Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática e estatística - IME
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PGMAT
Tese de Doutorado

Contribuições às teorias da coerência e da compatibilidade

Fabrício Antônio Oliveira dos Santos

Salvador-Bahia
Março de 2020

Contribuições às teorias da coerência e da compatibilidade

Fabrício Antônio Oliveira dos Santos

Tese de Doutorado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Joilson Oliveira Ribeiro.

Salvador-Bahia
Março de 2020

Santos, Fabrício Antônio Oliveira dos

Contribuições às teoria da coerência e da compatibilidade / Fabrício Antônio Oliveira dos Santos. – Salvador: UFBA, 2020.

Quantidade de folhas f.134 : il.

Orientador: Prof. Dr. Joilson Oliveira Ribeiro.

Tese (doutorado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática e Estatística, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2020.

Referências bibliográficas.

1. Ideais de aplicações multilineares. 2. Coerência e compatibilidade. 3. Classes de sequências I. Joilson Oliveira Ribeiro. II. Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDU : 517.5

Tese de doutorado

Fabrício Antônio Oliveira dos Santos

Tese de Doutorado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática, aprovada em 06 de março de 2020.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Joilson Oliveira Ribeiro (Orientador)
UFBA

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino
UFPB

Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho
UFU

Prof. Dr. Jamilson Ramos Campos
UFPB

Prof. Dr. Vladimir Pestov
UFBA

Aos meus pais e minha linda esposa, que sempre me apoiaram em todos os momentos.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, que nunca me desamparou e sempre esteve ao meu lado concedendo-me bençãos e livramentos.

Agradeço também à minha família, em especial, à minha mãe Anaildes Oliveira dos Santos e ao meu pai Fernando Antônio dos Santos que sempre me apoiaram nesta caminhada e se mostraram orgulhosos a cada conquista alcançada por mim. Aos meus irmãos, Faustino Mario dos Santos Neto e Patrício Oliveira dos Santos pelo apoio que me deram nessa caminhada.

À minha esposa, Marília Santos dos Anjos, que esteve comigo nessa jornada e sempre me apoiou nos momentos mais difíceis. É a mulher com quem quero dividir todos os dias restantes da minha vida.

Aos meus amigos, que conseguem me fazer sorrir mesmo nos momentos mais estressantes do dia a dia. Em especial, meus amigos da Biblioteca Santa Clara. Eu queria poder escrever um pouco sobre cada um aqui, mas, de certo acabaria sendo injusto com alguns. Então de um modo geral: Obrigado por me ouvirem quando eu reclamava (e eu reclamava muito), por acharem que eu sei mais do que realmente sei, pelas piadas sem noção de humor (que eu retribuo com uma pior ainda) e por estarem ao meu lado sempre.

Aos professores da graduação e pós graduação do IME-UFBA. Em particular, eu queria agradecer ao professor Augusto Armando de Castro Junior, o primeiro a me mostrar o vasto mundo da matemática e principal motivador da minha escolha em estudar análise. Agradeço também ao professor Evandro Carlos Ferreira dos Santos, por todo apoio dado durante a graduação.

Um agradecimento especial ao professor Joilson Oliveira Ribeiro por sua orientação, paciência, confiança, amizade e todo suporte dado durante este doutorado.

Queria também agradecer à banca examinadora pelas valiosas contribuições e conselhos que agregaram ao o corpo desta tese.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro concedido durante todo o meu doutorado.

"Nunca deixe que lhe digam que não vale a pena acreditar no sonho que se tem."

–Renato Russo

Resumo

Neste trabalho, traremos contribuições para as teorias da coerência e da compatibilidade já estabelecidas na literatura, passando pelas recém introduzidas classes de sequências e generalizando-as. Apresentaremos também uma abordagem abstrata para os polinômios absolutamente somantes e para as aplicações multilineares múltiplo somantes, nos levando a estabelecer conceitos que generalizam as classes de sequências. Estabeleceremos um novo conceito de coerência e compatibilidade mais restrito, testando seus limites em alguns métodos geradores de ideais e apresentaremos algumas de suas propriedades. Por fim, apresentamos uma nova abordagem para os recém introduzidos multipolinômios de forma a nos permitir estabelecer um conceito novo para a coerência e compatibilidade no contexto multipolinomial.

Palavras-chave: Espaços de sequências, ideais de operadores, coerência e compatibilidade, classes de sequências.

Abstract

In this work, we will present contributions to the coherence and compatibility theories already established in the literature, passing through the newly introduced sequence classes and generalizing them. We will also present an abstract approach to absolutely summing polynomials and to summing multiple multilinear applications, leading us to establish concepts that generalize the sequence classes. We have established a new concept of stricter coherence and compatibility by testing its limits on some ideal generator methods and presenting some of its properties. Finally, we present a new approach to the newly introduced multipolinomials in order to allow us to establish a new concept for coherence and compatibility in the multipolinomial context.
Keywords: Sequences spaces, operator ideals, coherence and compatibility, sequence classes.

Sumário

1 Conceitos básicos **5**

1.1 Aplicações multilineares e polinômios homogêneos 5

1.2 Ideais de aplicações multilineares 9

1.3 Ideais de polinômios homogêneos 12

1.4 Coerência e compatibilidade 13

1.5 Classes de sequências 16

1.6 Operadores multilineares absolutamente $\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}$ - somantes 17

2 Coerência e compatibilidade de ideais de polinômios homogêneos e aplicações multilineares absolutamente γ_{s,s_1}-somantes **19**

2.1 Ideais de polinômios absolutamente γ_{s,s_1}-somantes 19

2.2 Coerência e compatibilidade 36

2.3 Algumas aplicações 42

3 Generalização dos operadores múltiplo somantes **45**

3.1 Operadores múltiplo $\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}$-somantes 45

3.2 $\left(\mathcal{L}^m_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}, \|\cdot\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}}\right)$ é um ideal Banach 58

3.3 Coerência e compatibilidade 62

3.4 Resultados de inclusão 66

3.5 Aplicações 68

4 Ideais fortemente coerentes e fortemente compatíveis **71**

4.1 Par de ideais fortemente coerentes e fortemente compatíveis 71

4.2 Ideal de Composição 77

4.3 Operadores Dunford-Pettis 80

4.4 Método da desigualdade 84

4.5 Método da $\mathcal{I}$-limitação 87

5 Multipolinômios **93**

5.1 Multipolinômios 93

5.2 Multipolinômios absolutamente γ-somantes 105

5.3 $(\mathcal{Q},\mathcal{M})$-Coerência e $(\mathcal{Q},\mathcal{M})$-compatibilidade 114

Introdução

A teoria geral dos ideais de operadores lineares teve efetivamente início na década de 70 com A. Pietsch em [50], com o objetivo de unificar o tratamento de diversas classes de operadores lineares que haviam sido bem estudados na literatura até o momento, mas seguiam em geral roteiros semelhantes, como as classes dos operadores lineares contínuos, compactos, fracamente compactos entre outras. Em 1983, ele mesmo generalizou essa teoria para o contexto multilinear, ver [51], cuja adaptação para polinômios homogêneos é imediata.

Quando pensamos em classes de aplicações multilineares ou de polinômios homogêneos, faz sentido perguntar como se comparam seus distintos níveis de multilinearidade ou de homogeneidade. Quando a comparação é com os níveis vizinhos, chamamos tal estudo de *coerência*. Quando a comparação é feita com o primeiro nível, isto é, com a classe das aplicações lineares, que gera as classes de aplicações multilineares e polinômios homogêneos em questão, tal estudo é chamado *compatibilidade*. Vale a pena destacar que nem sempre é uma tarefa simples associar um ideal de operadores lineares a um multi-ideal. Por exemplo, o ideal de operadores lineares absolutamente somantes tem, pelo menos, oito extensões possíveis para graus mais altos de multilinearidade (veja, [17, 29, 31, 36, 38, 44, 46]).

O estudo da coerência e da compatibilidade tem sua origem nos conceitos de ideais fechados sob diferenciação e fechados para multiplicação por escalar, introduzidos em [15] como uma tentativa de identificar um conjunto de propriedades que se espera que os ideais possuam para manter uma certa harmonia entre seus níveis de homogeneidades. Esses conceitos podem ser facilmente generalizados para multi-ideais, como pode ser visto em [44]. Seguindo o mesmo espírito Carando, Dimant e Muro, em [26, 27], introduzem uma noção de ideais de polinômios coerentes e compatíveis, com o mesmo objetivo de filtrar bons ideais de polinômios homogêneos que são extensões de um ideal de operadores lineares. Vale a pena destacar que a nomenclatura coerência e compatibilidade surge nos trabalhos de Carando, Muro e Dimant. Em [43] J. Ribeiro e D. Pellegrino apresentam um novo conceito de coerência e de compatibilidade, passando a analisar sequências de pares formados por classes de polinômios homogêneos e de aplicações multilineares.

Neste trabalho, apresentaremos contribuições para a teoria da coerência e da compatibilidade e também, no Capítulo 4, construiremos um conceito mais restrito que o

atual, extraindo diversas propriedades e apresentando alguns métodos geradores de ideais que satisfazem nossa abordagem.

Teoricamente, seria possível desenvolver este estudo em classes mais gerais, mas devido à falta de aplicabilidade e também devido às boas propriedades dos ideais, trabalharemos com, pelo menos, multi-ideais e ideais de polinômios homogêneos. O principal motivador deste novo conceito de coerência e de compatibilidade é a possibilidade de comparar níveis de multilinearidades e homegeneidades que não são vizinhos e, para isso, utilizamos formas multilineares e polinomiais tomando o papel de destaque antes ocupado pelos funcionais lineares. A formulação desta nova abordagem tem também como motivação o conceito de hiper-ideais, no qual as classes de aplicações multilineares e polinômios homogêneos satisfazem uma propriedade mais forte que os multi-ideais: a estabilidade pela composição com aplicações multilineares no lugar das aplicações lineares, ver [19, 20].

Em [57], D. Serrano-Rodríguez introduziu a classe das aplicações multilineares γ-somantes, que generaliza o conceito de aplicações multilineares absolutamente somantes já introduzidos na literatura. Neste mesmo trabalho, ela mostra que esta classe é um multi-ideal. Vale mencionar que o trabalho de abstração, em geral, não é simples. Por exemplo, o artigo [57] apresentava algumas lacunas nesse processo, preenchidas com o trabalho de G. Botelho e J. Campos [12], que introduzem notações e conceitos essenciais para o desenvolvimento dessa abordagem.

Seguindo esse roteiro natural, no Capítulo 2, apresentamos uma construção abstrata dos polinômios absolutamente somantes, mostramos que esta classe é um ideal Banach de polinômios homogêneos e apresentamos as condições necessárias para que o par formado por essa nova classe e a classe das aplicações multilineares definidos por Serrano-Rodríguez seja coerente e compatível, no contexto de Ribeiro e Pellegrino.

Inspirados pelos comentários e sugestões dos professores D. Pellegrino e G. Botelho, apresentamos, no Capítulo 3, uma abordagem abstrata das aplicações múltiplo somantes. A noção de operadores múltiplo somantes foi introduzida independentemente nos trabalhos [6, 36] e se baseia na teoria de sucesso das aplicações multilineares absolutamente somantes, que tem tido um progresso significante com o passar dos anos. Para mais detalhes ver [7, 11, 16, 23, 30, 36, 48, 49]. Na construção dessa abordagem abstrata, é necessário introduzir noções que generalizam os resultados introduzidos por Botelho e Campos em [12]. Concluímos mostrando que essa classe é um multi-ideal e apresentamos as condições necessárias para que o par formado por essa classe e a classe dos polinômios homogêneos gerados seja coerente e compatível, no contexto de Ribeiro e Pellegrino.

O conceito de multipolinômios foi inicialmente introduzido por I. Chernega e A. Zagorodnyuk em [28] e bem estudado por T. Velanga em [62]. Tal conceito unifica o tratamento das teorias bem sucedidas de polinômios homogêneos e aplicações multilineares entre os espaços de Banach. Em [63] foi mostrado que cada polinômio $(n_1, \ldots, n_m)$-homogêneo $P\colon E_1 \times \cdots \times E_m \to F$ pode ser associado à aplicação simétrica

$\check{P}\colon (E_1 \times \cdots \times E_m)^{(n_1+\cdots+n_m)} \to F$. Tal aplicação, apesar de ser obtida de maneira natural, apresenta muitas dificuldades no uso prático, devido à grande quantidade de espaços no seu domínio. Na tentativa de transpor essa dificuldade, introduzimos no Capítulo 5 uma nova abordagem para os multipolinômios, na qual cada um deles é associado a uma aplicação multilinear com domínio $E_1^{n_1} \times \cdots \times E_m^{n_m}$ agindo sobre F. Um dos nossos primeiros objetivos neste momento é investigar sob quais condições a unicidade da aplicação $T\colon E_1^{n_1} \times \cdots \times E_m^{n_m} \to F$ mencionada acima é obtida. Para isso, é necessário generalizar o conceito de simetria e a célebre Fórmula de Polarização.

A simplicidade dessa abordagem nos permite investigar a classe dos multipolinômios absolutamente somantes (para mais detalhes, ver [61, 62]), que no caso das aplicações multilineares e dos polinômios homogêneos foram estudados por diversos autores. Como exemplos, temos os absolutamente somantes, em [4, 37, 38], os Cohen fortemente somantes, em [23], os $(s, q, p_1, \ldots, p_n)$-mixing somantes, estudados em [7], os mid somantes, em [13, 53] e os quase somantes, em [42]. Seguindo o espírito das generalizações citadas acima, construiremos, na Seção 5.2, uma abordagem abstrata para os multipolinômios absolutamente somantes na tentativa de unificar os tratamentos das aplicações multilineares e dos polinômios homogêneos absolutamente somantes. Concluímos este trabalho apresentando um novo conceito de coerência e compatibilidade no contexto dos multipolinômios e apresentaremos algumas de suas propriedades.

Capítulo 1

Conceitos básicos

1.1 Aplicações multilineares e polinômios homogêneos

Nesta seção, apresentaremos os conceitos de aplicações multilineares e polinômios homogêneos e algumas de suas propriedades, que serão importantes no decorrer deste trabalho. As provas dos resultados desta seção podem ser consultados em [5].

Definição 1.1.1. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \ldots, E_n, F$ espaços vetoriais normados sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que uma aplicação $A : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ é n-linear (multilinear) se é linear em cada entrada. Mais precisamente, se para cada $x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n$ e $i = 1, \ldots, n$, o operador

$$A_{(x_1,\ldots,x_{i-1},\cdot,x_{i+1},\ldots,x_n)} \colon E_i \longrightarrow F$$

dado por

$$A_{(x_1,\ldots,x_{i-1},\cdot,x_{i+1},\ldots,x_n)}(y) = A(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

é linear.

Vamos fixar algumas notações que serão utilizadas daqui em diante: Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotaremos o conjuntos das aplicações multilineares de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em F por $L(E_1, \ldots, E_n; F)$. Quando $F = \mathbb{K}$, denotaremos $L(E_1, \ldots, E_n; F)$ por $L(E_1, \ldots, E_n)$ e, quando $E_1 = \cdots = E_n = E$, escreveremos $L(^nE; F)$. Se $n = 1$, denotaremos $L(^1E; F)$ por $L(E; F)$. Quando as aplicações multilineares forem contínuas, denotaremos o conjunto destas aplicações por $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Quando $F = \mathbb{K}$, denotaremos $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ por $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n)$ e quando $E_1 = \cdots = E_n = E$, escreveremos $\mathcal{L}(^nE; F)$. Se $n = 1$, denotaremos $\mathcal{L}(^1E; F)$ por $\mathcal{L}(E; F)$.

Uma caracterização bem conhecida das aplicações multilineares contínuas é a seguinte:

Teorema 1.1.2. *Seja $n \in \mathbb{N}$. Se $E_1, \ldots, E_n$ e F são espaços vetoriais normados sobre $\mathbb{K}$ e $T \colon E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ é uma aplicação n-linear, então são equivalentes:*

1. *T é contínua;*

2. *T é contínua na origem;*

3. *Existe uma constante $M > 0$ tal que*

$$\|T(x_1, \ldots, x_m)\| \leq M\|x_1\| \cdots \|x_n\|,$$

   para qualquer $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$;

4. *T é uniformemente contínua sobre os limitados;*

5. *T é limitada em toda bola com raio finito;*

6. *T é limitada em alguma bola.*

Diferente da linearidade, a continuidade das aplicações multilineares, em geral, não pode ser pensada como a continuidade coordenada à coordenada, exceto no seguinte caso.

Teorema 1.1.3. *Sejam $E_1, \ldots, E_n$ espaços de Banach e F um espaço vetorial normado. Então, a aplicação $T \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$ é contínua se, e somente se, é continua em cada variável.*

Um outro resultado clássico é o seguinte:

Proposição 1.1.4. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $E_1, \ldots, E_n, F$ espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$. Então a função $\|\cdot\|\colon \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F) \longrightarrow F$ definida por*

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\|; x \in E_1 \times \cdots \times E_n, \|x\|_\infty \leq 1\}$$

é uma norma completa em $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Onde,

$$\|x\|_\infty = \|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty = \max\{\|x_i\|;\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Uma classe particularmente importante, é a das aplicações multilineares simétricas, que definiremos a seguir.

Definição 1.1.5. Sejam E e F espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e $n \in \mathbb{N}$. Dizemos que uma aplicação n-linear contínua $T : E \times \overset{n}{\cdots} \times E \to F$ é simétrica, se tivermos

$$T(x_1, \ldots, x_n) = T(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}),$$

para toda permutação σ do conjunto $\{1, \ldots, n\}$ e todos $x_i \in E$, $i = 1, \ldots, n$.

O espaço das aplicações multilineares simétricas será denotado por $L_s(^nE;F)$. Quando estas aplicações forem contínuas denotaremos por $\mathcal{L}_s(^nE;F)$. É fácil ver que $\mathcal{L}_s(^nE;F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(^nE;F)$.

Observação 1.1.6. *No decorrer desta tese utilizaremos a seguinte notação:*

$$T(x^n) = T(x, \overset{n}{\ldots}, x),$$

para qualquer $T \in \mathcal{L}(^nE;F)$.

Uma expressão clássica, válida para as aplicações multilineares simétricas, é a célebre Fórmula de Polarização.

Teorema 1.1.7. *Seja* $T \in \mathcal{L}_s(^nE;F)$. *Então, para quaisquer* $x_0, x_1, \ldots, x_n \in E$, *vale que*

$$T(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\epsilon_i = \pm 1} \epsilon_1 \cdots \epsilon_n T(x_0 + \epsilon_1 x_1 + \cdots + \epsilon_n x_n)^n.$$

Uma consequência imediata da Fórmula de Polarização é a seguinte:

Proposição 1.1.8. *Sejam* E *e* F *espaços de Banach. Se* $T, S \in \mathcal{L}_s(^nE;F)$ *e* $T(x^n) = S(x^n)$ *para todo* $x \in E$. *Então,* $T(x_1, \ldots, x_n) = S(x_1, \ldots, x_n)$ *para todo* $x_1, \ldots, x_n \in E$.

Um fato bem conhecido é que nem toda aplicação multilinear contínua é simétrica, porém, podemos sempre simetrizá-la, isto é, definir uma aplicação simétrica através desta, como segue.

Definição 1.1.9. *Dada* $T \in \mathcal{L}(E^n;F)$, *definimos a simetrização de* T, *denotada por* T_s,

$$T_s(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} T_\sigma(x_1, \ldots, x_n),$$

onde

$$T_\sigma(x_1, \ldots, x_n) = T(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}),$$

para qualquer $\sigma \in S_n$, *onde* S_n *denota o conjunto de todas as permutações do conjunto* $\{1, \ldots, n\}$.

Observação 1.1.10. *Não é difícil mostrar que para qualquer* $T \in \mathcal{L}(^nE;F)$, *a aplicação* T_s *pertence a* $\mathcal{L}_s(^nE;F)$.

Agora, apresentaremos o conceito de polinômio homogêneo.

Definição 1.1.11. Sejam E e F espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Uma aplicação $P : E \to F$ é um polinômio n-homogêneo (ou homogêneo de grau n), se existir $T \in L(^nE;F)$ tal que $P(x) = T(x^n)$, para todo $x \in E$.

Denotaremos por $\mathcal{P}(^nE;F)$ o espaço de todos os polinômios n-homogêneos contínuos entre espaços de Banach. Quando $F=\mathbb{K}$, escreveremos apenas $\mathcal{P}(^nE)$.

Uma consequência imediata da Fórmula de Polarização é a seguinte:

Proposição 1.1.12. *Sejam E e F espaços de Banach e $n\in\mathbb{N}$. Se $P\in\mathcal{P}(^nE;F)$, então existe uma única aplicação n-linear simétrica $T\in\mathcal{L}_s(^nE;F)$, tal que, $P(x)=T(x^n)$ para todo $x\in E$. Tal aplicação será denotada por $\check{P}$.*

A proposição acima garante que dado um polinômio n-homogêneo, existe uma, e apenas uma, aplicação multilinear simétrica associada a ele. Daí, cabe perguntar se dado uma aplicação n-linear, podemos obter um polinômio n-homogêneo associado a ele? A resposta é sim e podemos fazer isso da seguinte forma: Dado $T\in\mathcal{L}(^nE;F)$, denotaremos por $\widehat{T}$ o polinômio n-homogêneo contínuo associado a T, isto é, $\widehat{T}(x)=T(x^n)$, para todo $x\in E$.

