os seguintes resultados

(1) Se $\mathcal{A} = K \oplus M_{1,1}(E')$ então $T(\mathcal{A}) = T(K \oplus M_{1,1}(E')) = T(E \otimes E)$;

(2) As álgebras $\mathcal{A}$ e $M_{1,1}(E)$ não são PI-equivalentes. Mais ainda,

$$T(\mathcal{A}) = T(E \otimes E) \supsetneq T(M_{1,1}(E)).$$

E finalmente, em ([5]), Alves e Koshlukov provaram o seguinte:

Teorema 3.2.9. *$GK\dim[U_m(E \otimes E)] = m$ quando $\operatorname{char} K = p > 2$.*

E como consequência, obtiveram o seguinte

Corolário 3.2.10. *As álgebras $E \otimes E$ e $M_{1,1}(E)$ não são PI-equivalentes.*

Prova: Suponha por contradição que as álgebras $E \otimes E$ e $M_{1,1}(E)$ são PI-equivalentes, isto é $T(E \otimes E) = T(M_{1,1}(E))$. Então $T_m(E \otimes E) = T_m(M_{1,1}(E))$ e daí $U_m(E \otimes E) = U_m(M_{1,1}(E))$. Como $\mathrm{GKdim}\,[U_m(M_{1,1}(E))] = 2m$, obtemos que

$$\mathrm{GKdim}\,[U_m(E \otimes E)] = \mathrm{GKdim}\,[U_m(M_{1,1}(E))] = 2m,$$

contradizendo o Teorema 3.2.9. Portanto, as álgebras $E \otimes E$ e $M_{1,1}(E)$ não podem ser PI-equivalentes. ■

3.2.2 GK-dimensão de $U_m(A_{a,b})$ e $U_m(M_{a,a}(E) \otimes E)$

No que segue vamos assumir que $\operatorname{char} K = p > 2$. Em ([6]), Alves construiu um modelo genérico para a álgebra $U_m(A_{a,b})$, e a partir deste modelo calculou $GK\dim[U_m(A_{a,b})]$.

Teorema 3.2.11. *$GK\dim[U_m(A_{a,b})] = (m-1)(a^2+b^2)+2$.*

Como aplicação, concluiu que as álgebras $A_{a,b}$ e $A_{c,d}$ não são PI-equivalentes.

Corolário 3.2.12. *Sejam $a^2+b^2 \neq c^2+d^2$. Então as álgebras $A_{a,b}$ e $A_{c,d}$ não são PI-equivalentes.*

Prova: As álgebras não podem ser PI-equivalentes pois suas álgebras universais têm GK-dimensões diferentes. ■

Lembramos que sobre corpos com característica zero as álgebras $A_{a,b}$ e $M_{a+b}(E)$ são PI-equivalentes (isto segue do fato que E e E' são PI-equivalentes em $\operatorname{char} K = 0$, veja [28]) e daí,

$$GK\dim[U_m(A_{a,b})] = GK\dim[U_m(M_{a+b}(E))] = (m-1)(a+b)^2+1.$$

Corolário 3.2.13. *Se $\operatorname{char} K = p > 2$, então as álgebras $A_{a,b}$ e $M_{a+b}(E)$ não são PI-equivalentes.*

Prova: As álgebras não podem ser PI-equivalentes pois suas álgebras universais têm GK-dimensões diferentes. ■

Ainda em [6], Alves observou que, se $\operatorname{char} K = p > 2$, então de acordo com Teorema 2.3.12, as álgebras $A_{a,a}$ e $M_{a,a}(E) \otimes E$ satisfazem as mesmas identidades polinomiais. Daí $U_k(A_{a,a}) = U_k(M_{a,a}(E) \otimes E)$. Assim, estas duas álgebras têm mesma GK dimensão que, de acordo com o Teorema 3.2.11, é igual a $2(k-1)a^2+2$. Deste modo o autor obteve o seguinte

Teorema 3.2.14. *$GK\dim [U_k(M_{a,a}(E) \otimes E)] = 2(k-1)a^2+2$.*

3.3 GK-dimensão de $U_m(M_{a,b}(E) \otimes E)$

Nesta seção mostraremos como obter $GK \dim U_m(M_{a,b}(E) \otimes E)$. Como aplicação concluiremos que as álgebras $M_{a,b}(E) \otimes E$ e $M_{a+b}(E)$ não são PI-equivalentes quando $\operatorname{char} K = p > 2$. Tais resultados estão publicados em [4].
Além disso, fazendo uso destes resultados, responderemos também a seguinte questão aberta proposta em [10]:

Sabemos que $T(M_{a,b}(E) \otimes E) = T(M_{c,d}(E) \otimes E)$ quando $a+b = c+d$ e $\operatorname{char} K = 0$. Isto é verdade quando $\operatorname{char} K = p > 2$?

Acontece que a resposta é negativa e publicamos este resultado em [3].

É bem sabido que em $\operatorname{char} K = 0$ as álgebras $M_{a,b}(E) \otimes E$ e $A_{a,b}$ são PI equivalentes à álgebra $M_{a+b}(E)$ (isto pode ser deduzido do Teorema de Kemer e da PI equivalência de E e E' quando $\operatorname{char} K = 0$).

Lembremos também que de [6] tínhamos $\operatorname{GKdim} U_m(A_{a,b}) = (m-1)(a^2+b^2)+2$, $M_{b,b}(E) \otimes E \sim A_{b,b}$ e $\operatorname{GKdim} U_m(M_{b,b}(E) \otimes E) = 2(m-1)b^2+2$ em característica $p > 2$.

Agora, iremos calcular $\operatorname{GKdim} U_m(M_{a,b}(E) \otimes E)$ para o caso $a \neq b$.

Lema 3.3.1. *$GK\dim [U_m(M_{a,b}(E) \otimes E)] \geq (m-1)(a^2+b^2)+2$.*

Prova: Como $M_{a,b}(E)$ mergulha em $M_{a,b}(E) \otimes E$ obtemos que

$$T(M_{a,b}(E) \otimes E) \subseteq T(M_{a,b}(E))$$

e assim

$$\text{GKdim}\,[U_m(M_{a,b}(E) \otimes E)] \geq \text{GKdim}\,[U_m(M_{a,b}(E))] = (m-1)(a^2+b^2)+2.$$

■

Agora podemos provar o seguinte

Teorema 3.3.2. *Se char $K = p > 2$ então*

$$GK\text{dim}\,U_m(M_{a,b}(E) \otimes E) = (m-1)(a^2+b^2)+2.$$

Prova: Se $a = b$ o resultado é aquele obtido em [6]. Suponhamos então $a \neq b$. Pelo Teorema 2.4.6 temos $T(A_{a,b}) \subseteq T(M_{a,b}(E) \otimes E)$. Daí, pelo Lema 3.2.4, obtemos:

$$\text{GKdim}\,U_m(M_{a,b}(E) \otimes E) \leq \text{GKdim}\,U_m(A_{a,b}) = (m-1)(a^2+b^2)+2.$$

Mas pelo Lema (3.3.1),

$$\text{GKdim}\,[U_m(M_{a,b}(E) \otimes E)] \geq (m-1)(a^2+b^2)+2$$

e assim obtemos o resultado desejado. ■

Como consequência obtemos a não PI equivalência das álgebras $M_{a,b}(E) \otimes E$ e $M_{a+b}(E)$:

Corolário 3.3.3. *As álgebras $M_{a,b}(E) \otimes E$ e $M_{a+b}(E)$ não são PI-equivalentes.*

Prova: As álgebras não podem ser PI-equivalentes, pois suas álgebras universais possuem GK-dimensão diferentes. Basta observarmos que:

(1) De Berele ([11], Teorema 7), sabemos que $GK\dim U_m(M_{a+b}(E)) = (m-1)(a+b)^2+1$;

(2) Do Teorema 3.3.2, obtemos que $GK\dim U_m(M_{a,b}(E) \otimes E) = (m-1)(a^2+b^2)+2$.

Usando (1) e (2) obtemos que $GK\dim U_m(M_{a+b}(E)) \neq GK\dim U_m(M_{a,b}(E) \otimes E)$. ■

Sabemos que em char $K = 0$, $M_{a,b}(E) \otimes E$ e $M_{c,d}(E) \otimes E$ são PI-equivalentes, se $a+b = c+d$.

Corolário 3.3.4 ([3], Teorema 3.1). *Seja* $\operatorname{char} K = p > 2$, $a \neq c$ *e* $a + b = c + d$. *Então:* $M_{a,b}(E)\otimes E$ *e* $M_{c,d}(E)\otimes E$ *não são PI-equivalentes.*

Prova: De acordo com o Teorema 3.3.2, $\text{GKdim}\, U_m(M_{a,b}(E)\otimes E) = (m-1)(a^2+b^2)+2$ e $\text{GKdim}\, U_m(M_{c,d}(E)\otimes E) = (m-1)(c^2+d^2)+2$. Como $a \neq c$ e $a+b = c+d$ então $b \neq d$ e $a^2+b^2 \neq c^2+d^2$ o que implica:

$$(m-1)(a^2+b^2)+2 \neq (m-1)(c^2+d^2)+2 \Rightarrow$$

$$\text{GKdim}\, U_m(M_{a,b}(E)\otimes E) \neq \text{GKdim}\, U_m(M_{c,d}(E)\otimes E).$$