Observação 1.1.13. *Seja $P\in\mathcal{P}(^nE;F)$. Então, $(\check{P})^\wedge=P$. De fato, para todo $x\in E$ temos*

$$(\check{P})^\wedge(x)=\check{P}(x^n)=P(x).$$

Um resultado interessante que vale a pena mencionar é o seguinte:

Proposição 1.1.14. *A função $\psi:\mathcal{L}_s(^nE;F)\to\mathcal{P}(^nE;F)$, dada por $\psi(T)=\widehat{T}$, é um isomorfismo, para cada $n\in\mathbb{N}$.*

Assim, como feito no caso multilinear, podemos caracterizar a continuidade dos polinômios homogêneos por meio de desigualdades, como veremos a seguir.

Teorema 1.1.15. *Sejam E e F espaços vetoriais sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$, $n\in\mathbb{N}$, $P\in P(^nE;F)$ e $T\in L_s(E^n;F)$ com $\widehat{T}=P$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $T\in\mathcal{L}_s(E^n;F)$;

(b) $P\in\mathcal{P}(^nE;F)$;

(c) P é contínuo na origem;

(d) Existe uma constante $C>0$, tal que

$$\|P(x)\|\leq C\|x\|^n$$

para todo $x\in E$;

(e) P é limitado em toda bola de raio finito;

(f) P é limitado em alguma bola de raio finito;

(g) *Se $B \subset E$ é limitado, então, existe $C_B > 0$, tal que*

$$\|P(x) - P(y)\| \leq C_B \|x - y\|$$

para todos $x, y \in B$.

Proposição 1.1.16. *Seja $n \in \mathbb{N}$. Se E e F são espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$, então, a função $\|\cdot\| \colon \mathcal{P}(^nE; F) \longrightarrow F$ definida por*

$$\|P\| = \sup\{\|P(x)\|; x \in E,\ \|x\|_E \leq 1\}$$

é uma norma completa em $\mathcal{P}(^nE; F)$.

1.2 Ideais de aplicações multilineares

Na década de 80, A. Pietsch em [51] introduziu a noção de ideais de operadores multilineares, cuja adaptação para polinômios homogêneos é imediata. Nesta seção, exporemos alguns destes conceitos. As provas dos resultados desta seção podem ser consultados em [5].

Definição 1.2.1. Sejam $E_1, \ldots, E_m$ e F espaços de Banach. A aplicação

$$A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$$

é dita ser de tipo finito se existem $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_i^{(j)} \in E_j'$ e $b_i \in F$ com $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$, tais que

$$A(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^{(1)}(x_1) \cdots \varphi_i^{(m)}(x_m) b_i,$$

para todos $x_i \in E_i$, $i = 1, \ldots, m$. O conjunto formado por essas aplicações será denotado por $\mathcal{L}_f(E_1, \ldots, E_m; F)$.

Observação 1.2.2. *$\mathcal{L}_f(E_1, \ldots, E_m; F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$.*

Apresentaremos agora os ideais de aplicações multilineares e introduziremos algumas de suas propriedades que serão importantes no decorrer deste trabalho.

Definição 1.2.3. Um ideal de aplicações multilineares $\mathcal{M}$, ou apenas multi-ideal, é uma subclasse da classe de todas aplicações multilineares contínuas entre espaços de Banach, tal que, para todos $m \in \mathbb{N}$ e espaços de Banach $E_1, \ldots, E_m, F$, as componentes $\mathcal{M}_m(E_1, \ldots, E_m; F) := \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F) \cap \mathcal{M}$ satisfazem:

1. $\mathcal{M}_m(E_1, \ldots, E_m; F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$ que contém as aplicações m-lineares de tipo finito;

2. Se $A \in \mathcal{M}_m(E_1, \ldots, E_m; F), u_j \in \mathcal{L}(G_j, E_j)$ para $j = 1, \ldots, m$ e $t \in \mathcal{L}(F; H)$, então

$$t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_m) \in \mathcal{M}_m(G_1, \ldots, G_m; H).$$

Definição 1.2.4. Um ideal normado (resp. quasi-normado) de aplicações multilineares $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ é um ideal de aplicações multilineares munido da função $\|\cdot\|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \longrightarrow [0, \infty)$, tal que:

1. $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ restrita a $\mathcal{M}_m(E_1, \ldots, E_m; F)$ é uma norma (resp. quasi-norma, com constante não dependendo dos espaços, dependendo eventualmente apenas de m) para quaisquer espaços de Banach $E_1, \ldots, E_m, F$ e $m \in \mathbb{N}$;

2. $\|id_{\mathbb{K}^m}\|_{\mathcal{M}} = 1$, onde $id_{\mathbb{K}^m} : \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K}$ é dada por $id_{\mathbb{K}^m}(x_1, \ldots, x_m) = x_1 \cdots x_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$;

3. Se $A \in \mathcal{M}_m(E_1, \ldots, E_m; F), u_j \in \mathcal{L}(G_j, E_j)$ para $j = 1, \ldots, m$ e $t \in \mathcal{L}(F; H)$, então

$$\|t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_m)\|_{\mathcal{M}} \leq \|t\| \cdot \|A\|_{\mathcal{M}} \cdot \|u_1\| \cdots \|u_m\|.$$

Quando todas as componentes $\mathcal{M}_m(E_1, \ldots, E_m; F)$ são completas com essa (quasi-) norma, $\mathcal{M}$ é dito um ideal de aplicações multilineares (quasi-) Banach.

Fixados um ideal de aplicações multilineares $\mathcal{M}$ e $m \in \mathbb{N}$, a classe

$$\mathcal{M}_m := \bigcup_{E_1, \ldots, E_m, F} \mathcal{M}_m(E_1, \ldots, E_m; F)$$

é chamado ideal de aplicações m-lineares.

Em alguns momentos, chamaremos tanto $\mathcal{M}$ como $\mathcal{M}_m$ simplesmente de ideais de aplicações multilineares, porém, o contexto deixará claro o conceito que estaremos utilizando. É importante evidenciar também que as componentes de um ideal de aplicações multilineares $\mathcal{M}$ ou de um ideal de aplicações m-lineares $\mathcal{M}_m$ envolverão sempre espaços de Banach sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$.

Um resultado que vale a pena destacar é o seguinte:

Proposição 1.2.5. *Seja $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ um ideal normado de aplicações multilineares. Então, $\|T\| \leq \|T\|_{\mathcal{M}}$ para qualquer $T \in \mathcal{M}$.*

Uma classe de ideais de aplicações multilineares particularmente importante é o seguinte:

Definição 1.2.6. Dizemos que um multi-ideal $\mathcal{M}$ é simétrico se, dados quaisquer espaços de Banach E, F e $m \in \mathbb{N}$,

$$T_s \in \mathcal{M}(^m E; F),$$

sempre que $T \in \mathcal{M}(^m E; F)$.

Definição 1.2.7. Dizemos que um multi-ideal normado $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ é fortemente simétrico se, para quaisquer espaços de Banach E e F e $m \in \mathbb{N}$,

$$T_\sigma \in \mathcal{M}(^m E; F) \text{ e } \|T_\sigma\|_{\mathcal{M}} = \|T\|_{\mathcal{M}}$$

para todos $T \in \mathcal{M}(^m E; F)$ e $\sigma \in S_m$.

Exemplos 1.2.8. Alguns exemplos de multi-ideais simétricos são:

(1) A classe das aplicações multilineares de tipo finito;

(2) A classe das aplicações multilineares contínuas;

(3) A classe das aplicações multilineares absolutamente $(p, q_1, \ldots, q_m)$-somantes em todo ponto: Considere

$$\ell_p(E) := \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}};\ \sum_{j=1}^\infty \|x_j\|^p < \infty \right\} \text{ e}$$
$$\ell_p^w(E) := \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}};\ \sum_{j=1}^\infty |\varphi(x_j)|^p < \infty, \text{ para toda } \varphi \in E' := \mathcal{L}(E; \mathbb{K}) \right\}.$$

Uma aplicação multilinear $T \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$ é dita absolutamente $(p, q_1, \ldots, q_m)$-somante no ponto $a = (a_1, \ldots, a_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$ quando,

$$\left(T(a_1 + x_j^{(1)}, \ldots, a_m + x_j^{(m)}) - T(a_1, \ldots, a_m) \right)_{j=1}^\infty \in \ell_p(F)$$

para todo $\left(x_j^{(s)}\right)_{j=1}^\infty \in \ell_{q_s}^w(E_s)$, $s = 1, \ldots, m$.

O ideal das aplicações multilineares absolutamente $(p, q_1, \ldots, q_m)$-somantes em todo ponto ([4, 38, 47]), denotado por $\mathcal{L}_{as,(p,q_1,\ldots,q_m)}^{ev}$, é um ideal simétrico.

(4) A classe das aplicações multilineares Cohen fortemente p-somantes: Considere,

$$\ell_p\langle E \rangle := \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}};\ \sum_{j=1}^\infty |\varphi_j(x_j)| < \infty, \forall (\varphi_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{p'}^w(E') \text{ com } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \right\}.$$

Uma aplicação multilinear $T \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$ é dita p-somante no ponto $a =$

$(a_1, \ldots, a_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$ quando

$$\left(T\left(a_1 + x_j^{(1)}, \ldots, a_m + x_j^{(m)}\right) - T(a_1, \ldots, a_m)\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p\langle F\rangle$$

sempre que $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E_i)$, $i = 1, \ldots, m$.

O ideal das aplicações multilineares Cohen fortemente p-somantes em todo ponto ([24]), denotada por $\mathcal{L}_{Coh,p}^{ev}$, é um ideal simétrico.

1.3 Ideais de polinômios homogêneos

Nesta seção, abordaremos o conceito de ideal normado (Banach) de polinômios homogêneos entre espaços de Banach. Iniciaremos definindo os polinômios homogêneos de tipo finito.

Definição 1.3.1. Sejam E e F espaços de Banach. O polinômio m-homogêneo $P \in \mathcal{P}(^mE; F)$ é dito ser de tipo finito, se existem $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_i \in E'$ e $b_i \in F$ com $i = 1, \ldots, n$, tais que,

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i(x))^m b_i,$$

para todo $x \in E$. O conjunto formado por essas aplicações será denotado por $\mathcal{P}_f(^mE; F)$.

Observação 1.3.2. (a) O conjunto $\mathcal{P}_f(^mE; F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}(^mE; F)$.

(b) $P \in \mathcal{P}_f(^mE; F) \iff \check{P} \in \mathcal{L}_f(E^m; F)$.

Agora, passemos à definição de ideal de polinômios homogêneos entre espaços de Banach.

Definição 1.3.3. Um ideal de polinômios homogêneos é uma subclasse $\mathcal{Q}$ da classe de todos os polinômios homogêneos entre espaços de Banach, tal que, para quaisquer $m \in \mathbb{N}$, E e F espaços de Banach, as componentes $\mathcal{Q}(^mE; F) = \mathcal{P}(^mE; F) \cap \mathcal{Q}$ satisfazem:

(a) $\mathcal{Q}(^mE; F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}(^mE; F)$ que contém os polinômios m-homogêneos de tipo finito;

(b) Se $P \in \mathcal{Q}(^mE; F), u \in \mathcal{L}(G, E)$ e $t \in \mathcal{L}(F; H)$, então,

$$t \circ P \circ u \in \mathcal{Q}(^mG; H).$$

Se $m \in \mathbb{N}$ for fixo,

$$\mathcal{Q}_m = \bigcup_{E,F} \mathcal{Q}(^mE; F),$$

é chamado um ideal de polinômios m-homogêneos.

Definição 1.3.4. Um ideal normado (resp. quasi-normado) de polinômios homogêneos $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ é um ideal de polinômios homogêneos munido da função $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}} : \mathcal{Q} \longrightarrow [0, \infty)$, tal que:

1. $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}}$ restrita a $\mathcal{Q}(^mE; F)$ é uma norma (resp. quasi-norma, com constante não dependendo dos espaços, dependendo eventualmente apenas de m) para quaisquer espaços de Banach E, F e $m \in \mathbb{N}$;

2. $\|id_{\mathbb{K}^m}\|_{\mathcal{Q}} = 1$, onde $id_{\mathbb{K}^m} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ é dada por $id_{\mathbb{K}^m}(x) = x^m$ para todo $m \in \mathbb{N}$;

3. Se $P \in \mathcal{Q}(^mE; F), u \in \mathcal{L}(G, E)$ e $t \in \mathcal{L}(F; H)$, então

$$\|t \circ P \circ u\|_{\mathcal{Q}} \leq \|t\| \cdot \|P\|_{\mathcal{Q}} \cdot \|u\|^m. \tag{1.1}$$

Quando todas as componentes $\mathcal{Q}(^mE; F)$ são completas com essa (quasi-) norma, $\mathcal{Q}$ é dito um ideal de polinômios homogêneos (quasi-) Banach.

Dado um ideal de aplicações multilineares $\mathcal{M}$, podemos obter de forma natural, através de $\mathcal{M}$, um ideal de polinômios homogêneos $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$, denominado ideal de polinômios homogêneos gerado por $\mathcal{M}$.

Proposição 1.3.5. *Seja $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ um ideal Banach de operadores multilineares. Então, a classe*

$$\mathcal{P}_{\mathcal{M}} := \left\{P \in \mathcal{P}; \check{P} \in \mathcal{M}\right\} \ , \ \|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} := \|\check{P}\|_{\mathcal{M}},$$

é um ideal Banach de polinômios homogêneos.

O ideal Banach $(\mathcal{P}_{\mathcal{M}}, \|\cdot\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}})$ de polinômios homogêneos é chamado de ideal Banach de polinômios homogêneos gerado por $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$. Essa classe tem sido extensivamente estudada em diversos trabalhos, dos quais destacamos [8, 10, 22, 32].

1.4 Coerência e compatibilidade

Até agora vimos como funciona a teoria dos ideais de aplicações multilineares e polinômios homogêneos, porém, uma questão pertinente é, se em um ideal de aplicações m-lineares fixarmos $m-1$ coordenadas nos elementos deste ideal, será que as aplicações lineares assim obtidas formam um ideal de aplicações lineares? Supondo que seja verdadeira a resposta desta questão, podemos então perguntar: se tomarmos um elemento deste ideal de operadores lineares e multiplicarmos por $m-1$ funcionais, será que a aplicação m-linear assim obtida pertence ao multi-ideal inicial? Ou seja, será que este ideal de aplicações multilineares é uma extensão ao caso multilinear de um ideal de aplicações lineares? (A mesma questão vale para o ideal de polinômios trocando a multilinearidade pela homogeneidade). Tal estudo é conhecido por *compatibilidade*. Um outro questionamento

pertinente é: como se relacionam os multi-ideais em níveis próximos? Isto é, quando fixamos uma coordenada ou quando multiplicamos os elementos deste ideal por um funcional linear (tais indagações também valem para os polinômios homogêneos), tal estudo recebe o nome de *coerência*. A versão que utilizaremos neste trabalho foi introduzida na literatura por Pellegrino e Ribeiro em [43].

De agora em diante utilizaremos as seguintes notações:

Observação 1.4.1.

(i) $(\mathcal{U}_n, \mathcal{M}_n)_{n=1}^N$ denota uma N-upla de pares, onde cada $\mathcal{U}_n$ é um ideal (quasi-) normado de polinômios n-homogêneos e cada $\mathcal{M}_n$ é um ideal (quasi-) normado de aplicações n-lineares. O parâmetro N pode eventualmente ser infinito.

(ii) Dados $P \in \mathcal{P}(^nE; F)$, $a \in E$ e $0 \leq k \leq n$. Definimos o polinômio $P_{a^k} \in \mathcal{P}(^{n-k}E; F)$ por

$$P_{a^k}(x) = \check{P}(a, \overset{k}{\ldots}, a, x, \overset{n-k}{\ldots}, x).$$

Para $k = 1$, escreveremos apenas P_a no lugar de P_{a^1}.

(iii) Dados $\gamma_j \in E'_j$ $j = 1, \ldots, n-1$ e $u \in \mathcal{L}(E_n; F)$. Definimos $\gamma_1 \cdots \gamma_{n-1} u \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ por

$$\gamma_1 \cdots \gamma_{n-1} u(x_1, \ldots, x_n) = \gamma_1(x_1) \cdots \gamma_{n-1}(x_{n-1}) u(x_n).$$

Quando $E_1 = \cdots = E_n = E$ e $\gamma_1 = \cdots = \gamma_{n-1} = \gamma$, escreveremos apenas $\gamma^{n-1}u$ no lugar de $\gamma \overset{n-1}{\cdots} \gamma u$.

Definição 1.4.2 (Par de ideais compatíveis)**.** Seja $\mathcal{U}$ um ideal normado de operadores lineares e $N \in (\mathbb{N} - \{1\}) \cup \{\infty\}$. A sequência $(\mathcal{U}_n, \mathcal{M}_n)_{n=1}^N$ com $\mathcal{U}_1 = \mathcal{M}_1 = \mathcal{U}$ é compatível com $\mathcal{U}$, se existem constantes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, tais que, para quaisquer espaços de Banach $E, E_1, \ldots, E_n$ e F, as seguintes condições são verdadeiras, para todo $n \in \{2, ..., N\}$:

$(CP1)$ Se $k \in \{1, \ldots, n\}, T \in \mathcal{M}_n(E_1, \ldots, E_n)$ e $a_j \in E_j$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\} - \{k\}$, então,

$$T_{a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_n} \in \mathcal{U}(E_k; F)$$

e

$$\|T_{a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_n}\|_{\mathcal{U}} \leq \alpha_1 \|T\|_{\mathcal{M}_n} \|a_1\| \cdots \|a_{k-1}\| \, \|a_{k+1}\| \cdots \|a_n\|.$$

$(CP2)$ Se $P \in \mathcal{U}_n(^nE; F)$ e $a \in F$, então, $P_{a^{n-1}} \in \mathcal{U}(E; F)$ e

$$\|P_{a^{n-1}}\|_{\mathcal{U}} \leq \alpha_2 \max\left\{\|\check{P}\|_{\mathcal{M}_n}, \|P\|_{\mathcal{U}_n}\right\} \|a\|^{n-1}.$$

$(CP3)$ Se $u \in \mathcal{U}(E_n; F)$ e $\gamma_j \in E'_j$, $j = 1, \ldots, n-1$, então,

$$\gamma_1 \cdots \gamma_{n-1} u \in \mathcal{M}_n(E_1, \ldots, E_n; F)$$

e

$$\|\gamma_1 \cdots \gamma_{n-1} u\|_{\mathcal{M}_n} \leq \alpha_3 \|\gamma_1\| \cdots \|\gamma_{n-1}\| \, \|u\|_{\mathcal{U}} .$$

$(CP4)$ Se $u \in \mathcal{U}(E; F)$ e $\gamma \in E'$, então,

$$\gamma^{n-1} u \in \mathcal{U}_n(^n E; F).$$

$(CP5)$ P está em $\mathcal{U}_n(^n E; F)$ se, e somente se, $\check{P}$ pertence a $\mathcal{M}_n(^n E; F)$.

Definição 1.4.3 (Par de ideais coerentes)**.** *Sejam $\mathcal{M}$ um ideal normado de aplicações lineares, $\mathcal{U}$ um ideal de polinômios homogêneos normado e seja $N \in \mathbb{N} - \{1\} \cup \{\infty\}$. A sequência $(\mathcal{U}_k, \mathcal{M}_k)_{k=1}^N$, com $\mathcal{U}_1 = \mathcal{M}_1 = \mathcal{U}$, é coerente, se existem constantes β_1, β_2 e β_3 tais que, para quaisquer espaços de Banach $E, E_1, \ldots, E_n$ e F as seguintes condições são verdadeiras, para todo $k = 1, \ldots, N-1$:*

$(CH1)$ *Se $T \in \mathcal{M}_{k+1}(E_1, \ldots, E_{k+1}; F)$ e $a_j \in E_j$ para $j = 1, \ldots, k+1$, então,*

$$T_{a_j} \in \mathcal{M}_k(E_1, \ldots, E_{j-1}, E_{j+1}, \ldots, E_{k+1}; F)$$

e

$$\left\|T_{a_j}\right\|_{\mathcal{M}_k} \leq \beta_1 \|T\|_{\mathcal{M}_{k+1}} \|a_j\|.$$

$(CH2)$ *Se $P \in \mathcal{U}_{k+1}\left(^{k+1}E; F\right), a \in E$, então, P_a pertence a $\mathcal{U}_k\left(^k E; F\right)$ e*

$$\|P_a\|_{\mathcal{U}_k} \leq \beta_2 \max\left\{\left\|\check{P}\right\|_{\mathcal{M}_{k+1}}, \|P\|_{\mathcal{U}_{k+1}}\right\}\|a\|.$$

$(CH3)$ *Se $T \in \mathcal{M}_k(E_1, \ldots, E_k; F)$ e $\gamma \in E_{k+1}$, então,*

$$\gamma T \in \mathcal{M}_{k+1}(E_1, \ldots, E_{k+1}; F)$$

e

$$\|\gamma T\|_{\mathcal{M}_{k+1}} \leq \beta_3 \|\gamma\| \, \|T\|_{\mathcal{M}_k} .$$

$(CH4)$ *Se $P \in \mathcal{U}_k\left(^k E; F\right)$ e $\gamma \in E'$, então,*

$$\gamma P \in \mathcal{U}_{k+1}\left(^{k+1}E; F\right).$$

$(CH5)$ *Para todo $k = 1, ..., N$, P pertence a $\mathcal{U}_k\left(^k E; F\right)$ se, e somente se, $\check{P}$ pertence a $\mathcal{M}_k(E_1, ..., E_k; F)$.*

Um resultado muito útil é o seguinte:

Proposição 1.4.4. *[43, Observação 3.3] Se $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$, então, coerência implica na compatibilidade.*

Os trabalhos [23, 24, 43] apresentam uma grande quantidade de pares de classes de polinômios homogêneos e aplicações multilineares que são coerentes e compatíveis com seus respectivos níveis lineares.