Agora, pela Observação 3.2.3, temos que as álgebras $M_{a,b}(E)\otimes E$ e $M_{c,d}(E)\otimes E$ não podem ser PI-equivalentes, como queríamos. ■

3.4 GK-dimensão de $U_m(M_n(E)\otimes E)$

Nesta seção apresentaremos o resultado recentemente obtido (veja [1]), do cálculo da $GK\dim U_m(M_n(E)\otimes E)$. Como aplicação, concluiremos que as álgebras $M_n(E)\otimes E$ e $M_{n,n}(E)$ não são PI-equivalentes quando a característica do corpo base é positiva.
Lembramos que sobre corpos de característica zero, as álgebras $M_n(E)\otimes E$ e $M_{n,n}(E)$ são PI-equivalentes, e daí obtemos que

$$GK\dim[U_m(M_{n,n}(E)\otimes E)] = GK\dim[U_m(M_{2n}(E))] = (m-1)(2n)^2+1.$$

No que segue vamos assumir que $\operatorname{char} K = p > 2$.

Usando um resultado obtido recentemente por Alves em [2], inicialmente temos o seguinte:

Lema 3.4.1. $GK\dim[U_m(M_n(E)\otimes E)] \geq (m-1)n^2+1$

Prova: Como $M_n(K)$ mergulha em $M_n(K)\oplus M_{n,n}(E')$ obtemos que

$$T(M_n(K)\oplus M_{n,n}(E')) \subseteq T(M_n(K)).$$

Em [[2], Corolário (3.6)] Alves provou o seguinte:

$$T(M_n(K)\oplus M_{n,n}(E')) = T(M_n(E)\otimes E)$$

e então

$$T(M_n(E)\otimes E) \subseteq T(M_n(K))$$

por conseguinte, obtemos que

$$GK\dim[U_m(M_n(E)\otimes E)] \geq GK\dim[U_m(M_n(K))] = (m-1)n^2+1.$$

■

A fim de encontrar um limitante superior para GKdim $U_m(M_n(E)\otimes E)$, vamos construir um modelo genérico apropriado de $U_m(M_n(E)\otimes E)$. Como em [9], denotaremos por $H = K\oplus M_{1,1}(E')$ a subalgebra unitária of $M_{1,1}(E)$ obtida de $M_{1,1}(E')$ por adjunção formal da unidade I_2, a matriz identidade de ordem 2.

Agora, usando os isomorfismos definidos em [6] (Lema 4) obtemos $M_n(H)\cong A\oplus M_{n,n}(E')$, onde

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a\in M_n(K) \right\} \subset M_{2n}(K).$$

Por [9, Proposition 10] temos $H\sim E\otimes E$, e o isomorfismo entre $M_n(E\otimes E)$ e $M_n(E)\otimes E$ nos dá a PI-equivalência:

$$M_n(E)\otimes E \sim A\oplus M_{n,n}(E').$$

Isso prova o seguinte:

Lema 3.4.2. $GK\mathrm{dim}\,[U_m(M_n(E)\otimes E)] = GK\mathrm{dim}\,[U_m(A\oplus M_{n,n}(E'))]$.

Prova: Pelo exposto acima, as álgebras $M_n(E)\otimes E$ e $A\oplus M_{n,n}(E')$ são PI equivalentes. Logo, pelo Lema 3.2.2, $U_m(M_n(E)\otimes E) = U_m(A\oplus M_{n,n}(E'))$ e

$$\mathrm{GKdim}\,[U_m(M_n(E)\otimes E)] = \mathrm{GKdim}\,[U_m(A\oplus M_{n,n}(E'))].$$ ■

Assim, para nossos propósitos, é suficiente construirmos um modelo genérico para a álgebra $A\oplus M_{n,n}(E')$.

Sejam $\Delta_0 = \{(i,j)\,|\,1\leq i,j\leq n,\ \text{or}\ n+1\leq i,j\leq 2n\}$ e $\Delta_1 = \{(i,j)\,|\,1\leq i\leq n,$ $n+1\leq j\leq 2n\ \text{or}\ 1\leq j\leq n, n+1\leq i\leq 2n\}$.

A seguinte construção repete a de [11].