1.5 Classes de sequências

O conceito de classe de sequências foi originalmente definido por Botelho e Campos em [12]. Tal conceito é de fundamental importância para grande parte desta tese.

No decorrer deste trabalho, denotaremos por $c_{00}(E)$ o conjunto de todas as sequências finitas com valores em E, que, como de costume, podem ser consideradas sequências infinitas completando com zeros e por $\ell_\infty(E)$ o conjunto das sequências limitadas tomando valores em E. Em geral, escreveremos $(x_j)_{j=1}^k$ para representar uma sequência que até a k-ésima é diferente de zero e a partir daí todos as coordenadas são zero.

Apresentaremos esta noção a seguir.

Definição 1.5.1. Uma classe de sequências a valores vetoriais γ_s é uma regra que associa cada espaço de Banach E a um espaço de Banach $\gamma_s(E)$ de sequências a valores em E, isto é, $\gamma_s(E)$ é um subespaço vetorial de $E^{\mathbb{N}}$ com as operações usuais, tal que:

$$c_{00}(E) \subset \gamma_s(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_\infty(E) \quad \text{e} \quad \|e_j\|_{\gamma_s(\mathbb{K})} = 1, \quad \forall j = 1, \ldots, n,$$

onde e_j é o vetor com 1 na j-ésima coordenada e zero nas outras coordenadas. O símbolo $E \overset{1}{\hookrightarrow} F$ significa que E é um subespaço vetorial de F e $\|x\|_F \leq \|x\|_E$.

A classe de sequências γ_s é dita *finitamente determinada* se, para qualquer $(x_j)_{j=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}}$, temos

$$(x_j)_{j=1}^\infty \in \gamma_s(E) \iff \sup_k \left\|(x_j)_{j=1}^k\right\|_{\gamma_s(E)} < \infty,$$

e, neste caso,

$$\left\|(x_j)_{j=1}^\infty\right\|_{\gamma_s(E)} := \sup_k \left\|(x_j)_{j=1}^k\right\|_{\gamma_s(E)}.$$

Definição 1.5.2. Uma classe de sequências γ_s é dita linearmente estável se, para qualquer $u \in \mathcal{L}(E; F)$, vale

$$(u(x_j))_{j=1}^\infty \in \gamma_s(F)$$

e $\|\hat{u}\colon \gamma_s(E) \to \gamma_s(F)\| = \|u\|$, onde $\hat{u}\left((x_j)_{j=1}^\infty\right) = (u(x_j))_{j=1}^\infty$, sempre que $(x_j)_{j=1}^\infty \in \gamma_s(E)$.

Dadas as classes de sequências $\gamma_{s_1}, \ldots, \gamma_{s_n}, \gamma_s$, dizemos que $\gamma_{s_1}(\mathbb{K}) \cdots \gamma_{s_n}(\mathbb{K}) \overset{1}{\hookrightarrow} \gamma_s(\mathbb{K})$ se $\left(\lambda_j^{(1)} \cdots \lambda_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_s(\mathbb{K})$ e

$$\left\| \left(\lambda_j^{(1)} \cdots \lambda_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_s(\mathbb{K})} \leq \prod_{i=1}^{n} \left\| \left(\lambda_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_{s_i}(\mathbb{K})}$$

sempre que $\left(\lambda_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_{s_i}(\mathbb{K})$, $i = 1, \ldots, n$.

Consideraremos durante este trabalho que todas as classes de sequências envolvidas serão finitamente determinadas e linearmente estáveis, a não ser por menção contrária.

Exemplo 1.5.3. *As classes $\ell_p(\cdot), \ell_p^w(\cdot), \ell_p\langle\cdot\rangle$ e $\ell_\infty(\cdot)$ são classes de sequência finitamente determinadas e linearmente estáveis.*

1.6 Operadores multilineares absolutamente $\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}$ - somantes

Os operadores multilineares absolutamente $\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}$ - somantes foram introduzidos por Serrano-Rodrigues em [57] como uma abordagem abstrata para os operadores multilineares absolutamente somantes, já bastante estudados na literatura. Nesta seção, apresentaremos esta classe cujos Os resultados podem ser consultados em [57, 58].

Definição 1.6.1. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $E_1, \ldots, E_n, F$ espaços de Banach. Dizemos que um operador $T \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ é absolutamente $\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}$ - somante em $a = (a_1, \ldots, a_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ se

$$\left(T\left(a_1 + x_j^{(1)}, \ldots, a_n + x_j^{(n)}\right) - T(a_1, \ldots, a_n)\right) \in \gamma_s(F)$$

sempre que $(x_j^{(i)})_{j=1}^{\infty} \in \gamma_{s_i}(E_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

O espaço vetorial de todos os operadores $T \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ absolutamente $\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}$ - somantes em $a = (a_1, \ldots, a_n)$ é denotado por $\prod^a_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Quando a é a origem, escreveremos apenas $\prod_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e quando os operadores são absolutamente $\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}$ - somantes em todo $a = (a_1, \ldots, a_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$, escreveremos $\prod^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Quando $s_1 = \cdots = s_n$, escreveremos $\prod^a_{\gamma_{s,s_1}}(E_1, \ldots, E_n; F)$, $\prod_{\gamma_{s,s_1}}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $\prod^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1}}(E_1, \ldots, E_n; F)$.

Um resultado que será útil no decorrer desta tese, cuja prova pode ser obtida adaptando os argumentos utilizados em [10, Lema 9.2], é o seguinte:

Lema 1.6.2. *Se $T \in \prod^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $(a_1, \ldots, a_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$, então, existe uma constante $C_{a_1,\ldots,a_n} \geq 0$ tal que*

$$\left\| \left(T\left(a_1 + x_j^{(1)}, \ldots, a_n + x_j^{(n)}\right) - T(a_1, \ldots, a_n)\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_s(F)} \leq C_{a_1,\ldots,a_n}$$

para quaisquer $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_{s_i}(E_i)$ *com* $\left\|\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_i}} \leq 1$, $i = 1, \ldots, n$.

Podemos caracterizar os operadores absolutamente $\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}$ - somantes por desigualdades, como mostra o próximo resultado, provado em [57, Teorema 2].

Teorema 1.6.3. *Para* $T \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$, *as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $T \in \prod_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}^{(ev)}(E_1, \ldots, E_n; F)$;

(b) *Existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$\left\|\left(T\left(a_1 + x_j^{(1)}, \ldots, a_n + x_j^{(n)}\right) - T(a_1, \ldots, a_n)\right)_{j=1}^{m}\right\|_{\gamma_s(F)}$$
$$\leq C \prod_{i=1}^{n} \left(\|a_i\| + \left\|\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_{\gamma_{s_i}(E_i)}\right)$$

para quaisquer $(a_1, \ldots, a_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ *e* $x_j^{(i)} \in E_i$, $i = 1, \ldots, n$ *e* $j = 1, \ldots, m$.

(c) *Existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$\left\|\left(T\left(a_1 + x_j^{(1)}, \ldots, a_n + x_j^{(n)}\right) - T(a_1, \ldots, a_n)\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F)}$$
$$\leq C \prod_{i=1}^{n} \left(\|a_i\| + \left\|\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_i}(E_i)}\right) \tag{1.2}$$

para quaisquer $(a_1, \ldots, a_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ *e* $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_{s_i}(E_i)$, $i = 1, \ldots, n$. *Em adicional, o ínfimo das constante* $C > 0$ *satisfazendo* (1.2), *denotado por* $\pi_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}^{ev}$, *define uma norma sobre* $\prod_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}^{(ev)}(E_1, \ldots, E_n; F)$.

Um outro resultado que desempenhará um papel importante neste trabalho, que foi mostrado em [57, Teorema 3], é o seguinte:

Teorema 1.6.4. $\left(\prod_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}^{(ev)}, \pi_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}^{ev}\right)$ *é um ideal Banach de aplicações* m*-lineares.*

Capítulo 2

Coerência e compatibilidade de ideais de polinômios homogêneos e aplicações multilineares absolutamente γ_{s,s_1}-somantes

2.1 Ideais de polinômios absolutamente γ_{s,s_1}-somantes

Nesta seção, iremos introduzir o conceito de polinômios absolutamente γ_{s,s_1}-somantes, que generaliza o conceito de polinômios absolutamente somantes já existente na literatura.

Observação 2.1.1. *Os resultados contidos neste capítulo foram aceitos para publicação na revista Methods of Functional Analysis and Topology [53].*

Definição 2.1.2. Sejam E e F espaços de Banach. Um polinômio m-homogêneo é dito absolutamente γ_{s,s_1}-somante em $a \in E$ quando

$$(P(a+x_j) - P(a))_{j=1}^{\infty} \in \gamma_s(F)$$

sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_{s_1}(E)$.

O espaço de todos os polinômios m-homogêneos absolutamente γ_{s,s_1}-somantes em $a \in E$ será denotado por $\mathcal{P}_{\gamma_{s,s_1}}^{(a)}(^mE;F)$. Quando $a = 0$, escreveremos apenas $\mathcal{P}_{\gamma_{s,s_1}}(^mE;F)$. O espaço de todos os polinômios m-homogêneos γ_{s,s_1}-somantes em todo ponto será denotado por $\mathcal{P}_{\gamma_{s,s_1}}^{(ev)}(^mE;F)$.

Observação 2.1.3. *Não é difícil mostrar que para cada $a \in E$, $\mathcal{P}_{\gamma_{s,s_1}}^{(a)}(^mE;F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}(^mE;F)$*

Utilizando a Fórmula de Polarização, mostraremos o seguinte resultado.

Proposição 2.1.4. *$P \in \mathcal{P}^{(a)}_{\gamma_{s,s_1}}(^mE;F)$ se, e somente se, $\check{P}$ é $\gamma_{s,s_1\overset{m}{\cdots},s_1}$ - somante em $(a,\ldots,a) \in E \times \overset{m}{\cdots} \times E$ (de acordo com [57]).*

Demonstração. Suponha que $\check{P}$ é $\gamma_{s,s_1\overset{m}{\cdots},s_1}$ - somante em $(a,\ldots,a) \in E \times \overset{m}{\cdots} \times E$. Daí,

$$(P(a+x_j)-P(a))_{j=1}^{\infty} = \left(\check{P}\left(a+x_j,\ldots,a+x_j\right)-\check{P}(a,\ldots,a)\right)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_s(F)$$

para todo $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_{s_1}(E)$. Logo, P é γ_{s,s_1} - somante.

Supondo que P seja γ_{s,s_1} - somante em $a \in E$. Sejam

$$\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_{s_1}(E),\ k=1,\ldots,m.$$

Usando a Fórmula de Polarização, temos

$$\begin{aligned} & m!2^m\left(\check{P}\left(a+x_j^{(1)},\ldots,a+x_j^{(m)}\right)-\check{P}(a,\ldots,a)\right) \qquad (2.1)\\ &= \sum_{\epsilon_i=\pm1}\epsilon_1\cdots\epsilon_m P\left(x_0+\sum_{k=1}^{m}\epsilon_k\left(a+x_j^{(k)}\right)\right)-\sum_{\epsilon_i=\pm1}\epsilon_1\cdots\epsilon_m P\left(x_0+a\sum_{k=1}^{m}\epsilon_k\right)\\ &= \sum_{\epsilon_i=\pm1}\left[\epsilon_1\cdots\epsilon_m\left(P\left(x_0+\left(a\sum_{k=1}^{m}\epsilon_k\right)+\left(\sum_{k=1}^{m}\epsilon_k x_j^{(k)}\right)\right)-P\left(x_0+\sum_{k=1}^{m}\epsilon_k a\right)\right)\right]. \end{aligned}$$

Quando $a=0$, a igualdade (2.1) se reduz a

$$\check{P}\left(x_j^{(1)},\ldots,x_j^{(m)}\right)=\frac{1}{m!2^m}\sum_{\epsilon_i=\pm1}\epsilon_1\cdots\epsilon_m P\left(\sum_{k=1}^{m}\epsilon_k x_j^{(k)}\right),$$

quando tomamos $x_0=0$. Daí,

$$\left(\check{P}\left(x_j^{(1)},\ldots,x_j^{(m)}\right)\right)_{j=1}^{\infty}=\frac{1}{m!2^m}\sum_{\epsilon_i=\pm1}\epsilon_1\cdots\epsilon_m\left(P\left(\sum_{k=1}^{m}\epsilon_k x_j^{(k)}\right)\right)_{j=1}^{\infty}.$$

Uma vez que $\gamma_{s_1}(E)$ é um espaço vetorial, podemos perceber que

$$\left(\sum_{k=1}^{m}\epsilon_k x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_{s_1}(E).$$

Sendo P absolutamente γ_{s,s_1}-somante em $a=0$, temos

$$\left(P\left(\sum_{k=1}^{m}\epsilon_k x_j^{(k)}\right)\right)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_s(F)$$

e como $\gamma_s(E)$ é um espaço vetorial, segue que

$$\left(\check{P}\left(x_j^{(1)},\ldots,x_j^{(m)}\right)\right)_{j=1}^{\infty}=\frac{1}{m!2^m}\sum_{\epsilon_i=\pm1}\epsilon_1\cdots\epsilon_m\left(P\left(\sum_{k=1}^{m}\epsilon_k x_j^{(k)}\right)\right)_{j=1}^{\infty}\in\gamma_s(F)$$

sempre que $\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty}\in\gamma_{s_1}(E)$, $k=1,\ldots,m$. Portanto, $\check{P}$ é absolutamente γ_{s,s_1} - somante em $a=0$.

Suponha agora que $a\neq 0$ e escolha $x_0=(m+1)a$, daí

$$x_0+\left(\sum_{k=1}^{m}\epsilon_k a\right)=(m+1)a+\left(\sum_{k=1}^{m}\epsilon_k a\right)=\left(m+1+\left(\sum_{k=1}^{m}\epsilon_k\right)\right)a.$$

Chamando $\lambda=m+1+\left(\sum_{k=1}^{m}\epsilon_k\right)$, temos $\lambda\neq 0$, logo $\lambda a\neq 0$.

Sendo P γ_{s,s_1} - somante em a, então, para todo $0\neq\lambda\in\mathbb{K}$, segue que P é γ_{s,s_1} - somante em λa. De fato, seja $(x_j)_{j=1}^{\infty}\in\gamma_{s_1}(E)$ assim

$$\begin{aligned}P(\lambda a+x_j)-P(\lambda a)&=P\left(\lambda\left(a+\frac{x_j}{\lambda}\right)\right)-P(\lambda a)\\&=\lambda^m\left(P\left(a+\frac{x_j}{\lambda}\right)-P(a)\right)\end{aligned}\tag{2.2}$$

e daí,

$$(P(\lambda a+x_j)-P(\lambda a))_{j=1}^{\infty}=\lambda^m\left(\left(P\left(a+\frac{x_j}{\lambda}\right)-P(a)\right)\right)_{j=1}^{\infty}.\tag{2.3}$$

Como $\gamma_{s_1}(E)$ é um espaço vetorial, temos

$$\left(\frac{x_j}{\lambda}\right)_{j=1}^{\infty}\in\gamma_{s_1}(E).$$

Daí,

$$\left(P\left(a+\frac{x_j}{\lambda}\right)-P(a)\right)_{j=1}^{\infty}\in\gamma_s(E),$$

de onde segue que

$$(P(\lambda a+x_j)-P(\lambda a))_{j=1}^{\infty}\in\gamma_s(E).$$

Então, P é γ_{s,s_1} - somante em λa e, portanto, P é γ_{s,s_1} - somante em $x_0+(\sum_{k=1}^{m}\epsilon_k a)$. Logo, segue de (2.1) que $\check{\mathrm{P}}$ é γ_{s,s_1} - somante em $(a,\ldots,a)$.

□

Podemos também obter um resultado mais forte que o anterior.

Proposição 2.1.5. *$P \in \mathcal{P}^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1}}(^mE;F)$ se, e somente se, $\check{P}$ é γ_{s,s_1} - somante em todo ponto $(a_1,\ldots,a_m) \in E \times \overset{m}{\cdots} \times E$.*

Demonstração. Suponha que $\check{P}$ é γ_{s,s_1} - somante em todo ponto $(a_1,\ldots,a_m) \in E\times\overset{m}{\cdots}\times E$. Sejam $a \in E$ e $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_{s_1}(E)$. Note que,

$$(P(a+x_j)-P(a))_{j=1}^{\infty} = \left(\check{P}\left((a+x_j)^m\right)-\check{P}(a^m)\right)_{j=1}^{\infty}$$

e sendo $\check{P}$ γ_{s,s_1} - somante em todo ponto $(a_1,\ldots,a_m) \in E \times \overset{m}{\cdots} \times E$, então,

$$(P(a+x_j)-P(a))_{j=1}^{\infty} \in \gamma_s(F).$$

Suponha agora que $P \in \mathcal{P}^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1}}(^mE;F)$. Sejam $(a_1,\ldots,a_m) \in E \times \overset{m}{\cdots} \times E$ e $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_{s_1}$, $i=1,\ldots,m$, usando a Fórmula de Polarização com $x_0=0$, temos

$$\begin{aligned}
&\left(\check{P}\left(a_1+x_j^{(1)},\ldots,a_m+x_j^{(m)}\right)-\check{P}(a_1,\ldots,a_m)\right)_{j=1}^{\infty} = \\
&\frac{1}{2^m m!}\sum_{\epsilon_i=\pm1}\epsilon_1\cdots\epsilon_m\left(\check{P}\left(\left(\sum_{i=1}^m \epsilon_i a_i+\sum_{i=1}^m \epsilon_i x_j^{(i)}\right)^m\right)-\check{P}\left(\sum_{i=1}^m \epsilon_i a_i\right)^m\right)_{j=1}^{\infty} \\
&=\frac{1}{2^m m!}\sum_{\epsilon_i=\pm1}\epsilon_1\cdots\epsilon_m\left(P\left(\sum_{i=1}^m \epsilon_i a_i+\sum_{i=1}^m \epsilon_i x_j^{(i)}\right)-P\left(\sum_{i=1}^m \epsilon_i a_i\right)\right)_{j=1}^{\infty}.
\end{aligned}$$

Como $\gamma_{s_1}(E)$ é um espaço vetorial então $\left(\sum_{i=1}^m \epsilon_i x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_{s_1}(E)$. Uma vez que $\sum_{i=1}^m \epsilon_i a_i \in E$ e sendo $P \in \mathcal{P}^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1}}(^mE;F)$, podemos concluir que

$$\left(\check{P}\left(a_1+x_j^{(1)},\ldots,a_m+x_j^{(m)}\right)-\check{P}(a_1,\ldots,a_m)\right)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_s(F)$$

para quaisquer $(a_1,\ldots,a_m) \in E \times \overset{m}{\cdots} \times E$ e $(x_j^{(i)})_{j=1}^{\infty} \in \gamma_{s_1}(E)$, $i=1,\ldots,m$. □

O próximo resultado será muito útil na prova da caracterização dos polinômios γ_{s,s_1}-somantes na origem.

Lema 2.1.6. *Se $P \in \mathcal{P}_{\gamma_{s,s_1}}(^mE;F)$, então existe uma constante $C>0$, tal que*

$$\left\|(P(x_j))_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F)} \leq C\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|^m_{\gamma_{s_1}(E)} \tag{2.4}$$

sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_{s_1}(E)$.

Demonstração. Suponha que $P \in \mathcal{P}_{\gamma_{s,s_1}}(^mE;F)$ e tome $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_{s_1}(E)$. Da Proposição 2.1.4, segue que $\check{P}$ é absolutamente $\gamma_{s,s_1\overset{m}{\cdots},s_1}$-somante na origem. De [57, Proposição 2],

existe $C > 0$, tal que

$$\left\| \left(\check{P}\left(x_j\right)^m \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_s(F)} \leq C \left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_{s_1}(E)}^m .$$

Então,

$$\left\| (P(x_j))_{j=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_s(F)} \leq C \left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_{s_1}(E)}^m .$$

□

No próximo resultado, caracterizaremos os polinômios m-homogêneos γ_{s,s_1}-somantes na origem por uma desigualdade, o que nos permitirá extrair uma norma para o espaço $\mathcal{P}_{\gamma_{s,s_1}}(^mE;F)$.

Proposição 2.1.7. *Sejam $m \in \mathbb{N}$, γ_s e γ_{s_1} classes de sequências. As seguintes condições são equivalentes para qualquer $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$:*

(a) *$P \in \mathcal{P}_{\gamma_{s,s_1}}(^mE;F)$;*

(b) *O polinômio m-homogêneo induzido*

$$\hat{P} \colon \gamma_{s_1}(E) \to \gamma_s(F)$$

dado por $\hat{P}\left((x_j)_{j=1}^{\infty}\right) = (P(x_j))_{j=1}^{\infty}$ está bem definido e é contínuo;

As condições acima implicam a condição (c) abaixo, e elas são todas equivalentes quando as classes de sequências γ_s e γ_{s_1} são finitamente determinadas.