Sejam

$$\widetilde{Y}_r = (a_{ij})_{2n\times 2n} \text{ onde } a_{ij} = \begin{cases} \widetilde{y}_{ij}^{(r)}, & \text{se} \quad (i,j)\in\Delta_0, \\ 0, & \text{se} \quad (i,j)\in\Delta_1, \\ \widetilde{y}_{i+n,j+n}^{(r)} = \widetilde{y}_{i,j}^{(r)}, & \text{para todo} \quad 0\leq i,j\leq n. \end{cases}$$

$$\widetilde{Z_r}=(b_{ij})_{2n\times 2n} \text{ onde } b_{ij}=\begin{cases}\tilde{z}_{ij}^{(r)}, & \text{se} \quad (i,j)\in\Delta_0,\\ 0, & \text{caso contrário}\end{cases}.$$

$$\widetilde{W_r}=(c_{ij})_{2n\times 2n} \text{ onde } c_{ij}=\begin{cases}\tilde{w}_{ij}^{(r)}, & \text{se} \quad (i,j)\in\Delta_1,\\ 0, & \text{caso contrário}\end{cases}.$$

Aqui $\tilde{y}_{ij}^{(r)}$ são as variáveis que comutam, correspondentes à parte escalar das respectivas entradas das matrizes em $A\oplus M_{n,n}(E')$; $\tilde{z}_{ij}^{(r)}$ são os geradores livres de Ω_0', e $\tilde{w}_{ij}^{(r)}$ são os geradores livres de Ω_1. Lembramos que $\Omega'=\Omega_0'\oplus\Omega_1$ é a álgebra supercomutativa livre sem unidade.

Denotaremos por U a álgebra gerada por $X_1=\tilde{Y}_1+\tilde{Z}_1+\tilde{W}_1, X_2=\tilde{Y}_2+\tilde{Z}_2+\tilde{W}_2,\ldots,X_m=\tilde{Y}_m+\tilde{Z}_m+\tilde{W}_m$.

Lema 3.4.3. *$U\cong U_m(A\oplus M_{n,n}(E'))$.*

Prova: A prova é análoga ao caso das matrizes genéricas. Veja também a prova do Lema 7 de [9]. ■

Note que $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{U}_1$ onde $\mathcal{U}_1$ é a álgebra gerada por $\widetilde{Y_r}$, $\widetilde{Z_r}$ e $\widetilde{W_r}$ onde $r=1,2,\ldots,m\rangle$. Do mesmo modo como foi feito em [[11], seção 5], mudamos o modelo de $\mathcal{U}_1$ como segue.

Passando de K para o fecho algébrico do corpo $K(\widetilde{y_{ij}}^{(r)}\mid 1\le i,\ j\le 2n)$ podemos diagonalizar a matriz "genérica" $\widetilde{Y_1}$ sobre $\overline{K}$. Isto é, existe alguma $P\in M_{2n}(\overline{K})$ tal que $P\tilde{Y}_1P^{-1}$ é uma matriz diagonal.

Denotaremos por $Y_r=P\tilde{Y}_rP^{-1}$, $Z_r=P\tilde{Z}_rP^{-1}$, $W_r=P\tilde{W}_rP^{-1}$, $r=1,\ldots,m$. Como P preserva transformação linear, temos $U_1\cong K\langle Y_r,Z_r,W_r\mid r=1,2,\ldots,m\rangle$ onde $Y_1=\sum_{i=1}^{2n}\lambda_ie_{ii}$, $\lambda_{i+n}=\lambda_i$, $\forall\ i\in\{1,\ldots,n\}$. Para simplificar as notações, no restante da prova vamos assumir $m=2$.

Para obter um limite superior para a GK-dimensão de $\mathcal{U}$, imergimos $\mathcal{U}_1$ em um anel maior $\mathcal{R}$. Este anel $\mathcal{R}$ é gerado pelo conjunto

$$\{\lambda_ie_{ii},y_{ij}^{(2)}e_{ij}\mid (i,j)\in\Delta_0 \text{ and } \lambda_{i+n}=\lambda_i,y_{i+n,j+n}^{(2)}=y_{ij}^{(2)},\ \forall\, 1\le i,j\le n\}\cup$$
$$\{z_{ij}^{(r)}e_{ij}\mid (i,j)\in\Delta_0,r=1,2\}\cup\{w_{ij}^{(r)}e_{ij}\mid (i,j)\in\Delta_1,r=1,2\}.$$

Para tornar as notações mais simples escrevemos y_{ij} para $y_{ij}^{(2)}$, z_{ij} for $z_{ij}^{(1)}$, t_{ij} for $z_{ij}^{(2)}$, w_{ij} for $w_{ij}^{(1)}$ and v_{ij} for $w_{ij}^{(2)}$.