(c) *Existe $C > 0$, tal que*

$$\left\| (P(x_j))_{j=1}^{k} \right\|_{\gamma_s(F)} \leq C \left\| (x_j)_{j=1}^{k} \right\|_{\gamma_{s_1}(E)}^m . \tag{2.5}$$

Para todos $k \in \mathbb{N}$ e $x_j \in E$, $j = 1, \ldots, k$. Neste caso,

$$\|\hat{P}\| = \inf\{C;\ (2.5) \text{ é satisfeita}\}.$$

Demonstração. $(b) \Rightarrow (a)$ é imediado da definição de polinômio m-homogêneo γ_{s,s_1}-somante na origem. $(a) \Rightarrow (b)$ suponha que $P \in \mathcal{P}_{\gamma_{s,s_1}}(^mE;F)$. Segue imediatamente da definição de $\mathcal{P}_{\gamma_{s,s_1}}(^mE;F)$ que $\hat{P}$ está bem definido. Mostraremos que $\hat{P}$ é um polinômio m-homogêneo contínuo.

Uma vez que $P \in \mathcal{P}_{\gamma_{s,s_1}}(^mE;F)$, segue da Proposição 2.1.4 que $\check{P}$ é uma aplicação multilinear $\gamma_{s,s_1\overset{m}{\ldots},s_1}$ somante na origem e, portanto, podemos considerar a aplicação m-linear induzida por $\check{P}$ introduzida na demosntração da [57, Proposição 2]

$$\left(\check{P}\right)^{\wedge} : \gamma_{s_1}(E) \times \overset{m}{\ldots} \times \gamma_{s_1}(E) \to \gamma_s(F)$$

dada por

$$\left(\check{P}\right)^{\wedge}\left(\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty},\ldots,\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}\right)=\left(\check{P}\left(x_j^{(1)},\ldots,x_j^{(m)}\right)\right).$$

Uma vez que $\check{P}$ é a única aplicação multilinear simétrica associada a P, podemos concluir que

$$\left(\check{P}\right)^{\wedge}\left(\left((x_j)_{j=1}^{\infty}\right)^m\right)=\hat{P}\left((x_j)_{j=1}^{\infty}\right).$$

Portanto, $\hat{P}$ é um polinômio m-homogêneo. Sendo $\left(\check{P}\right)^{\wedge}$ uma aplicação contínua e os espaços envolvidos serem de Banach, mostrado em [57, Proposição 2], podemos ver que

$$\left\|\hat{P}\left((x_j)_{j=1}^{\infty}\right)\right\|_{\gamma_s(F)}=\left\|\left(\check{P}\right)^{\wedge}\left(\left((x_j)_{j=1}^{\infty}\right)^m\right)\right\|_{\gamma_s}\leq\left\|\left(\check{P}\right)^{\wedge}\right\|\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_1}(E)}^m.$$

Segue do Teorema 1.1.15 que $\hat{P}$ é um polinômio m-homogêneo contínuo.

$(b)\Rightarrow(c)$ é imediata do Lema 2.1.6.

$(c)\Rightarrow(a)$ é consequência imediata das classes de sequências γ_s e γ_{s_1} serem finitamente determinadas. Também é fácil perceber que

$$\|\hat{P}\|=\inf\{C;\ (2.5)\text{ é satisfeita}\}.$$

□

Observação 2.1.8. *Podemos definir uma norma em $\mathcal{P}_{\gamma_{s,s_1}}(^mE;F)$ pondo*

$$\pi(P):=\|\hat{P}\|$$

para cada $P\in\mathcal{P}_{\gamma_{s,s_1}}(^mE;F)$, $\pi(P):=\|\hat{P}\|$. A prova que $\pi(\cdot)$ é uma norma é imediato dos dois seguintes fatos:

1. *A aplicação $\hat{(\cdot)}\colon\mathcal{P}_{\gamma_{s,s_1}}(^mE;F)\to\mathcal{L}\left(\gamma_{s_1}(E);\gamma_s(F)\right)$ dada por $(\hat{P})=\hat{P}$ é linear sobre o corpo $\mathbb{K}$.*

2. *$\|\cdot\|$ é uma norma em $\mathcal{L}\left(\gamma_{s_1}(E);\gamma_s(F)\right)$.*

O próximo lema é crucial para provar o primeiro teorema desta seção.

Lema 2.1.9. *Se $P\in\mathcal{P}_{\gamma_{s,s_1}}^{(ev)}(^mE;F)$ e $a\in E$, então, existe uma constante $C_a>0$, tal que*

$$\left\|(P(a+x_j)-P(a))_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F)}\leq C_a \tag{2.6}$$

para todo $(x_j)_{j=1}^{\infty}\in\gamma_{s_1}(E)$ com $\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_1}(E)}\leq 1$.

Demonstração. Como $P\in\mathcal{P}_{\gamma_{s,s_1}}(^mE;F)$, da Proposição 2.1.5, segue que $\check{P}$ é $\gamma_{s,s_1\overset{m}{\cdots},s_1}$-

somante em todo ponto. Uma vez que,

$$\left\|(P(a+x_j)-P(a))_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F)} = \left\|\left(\check{\mathrm{P}}\left((a+x_j)^m\right)-\check{P}(a^m)\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F)}, \tag{2.7}$$

segue do Lema 1.6.2 que existe $C_a > 0$ tal que,

$$\left\|\left(\check{\mathrm{P}}\left((a+x_j)^m\right)-\check{P}(a^m)\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F)} \leq C_a \tag{2.8}$$

sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_{s_1}(E)$ e $\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_1}(E)} \leq 1$. Portanto, de (2.7) e (2.8) segue que

$$\left\|(P(a+x_j)-P(a))_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F)} \leq C_a$$

para todo $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_{s_1}(E)$ com $\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\| \leq 1$.

□

O próximo resultado, como feito na Proposição 2.1.7, é uma caracterização por desigualdade dos operadores em $\mathcal{P}_{\gamma_{s,s_1}}^{(ev)}(^mE;F)$. O argumento que usaremos na prova do próximo teorema é uma adaptação do argumento original de M. Matos, introduzido em [38].

Teorema 2.1.10. *Seja $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *$P \in \mathcal{P}_{\gamma_{s,s_1}}^{(ev)}(^mE;F)$;*

2. *O polinômio m-homogêneo induzido*

$$\eta_{\gamma_{s,s_1}}(P)\colon G \longrightarrow \gamma_s(F)$$

definido por

$$\eta_{\gamma_{s,s_1}}(P)\left(\left(b,(x_j)_{j=1}^{\infty}\right)\right) = (P(b+x_j)-P(b))_{j=1}^{\infty},$$

está bem definido e é contínuo. Além disso, existe $C > 0$ satisfazendo

$$\left\|(P(b+x_j)-P(b))_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F)} \leq C\left(\|b\| + \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_1}(E)}\right)^m \tag{2.9}$$

para todos $b \in E$ e $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_{s_1}(E)$;

3. *Existe $C > 0$ satisfazendo*

$$\left\|(P(b+x_j)-P(b))_{j=1}^{n}\right\|_{\gamma_s(F)} \leq C\left(\|b\| + \left\|(x_j)_{j=1}^{n}\right\|_{\gamma_{s_1}(E)}\right)^m$$

para todos $n \in \mathbb{N}$ e $x_1,\ldots,x_n,b \in E$.

Demonstração. (2) $\Rightarrow$ (3) é imediato. Como as classes de sequências envolvidas são finitamente determinadas, segue imediatamente que (3) $\Rightarrow$ (1). Portanto, nos resta apenas provar que (1) $\Rightarrow$ (2).

Seja $G = E \times \gamma_{s_1}(E)$. Para cada $P \in \mathcal{P}^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1}}(^mE;F)$, considere a aplicação

$$\eta_{\gamma_{s,s_1}}(P)\colon G \longrightarrow \gamma_s(F)$$

definida por

$$\eta_{\gamma_{s,s_1}}(P)\left(\left(b,(x_j)_{j=1}^{\infty}\right)\right) = (P(b+x_j)-P(b))_{j=1}^{\infty}.$$

Segue da definição de polinômio m-homogêneo absolutamente γ_{s,s_1}-somante em todo ponto que $\eta_{\gamma_{s,s_1}}(P)$ está bem definida. Mostraremos que $\eta_{\gamma_{s,s_1}}(P)$ é um polinômio m-homogêneo. De fato, foi mostrado no [57, Teorema 2], que podemos considerar, para cada

$$T \in \prod\nolimits^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1},\ldots,s_m}(E_1,\ldots,E_m;F),$$

a aplicação m-linear contínua

$$\Phi(T)\colon G_1 \times \cdots \times G_m \to \gamma_s(F),$$

onde $G_i = E_i \times \gamma_{s_i}(E_i)$, $i = 1,\ldots,m$, dada por

$$\Phi(T)\left(a_1,\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty},\ldots,a_m,\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}\right) = \left(T\left(a_1+x_j^{(1)},\ldots,a_m+x_j^{(m)}\right)-T(a_1,\ldots,a_m)\right)_{j=1}^{\infty}.$$

Uma vez que $P \in \mathcal{P}^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1}}(^mE;F)$ segue da Proposição 2.1.5 que $\check{P} \in \prod^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1}}(^mE;F)$, assim

$$\eta_{\gamma_{s,s_1}}(P)\left(\left(b,(x_j)_{j=1}^{\infty}\right)\right) = \left(\check{P}(b+x_j)^m-\check{P}(b)^m\right)_{j=1}^{\infty} = \Phi(\check{P})\left(\left(b,(x_j)_{j=1}^{\infty}\right)^m\right).$$

Mostrando que $\eta_{\gamma_{s,s_1}}(P)$ é um polinômio m-homogêneo. Para mostrar que $\eta_{\gamma_{s,s_1}}(P)$ é contínua, iremos considerar, para todos $k \in \mathbb{N}$ e $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_{s_1}(F)$, o conjunto

$$F_{k,(x_j)_{j=1}^{\infty}} = \left\{b \in E : \left\|\eta_{\gamma_{s,s_1}}(P)\left(\left(b,(x_j)_{j=1}^{\infty}\right)\right)\right\|_{\gamma_s(F)} \leq k\right\}.$$

Note que, o conjunto $F_{k,(x_j)_{j=1}^{\infty}}$ é fechado para todos $b \in E$ e $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{\gamma_{s_1}(F)}$. De fato, para cada $n \in \mathbb{N}$, sendo

$$F_{k,(x_j)_{j=1}^{n}} = \left\{b \in E : \left\|\eta_{\gamma_{s,s_1}}(P)\left(\left(b,(x_j)_{j=1}^{n}\right)\right)\right\|_{\gamma_s(F)} \leq k\right\},$$

temos

$$F_{k,(x_j)_{j=1}^{\infty}} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_{k,(x_j)_{j=1}^{n}}. \tag{2.10}$$

Agora, para cada $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{\gamma_{s_1}(E)}$, e fixado $k \in \mathbb{N}$, podemos definir

$$D_k \colon E \longrightarrow [0, \infty)$$

dada por

$$D_k(b) = \left\| (P(b + x_j) - P(b))_{j=1}^{k} \right\|_{\gamma_s(F)}.$$

Usando a Proposição 2.1.5 e seguindo as mesmas ideias de [57, Teorema 2], segue facilmente que D_k é uma aplicação contínua. Assim, cada $F_{k,(x_j)_{j=1}^{n}}$ é fechado, pois

$$F_{k,(x_j)_{j=1}^{n}} = D_k^{-1}([0, k])$$

e de (2.10) segue que $F_{k,(x_j)_{j=1}^{\infty}}$ é fechado.

Façamos

$$F_k = \bigcap_{(x_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{\gamma_{s_1}^{u}(E)}} F_{k,(x_j)_{j=1}^{\infty}}.$$

Pelo Lema 2.1.9, temos

$$E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k$$

e usando o Teorema da Categoria de Baire, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que F_{k_0} tem interior não vazio. Seja b um elemento no interior de F_{k_0}. Assim, existe $0 < \epsilon < 1$ tal que

$$\left\| \eta_{\gamma_{s,s_1}}(P) \left(c, (x_j)_{j=1}^{\infty} \right) \right\|_{\gamma_s(F)} \leq k_0 \tag{2.11}$$

sempre que $\|c - b\| < \epsilon$ e $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{\gamma_{s_1}(E)}$. Note que, se

$$\left\| \left(v, (x_j)_{j=1}^{\infty} \right) \right\| < \epsilon,$$

daí

$$\|v\| < \epsilon \text{ e } \left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_{s_1}(E)} < \epsilon < 1.$$

Então, por (2.11) temos

$$\left\| \eta_{\gamma_{s,s_1}}(P) \left(b + v, (x_j)_{j=1}^{\infty} \right) \right\|_{\gamma_s(F)} \leq k_0.$$

Assim, $\eta_{\gamma_{s,s_1}}(P)$ é limitado em uma bola aberta de raio ϵ centrada em

$$\left(b, (0)_{j=1}^{\infty} \right) \in G,$$

e, portanto, concluímos que $\eta_{\gamma_{s,s_1}}(P)$ é contínua. Daí,

$$\begin{aligned}\left\|(P(b+x_j)-P(b))_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F)} &= \left\|\eta_{\gamma_{s,s_1}}(P)\left(\left(b,(x_j)_{j=1}^{\infty}\right)\right)\right\|_{\gamma_s(F)} \\ &\leq \left\|\eta_{\gamma_{s,s_1}}(P)\right\|\left(\|b\|+\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_1}(E)}\right)^m.\end{aligned} \tag{2.12}$$

□

Observação 2.1.11. $\left\|\eta_{\gamma_{s,s_1}}(P)\right\| = \inf\{C>0; (2.9)$ *é satisfeito*$\}$. *De fato, de* (2.12) *temos*

$$\left\|(P(b+x_j)-P(b))_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F)} \leq \left\|\eta_{\gamma_{s,s_1}}(P)\right\|\left(\|b\|+\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_1}(E)}\right)^m$$

assim,

$$\inf\{C>0; (2.9) \text{ é satisfeito}\} \leq \left\|\eta_{\gamma_{s,s_1}}(P)\right\|. \tag{2.13}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\left\|\eta_{\gamma_{s,s_1}}(P)\right\| &= \sup_{\left\|\left(b,(x_j)_{j=1}^{\infty}\right)\right\|\leq 1}\left\|\eta_{\gamma_{s,s_1}}(P)\left(b,(x_j)_{j=1}^{\infty}\right)\right\|_{\gamma_s(F)} \\ &= \sup_{\left\|\left(b,(x_j)_{j=1}^{\infty}\right)\right\|\leq 1}\left\|(P(b+x_j)-P(b))_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F)} \\ &\leq \sup_{\left\|\left(b,(x_j)_{j=1}^{\infty}\right)\right\|\leq 1} C\left(||b||+\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_1}(E)}\right)^m \\ &\leq C.\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que

$$\left\|\eta_{\gamma_{s,s_1}}(P)\right\| \leq \inf\{C>0; (2.9) \text{ é satisfeito}\}. \tag{2.14}$$

De (2.13) *e* (2.14) *segue que*

$$\left\|\eta_{\gamma_{s,s_1}}(P)\right\| = \inf\{C>0; (2.9) \text{ é satisfeito}\}$$

e o ínfimo é atingido.

Corolário 2.1.12. *O ínfimo das constantes $C>0$ satisfazendo a desigualdade* (2.9) *define uma norma sobre $\mathcal{P}^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1}}(^mE;F)$, que será denotada por $\pi^{(ev)}(\cdot)$.*

Segue da observação anterior que, para qualquer $P \in \mathcal{P}^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1}}(^mE;F)$, podemos escrever $\pi^{(ev)}(P) = \eta_{\gamma_{s,s_1}}(P)$.

Uma maneira alternativa de construir uma norma no espaço dos polinômios ho-

mogêneos associado à $\prod_{s,s_1}^{(ev)}$, seria considerar a classe

$$\mathcal{P}_{\prod_{\gamma_{s,s_1}}^{(ev)}} := \left\{P \in \mathcal{P};\ \check{P} \text{ é } \gamma_{s,s_1}\text{-somante em todo ponto}\right\}.$$

e considerar a norma herdada do ideal das aplicações multilineares $\prod_{s,s_1}^{(ev)}$, isto é,

$$\|P\|_{\mathcal{P}_{\prod_{\gamma_{s,s_1}}^{(ev)}}} := \|\check{P}\|_{\prod_{\gamma_{s,s_1}}^{(ev)}} = \pi_{\gamma_{s,s_1}}^{(ev)}(\check{P}).$$

A vantagem desta abordagem, é o fato que já está bem estabelecido na literatura ([10, página 46]) que esta classe, com esta norma, é um ideal normado de polinômios homogêneos.

Mas, então, surge a seguinte questão: qual a relação entre as normas $\pi^{(ev)}(P)$ e $\|P\|_{\mathcal{P}_{\prod_{\gamma_{s,s_1}}^{(ev)}}}$? A resposta a esta pergunta é dada na próxima proposição:

Proposição 2.1.13. *A norma $\pi^{(ev)}(\cdot)$, definida no Corolário 2.1.12, satisfaz a relação*

$$\pi^{(ev)}(P) \leq \pi_{\gamma_{s,s_1}}^{(ev)}(\check{P}) \leq \frac{m^m}{m!}\pi^{(ev)}(P),$$

para qualquer $P \in \mathcal{P}_{\gamma_{s,s_1}}^{(ev)}(^mE;F)$.

Demonstração. Utilizaremos, no decorrer desta prova, as mesmas ferramentas que aparecem na demonstração de [57, Teorema 2]. Se $P \in \mathcal{P}_{\gamma_{s,s_1}}^{(ev)}(^mE;F)$, então, pela Proposição 2.1.5, $\check{P}$ é γ_{s,s_1}-somante em todo ponto. Desta forma, para qualquer $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_{s_1}(E)$ e $a \in E$, temos

$$\begin{aligned}\left\|(P(a+x_j)-P(a))_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F)} &= \left\|\left(\check{P}\left((a+x_j)^m\right)-\check{P}(a^m)\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F)} \\ &\leq \pi_{\gamma_{s,s_1}}^{(ev)}(\check{P})\left(\|a\|+\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_1}(E)}\right)^m,\end{aligned}$$

disso, segue que $\pi^{(ev)}(P) \leq \pi_{\gamma_{s,s_1}}^{(ev)}(\check{P})$.

Para a outra desigualdade, considere $G = E \times \gamma_{s_1}(E)$ munido com a norma da soma e $\Phi\colon \prod_{\gamma_{s,s_1}}^{(ev)}(E^m;F) \to \mathcal{L}(G,\overset{m}{\ldots},G;\gamma_s(F))$ definida por

$$\begin{aligned}&\Phi(T)\left(\left(a_1,\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}\right),\ldots,\left(a_m,\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}\right)\right)\\ &= \left(T\left(a_1+x_j^{(1)},\ldots,a_m+x_j^{(m)}\right)-T(a_1,\ldots,a_m)\right)_{j=1}^{\infty}.\end{aligned}$$

Note que, para quaisquer $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_{s_1}(E)$ e $\epsilon_i = \pm 1$, $i = 1,\ldots,m$, temos

$$\left(\epsilon_1 x_j^{(1)} + \cdots + \epsilon_m x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_{s_1}(E)$$

e

$$\left\|\left(\epsilon_1 x_j^{(1)}+\cdots+\epsilon_m x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_1}(E)} \leq \left\|\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_1}(E)}+\cdots+\left\|\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_1}(E)}.$$

Em [57, Teorema 2], se estabelece que $\pi^{ev}_{\gamma_{s,s_1}}(\check{P}) = \|\Phi(\check{P})\|$, daí

$$\begin{aligned}
\|\Phi(\check{P})\| &= \sup_{\left\|\left(a_i,\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}\right)\right\|_G\leq 1} \left\|\Phi(\check{P})\left((a_1,(x_j^{(1)})_{j=1}^{\infty}),\cdots,(a_m,(x_j^{(m)})_{j=1}^{\infty})\right)\right\|_{\gamma_s(F)} \\
&= \sup_{\left\|\left(a_i,\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}\right)\right\|_G\leq 1} \left\|(\check{P}(a_1+x_j^{(1)},\ldots,a_m+x_j^{(m)})-\check{P}(a_1,\ldots,a_m))_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F)} \\
&\leq \frac{1}{2^m m!}\sup_{\left\|\left(a_i,\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}\right)\right\|_G\leq 1}\sum_{\epsilon_i=\pm 1}\left\|\left(\begin{array}{c} P\left(\epsilon_1(a_1+x_j^{(1)})+\cdots+\epsilon_m(a_m+x_j^{(m)})\right) \\ -P\left(\epsilon_1 a_1+\cdots+\epsilon_m a_m\right)\end{array}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F)} \\
&= \frac{1}{2^m m!}\sup_{\left\|\left(a_i,\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}\right)\right\|_G\leq 1}\sum_{\epsilon_i=\pm 1}\left\|\eta_{\gamma_{s,s_1}}(P)\left(\left(\sum_{k=1}^m \epsilon_k a_k,\left(\sum_{k=1}^m \epsilon_k x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty}\right)\right)\right\|_{\gamma_s(F)} \\
&\leq \frac{1}{2^m m!}\sup_{\left\|\left(a_i,\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}\right)\right\|_G\leq 1}\sum_{\epsilon_i=\pm 1}\|\eta_{\gamma_{s,s_1}}(P)\|\left\|\left(\sum_{k=1}^m \epsilon_k a_k,\left(\sum_{k=1}^m \epsilon_k x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty}\right)\right\|_G^m \\
&= \frac{\|\eta_{\gamma_{s,s_1}}(P)\|}{m!}\sup_{\left\|\left(a_i,\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}\right)\right\|_G\leq 1}\left(\left\|\left(a_1,\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}\right)\right\|_G+\cdots+\left\|\left(a_m,\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}\right)\right\|_G\right)^m \\
&= \frac{m^m}{m!}\|\eta_{\gamma_{s,s_1}}(P)\|,
\end{aligned}$$

onde a função $\eta_{\gamma_{s,s_1}}(P)$ foi definida na prova do Teorema 2.1.10. Portanto, segue da Observação 2.1.11 que

$$\pi^{ev}(P) \leq \pi^{ev}_{\gamma_{s,s_1}}(\check{P}) \leq \frac{m^m}{m!}\pi^{ev}(P).$$

□

Esta proposição estabelece uma relação entre $\pi^{ev}(\cdot)$ e $\pi^{ev}_{\gamma_{s,s_1}}(\cdot)$. Contudo, é importante notar que este resultado já era esperado, uma vez que, existe uma desigualdade bem conhecida na literatura que estabelece uma relação entre a norma dos polinômios m-homogêneos P e a norma das aplicações multilineares simétricas associadas a P, a saber

$$\|P\| \leq \left\|\check{P}\right\| \leq \frac{m^m}{m!}\|P\|.$$

Essa desigualdade foi mostrada em [39, Teorema 2.2] (para mais detalhes, ver [39, Exemplo 2I]).

Enfatizamos também que o resultado apresentado no Proposição 2.1.5 é muito

pertinente, pois, juntamente com o [57, Teorema 3] e com a Proposição 1.3.5 nos garante que $\mathcal{P}^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1}}$ é um ideal de polinômios homogêneos. Precisamos agora mostrar que este é um ideal de polinômios homogêneos normado e completo (Banach), com a norma $\pi^{ev}(\cdot)$.

Para a próxima proposição, utilizaremos a notação:

$$\gamma_{s_1}(\mathbb{K})\overset{i}{\cdots}\gamma_{s_1}(\mathbb{K}) \overset{1}{\hookrightarrow} \gamma_s(\mathbb{K})$$

com $i = 1, \ldots, m$, para significar que

$$\gamma_{s_1}(\mathbb{K}) \overset{1}{\hookrightarrow} \gamma_s(\mathbb{K}),\ \gamma_{s_1}(\mathbb{K}) \cdot \gamma_{s_1}(\mathbb{K}) \overset{1}{\hookrightarrow} \gamma_s(\mathbb{K}), \ldots,\ \gamma_{s_1}(\mathbb{K})\overset{m}{\cdots}\gamma_{s_1}(\mathbb{K}) \overset{1}{\hookrightarrow} \gamma_s(\mathbb{K}).$$

A próxima proposição mostra que $\pi^{(ev)}(id_{\mathbb{K}^m}) = 1$.

Proposição 2.1.14. *Seja $id_{\mathbb{K}^m} \colon \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ dado por $id_{\mathbb{K}}(x) = x^m$ e suponha que*

$$\gamma_{s_1}(\mathbb{K})\overset{i}{\cdots}\gamma_{s_1}(\mathbb{K}) \overset{1}{\hookrightarrow} \gamma_s(\mathbb{K})$$

com $i = 1, \ldots, m$. Então, $\pi^{(ev)}(id_{\mathbb{K}^m}) = 1$.

Demonstração. É imediato que $id_{\mathbb{K}^m} \in \mathcal{P}^{ev}_{\gamma_{s,s_1}}(^m\mathbb{K};\mathbb{K})$. Também não é difícil ver que

$$\pi^{(ev)}(id_{\mathbb{K}^m}) \geq \|id_{\mathbb{K}}\| = 1. \tag{2.15}$$

Resta-nos então, mostrar a desigualdade contrária. Faremos isto para o caso em que $m = 3$, o caso geral se faz de forma análoga. Dados $b \in \mathbb{K}$ e $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_{s_1}(\mathbb{K})$, temos

$$\begin{aligned}
&\left\|(id_{\mathbb{K}^m}(b + x_j) - id_{\mathbb{K}^m}(b))_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(\mathbb{K})} \\
&= \left\|\left((b + x_j)^3 - b^3\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(\mathbb{K})} \\
&= \left\|\left(b^3 + 3b^2x_j + 3bx_j^2 + x_j^3 - b^3\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(\mathbb{K})} \\
&= \left\|\left(3b^2x_j + 3bx_j^2 + x_j^3\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(\mathbb{K})} \\
&\leq 3\left|b^2\right| \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(\mathbb{K})} + 3|b| \left\|\left(x_j^2\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(\mathbb{K})} + \left\|\left(x_j^3\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(\mathbb{K})}.
\end{aligned}$$

Como $\gamma_{s_1}(\mathbb{K})\overset{i}{\cdots}\gamma_{s_1}(\mathbb{K}) \overset{1}{\hookrightarrow} \gamma_s(\mathbb{K})$ com $i = 1, \ldots, m$, temos

$$\begin{aligned}
&\left\|(id_{\mathbb{K}^m}(b + x_j) - id_{\mathbb{K}^m}(b))_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(\mathbb{K})} \leq 3|b|^2 \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_1}(\mathbb{K})} + 3|b| \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|^2_{\gamma_{s_1}(\mathbb{K})} + \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|^3_{\gamma_{s_1}(\mathbb{K})} \\
&\leq \left(|b| + \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_1}(\mathbb{K})}\right)^3
\end{aligned}$$

e, então,

$$\pi^{(ev)}(id_{\mathbb{K}}) \leq 1. \tag{2.16}$$

De (2.15) e (2.16) segue que $\pi^{(ev)}(id_{\mathbb{K}}) = 1$.

$\square$

Para mostrar a completude, utilizaremos o seguinte resultado.

Lema 2.1.15. *Seja E um espaço vetorial, F um espaço de Banach e $f\colon E \longrightarrow F$ uma aplicação linear e injetiva com imagem fechada em F. Então, a aplicação*

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_E : E &\longrightarrow [0, +\infty) \\ x &\longmapsto \|f(x)\|_F \end{aligned}$$

define uma norma em E e o espaço $(E, \|\cdot\|_E)$ é completo.

Demonstração. Facilmente se verifica que $\|\cdot\|_E$ é uma norma. Vamos mostrar que esta norma é completa.

Seja $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em E, isto é, dado $\epsilon > 0$ existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_j - x_{j'}\|_E < \epsilon$$

sempre que $j, j' \geq j_0$. Daí, para todos $j, j' \geq j_0$

$$\|f(x_j) - f(x_{j'})\|_F < \epsilon,$$

de onde segue que $(f(x_j))_{j=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em F, que é completo por hipótese. Portanto, existe $y \in F$ tal que

$$f(x_j) \longrightarrow y$$

quando $j \to +\infty$. Como a imagem de f é fechada, existe $x \in E$ tal que

$$y = f(x).$$

Daí,

$$\begin{aligned} \|x_j - x\|_E &= \|f(x_j - x)\|_F \\ &= \|f(x_j) - f(x)\|_F . \end{aligned}$$

Portanto, $x_j \longrightarrow x$ quando $j \to \infty$.

$\square$

Para mostrar a próxima proposição, necessitamos do seguinte resultado.

Lema 2.1.16. *Seja $P \in \mathcal{P}^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1}}(^mE;F)$. Então, $\Phi(\check{P})$ definida na demonstração de Teorema 2.1.10 é uma aplicação m-linear simétrica, onde $\check{P}$ é a única aplicação m-linear simétrica associada a P.*

Demonstração. Já sabemos que $\Phi(\check{P})$ é uma aplicação m-linear, veremos, então, que ela é simétrica. Sejam $\left(b_i, \left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}\right) \in G$, $i = 1, \ldots, m$. Assim,

$$\begin{aligned}
&\Phi(\check{P})\left(\left(b_{\sigma(1)}, \left(x_j^{(\sigma(1))}\right)_{j=1}^{\infty}\right), \ldots, \left(b_{\sigma(m)}, \left(x_j^{(\sigma(m))}\right)_{j=1}^{\infty}\right)\right) \\
&= \left(\check{P}\left(b_{\sigma(1)} + x_j^{(\sigma(1))}, \ldots, b_{\sigma(m)} + x_j^{(\sigma(m))}\right) - \check{P}(b_{\sigma(1)}, \ldots, b_{\sigma(m)})\right)_{j=1}^{\infty} \\
&= \left(\check{P}\left(b_1 + x_j^{(1)}, \ldots, b_m + x_j^{(m)}\right) - \check{P}(b_1, \ldots, b_m)\right)_{j=1}^{\infty} \\
&= \Phi(\check{P})\left(\left(b_1, \left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}\right), \ldots, \left(b_m, \left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}\right)\right)
\end{aligned}$$

para toda $\sigma \in S_m$. □

Proposição 2.1.17. *A aplicação*

$$\eta_{\gamma_{s,s_1}} : \mathcal{P}^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1}}\left(^mE;F\right) \longrightarrow \mathcal{P}\left(^mG;\gamma_s(F)\right),$$

onde $G = E \times \gamma_{s_1}(E)$, dada por

$$\eta_{\gamma_{s,s_1}}(P)\left(\left(b, (x_j)_{j=1}^{\infty}\right)\right) = (P(b + x_j) - P(b))_{j=1}^{\infty}$$

é linear, injetiva e possui imagem fechada em $\mathcal{P}\left(^mG;\gamma_s(F)\right)$.

Demonstração. $\eta_{\gamma_{s,s_1}}$ está bem definida pela demonstração do Teorema 2.1.10. Não é difícil ver que $\eta_{\gamma_{s,s_1}}$ é linear. Mostraremos a injetividade de $\eta_{\gamma_{s,s_1}}$. Seja $P \in \mathcal{P}^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1}}\left(^mE;F\right)$ tal que $\eta_{\gamma_{s,s_1}}(P) = 0$, isto é

$$\eta_{\gamma_{s,s_1}}(P)\left(\left(b, (x_j)_{j=1}^{\infty}\right)\right) = (0)_{j=1}^{\infty} \text{ para qualquer } \left(\left(b, (x_j)_{j=1}^{\infty}\right)\right) \in G.$$

Já sabemos que,

$$\eta_{\gamma_{s,s_1}}(P)\left(\left(b, (x_j)_{j=1}^{\infty}\right)\right) = \Phi(\check{P})\left(\left(b, (x_j)_{j=1}^{\infty}\right)^m\right),$$

para todo $\left(\left(b, (x_j)_{j=1}^{\infty}\right)\right) \in G$. Sabemos, também, de [58, Proposição 4.0.8], que a aplicação Φ é injetiva. Do Lema 2.1.16, a aplicação $\Phi(\check{P})$ é simétrica. Daí, segue imediatamente da Fórmula de Polarização que

$$\Phi(\check{P})\left(\left(b_1, \left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}\right), \ldots, \left(b_m, \left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2^m m!} \sum_{\epsilon_i = \pm 1} \epsilon_1 \cdots \epsilon_m \Phi(\check{P}) \left(\left(\sum_{i=1}^{m} \epsilon_i \left(b_i, \left(x_j^{(i)} \right)_{j=1}^{\infty} \right) \right)^m \right)$$
$$= \frac{1}{2^m m!} \sum_{\epsilon_i = \pm 1} \epsilon_1 \cdots \epsilon_m \eta_{\gamma_{s,s_1}}(P) \left(\sum_{i=1}^{m} \epsilon_i \left(b_i, \left(x_j^{(i)} \right)_{j=1}^{\infty} \right) \right) = 0,$$

para quaisquer $\left(b_i, \left(x_j^{(i)} \right)_{j=1}^{\infty} \right) \in G$, $i = 1, \ldots, m$. Logo,

$$\Phi(\check{P}) \left(\left(b_1, \left(x_j^{(1)} \right)_{j=1}^{\infty} \right), \ldots, \left(b_m, \left(x_j^{(m)} \right)_{j=1}^{\infty} \right) \right) = (0)_{j=1}^{\infty},$$

para todos $\left(\left(b_i, \left(x_j^{(i)} \right)_{j=1}^{\infty} \right) \right) \in G$, $i = 1, \ldots, m$, implicando que $\Phi(\check{P}) = 0$. Da injetividade de Φ, concluímos que $\check{P} = 0$ e, portanto, $P = 0$. Assim, só nos resta mostrar que $\eta_{\gamma_{s,s_1}}$ tem imagem fechada.

Seja $(P_j)_{j=1}^{\infty}$ uma sequência em $\mathcal{P}_{\gamma_{s,s_1}}^{(ev)}(^m E; F)$ tal que a sequência $\left(\eta_{\gamma_{s,s_1}}(P_j)\right)_{j=1}^{\infty}$ converge para A em $\mathcal{P}(^m G; \gamma_s(F))$, isto é

$$\left\| \eta_{\gamma_{s,s_1}}(P_j) - A \right\| \longrightarrow 0$$

quando $j \to \infty$. Daí,

$$\eta_{\gamma_{s,s_1}}(P_j)(x) \longrightarrow A(x)$$

quando $j \longrightarrow \infty$, para todo $x \in G$.

Note que

$$\eta_{\gamma_{s,s_1}}(P_j)\left((0, (x, 0, 0, \ldots))\right) = (P_j(0 + x_i) - P_j(0))_{i=1}^{\infty} = (P_j(x), 0, 0, \ldots).$$

Denotando, para cada $i \in \mathbb{N}$, π_i a projeção na i-ésima coordenada, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{j \to \infty} P_j(x) &= \lim_{j \to \infty} \pi_1(P_j(x), 0, 0, \ldots) \\
&= \lim_{j \to \infty} \pi_1 \left(\eta_{\gamma_{s,s_1}}(P_j)\left((0, (x, 0, 0, \ldots))\right) \right) \\
&= \pi_1 \left(\lim_{j \to \infty} \eta_{\gamma_{s,s_1}}(P_j)\left((0, (x, 0, 0, \ldots))\right) \right) \\
&= \pi_1 \left(A(0, (x, 0, 0, \ldots)) \right).
\end{aligned}$$

Assim, existe $\lim_{j \to \infty} P_j(x)$. Denotaremos por

$$P(x) = \lim_{j \to \infty} P_j(x).$$

Note que P está bem definido e é um polinômio m-homogêneo. O Teorema de Banach-

Steinhaus para polinômios homogêneos ([5, Corolário 1.3.13]) garante que P é contínua.

Vamos agora mostrar que P é γ_{s,s_1}-somante. Sejam $b \in E$ e $(x_j)_{i=1}^{\infty} \in \gamma_{s_1}(E)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\left\|(P(b+x_i)-P(b))_{i=1}^{k}\right\|_{\gamma_s(F)} &= \left\|\left(\lim_{j\to\infty} P_j(b+x_i) - \lim_{j\to\infty} P_j(b)\right)_{i=1}^{k}\right\|_{\gamma_s(F)} \\
&= \left\|\lim_{j\to\infty} (P_j(b+x_i)-P_j(b))_{i=1}^{k}\right\|_{\gamma_s(F)} \\
&= \left\|\lim_{j\to\infty} \eta_{\gamma_{s,s_1}}(P_j)\left(b,(x_i)_{i=1}^{k}\right)\right\|_{\gamma_s(F)} \\
&= \left\|A\left(b,(x_i)_{i=1}^{k}\right)\right\|_{\gamma_{s,s_1}} \\
&\leq \|A\|\left(\|b\| + \left\|(x_i)_{i=1}^{k}\right\|_{\gamma_{s_1}(E)}\right)^{m}.
\end{aligned}$$

Portanto, $P \in \mathcal{P}_{\gamma_{s,s_1}}^{(ev)}\left({}^mE;F\right)$. Ainda mais, para todo $t \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\pi_t\left(A\left(b,(x_i)_{i=1}^{\infty}\right)\right) &= \pi_t\left(\lim_{j\to\infty} \eta_{\gamma_{s,s_1}}(P_j)\left(b,(x_i)_{i=1}^{\infty}\right)\right) \\
&= \pi_t\left(\lim_{j\to\infty} (P_j(b+x_i)-P_j(b))_{i=1}^{\infty}\right) \\
&= \lim_{j\to\infty} \pi_t\left((P_j(b+x_i)-P_j(b))_{i=1}^{\infty}\right) \\
&= \lim_{j\to\infty} (P_j(b+x_t)-P_j(b)) \\
&= P(b+x_t)-P(b).
\end{aligned}$$

Logo,

$$A\left(b,(x_i)_{i=1}^{\infty}\right) = \eta_{\gamma_{s,s_1}}(P)\left(b,(x_i)_{i=1}^{\infty}\right).$$

Portanto, A pertence à imagem de $\eta_{\gamma_{s,s_1}}$.

□

Corolário 2.1.18. *O espaço $\mathcal{P}_{\gamma_{s,s_1}}^{(ev)}\left({}^mE;F\right)$ é completo na norma $\pi^{(ev)}(\cdot)$.*

Demonstração. Da Proposição 2.1.17, a aplicação

$$\eta_{\gamma_{s,s_1}} : \mathcal{P}_{\gamma_{s,s_1}}^{(ev)}\left({}^mE;F\right) \longrightarrow \mathcal{P}\left({}^mG;\gamma_s(F)\right),$$

dada por

$$\eta_{\gamma_{s,s_1}}(P)\left(\left(b,(x_j)_{j=1}^{\infty}\right)\right) = (P(b+x_j)-P(b))_{j=1}^{\infty}$$

é linear, injetiva e possui imagem fechada em $\mathcal{P}\left({}^mG;\gamma_s(F)\right)$. E, portanto, segue da

observação 2.1.11 e do Lema 2.1.15 que a norma

$$\pi^{ev}(\cdot)\colon \mathcal{P}^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1}}\left({}^mE;F\right) \to [0,\infty)$$

é completa, isto é, $\left(\mathcal{P}^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1}}\left({}^mE;F\right), \pi^{ev}(\cdot)\right)$ é um espaço de Banach.

□

Teorema 2.1.19. *Suponha que* $\gamma_{s_1}(\mathbb{K})\overset{i}{\cdots}\gamma_{s_1}(\mathbb{K}) \overset{1}{\hookrightarrow} \gamma_s(\mathbb{K})$, $i = 1,\ldots,m$. *Então,* $\left(\mathcal{P}^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1}}, \pi^{(ev)}\right)$ *é um ideal Banach de polinômios homogêneos entre espaços de Banach.*

Demonstração. Sejam $u \in \mathcal{L}(G;E)$, $P \in \mathcal{P}\left({}^mE;F\right)$, $t \in \mathcal{L}(F;H)$ e $a \in G$. Dado que $\mathcal{P}^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1}}$ é um ideal de polinômios homogêneos , então, $t \circ P \circ u \in \mathcal{P}^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1}}({}^mG;H)$. Agora, se $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_{s_1}(G)$, então, segue da estabilidade linear de γ_s e γ_{s_1} que

$$\begin{aligned}
\left\|(t\circ P\circ u(a+x_j) - t\circ P\circ u(a))_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(H)} &\leq \|t\| \left\|\left(P\left(u(a+x_j)\right) - P\left(u(a)\right)\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F)} \\
&= \|t\| \left\|\left(P\left(u(a)+u(x_j)\right) - P\left(u(a)\right)\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F)} \\
&\leq \|t\|\pi^{(ev)}(P)\left(\|u(a)\| + \left\|(u(x_j))_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_1}(E)}\right)^m \\
&\leq \|t\|\pi^{(ev)}(P)\|u\|^m\left(\|a\| + \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_1}(G)}\right)^m.
\end{aligned}$$

Então, $\mathcal{P}^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1}}$ satisfaz

$$\pi^{(ev)}(t\circ P\circ u) \leq \|t\|\pi^{(ev)}(P)\|u\|^m.$$

Portanto, $\left(\mathcal{P}^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1}}, \pi^{(ev)}(\cdot)\right)$ é um ideal Banach de polinômios homogêneos entre espaços de Banach.

□

2.2 Coerência e compatibilidade

Nesta seção, iremos estudar a coerência e a compatibilidade do par formado pelo ideal de polinômios homogêneos γ-somantes e o ideal de aplicações multilineares γ-somantes ([57]). Este conceito foi introduzido na literatura por Pellegrino e Ribeiro em [43] cujas definições foram apresentadas na Seção 1.4.

Denotaremos os ideais Banach dos operadores m-lineares absolutamente γ_{s,s_1}-somantes e dos polinômios m-homogêneos absolutamente γ_{s,s_1}-somantes em todo ponto por $\left(\prod^{m,(ev)}_{\gamma_{s,s_1}}; \pi^{m,ev}_{\gamma_{s,s_1}}(\cdot)\right)$ e $\left(\mathcal{P}^{m,(ev)}_{\gamma_{s,s_1}}; \pi^{m,ev}(\cdot)\right)$, respectivamente. A razão disto é evidenciar a multilinearidade/homogeneidade das componentes do ideal.

Iremos estudar a coerência e a compatibilidade do par $\left(\mathcal{P}^{m,(ev)}_{\gamma_{s,s_1}}, \prod^{m,(ev)}_{\gamma_{s,s_1}}\right)_{m=1}^{N}$ com o ideal $\prod_{\gamma_{s,s_1}}$.

Observação 2.2.1. *Para quaisquer espaços de Banach E e F, temos que* $\prod_{\gamma_{s,s_1}}^{1,(ev)}(E;F) = \mathcal{P}_{\gamma_{s,s_1}}^{1,(ev)}(E;F) = \prod_{\gamma_{s,s_1}}(E;F)$.

Nas próximas duas proposições, iremos verificar as condições (CH1) e (CH2) da Definição 1.4.3.