Para o próximo Lema, vamos omitir as relações $\lambda_{i+n}=\lambda_i,y_{i+n,j+n}=y_{ij},\ 1\le i,\ j\le n$.

Lema 3.4.4. *Seja $\mathcal{V}$ o espaço vetorial com base $u_1, \ldots, u_{2n}$, e seja*

$$r = \prod_i \lambda_i^{\alpha_i} \prod_{i,j} y_{ij}^{a_{ij}} \prod_{i,j} z_{ij}^{b_{ij}} \prod_{i,j} t_{ij}^{c_{ij}} \prod_{i,j} w_{ij}^{d_{ij}} \prod_{i,j} v_{ij}^{f_{ij}} e_{st},$$

Aqui os índices de $\lambda_i, y_{ij}, z_{ij}, t_{ij}$ percorrem Δ_0 e os índices de w_{ij}, v_{ij} percorrem Δ_1; α_i, a_{ij} são inteiros positivos; $b_{ij}, c_{ij} \in \{0, \ldots, p-1\}$, e $d_{ij}, f_{ij} \in \{0,1\}$. Se $r \in R$ então

$$\sum_{i,j}(a_{ij} + b_{ij} + c_{ij} + d_{ij} + f_{ij})(u_i - u_j) = u_s - u_t \in V.$$

Prova: Veja ([11], Lema 15). ■

Definimos $g_{s,t}(k)$ como o número de sêxtuplas ordenadas $(\alpha_i, a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}, f_{ij})$ que satisfazem as hipóteses do Lema anterior e a condição adicional que a soma das suas entradas é $\leq k$. Seja $g(k) = \sum_{s,t} g_{s,t}(k)$. A função $g(k)$ é um limite superior para a função de crescimento de $\mathcal{R}$. Nosso objetivo agora passa a ser estimar a função $g(k)$.

Primeiro observamos que as entradas de uma tal sêxtupla satisfazem a equação

$$(1) \sum_{i,j}(a_{ij} + b_{ij} + c_{ij} + d_{ij} + f_{ij})(u_i - u_j) = u_s - u_t$$

para cada escolha de s e t. Mais ainda, obtemos que

$$(2) \sum_i \alpha_i + \sum_{i,j}(a_{ij} + b_{ij} + c_{ij} + d_{ij} + f_{ij}) \leq k.$$

Assim, existe uma quantidade finita de possibilidades de escolhas para s, t, $b_{ij} + c_{ij}$ e $d_{ij} + f_{ij}$ que satisfazem as duas condições (1) e (2).

Suponhamos que uma destas possíveis escolhas tenha sido feita. Então a_{ij} deve satisfazer

$$\sum a_{ij}(u_i - u_j) = u$$

e

$$\sum a_{ij} = k',$$

onde

$$u = u_s - u_t - \sum_{i,j}(b_{ij} + c_{ij} + d_{ij} + f_{ij})(u_i - u_j)$$

e

$$k' = k - \sum_{i,j}(b_{ij} + c_{ij} + d_{ij} + f_{ij}).$$

O seguinte Lema é devido a [Berele, [11]].

Lema 3.4.5. *Sejam $\mathcal{V}$ um espaço vetorial e $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{V}$ um hiperplano de dimensão d. Seja $L(n)$ o conjunto de pontos de $\mathcal{V}$ cujas coordenadas estão todas em $\{0, 1, \dots, n\}$. Então, o número de pontos em $\mathcal{H} \cap L(n)$ é menor ou igual a $(n+1)^d$.*

Prova: Vamos usar indução sobre d. O caso $d = 0$ é trivial. Seja $\mathcal{H}_i$ o hiperplano de codimensão 1 no qual a primeira coordenada é constante igual a 1. Sendo $\dim \mathcal{H} > 1$ alguma coordenada não é constante em $\mathcal{H}$, vamos assumir que esta é a primeira. Portanto, $\dim(\mathcal{H}_i \cap \mathcal{H}) = d-1$ e, por hipótese de indução $\mathcal{H}_i \cap \mathcal{H} \cap L(n)$ tem cardinalidade $\leq (n+1)^{d-1}$. Agora, $\mathcal{H} \cap L(n)$ é a união sobre $i = 0, 1, \dots, n$ de $\mathcal{H}_i \cap \mathcal{H} \cap L(n)$, e daí, tem cardinalidade $\leq (n+1)^d$. ■

Com o intuito de usar o Lema 3.4.5, definimos $\mathcal{V}$ o espaço vetorial com base $\{\alpha_i, a_{ij} \mid (i,j) \in \Delta_0\}$ e seja $\mathcal{W}$ o espaço vetorial com base $\{u_i - u_j \mid (i,j) \in \Delta_0\}$.