Proposição 2.2.2. *Para cada* $T \in \prod_{\gamma_{s,s_1}}^{m+1,(ev)}(E_1,\ldots,E_{m+1};F)$ *e* $(a_1,\ldots,a_{m+1}) \in E_1 \times \cdots \times E_{m+1}$, *temos que*

$$T_{a_k}(x_1,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_{m+1}) := T(x_1,\ldots,x_{k-1},a_k,x_{k+1},\ldots,x_{m+1})$$

pertence a $\prod_{\gamma_{s,s_1}}^{m,(ev)}(E_1,\ldots,E_{k-1},E_{k+1},\ldots,E_{m+1};F)$ *e*

$$\pi_{\gamma_{s,s_1}}^{m,(ev)}(T_{a_k}) \leq \pi_{\gamma_{s,s_1}}^{m+1,(ev)}(T)\|a_k\|.$$

Demonstração. Sejam $T \in \prod_{\gamma_{s,s_1}}^{m+1,(ev)}(E_1,\ldots,E_{m+1};F)$, $(a_1,\ldots,a_{m+1}) \in E_1 \times \cdots \times E_{m+1}$ e $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_{s_1}(E_i)$, com $i = 1,\ldots,k-1,k+1,\ldots,m+1$. Faremos apenas o caso $k = 1$. Os outros casos são similares. Para cada $b_i \in E_i$ e $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_{s_1}(E_i)$, $i = 2,\ldots,m+1$, considere a sequência nula $\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_{s_1}(E_1)$, isto é, $x_j^{(1)} = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Então,

$$\begin{aligned}
&\left(T_{a_1}(b_2 + x_j^{(2)},\ldots,b_{m+1} + x_j^{(m+1)}) - T_{a_1}(b_2,\ldots,b_{m+1})\right)_{j=1}^{\infty} \\
&= \left(T(a_1 + x_j^{(1)}, b_2 + x_j^{(2)},\ldots,b_{m+1} + x_j^{(m+1)}) - T(a_1,b_2,\ldots,b_{m+1})\right)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_s(F).
\end{aligned}$$

Assim, $T_{a_1} \in \prod_{\gamma_{s,s_1}}^{m,(ev)}(E_2,\ldots,E_{m+1};F)$. Além disso, temos

$$\begin{aligned}
&\left\|\left(T_{a_1}(b_2 + x_j^{(2)},\ldots,b_{m+1} + x_j^{(m+1)}) - T_{a_1}(b_2,...,b_{m+1})\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F)} \\
&= \left\|\left(T(a_1 + x_j^{(1)}, b_2 + x_j^{(2)},\ldots,b_{m+1} + x_j^{(m+1)}) - T(a_1,b_2,...,b_{m+1}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F)} \\
&\leq \pi_{\gamma_{s,s_1}}^{m+1,ev}(T)\|a_1\| \left(\|b_2\| + \left\|\left(x_j^{(2)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_1}(E_1)}\right) \cdots \left(\|b_{m+1}\| + \left\|\left(x_j^{(m+1)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_1}(E_m)}\right)
\end{aligned}$$

e portanto,

$$\pi_{\gamma_{s,s_1}}^{m,(ev)}(T_{a_1}) \leq \pi_{\gamma_{s,s_1}}^{m+1,(ev)}(T)\|a_1\|.$$

□

Proposição 2.2.3. *Para cada* $P \in \mathcal{P}_{\gamma_{s,s_1}}^{m+1,(ev)}(^{m+1}E,F)$ *e* $a \in E$, *temos que*

$$P_a(x) := \check{P}(a,x,\overset{m}{\ldots},x)$$

pertence a $\mathcal{P}^{m,(ev)}_{\gamma_{s,s_1}}(^mE,F)$ *e*

$$\pi^{m,(ev)}(P_a) \leq \pi^{m+1,(ev)}_{\gamma_{s,s_1}}(\check{P})\|a\|.$$

Demonstração. Sejam $P \in \mathcal{P}^{m+1,(ev)}_{\gamma_{s,s_1}}(^{m+1}E,F)$ e $a \in E$. Para quaisquer $b \in E$ e $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_{s_1}(E)$, segue da Proposição 2.1.5 que $\check{P}$ é absolutamente γ_{s,s_1}-somante em todo ponto de $E \times \overset{m}{\cdots} \times E$. Novamente, considerando a sequência nula, isto é $(y_j)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_{s_1}(E)$, tal que $y_j = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$, temos

$$(P_a(b+x_j) - P_a(b))_{j=1}^{\infty} = \left(\check{P}(a+y_j, b+x_j, \overset{m}{\ldots}, b+x_j) - \check{P}(a,b,\overset{m}{\ldots},b)\right)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_s(F).$$

Assim, $P_a \in \mathcal{P}^{m,(ev)}_{\gamma_{s,s_1}}(^mE,F)$ e, além disso,

$$\left\|(P_a(b+x_j) - P_a(b))_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F)} \leq \pi^{m+1,ev}_{\gamma_{s,s_1}}(\check{P})\|a\| \left(\|b\| + \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_1}(E)}\right)^m.$$

Portanto,

$$\pi^{m,(ev)}(P_a) \leq \pi^{m+1,(ev)}_{\gamma_{s,s_1}}(\check{P})\|a\|.$$

□

As próximas definições contêm importantes propriedades que serão usadas para verificar (CH3) e (CH4) da Definição 1.4.3.

Definição 2.2.4. Sejam E um espaço de Banach e γ_s uma classe de sequências. Dizemos que a classe de sequências γ_s é $\mathbb{K}$-fechada quando, para qualquer $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_s(\mathbb{K})$ e $(y_j)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_s(E)$, a sequência $(z_j)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_s(E)$, onde $z_j = x_j y_j$, e

$$\left\|(z_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(E)} \leq \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(\mathbb{K})} \left\|(y_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(E)}.$$

Definição 2.2.5. Sejam γ_s e γ_{s_1} classes de sequências. Dizemos que γ_s e γ_{s_1} são finitamente coincidentes, quando $\gamma_s(E) = \gamma_{s_1}(E)$ e

$$\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(E)} = \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_1}(E)},$$

para qualquer espaço vetorial de dimensão finita E.

Exemplo 2.2.6. As classes de sequências $\ell_p\langle\cdot\rangle$, $\ell_p(\cdot)$, $\ell_p^{mid}(\cdot)$ e $\ell_p^w(\cdot)$ são $\mathbb{K}$-fechadas e finitamente coincidentes com $\ell_p(\cdot)$. Para ilustrar, utilizaremos as classes de sequências $\ell_p^w(\cdot)$ e $\ell_p(\cdot)$. A prova que $\ell_p^w(\cdot)$ é finitamente coincidente com $\ell_p(\cdot)$ pode ser obtida através da Observação 2.2.4 e da Proposição 2.2.9 de [41]. Mostraremos que $\ell_p^w(\cdot)$ é $\mathbb{K}$-fechado. Com efeito, sejam $0 < p < \infty$, E um espaço de Banach, $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(\mathbb{K}) = \ell_p(\mathbb{K})$ e

$(y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$. Uma vez que, para todo $\varphi \in E'$,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j y_j)|^p \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(y_j)|^p\right) < \infty,$$

temos $(x_j y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(\mathbb{K})$ e que

$$\left\|(x_j y_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,p} \leq \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_p \left\|(y_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,p},$$

o que completa a demonstração.

Observação 2.2.7. *Nas duas próximas proposições, iremos assumir que a classe de sequências γ_s é $\mathbb{K}$-fechada e que γ_s e γ_{s_1} são finitamente coincidentes.*

Proposição 2.2.8. *Sejam $T \in \prod_{\gamma_{s,s_1}}^{m,(ev)}(E_1, \ldots, E_m; F)$ e $\varphi \in E'_{m+1}$, então,*

$$\varphi T \in \prod\nolimits_{\gamma_{s,s_1}}^{m+1,(ev)}(E_1, \ldots, E_{m+1}; F)$$

e

$$\pi_{\gamma_{s,s_1}}^{m+1,(ev)}(\varphi T) \leq \|\varphi\| \pi_{\gamma_{s,s_1}}^{m,(ev)}(T).$$

Demonstração. Faremos somente o caso $m = 2$. Os outros casos são análogos. Sejam $T \in \prod_{\gamma_{s,s_1}}^{2,(ev)}(E_1, E_2; F)$, $\varphi \in E'_3$ e $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_{s_1}(E_i)$, $a_i \in E_i$, $i = 1, 2, 3$. Como γ_s é linearmente estável, $\mathbb{K}$-fechada e as classes γ_s e γ_{s_1} são finitamente coincidentes, segue que

$$\begin{aligned}
&\left(\varphi T\left(a_1 + x_j^{(1)}, a_2 + x_j^{(2)}, a_3 + x_j^{(3)}\right) - \varphi T(a_1, a_2, a_3)\right)_{j=1}^{\infty} \\
&= \left(\varphi(a_3) T\left(a_1, x_j^{(2)}\right)\right)_{j=1}^{\infty} + \left(\varphi(a_3) T\left(x_j^{(1)}, a_2\right)\right)_{j=1}^{\infty} + \left(\varphi(a_3) T\left(x_j^{(1)}, x_j^{(2)}\right)\right)_{j=1}^{\infty} + \\
&+ \left(\varphi\left(x_j^{(3)}\right) T\left(a_1, x_j^{(2)}\right)\right)_{j=1}^{\infty} + \left(\varphi\left(x_j^{(3)}\right) T\left(x_j^{(1)}, a_2\right)\right)_{j=1}^{\infty} + \left(\varphi\left(x_j^{(3)}\right) T\left(x_j^{(1)}, x_j^{(2)}\right)\right)_{j=1}^{\infty} + \\
&+ \left(\varphi\left(x_j^{(3)}\right) T(a_1, a_2)\right)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_s(F)
\end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned}
&\left\|\left(\varphi T\left(a_1 + x_j^{(1)}, a_2 + x_j^{(2)}, a_3 + x_j^{(3)}\right) - \varphi T(a_1, a_2, a_3)\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F)} \\
&\leq \left\|\left(T\left(a_1, x_j^{(2)}\right)\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F)} \left(|\varphi(a_3)| + \left\|\left(\varphi\left(x_j^{(3)}\right)\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_1}(\mathbb{K})}\right) + \\
&+ \left\|\left(T\left(x_j^{(1)}, a_2\right)\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F)} \left(|\varphi(a_3)| + \left\|\left(\varphi\left(x_j^{(3)}\right)\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_1}(\mathbb{K})}\right) +
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left\|\left(T\left(x_j^{(1)},x_j^{(2)}\right)\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F)}\left(|\varphi(a_3)|+\left\|\left(\varphi\left(x_j^{(3)}\right)\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_1}(\mathbb{K})}\right)+\\
&+\|T(a_1,a_2)\|\left\|\left(\varphi\left(x_j^{(3)}\right)\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_1}(\mathbb{K})}\\
&\leq\pi^{2,(ev)}_{\gamma_{s,s_1}}(T)\|a_1\|\left\|\left(x_j^{(2)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_1}(E_2)}\|\varphi\|\left(\|a_3\|+\left\|\left(x_j^{(3)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_1}(E_3)}\right)+\\
&+\pi^{2,(ev)}_{\gamma_{s,s_1}}(T)\|a_2\|\left\|\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_1}(E_1)}\|\varphi\|\left(\|a_3\|+\left\|\left(x_j^{(3)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_1}(E_3)}\right)+\\
&+\pi^{2,(ev)}_{\gamma_{s,s_1}}(T)\left\|\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_1}(E_1)}\left\|\left(x_j^{(2)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_1}(E_2)}\|\varphi\|\left(\|a_3\|+\left\|\left(x_j^{(3)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_1}(E_3)}\right)+\\
&+\pi^{2,(ev)}_{\gamma_{s,s_1}}(T)\|a_1\|\|a_2\|\|\varphi\|\left\|\left(x_j^{(3)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_1}(E_3)}\\
&\quad=\|\varphi\|\pi^{2,(ev)}_{\gamma_{s,s_1}}(T)\left(\prod_{i=1}^{3}\left(\|a_i\|+\left\|\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_1}(E_i)}\right)-\|a_1\|\|a_2\|\|a_3\|\right).
\end{aligned}
$$

Consequentemente,

$$
\begin{aligned}
&\left\|\left(\varphi T\left(a_1+x_j^{(1)},a_2+x_j^{(2)},a_3+x_j^{(3)}\right)-\varphi T(a_1,a_2,a_3)\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F)}\\
&\leq\|\varphi\|\pi^{2,(ev)}_{\gamma_{s,s_1}}(T)\prod_{i=1}^{3}\left(\|a_i\|+\left\|\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_1}(E_i)}\right).
\end{aligned}
$$

De onde segue que $\varphi T\in\prod^{3,(ev)}_{\gamma_{s,s_1}}(E_1,E_2,E_3;F)$ e

$$\pi^{3,(ev)}_{\gamma_{s,s_1}}(\varphi T)\leq\|\varphi\|\pi^{2,(ev)}_{\gamma_{s,s_1}}(T).$$

□

Proposição 2.2.9. *Sejam $P\in\mathcal{P}^{m,(ev)}_{\gamma_{s,s_1}}(^mE,F)$ e $\varphi\in E'$. Então $\varphi P\in\mathcal{P}^{m+1,(ev)}_{\gamma_{s,s_1}}(^{m+1}E;F)$ e*

$$\pi^{m+1,(ev)}(\varphi P)\leq\|\varphi\|\pi^{m,(ev)}_{\gamma_{s,s_1}}(P).$$

Demonstração. Faremos apenas o caso $m=2$. O caso geral é análogo. Sejam $P\in\mathcal{P}^{2,(ev)}_{\gamma_{s,s_1}}(^2E,F)$, $\varphi\in E'$ e $(x_j)_{j=1}^{\infty}\in\gamma_{s_1}(E)$. Para qualquer $a\in E$, como γ_s é linearmente estável, $\mathbb{K}$-fechado, γ_s e γ_{s_1} são finitamente coincidentes e pelo Corolário 2.1.5 $\check{P}\in\prod^{2,(ev)}_{\gamma_{s,s_1}}(^2E;F)$, temos,

$$
\begin{aligned}
&(\varphi P(a+x_j)-\varphi P(a))_{j=1}^{\infty}\\
&=(\varphi(a+x_j)P(a+x_j)-\varphi(a)P(a))_{j=1}^{\infty}\\
&=\left(\varphi(a+x_j)\check{P}(a+x_j,a+x_j)-\varphi(a)\check{P}(a,a)\right)_{j=1}^{\infty}
\end{aligned}
$$

$$= 2\left(\varphi(a)\check{P}(a,x_j)\right)_{j=1}^{\infty} + \left(\varphi(a)\check{P}(x_j,x_j)\right)_{j=1}^{\infty} + \left(\varphi(x_j)\check{P}(a,a)\right)_{j=1}^{\infty} + 2\left(\varphi(x_j)\check{P}(a,x_j)\right)_{j=1}^{\infty} +$$
$$+ \left(\varphi(x_j)\check{P}(x_j,x_j)\right)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_s(F).$$

Logo, $(\varphi P(a+x_j) - \varphi P(a))_{j=1}^{\infty} \in \gamma_s(F)$ e assim, $\varphi P \in \mathcal{P}_{\gamma_s,s_1}^{3,(ev)}(^3E;F)$. Além disso,

$$\begin{aligned}
&\left\|(\varphi P\,(a+x_j) - \varphi P(a))_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F)} \\
&\leq 2\left\|\left(\varphi(a)\check{P}(a,x_j)\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F)} + \left\|\left(\varphi(a)\check{P}(x_j,x_j)\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F)} + \left\|\left(\varphi(x_j)\check{P}(a,a)\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F)} + \\
&+ 2\left\|\left(\varphi(x_j)\check{P}(a,x_j)\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F)} + \left\|\left(\varphi(x_j)\check{P}(x_j,x_j)\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F)} \\
&\leq 2\left\|\left(\check{P}(a,x_j)\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F)}\left(|\varphi(a)| + \left\|(\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_1}(\mathbb{K})}\right) \\
&+ \left\|\left(\check{P}(x_j,x_j)\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F)}\left(|\varphi(a)| + \left\|(\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_1}(\mathbb{K})}\right) + \|\check{P}(a,a)\|\left\|(\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_1}(\mathbb{K})}
\end{aligned}$$

Como $\|\check{P}\| \leq \pi_{\gamma_s,s_1}^{2,(ev)}(\check{P})$, temos

$$\begin{aligned}
&\left\|(\varphi P\,(a+x_j) - \varphi P(a))_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F)} \\
&\leq \pi_{\gamma_s,s_1}^{2,ev}(\check{P})\|\varphi\|\left(3\|a\|^2\left\|(\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_1}(\mathbb{K})} + 3\|a\|\left\|(\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_1}(\mathbb{K})}^2 + \left\|(\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_1}(\mathbb{K})}^3\right) \\
&\leq \pi_{\gamma_s,s_1}^{2,ev}(\check{P})\|\varphi\|\left(\|a\| + \left\|(\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_1}(\mathbb{K})}\right)^3.
\end{aligned}$$

Portanto, $\pi^{3,(ev)}(\varphi P) \leq \|\varphi\|\pi_{\gamma_s,s_1}^{2,(ev)}(\check{P})$.

□

Pelas Proposições 2.2.2, 2.2.3, 2.2.8, 2.2.9 e 2.1.5 o par

$$\left(\left(\mathcal{P}_{\gamma_s,s_1}^{m,(ev)}, \pi^{m,(ev)}(\cdot)\right), \left(\prod\nolimits_{\gamma_s,s_1}^{m,(ev)}, \pi_{\gamma_s,s_1}^{m,(ev)}(\cdot)\right)\right)_{m=1}^{\infty}$$

é coerente com $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$. Portanto, podemos concluir de [43, Observação 3.3] que o par

$$\left(\left(\mathcal{P}_{\gamma_s,s_1}^{m,(ev)}, \pi^{m+1,(ev)}(\cdot)\right), \left(\prod\nolimits_{\gamma_s,s_1}^{m,(ev)}, \pi_{\gamma_s,s_1}^{m,(ev)}(\cdot)\right)\right)_{m=1}^{\infty}$$

é coerente e compatível com $\prod_{\gamma_s,s_1}$.

Este resultado será enunciado a seguir em forma de teorema.

Teorema 2.2.10. *Supondo que as classe de sequências γ_s e γ_{s_1} são linearmente estáveis,*

$\mathbb{K}$-fechadas e que γ_s e γ_{s_1} são finitamente coincidentes. A sequência

$$\left(\left(\mathcal{P}^{m,(ev)}_{\gamma_{s,s_1}}, \pi^{m+1,(ev)}\right), \left(\prod^{m,(ev)}_{\gamma_{s,s_1}}, \pi^{m,(ev)}_{\gamma_{s,s_1}}\right)\right)_{m=1}^{\infty}$$

é coerente e compatível com $\prod_{\gamma_{s,s_1}}$.

Vale a pena destacar que, para obter as provas das Proposições 2.2.2, 2.2.3 e 2.1.5, foi suficiente as classes de sequências serem apenas linearmente estáveis. Contudo, para demonstrar as Proposições 2.2.8 e 2.2.9, foi necessário o acréscimo de propriedades extras sobre as classes envolvidas; mais especificamente, as classes de sequências precisam ser finitamente coincidentes e a classe de chegada precisa ser $\mathbb{K}$-fechada. Estas condições não apresentam uma grande restrição ao nosso trabalho, pois, a maioria das classes estudadas na literatura satisfazem esta propriedade.

2.3 Algumas aplicações

Para qualquer espaço de Banach E, denotaremos por $\ell_p\langle E\rangle, \ell_p(E)$ e $\ell_p^w(E)$ os espaços das sequências Cohen fortemente p-somantes, absolutamente p-somantes e fracamente p-somantes a valores em E, respectivamente. Em 2014, S. Karn e D. Sinha [34] introduziram o espaço $\ell_p^{mid}(E)$, o qual também foi estudado por G. Botelho, J. Campos e J. Santos em [13], onde se estabelecem as seguintes inclusões:

$$\ell_p\langle E\rangle \subset \ell_p(E) \subset \ell_p^{mid}(E) \subset \ell_p^w(E). \tag{2.17}$$

A natureza de muitos operadores na literatura é "melhorar" a convergência de séries. Por exemplo, podemos citar as aplicações absolutamente p-somantes que transformam sequências fracamente p-somáveis em sequências absolutamente p-somáveis. Pensando nessa direção, podemos definir várias classes de operadores que melhoram a convergência das séries. Nos próximos dois exemplos, apresentaremos classes já conhecidas, que são casos particulares da nossa construção abstrata. Apresentamos também algumas classes de operadores que ainda não estão disponíveis na literatura, embora possam ser facilmente obtidas através da construção proposta neste trabalho.

Exemplo 2.3.1. Seja $\mathcal{P}^{m,(ev)}_{(p,q)}$ o espaço dos polinômios m-homogêneos absolutamente (p,q)-somantes e $\prod^{m,(ev)}_{(p,q)}$ o espaço dos operadores m-lineares absolutamente (p,q)-somantes. Para mais detalhes sobre esta classe, veja [4]. Dado que as classes de sequências envolvidas $\ell_p^w(\cdot)$ e $\ell_p(\cdot)$ são linearmente estáveis, finitamente determinadas, finitamente coincidentes e $\ell_p(\cdot)$ é $\mathbb{K}$-fechada, segue do Teorema 2.2.10 que a sequência de pares

$$\left(\left(\mathcal{P}^{m,(ev)}_{(p,q)}, \|\cdot\|_{(ev)^2}\right), \left(\prod^{m,(ev)}_{(p,q)}, \|\cdot\|_{(ev)^2(p,q)}\right)\right)_{m=1}^{\infty}$$

é coerente e compatível com o ideal de operadores lineares absolutamente (p,q)-somantes, denotado por $\prod_{(p,q)}$.