Afirmamos que o conjunto $J = \{(\alpha_i, a_{ij}) \mid \sum a_{ij}(u_i - u_j) = u\}$ é um hiperplano em $\mathcal{V}$ de codimensão $2n-2$. De fato, temos que $\dim(\mathcal{W}) = 2n-2$ e daí os a_{ij}'s são determinados pela combinação linear $\sum a_{ij}(u_i - u_j) = u \in \mathcal{W}$. Assim, existem $2n-2$ vetores fixos na dupla ordenada $(\alpha_i, a_{ij}) \in J$ e isso prova nossa afirmação.

Logo, concluímos que $\dim(J) = (n^2 + n^2 + 2n) - (2n-2) = 2(n^2+1)$. Considerando agora as relações $\lambda_{i+n} = \lambda_i$, $y_{i+n,j+n} = y_{ij}$ para $1 \leq i,j \leq n$, vemos que nossa estimativa é, na verdade, n^2+1. Isto juntamente com o Lema 3.4.5 prova o seguinte resultado.

Lema 3.4.6. *$g(k)$ é limitada superiormente por um polinômio de grau n^2+1.*

Teorema 3.4.7. *$GK\dim\,[U_m(A \oplus M_{n,n}(E'))] \leq (m-1)n^2 + 1$.*

Prova: Se $m = 2$ então

$$\mathrm{GKdim}\, U_2(A \oplus M_{n,n}(E')) \leq \limsup \log_k g(k) \leq n^2 + 1$$

Se $m > 2$, a prova é análoga, pois cada nova matriz genérica adiciona (n^2) novas variáveis $y_{ij}^{(r)}$ e o conjunto de relações permanece o mesmo. A partir disso, $g(k)$ passa a ser limitado superiormente por um polinômio de grau $(m-1)n^2+1$, donde obtemos

$$\mathrm{GKdim}\, U_m(A \oplus M_{n,n}(E')) \leq \limsup \log_k g(k) \leq (m-1)n^2 + 1.$$

■

Lema 3.4.8. $GK\dim[U_m(M_n(E) \otimes E)] \leq (m-1)n^2 + 1$

Prova: Pelo Lema 3.4.2, $GK\dim[U_m(M_n(E) \otimes E)] = \mathrm{GKdim}\,[U_m(A \oplus M_{n,n}(E'))]$. Por sua vez, pelo Teorema anterior, $\mathrm{GKdim}\,[U_m(A \oplus M_{n,n}(E'))] \leq (m-1)n^2 + 1$. Portanto,

$$GK\dim[U_m(M_n(E) \otimes E)] \leq (m-1)n^2 + 1$$

como queríamos. ■

Usando agora os Lemas 3.4.1 e 3.4.8 obtemos o seguinte resultado:

Teorema 3.4.9. $GK\dim[U_m(M_n(E) \otimes E)] = (m-1)n^2 + 1.$

Observação 3.4.10. *Em [2], Alves provou, usando polinômios centrais, que as álgebras $M_n(E) \otimes E$ e $M_{n,n}(E)$ não são PI-equivalentes. Como consequência do Teorema 3.4.9, conseguimos uma nova prova deste fato, como estabelecido no corolário seguinte.*

Corolário 3.4.11. *As álgebras $M_n(E) \otimes E$ e $M_{n,n}(E)$ não são PI-equivalentes.*

Prova: As álgebras não podem ser PI-equivalentes, pois suas álgebras universais possuem GK-dimensão diferentes. Basta observarmos que

(1) De Berele ([11], Teorema 7), sabemos que $GK\dim U_m(M_{n,n}(E)) = (m-1)(2n)^2 + 1$;

(2) Do Teorema 3.4.9, obtemos que $GK\dim U_m(M_n(E) \otimes E) = (m-1)n^2 + 1$.

Usando (1) e (2) obtemos que $GK\dim U_m(M_{n,n}(E)) \neq GK\dim U_m(M_n(E) \otimes E)$. ■

CAPÍTULO 4

CONJECTURA

Neste capítulo apresentaremos uma Conjectura, (veja [3]), acerca da dimensão de Gelfand-Kirillov de álgebras universais de posto m, no que diz respeito ao produto tensorial de álgebras T-primas pela álgebra de Grassmann.

4.1 Justificativa

As álgebras verbalmente primas desempenham um papel proeminente na PI-teoria. Lembramos que uma álgebra é verbalmente prima se seu T-ideal é primo na classe de todos os T-ideais na álgebra associativa livre. A maioria dos resultados conhecidos sobre álgebras verbalmente primas trata do caso de corpos de característica zero.

Vimos no Capítulo 2 que a teoria estrutural de T-ideais desenvolvida por Kemer classificou as álgebras verbalmente primas sobre tais corpos. Denotando por K o corpo de base, $\operatorname{char} K = 0$, de acordo com a teoria de Kemer, as álgebras verbalmente primas são exatamente as seguintes:

Primeiro as triviais; $\{0\}$ e $K\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre de posto infinito. Por conseguinte, $M_n(K)$, a álgebra das matrizes $n \times n$ com entradas em K. Denotando por E a álgebra de Grassmann (ou exterior), a outra classe de álgebras verbalmente primas é dada pela álgebra das matrizes $n \times n$ com entradas em E, denotada por $M_n(E)$.

A hipótese sobre a característica do corpo ser zero permite-nos trabalhar apenas com identidades multilineares, e assim, podemos fazer uso das boas propriedades da multilinearidade. No desenvolvimento da teoria de Kemer, estas propriedades foram bastante utilizadas. Convém observar que, em característica positiva, a teoria de Kemer não se aplica diretamente, um dos obstáculos é o surgimento de novos T-ideais T-primos, chamados de T-ideais irregulares, cuja descrição completa é ainda um problema em aberto.

O que temos até agora é o seguinte:

Em [11], Berele calculou $\mathrm{GKdim}\,[U_m(M_n(E))]$ a qual coincide com $\mathrm{GKdim}\,[U_m(M_n(K))]$. Observe que $M_n(E) \simeq M_n(K) \otimes E$ e daí concluímos:

$$\mathrm{GKdim}\,[U_m(M_n(K) \otimes E)] = \mathrm{GKdim}\,[U_m(M_n(K))].$$

Em [5], Alves e Koshlukov provaram que:

$$\mathrm{GKdim}\,[U_m(E \otimes E)] = \mathrm{GKdim}\,[U_m(E)].$$

Em [4], os autores provaram que:

$$\mathrm{GKdim}\,[U_m(M_{a,b}(E) \otimes E)] = \mathrm{GKdim}\,[U_m(M_{a,b}(E))].$$

E por último, em [1] foi provado que:

$$\mathrm{GKdim}\,[U_m(M_n(E) \otimes E)] = \mathrm{GKdim}\,[U_m(M_n(E))].$$

O exposto acima justifica a conjectura a seguir.

4.2 A Conjectura

Os resultados apresentados na seção anterior nos levam a acreditar na seguinte:

Conjectura 4.2.1. *Seja A uma álgebra T-prima sobre um corpo infinito K com característica positiva $p > 2$. Então*

$$GK \dim U_m(A) = GK \dim U_m(A \otimes E).$$

Ressaltamos que a conjectura é trivialmente falsa quando o corpo é de característica zero. Como mencionamos na seção anterior, a maior dificuldade para trabalharmos com a Conjectura acima é que não temos uma descrição das álgebras T-primas para corpos de característica positiva.

BIBLIOGRAFIA

[1] F. G. de Paula, *The Gelfand-Kirillov dimension of the universal álgebras of $M_n(E) \otimes E$ in positive characteristic*, submitted;

[2] Sergio M. Alves, *The algebras $M_{n,n}(E)$ and $M_n(E) \otimes E$ in positive characteristic*, International Journal of Algebra, 2014

[3] Sergio M. Alves, Fernanda G. de Paula, *A conjecture about the Gelfand-Kirillov dimension of the universal algebra of $A \otimes E$ in positive characteristic*, International Journal of Algebra, 7, $743 - 747$, 2013

[4] S. M. Alves, F. G. de Paula, M. Fidelis, *The Gelfand-Kirillov dimension of the universal algebras of $M_{a,b}(E) \otimes E$ in positive characteristic*, Rend. Circ. Mat. Palermo, 60, 2011.

[5] S.M. Alves, P. Koshlukov, *Polynomial Identities of Algebras in Positive Characteristic*, J. Algebra, 305(2), $1149 - 1165$, 2006.

[6] S.M. Alves, *PI (non)equivalence and Gelfand-Kirillov dimension*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 58, $109 - 124$, 2009.

[7] S.M. Alves, *PI non-equivalence in Positive Characteristic*, Manuscripta Math, 131, $145-$ 147, 2010.

[8] T. Asparuhov, *The Shirshov theorem and Gelfand-Kirillov dimension for finitely generated PI algebras (in Bulgarian)*, MSc Thesis, Dept. Math. Infor., Univ. of Sofia, 1995.