Exemplo 2.3.2. Seja $\mathcal{P}_{Coh,p}^{m,(ev)}$ o espaço dos polinômios m-homogêneos Cohen fortemente p-somantes em todo ponto e $\mathcal{L}_{Coh,p}^{m,(ev)}$ o espaço dos operadores m-lineares Cohen fortemente p-somantes em todo ponto. Para mais detalhes sobre estas classes, ver [24, 57]. Dado que as classes de sequências envolvidas $\ell_p\langle\cdot\rangle$ e $\ell_p(\cdot)$ são linearmente estáveis, finitamente determinadas e finitamente coincidentes e, além disso, $\ell_p\langle\cdot\rangle$ é $\mathbb{K}$-fechado, segue do Teorema 2.2.10 que a sequência de pares $\left(\left(\mathcal{P}_{Coh,p}^{m,(ev)},\pi^{m,(ev)}\right),\left(\mathcal{L}_{Coh,p}^{m,(ev)},\pi_{Coh,p}^{m,(ev)}\right)\right)_{m=1}^{\infty}$ é coerente e compatível com o ideal de operadores lineares Cohen fortemente somantes, denotado por $\mathcal{D}_p$.

Note que, a classe dos operadores multilineares/polinômios homogêneos, definidas nos dois exemplos anteriores, consideram aplicações que transformam sequências fracamente p-somáveis em sequências absolutamente p-somáveis e absolutamente p-somáveis em absolutamente Cohen p-somáveis. Contudo, devido as inclusões dadas em (2.17), podemos apresentar diversas classes de aplicações multilineares e de polinômios homogêneos as quais ainda não se encontram na literatura. Esta nossa abordagem estabelece resultados interessantes para essas classes. Para ilustrar, consideraremos os exemplos:

Exemplo 2.3.3. *Denotaremos por $\mathcal{L}_{mid,p}^{(ev)}$ e $\mathcal{P}_{mid,p}^{(ev)}$ as classes de aplicações multilineares mid absolutamente p-somantes e polinômios homogêneos mid absolutamente p-somantes, respectivamente. Tais classes são caracterizadas por transformar sequências mid p-somáveis em sequências absolutamente p-somáveis. Considerando $\gamma_s=\ell_p$ e $\gamma_{s_1}=\ell_p^{mid}$ e como estas classes de sequências são linearmente estáveis, finitamente determinadas, finitamente coincidentes e $\ell_p(\cdot)$ é $\mathbb{K}$-fechada, então, essas classes satisfazem a abordagem abstrata introduzida neste capítulo. Em particular, $\mathcal{P}_{mid,p}^{(ev)}$ é um ideal Banach de polinômios homogêneos e a sequência*

$$\left(\mathcal{P}_{mid,p}^{m,(ev)},\mathcal{L}_{mid,p}^{m,(ev)}\right)_{m=1}^{\infty}$$

é coerente e compatível com $\mathcal{L}_{mid,p}^{1,(ev)}$.

Exemplo 2.3.4. *Denotaremos por $\mathcal{L}_{w-mid,p}^{(ev)}$ e $\mathcal{P}_{w-mid,p}^{(ev)}$ as classes de aplicações multilineares fracamente mid p-somantes e polinômios homogêneos fracamente mid p-somantes. Tais classes são caracterizadas por transformar sequências fracamente p-somáveis em sequências mid p-somáveis. Considerando $\gamma_s=\ell_p^{mid}$ e $\gamma_{s_1}=\ell_p^{w}$ e como estas classes de sequências são linearmente estáveis, finitamente determinadas, finitamente coincidentes e $\ell_p^{mid}(\cdot)$ é $\mathbb{K}$-fechada, então essas classes satisfazem a abordagem abstrata introduzida neste capítulo. Em particular, $\mathcal{P}_{w-mid,p}^{(ev)}$ é um ideal Banach de polinômios homogêneos e a sequência*

$$\left(\mathcal{P}_{w-mid,p}^{m,(ev)},\mathcal{L}_{w-mid,p}^{m,(ev)}\right)_{m=1}^{\infty}$$

é coerente e compatível com $\mathcal{L}^{1,(ev)}_{w-mid,p}$.

Exemplo 2.3.5. *Denotaremos por* $\mathcal{L}^{(ev)}_{Coh-mid,p}$, $\mathcal{L}^{(ev)}_{w-Coh,p}$, $\mathcal{P}^{(ev)}_{Coh-mid,p}$ *e* $\mathcal{P}^{(ev)}_{w-Coh,p}$ *as classes de aplicações multilineares mid Cohen p-somantes e fracamente Cohen p-somantes e polinômios homogêneos mid Cohen p-somantes e fracamente Cohen p-somantes, que transformam sequências fracamente p-somáveis e sequências mid p-somáveis em sequências Cohen p-somáveis, respectivamente.Considerando* $\gamma_s = \ell_p^{mid}$ *e* $\gamma_{s_1} = \ell_p^{w}$ *ou* $\ell_p\langle\cdot\rangle$ *e como estas classes de sequências são linearmente estáveis, finitamente determinadas, finitamente coincidentes e* $\ell_p\langle\cdot\rangle$ *é* $\mathbb{K}$*-fechada, então essas classes satisfazem a abordagem abstrata introduzida neste capítulo. Em particular,* $\mathcal{P}^{m,(ev)}_{Coh-mid,p}$ *e* $\mathcal{P}^{m,(ev)}_{w-Coh,p}$ *são ideais Banach de polinômios homogêneos e as sequências*

$$\left(\mathcal{P}^{m,(ev)}_{Coh-mid,p}, \mathcal{L}^{m,(ev)}_{Coh-mid,p}\right)_{m=1}^{\infty} \quad e \quad \left(\mathcal{P}^{m,(ev)}_{w-Coh,p}, \mathcal{L}^{m,(ev)}_{w-Coh,p}\right)_{m=1}^{\infty}$$

são coerentes e compatíveis com $\mathcal{L}^{1,(ev)}_{Coh-mid,p}$ *e* $\mathcal{L}^{1,(ev)}_{w-Coh,p}$, *respectivamente.*

Capítulo 3

Generalização dos operadores múltiplo somantes

A teoria dos operadores múltiplo somantes, que tem sido extensivamente estudada por diversos autores, dos quais destacamos [7, 11, 48, 49], serve como protótipo para a teoria geral a ser introduzida nesta seção.

Observação 3.0.1. Os resultados contidos nas seções 3.1, 3.2, 3.3 e 3.5 foram publicados na revista *Mediterranean Journal of Mathematics* [54].

3.1 Operadores múltiplo $\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}$-somantes

Nesta seção, apresentaremos o conceito de operadores múltiplo $\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}$-somantes e mostraremos algumas de suas propriedades. Iniciaremos apresentando as noções de n-sequências e classes de n-sequências para, então, podermos definir o nosso principal objeto de estudo.

Definição 3.1.1. Dado $n \in \mathbb{N}$, uma n-sequência em um espaço de Banach E é uma aplicação $f\colon \mathbb{N}^n \to E$. Isto é,

$$f(j_1, \ldots, j_n) = x_{j_1,\ldots,j_n} \text{ para todos } j_1, \ldots, j_n \in \mathbb{N}.$$

A n-sequência f será denotada por $(x_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}$.

É importante observar que, para $n \geq 2$, uma n-sequência não é uma sequência. Por exemplo, dada a 2-sequência $(x_{i,j})_{i,j=1}^{\infty}$, é inútil tentar exibi-la como uma sequência quando se considera a seguinte ordenação:

$$(x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1}, \ldots, x_{1,2}, x_{2,2}, x_{3,2}, \ldots, x_{1,3}, x_{2,3}, x_{3,3}, \ldots).$$

Note também que uma n-sequência pode ser transformada em uma sequência de diversas maneiras. Por exemplo, considere a 2-sequência $(x_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}$ dada por

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{se } i \text{ é ímpar e qualquer } j \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{se } i \text{ é par e qualquer } j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Duas formas de tornar esta 2-sequência em uma sequência são:

$$(1, 0, 1, 0, \dots) \text{ e } (0, 1, 0, 1, \dots).$$

Agora, iniciaremos a construção de nossa abordagem abstrata. Ao longo deste capítulo consideraremos:

$$\begin{aligned} &c_{00}\left(E;\mathbb{N}^n\right) \\ &:= \left\{(x_{j_1,\dots,j_n})_{j_1,\dots,j_n=1}^{\infty};\ x_{j_1,\dots,j_n} \neq 0 \text{ para somente uma quantidade finita de } j_1,\dots,j_n\right\} \end{aligned}$$

e

$$\ell_\infty\left(E;\mathbb{N}^n\right) := \left\{(x_{j_1,\dots,j_n})_{j_1,\dots,j_n=1}^{\infty};\ \sup_{j_1,\dots,j_n\in\mathbb{N}} \|x_{j_1,\dots,j_n}\| < \infty\right\}$$

com norma $\left\|(x_{j_1,\dots,j_n})_{j_1,\dots,j_n=1}^{\infty}\right\|_\infty := \sup_{j_1,\dots,j_n\in\mathbb{N}} \|x_{j_1,\dots,j_n}\|$.

Definição 3.1.2. Seja $n \in \mathbb{N}$. Uma classe de n-sequências a valores vetoriais, ou simplesmente uma classe de n-sequência, $\gamma_s\left(\cdot,\mathbb{N}^n\right)$, é uma regra que associa cada espaço de Banach E a um espaço de Banach $\gamma_s(E;\mathbb{N}^n)$ de n-sequências a valores em E, isto é, $\gamma_s(E;\mathbb{N}^n)$ é um subespaço vetorial do espaço de todas as n-sequências a valores em E com as operações usuais, tal que:

$$c_{00}\left(E;\mathbb{N}^n\right) \subset \gamma_s\left(E;\mathbb{N}^n\right) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_\infty\left(E;\mathbb{N}^n\right) \quad \text{e} \quad \|e_{k_1,\dots,k_n}\|_{\gamma_s(\mathbb{K};\mathbb{N}^n)} = 1,$$

para todos $k_1,\dots,k_n \in \mathbb{N}$, onde $e_{k_1,\dots,k_n} = (x_{j_1,\dots,j_n})_{j_1,\dots,j_n=1}^{\infty}$ é a n-sequência definida por:

$$x_{j_1,\dots,j_n} = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad j_1 = k_1,\dots,j_n = k_n \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Uma classe de n-sequências $\gamma_s\left(\cdot;\mathbb{N}^n\right)$ é dita *finitamente determinada* se, para toda n-sequência $(x_{j_1,\dots,j_n})_{j_1,\dots,j_n=1}^{\infty}$ a valores em E,

$$(x_{j_1,\dots,j_n})_{j_1,\dots,j_n=1}^{\infty} \in \gamma_s\left(E;\mathbb{N}^n\right) \iff \sup_{m_1,\dots,m_n\in\mathbb{N}} \left\|(x_{j_1,\dots,j_n})_{j_1,\dots,j_n=1}^{m_1,\dots,m_n}\right\|_{\gamma_s(E;\mathbb{N}^n)} < \infty$$

e, neste caso,

$$\left\|(x_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(E;\mathbb{N}^n)} = \sup_{m_1,\ldots,m_n\in\mathbb{N}} \left\|(x_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m_1,\ldots,m_n}\right\|_{\gamma_s(E;\mathbb{N}^n)}.$$

Note que, o conceito de classe de n-sequências generaliza o conceito de classe de sequências introduzido por Botelho e Campos em [12].

Exemplos 3.1.3. Alguns exemplos de classes de n-sequências finitamente determinadas são:

(a) A correspondência $E \mapsto \ell_\infty(E;\mathbb{N}^n)$, munido com a norma

$$\|(x_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\|_\infty := \sup_{j_1,\ldots,j_n\in\mathbb{N}} \|x_{j_1,\ldots,j_n}\|.$$

(b) A correspondência $E \mapsto \ell_p^w(E;\mathbb{N}^n)$, $1 \leq p < \infty$, onde

$$\ell_p^w(E;\mathbb{N}^n) := \left\{(x_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty};\ \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} |\varphi(x_{j_1,\ldots,j_n})|^p < \infty,\ \forall\varphi\in E'\right\},$$

munido com a norma $\|(x_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\|_{w,p} := \sup_{\varphi\in B_{E'}} \left(\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} |\varphi(x_{j_1,\ldots,j_n})|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

(c) A correspondência $E \mapsto \ell_p(E;\mathbb{N}^n)$, $1 \leq p < \infty$, onde

$$\ell_p(E;\mathbb{N}^n) := \left\{(x_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty};\ \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \|x_{j_1,\ldots,j_n}\|^p < \infty\right\},$$

munido com a norma $\|(x_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\|_p := \left(\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \|x_{j_1,\ldots,j_n}\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

(d) A correspondência $E \mapsto \ell_p\langle E;\mathbb{N}^n\rangle$, $1 \leq p < \infty$, onde

$$\begin{aligned}&\ell_p\langle E;\mathbb{N}^n\rangle\\ &:= \left\{(x_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty};\ \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} |\varphi_{j_1,\ldots,j_n}(x_{j_1,\ldots,j_n})| < \infty,\ \forall(\varphi_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n\in\mathbb{N}} \in \ell_{p'}^w(E';\mathbb{N}^n)\right\}\end{aligned}$$

com $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, munido com a norma

$$\|(x_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\|_{Coh,p} := \sup_{(\varphi_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\in B_{\ell_p^w(E';\mathbb{N}^n)}} \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} |\varphi_{j_1,\ldots,j_n}(x_{j_1,\ldots,j_n})|.$$

(e) A correspondência $E \mapsto \ell_p^{mid}(E;\mathbb{N}^n)$, $1 \leq p < \infty$, onde

$$\begin{aligned}&\ell_p^{mid}(E;\mathbb{N}^n)\\ &:= \left\{(x_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty};\ \sum_{m,j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} |\varphi_m(x_{j_1,\ldots,j_n})|^p < \infty,\ \forall(\varphi_m)_{m=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E')\right\},\end{aligned}$$

munido com a norma

$$\|(x_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\|_{mid,p} := \sup_{(\varphi_m)_{m=1}^{\infty} \in B_{\ell_p^w(E')}} \left(\sum_{m,j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} |\varphi_m(x_{j_1,\ldots,j_n})|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

(f) A correspondência $E \mapsto \ell_{m(s,p)}(E;\mathbb{N}^n)$, $1 \leq p < \infty$, onde $\ell_{m(s,p)}(E;\mathbb{N}^n)$ é o conjunto de todas as n-sequências a valores em E, $(x_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}$, tal que $x_{j_1,\ldots,j_n} = \tau_{j_1,\ldots,j_n} x^0_{j_1,\ldots,j_n}$ para $(\tau_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \in \ell_{s(p)'}(\mathbb{K};\mathbb{N}^n)$, $(x^0_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \in \ell_s^w(E;\mathbb{N}^n)$ e

$$\frac{1}{s(p)'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{p}.$$

Considere $\ell_{m(s,p)}(E;\mathbb{N}^n)$ munido com a norma

$$\left\|(x_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\right\|_{m(s;p)} = \inf \left\|(\tau_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\right\|_{s(p)'} \left\|\left(x^0_{j_1,\ldots,j_n}\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\right\|_{w,s},$$

onde o ínfimo é considerado sobre todas as representações $x_{j_1,\ldots,j_n} = \tau_{j_1,\ldots,j_n} x^0_{j_1,\ldots,j_n}$, $j_1,\ldots,j_n \in \mathbb{N}$.

Mostraremos que a classe dada no item (b) é uma classe de n-sequências finitamente determinada. É imediato que $c_{00}(E;\mathbb{N}^n)$ está contida em $\ell_p^w(E;\mathbb{N}^n)$ e que $\|e_{j_1,\ldots,j_n}\|_{w,p} = 1$. Seja $(x_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E;\mathbb{N}^n)$. Segue, do Teorema de Hahn-Banach, que

$$\sup_{j_1,\ldots,j_n\in\mathbb{N}} \|x_{j_1,\ldots,j_n}\| = \sup_{j_1,\ldots,j_n\in\mathbb{N}} \sup_{\varphi\in B_E} |\varphi(x_{j_1,\ldots,j_n})| \leq \sup_{\varphi\in B_E} \left(\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} |\varphi(x_{j_1,\ldots,j_n})|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

e, portanto, $\ell_p^w(E;\mathbb{N}^n) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_\infty(E;\mathbb{N}^n)$. Mostraremos, agora, que

$$(x_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E;\mathbb{N}^n) \iff \sup_{m_1,\ldots,m_n\in\mathbb{N}} \left\|(x_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m_1,\ldots,m_n}\right\|_{w,p} < \infty.$$

Seja $(x_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E;\mathbb{N}^n)$, então,

$$\sup_{m_1,\ldots,m_n\in\mathbb{N}} \left\|(x_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m_1,\ldots,m_n}\right\|_{w,p} = \sup_{m_1,\ldots,m_n\in\mathbb{N}} \sup_{\varphi\in B_E} \left(\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m_1,\ldots,m_n} |\varphi(x_{j_1,\ldots,j_n})|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{\varphi \in B_E} \left(\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} |\varphi(x_{j_1,\ldots,j_n})|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left\| (x_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \right\|_{w,p} \\
&< \infty.
\end{aligned}
$$

A outra implicação é imediata.

Uma outra definição muito útil é a seguinte:

Definição 3.1.4. Dizemos que uma classe de n-sequências $\gamma_s(\cdot, \mathbb{N}^n)$ é linearmente estável se
$(u(x_{j_1,\ldots,j_n}))_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \in \gamma_s(F; \mathbb{N}^n)$ sempre que $(x_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \in \gamma_s(E; \mathbb{N}^n)$ e $u \in \mathcal{L}(E; F)$, e

$$\|\hat{u} \colon \gamma_s(E; \mathbb{N}^n) \to \gamma_s(F; \mathbb{N}^n)\| = \|u\|,$$

onde $\hat{u}\left((x_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\right) = (u(x_{j_1,\ldots,j_n}))_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}$.

Todas as classes de n-sequências apresentadas no Exemplo 3.1.3 são linearmente estáveis. Para ilustrar, mostraremos que a classe dada em (f) é linearmente estável. Sejam E e F espaços de Banach, $u \in \mathcal{L}(E; F)$ e $(x_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \in \ell_{m(s;q)}(E; \mathbb{N}^n)$. Então, existem $(\tau_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \in \ell_{s(q)'}(\mathbb{K}; \mathbb{N}^n)$ e $(x^0_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \in \ell_s^w(E; \mathbb{N}^n)$, tais que, para quaisquer $j_1, \ldots, j_n \in \mathbb{N}$

$$x_{j_1,\ldots,j_n} = \tau_{j_1,\ldots,j_n} x^0_{j_1,\ldots,j_n}.$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
u(x_{j_1,\ldots,j_n}) &= u\left(\tau_{j_1,\ldots,j_n} x^0_{j_1,\ldots,j_n}\right) \\
&= \tau_{j_1,\ldots,j_n} u\left(x^0_{j_1,\ldots,j_n}\right).
\end{aligned}
$$

Como $E \mapsto \ell_s^w(E; \mathbb{N}^n)$ é linearmente estável, então, $\left(u\left(x^0_{j_1,\ldots,j_n}\right)\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \in \ell_s^w(F; \mathbb{N}^n)$. Logo $(u(x_{j_1,\ldots,j_n}))_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \in \ell_{m(s;q)}(F; \mathbb{N}^n)$.