[9] S.S. Azevedo, M. Fidellis and P. Koshlukov, *Tensor Product Theorems in positive characteristic*, J. Algebra 276(2), $836-845$, 2004.

[10] S.S. Azevedo, M. Fidellis and P. Koshlukov, *Graded identities and PI equivalence of algebras in positive characteristic*, Commun. Algebra, 33(4), $1011-1022$, 2005.

[11] A. Berele, *Generic Verbally Prime Algebras and their GK-dimensions*, Commun. Algebra, 21(5), $1487-1504$, 1993.

[12] A. Berele, *Classification theorems for verbally semiprime algebras*, Commun. Algebra, 21(5), $1505-1512$ 1993.

[13] A. Ya. Belov, *On the rationality of Hilbert series of relatively free algebras (in Russian)*, Uspekhi Mat. Nauk 52, N_o.2, $150-154$, 1997.

[14] A. Ya. Belov, *Counterexamples to the Specth problem*, Mathematic of the USSR-Sbornik, 191, $N_o.3-4$, $329-340$, 2000.

[15] A.K. Belov, L.H. Rowen, *Computational Aspects of Polynomial Identities*, A.K. Peters, Wellesley, 2005.

[16] O. M. Di Vincenzo, *On the graded identities of* $M_{1,1}(E)$, Israel J. Math., 80(3), $323-335$, 1992.

[17] O. M. Di Vincenzo and V. Nardozza, *Graded polynomial identities for tensor products by the Grassmann algebra*, Commun. Algebra 31(3), $1453-1474$, 2003.

[18] O. M. Di Vincenzo and V. Nardozza, $Z_{k+l}\times Z_2$*-graded polynomial identities for* $M_{k,l}(E)\otimes E$, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 108, $27-39$, (2000).

[19] V. Drensky, *Free algebras and PI algebras*, Graduate Course in Algebra, Springer-Verlag PTE.LTD, 1999.

[20] V. Drensky, *Gelfand-Kirillov dimension of PI algebras*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 198, Denker, New York, $97-113$, 1998.

[21] A. V. Grishin, *Examples of T-spaces and T-ideals in characteristic* 2 *withot finite basis property(in Russian)*, Fundamentalnaya i Prikladnaya Matematika, 5, N_o.1, $101-118$, 1999.

[22] A. Kemer, *Ideals of identities of associative algebras*, Translations Math. Monographs 87, Amer. Math. Soc., Providence. RI, 1991.

[23] A. Kemer, *The standard identities in characteristic p: A conjecture of I.B. Volichenko*, Israel J. Math., 81(3), $343-355$, 1993.

[24] P. Koshlukov and S.S. Azevedo, *Graded identities for T-prime algebras over fields of positive characteristic*, Israel J. Math., 81(3), $343-355$, 2002.

[25] G.R. Krause and T.H. Lenagan, *Growth of algebras and Gelfand-Kirillov dimension*, Pitman Publ., London, 1985.

[26] J. Lewin, *A matrix representation for associative algebras*, I, Trans. Amer. Math. Soc., 188, $293-308$, 1974.

[27] V.T. Markov, *The Gelfand-Kirillov dimension: Nilpotency representability, Non matrix varieties (in Russian)*, Siberian School on Varieties of Algebraic Systems, Abstracts, Barnaul, $43-45$, 1988.

[28] A. Popov, *Identities of the tensor square of a Grassmann algebra*, Algebra Logic, 21(4), $296-316$, 1982.

[29] C. Procesi, *Non-commutative Affine Rings*, Atti Accad. Naz. Lincei menh. Cl. Sci. Fis. Mat Natur. Sez I, 8(8), $239-255$, 1967.

[30] C. Procesi, L. Small, *Endomorphism Rings of Modules over PI-Algebras*, Math. Z., 106, $178-180$, 1968.

[31] A. Regev, *Tensor products of matrix algebras over the Grassmann algebra*, J. Algebra, 133(2), $512-526$, 1990.

[32] A. Regev, *Grasmann algebras over finite fields*, Commun. Algebra, 19, $1829-1849$, 1991.

[33] A. Regev, *Existence of identities in* $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, Israel J. Math., 11, $131 - 152$, 1972.

[34] V.V. Shchigolev, *Examples of infinitely basable T-spaces*, Mathematics of the USSR-Sbornik, 191, $N_o.3 - 4$, $459 - 476$, 2000.

[35] W. Specth, *Gesetze in ringen*, Math. Z., 52, $557 - 589$, 1950.

[36] K. Zhevlakov, A. Slinko, I. Shestakov and A. Shirshov, *Rings that are Nearly associative*, Pure Appl. Math., 104, Academic Press, New York - London, 1982.