Agora, considere o operador induzido $\hat{u} \colon \ell_{m(s,q)}(E; \mathbb{N}^n) \to \ell_{m(s,q)}(F; \mathbb{N}^n)$ dado por

$$\hat{u}\left((x_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\right) := (u(x_{j_1,\ldots,j_n}))_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}.$$

Segue diretamente da definição que $\hat{u}$ está bem definido e é uma aplicação linear. Mostraremos que $\hat{u}$ é contínua. Seja $\left(\left(x^k_{j_1,\ldots,j_n}\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\right)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência em $\ell_{m(s,q)}(E; \mathbb{N}^n)$ convergindo para $(x_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}$ tal que

$$\hat{u}\left(\left(x^k_{j_1,\ldots,j_n}\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\right) \underset{k}{\to} (z_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}.$$

Como, para quaisquer $j_1, \ldots, j_n \in \mathbb{N}$,

$$\|x_{j_1,\ldots,j_n}\|_E \leq \left\|(x_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\right\|_{m(s,q)},$$

temos que $\left(x_{j_1,\ldots,j_n}^k\right)_{k=1}^{\infty}$ converge para $x_{j_1,\ldots,j_n}$ e, portanto, $\left(u\left(x_{j_1,\ldots,j_n}^k\right)\right)_{k=1}^{\infty}$ converge para $u(x_{j_1,\ldots,j_n})$ para todos $j_1, \ldots, j_n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, $\left(u\left(x_{j_1,\ldots,j_n}^k\right)\right)_{k=1}^{\infty}$ converge para $z_{j_1,\ldots,j_n}$ para todos $j_1, \ldots, j_n \in \mathbb{N}$. Segue da unicidade do limite que

$$u\left(x_{j_1,\ldots,j_n}\right) = z_{j_1,\ldots,j_n}, \forall j_1, \ldots, j_n \in \mathbb{N}$$

e então, $\left(u\left(x_{j_1,\ldots,j_n}\right)\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} = \left(z_{j_1,\ldots,j_n}\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}$. Portanto, $\hat{u}$ é uma aplicação linear com gráfico fechado. Logo, do Teorema de Gráfico Fechado, $\hat{u}$ é uma aplicação contínua. Agora, mostraremos que $\|u\| = \|\hat{u}\|$.

$$\begin{aligned}\|u\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|u(x)\| &\leq \sup_{\left\|\left(x_{j_1,\ldots,j_n}\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\right\|_{m(s,q)}\leq 1} \left\|\left(u\left(x_{j_1,\ldots,j_n}\right)\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(s,q)} = \\ &= \sup_{\left\|\left(x_{j_1,\ldots,j_n}\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\right\|_{m(s,q)}\leq 1} \left\|\hat{u}\left(\left(x_{j_1,\ldots,j_n}\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\right)\right\|_{m(s,q)} = \|\hat{u}\|.\end{aligned}$$

Assim, $\|u\| \leq \|\hat{u}\|$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}\|\hat{u}\| &= \sup_{\left\|\left(x_{j_1,\ldots,j_n}\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\right\|_{m(s,q)}\leq 1} \left\|\hat{u}\left(\left(x_{j_1,\ldots,j_n}\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\right)\right\|_{m(s,q)} \\ &= \sup_{\left\|\left(x_{j_1,\ldots,j_n}\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\right\|_{m(s,q)}\leq 1} \left\|\left(u\left(x_{j_1,\ldots,j_n}\right)\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\right\|_{m(s,q)} \\ &\leq \sup_{\left\|\left(x_{j_1,\ldots,j_n}\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\right\|_{m(s,q)}\leq 1} \inf \left\|\left(\tau_{j_1,\ldots,j_n}\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\right\|_{s(q)'} \left\|\left(u\left(x_{j_1,\ldots,j_n}^0\right)\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\right\|_{w,s},\end{aligned}$$

onde o ínfimo na primeira desigualdade é tomado sobre todas as representações da forma $x_{j_1,\ldots,j_n} = \tau_{j_1,\ldots,j_n} x_{j_1,\ldots,j_n}^0$ para quaisquer $j_1, \ldots, j_n \in \mathbb{N}$, com $\left(\tau_{j_1,\ldots,j_n}\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \in \ell_{s(q)'}\left(\mathbb{K}; \mathbb{N}^n\right)$ e $\left(x_{j_1,\ldots,j_n}^0\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \in \ell_s^w\left(E; \mathbb{N}^n\right)$. Como $E \mapsto \ell_s^w\left(E; \mathbb{N}^n\right)$ é linearmente estável, temos que

$$\begin{aligned}\|\hat{u}\| &\leq \|u\| \sup_{\left\|\left(x_{j_1,\ldots,j_n}\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\right\|_{m(s,q)}\leq 1} \inf \left\|\left(\tau_{j_1,\ldots,j_n}\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\right\|_{s(q)'} \left\|\left(x_{j_1,\ldots,j_n}^0\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\right\|_{w,s} \\ &= \|u\| \sup_{\left\|\left(x_{j_1,\ldots,j_n}\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\right\|_{m(s,q)}\leq 1} \left\|\left(x_{j_1,\ldots,j_n}\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\right\|_{m(s,q)} = \|u\|.\end{aligned}$$

Daqui em diante, iremos supor que todas as classes de n-sequências envolvidas

são linearmente estáveis.

Vamos introduzir na próxima definição uma propriedade de simetria cujas classes de n-sequências devem satisfazer para podermos definir os operadores múltiplo $\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}$-somantes.

Definição 3.1.5. Dado $n \in \mathbb{N}$, dizemos que uma classe de n-sequências $\gamma_s(\cdot, \mathbb{N}^n)$ é simetricamente fechada se, para qualquer n-sequência $(x_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}$ a valores em E,

$$(x_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \in \gamma_s(E;\mathbb{N}^n) \iff (x_{j_{\sigma(1)},\ldots,j_{\sigma(n)}})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \in \gamma_s(E;\mathbb{N}^n)$$

e

$$\left\|(x_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(E;\mathbb{N}^n)} = \left\|(x_{j_{\sigma(1)},\ldots,j_{\sigma(n)}})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(E;\mathbb{N}^n)},$$

para toda permutação σ do conjunto $\{1,\ldots,n\}$.

Exemplo 3.1.6. *As classes de n-sequências listadas no Exemplo 3.1.3 são simetricamente fechadas.*

Daqui em diante, $\gamma_{s_1},\ldots,\gamma_{s_n}$ serão classes de sequências linearmente estáveis e finitamente determinadas e $\gamma_s(\cdot, \mathbb{N}^n)$ será uma classe de n-sequências finitamente determinada e simetricamente fechada.

Definição 3.1.7. Seja $n \in \mathbb{N}$. Um operador n-linear contínuo $T \in \mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F)$ é dito múltiplo $\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}$-somante quando

$$\left(T\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\right)\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \in \gamma_s(F;\mathbb{N}^n),$$

sempre que $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_{s_i}(E_i), i = 1,\ldots,n$.

Note que a condição de simetria da classe de n-sequências $\gamma_s(\cdot, \mathbb{N}^n)$ garante que este conceito está bem definido.

O conjunto de todos os operadores n-lineares múltiplo $\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}$-somantes de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em F, claramente um espaço vetorial, é denotado por $\mathcal{L}^m_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}(E_1,\ldots,E_n;F)$. Para munir este espaço com uma norma completa adequada, necessitaremos do seguinte resultado:

Lema 3.1.8. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $\gamma_s(\cdot;\mathbb{N}^n)$ uma classe de n-sequências linearmente estável. Para todo espaço de Banach E,*

$$\|x\|_E = \|(x_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\|_{\gamma_s(E;\mathbb{N}^n)},$$

com $x \in E$, onde $(x_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}$ é a n-sequência com x em uma das coordenadas e zero nas demais posições.

Demonstração. Considere o operador linear contínuo

$$u_x \colon \mathbb{K} \to E$$

dado por $u_x(\lambda) = \lambda x$.

Sendo $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$, a posição na qual x aparece na n-sequência $(x_{j_1,\ldots,j_n})_{j=1}^{\infty}$ com zero nas demais coordenadas, temos

$$\begin{aligned}
\|x\|_E &\leq \left\| (x_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_s(E;\mathbb{N}^n)} \\
&= \|\widehat{u_x}(e_{k_1,\ldots,k_n})\|_{\gamma_s(E;\mathbb{N}^n)} \\
&\leq \|\widehat{u_x}\| \, \|e_{k_1,\ldots,k_n}\|_{\gamma_s(\mathbb{K};\mathbb{N}^n)} \\
&= \|\widehat{u_x}\| \\
&= \|x\|_E.
\end{aligned}$$

onde a primeira desigualdade é uma consequência de $\gamma_s(E;\mathbb{N}^n) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_\infty(E;\mathbb{N}^n)$. □

Lema 3.1.9. *Sejam $E_1, \ldots, E_n$, F espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}^m_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Então, o operador induzido*

$$\hat{T} \colon \gamma_{s_1}(E_1) \times \cdots \times \gamma_{s_n}(E_n) \to \gamma_s(F;\mathbb{N}^n)$$

dado por

$$\hat{T}\left(\left(x_{j_1}^{(1)}\right)_{j_1=1}^{\infty}, \ldots, \left(x_{j_n}^{(n)}\right)_{j_n=1}^{\infty} \right) = \left(T\left(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_n}^{(n)}\right) \right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty},$$

está bem definido, é n-linear e contínuo.

Demonstração. É claro que $\hat{T}$ está bem definido e é simples de checar sua n-linearidade. Para provar que $\hat{T}$ é contínuo, usaremos o Teorema do Gráfico Fechado e a norma da soma no produto cartesiano. Seja

$$\left(\left(x_{j_1}^{(1),k}\right)_{j_1=1}^{\infty}, \ldots, \left(x_{j_n}^{(n),k}\right)_{j_n=1}^{\infty} \right)_{k=1}^{\infty}$$

uma sequência em $\gamma_{s_1}(E_1) \times \cdots \times \gamma_{s_n}(E_n)$ convergindo para

$$\left(\left(x_{j_1}^{(1)}\right)_{j_1=1}^{\infty}, \ldots, \left(x_{j_n}^{(n)}\right)_{j_n=1}^{\infty} \right)$$

e tal que

$$\hat{T}\left(\left(x_{j_1}^{(1),k}\right)_{j_1=1}^{\infty}, \ldots, \left(x_{j_n}^{(n),k}\right)_{j_n=1}^{\infty} \right) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} (z_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}. \tag{3.1}$$

Então, dado $\epsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para quaisquer $k \geq k_0$ e $i = 1, \ldots, n$,

$$\begin{aligned}
&\left\| x_{j_i}^{(i),k} - x_{j_i}^{(i)} \right\|_{E_i} \\
&\leq \left\| \left(x_{j_i}^{(i),k} \right)_{j_i=1}^{\infty} - \left(x_{j_i}^{(i)} \right)_{j_i=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_{s_i}(E_i)} \\
&\leq \left\| \left(\left(x_{j_1}^{(1),k} \right)_{j_1=1}^{\infty}, \ldots, \left(x_{j_n}^{(n),k} \right)_{j_n=1}^{\infty} \right) - \left(\left(x_{j_1}^{(1)} \right)_{j_1=1}^{\infty}, \ldots, \left(x_{j_n}^{(n)} \right)_{j_n=1}^{\infty} \right) \right\|_{\gamma_{s_1}(E_1) \times \cdots \times \gamma_{s_n}(E_n)} \\
&< \epsilon.
\end{aligned}$$

Assim, $x_{j_i}^{(i),k} \to x_{j_i}^{(i)}$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Segue da continuidade de T que

$$T\left(x_{j_1}^{(1),k}, \ldots, x_{j_n}^{(n),k} \right) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} T\left(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_n}^{(n)} \right),$$

para todos $j_1, \ldots, j_n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, de (3.1) podemos tomar $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que, para qualquer $k \geq k_1$,

$$\begin{aligned}
&\left\| T\left(x_{j_1}^{(1),k}, \ldots, x_{j_n}^{(n),k} \right) - z_{j_1,\ldots,j_n} \right\|_F \\
&\leq \left\| \left(T\left(x_{j_1}^{(1),k}, \ldots, x_{j_n}^{(n),k} \right) \right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} - \left(z_{j_1,\ldots,j_n} \right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \right\|_{\gamma(F;\mathbb{N}^n)} \\
&= \left\| \hat{T}\left(\left(x_{j_1}^{(1),k} \right)_{j_1=1}^{\infty}, \ldots, \left(x_{j_n}^{(n),k} \right)_{j_n=1}^{\infty} \right) - \left(z_{j_1,\ldots,j_n} \right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \right\|_{\gamma(F;\mathbb{N}^n)} \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

para todos $j_1, \ldots, j_n \in \mathbb{N}$. Logo,

$$T\left(x_{j_1}^{(1),k}, \ldots, x_{j_n}^{(n),k} \right) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} z_{j_1,\ldots,j_n}$$

para todos $j_1, \ldots, j_n \in \mathbb{N}$. Consequentemente,

$$\hat{T}\left(\left(x_{j_1}^{(1)} \right)_{j_1=1}^{\infty}, \ldots, \left(x_{j_n}^{(n)} \right)_{j_n=1}^{\infty} \right) = \left(T\left(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_n}^{(n)} \right) \right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} = \left(z_{j_1,\ldots,j_n} \right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty},$$

provando que $\hat{T}$ possui gráfico fechado. Logo, do Teorema do Gráfico Fechado, $\hat{T}$ é contínuo. $\square$

A recíproca do Lema 3.1.9 é obviamente verdade, mesmo desconsiderada a continuidade do operador induzido. O próximo teorema será bastante útil, pois dele será extraída a norma que fará $\mathcal{L}^m_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}(E_1, \ldots, E_n; F)$ um espaço de Banach.

Teorema 3.1.10. *Sejam $E_1, \ldots, E_n, F$ espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(*a*) $T \in \mathcal{L}^m_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}(E_1,\ldots,E_n;F)$.

(*b*) *Existe* $C>0$, *tal que*

$$\left\|\left(T\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\right)\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F;\mathbb{N}^n)} \leq C\prod_{i=1}^{n}\left\|\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_i}(E_i)}, \tag{3.2}$$

sempre que $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_{s_i}(E_i), i=1,\ldots,n$.

(*c*) *Existe* $C>0$, *tal que*

$$\left\|\left(T\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\right)\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m_1,\ldots,m_n}\right\|_{\gamma_s(F;\mathbb{N}^n)} \leq C\prod_{i=1}^{n}\left\|\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{m_i}\right\|_{\gamma_{s_i}(E_i)},$$

para quaisquer $m_1,\ldots,m_n \in \mathbb{N}$ *e* $x_j^{(i)} \in E_i$, $i=1,\ldots,n$.

Demonstração. (b) $\Rightarrow$ (c) é imediato e (c) $\Rightarrow$ (a) segue diretamente do fato de as classes de sequências e de n-sequências envolvidas serem finitamente determinadas. Assim, temos somente que provar (a) $\Rightarrow$ (b). Para fazer isso, considere $T \in \mathcal{L}^m_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}(E_1,\ldots,E_n;F)$ e defina

$$\hat{T}\colon \gamma_{s_1}(E_1)\times\cdots\times\gamma_{s_n}(E_n) \to \gamma_s\left(F;\mathbb{N}^n\right),$$

como no Lema 3.1.9. Por esse mesmo lema, $\hat{T}$ está bem definido, é n-linear e contínuo. Portanto,

$$\begin{aligned}\left\|\left(T\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\right)\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F;\mathbb{N}^n)} &= \left\|\hat{T}\left(\left(x_{j_1}^{(1)}\right)_{j_1},\ldots,\left(x_{j_n}^{(n)}\right)_{j_n}\right)\right\|_{\gamma_s(F;\mathbb{N}^n)}\\ &\leq \left\|\hat{T}\right\|\prod_{i=1}^{n}\left\|\left(x_{j_i}^{(i)}\right)_{j_i=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_i}(E_i)}.\end{aligned}$$

□

Uma consequência do Teorema 3.1.10 é o seguinte resultado:

Corolário 3.1.11. *O ínfimo das constantes* $C>0$ *satisfazendo* (3.2) *do Teorema 3.1.10 é uma norma sobre* $\mathcal{L}^m_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}(E_1,\ldots,E_n;F)$, *denotada por* $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}}$.

Demonstração. Dado $T \in \mathcal{L}^m_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}(E_1,\ldots,E_n;F)$, é imediato que

$$\|T\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}} \geq 0 \text{ e que } \|T\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}} = 0 \iff T=0.$$

Sejam $\lambda \in \mathbb{K}-\{0\}$ e $T \in \mathcal{L}^m_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}(E_1,\ldots,E_n;F)$. Por um lado,

$$\left\|\left(\lambda T\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\right)\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F;\mathbb{N}^n)} = |\lambda|\left\|\left(T\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\right)\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F;\mathbb{N}^n)}$$

$$\leq |\lambda| \|T\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_s,s_1,\ldots,s_n}} \prod_{i=1}^{n} \left\| \left(x^{(i)}_{j_i} \right)^{\infty}_{j_i=1} \right\|_{\gamma_{s_i}(E_i)}$$

e assim,

$$\|\lambda T\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_s,s_1,\ldots,s_n}} \leq |\lambda| \|T\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_s,s_1,\ldots,s_n}}. \tag{3.3}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} |\lambda| \left\| \left(T\left(x^{(1)}_{j_1}, \ldots, x^{(n)}_{j_n} \right) \right)^{\infty}_{j_1,\ldots,j_n=1} \right\|_{\gamma_s(F;\mathbb{N}^n)} &= \left\| \left(\lambda T\left(x^{(1)}_{j_1}, \ldots, x^{(n)}_{j_n} \right) \right)^{\infty}_{j_1,\ldots,j_n=1} \right\|_{\gamma_s(F;\mathbb{N}^n)} \\ &\leq \|\lambda T\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_s,s_1,\ldots,s_n}} \prod_{i=1}^{n} \left\| \left(x^{(i)}_{j_i} \right)^{\infty}_{j_i=1} \right\|_{\gamma_{s_i}(E_i)}, \end{aligned}$$

de onde obtemos que

$$|\lambda| \|T\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_s,s_1,\ldots,s_n}} \leq \|\lambda T\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_s,s_1,\ldots,s_n}}. \tag{3.4}$$

Portanto, de (3.3) e (3.4) temos que

$$\|\lambda T\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_s,s_1,\ldots,s_n}} = |\lambda| \|T\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_s,s_1,\ldots,s_n}}.$$

O caso $\lambda = 0$ é óbvio.

Se $T, R \in \mathcal{L}^m_{\gamma_s,s_1,\ldots,s_n}(E_1, \ldots, E_n; F)$ então,

$$\begin{aligned} &\left\| \left((T+R)\left(x^{(1)}_{j_1}, \ldots, x^{(n)}_{j_n} \right) \right)^{\infty}_{j_1,\ldots,j_n=1} \right\|_{\gamma_s(F;\mathbb{N}^n)} \\ &\leq \left\| \left(T\left(x^{(1)}_{j_1}, \ldots, x^{(n)}_{j_n} \right) \right)^{\infty}_{j_1,\ldots,j_n=1} \right\|_{\gamma_s(F;\mathbb{N}^n)} + \left\| \left(R\left(x^{(1)}_{j_1}, \ldots, x^{(n)}_{j_n} \right) \right)^{\infty}_{j_1,\ldots,j_n=1} \right\|_{\gamma_s(F;\mathbb{N}^n)} \\ &\leq \left(\|T\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_s,s_1,\ldots,s_n}} + \|R\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_s,s_1,\ldots,s_n}} \right) \prod_{i=1}^{n} \left\| \left(x^{(i)}_{j_i} \right)^{\infty}_{j_i=1} \right\|_{\gamma_{s_i}(E_i)}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|T+R\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_s,s_1,\ldots,s_n}} \leq \|T\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_s,s_1,\ldots,s_n}} + \|R\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_s,s_1,\ldots,s_n}}.$$

□

Lema 3.1.12. *A aplicação*

$$(\cdot)^{\wedge} \colon \mathcal{L}^m_{\gamma_s,s_1,\ldots,s_n}(E_1, \ldots, E_n; F) \longrightarrow \mathcal{L}\left(\gamma_{s_1}(E_1), \ldots, \gamma_{s_n}(E_n); \gamma_s\left(F; \mathbb{N}^n\right)\right),$$

dada por $(T)^{\wedge} = \hat{T}$*, é uma isometria linear, onde* $\hat{T}$ *é definido como no Lema 3.1.9.*

Demonstração. Claramente, a aplicação $(\cdot)^{\wedge}$ é linear. Como $\hat{T}$ é uma aplicação contínua, segue que

$$\left\|\hat{T}\left(\left(x_{j_1}^{(1)}\right)_{j_1=1}^{\infty},\ldots,\left(x_{j_n}^{(n)}\right)_{j_n=1}^{\infty}\right)\right\|_{\gamma(F;\mathbb{N}^n)} \leq \|\hat{T}\|\prod_{i=1}^{n}\left\|\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_i}(E_i)}.$$

Logo,

$$\left\|\left(T\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\right)\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\right\|_{\gamma(F;\mathbb{N}^n)} \leq \|\hat{T}\|\prod_{i=1}^{n}\left\|\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_i}(E_i)}$$

e assim

$$\|T\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_s,s_1,\ldots,s_n}} \leq \|\hat{T}\|.$$

Por outro lado, usando o ítem (b) da Teorema 3.1.10, obtemos

$$\begin{aligned}\|\hat{T}\| &= \sup_{\left\|\left(x_{j_i}^{(i)}\right)_{j_i=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_i}(E_i)}\leq 1}\left\|\hat{T}\left(\left(x_{j_1}^{(1)}\right)_{j_1=1}^{\infty},\ldots,\left(x_{j_n}^{(n)}\right)_{j_n=1}^{\infty}\right)\right\|_{\gamma_s(F;\mathbb{N}^n)}\\ &= \sup_{\left\|\left(x_{j_i}^{(i)}\right)_{j_i=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_i}(E_i)}\leq 1}\left\|\left(T\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\right)\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\right\|_{\gamma(F;\mathbb{N}^n)}\\ &\leq \|T\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_s,s_1,\ldots,s_n}}.\end{aligned}$$

Portanto, $\|(T)^\wedge\| = \|\hat{T}\| = \|T\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_s,s_1,\ldots,s_n}}$. □

Proposição 3.1.13. *Sejam $E_1,\ldots,E_n$ e F espaços de Banach.*
(a) $\|T\| \leq \|T\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_s,s_1,\ldots,s_n}}$ *para qualquer* $T \in \mathcal{L}^m_{\gamma_s,s_1,\ldots,s_n}(E_1,\ldots,E_n;F)$.
(b) $\left(\mathcal{L}^m_{\gamma_s,s_1,\ldots,s_n}(E_1,\ldots,E_n;F), \|\cdot\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_s,s_1,\ldots,s_n}}\right)$ *é um espaço de Banach.*

Demonstração. (a) Seja $T \in \mathcal{L}^m_{\gamma_s,s_1,\ldots,s_n}(E_1,\ldots,E_n;F)$. Então,

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup_{\|x_i\|\leq 1,\ i=1,\ldots,n}\|T(x_1,\ldots,x_n)\|_F\\ &\leq \sup_{\left\|\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_i}(E_i)}\leq 1,\ i=1,\ldots,n}\left\|\left(T\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\right)\right)_{j_1,\ldots,j_n}\right\|_{\gamma_s(F;\mathbb{N}^n)}\\ &\leq \|T\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_s,s_1,\ldots,s_n}}.\end{aligned}$$

(b) Seja $(T_k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}^m_{\gamma_s,s_1,\ldots,s_n}(E_1\ldots,E_n;F)$. Pelo item (a), $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_s,s_1,\ldots,s_n}}$. Daí, $(T_k)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F)$, de onde segue que existe $T \in \mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F)$ tal que

$$T_k \xrightarrow{\|\cdot\|} T.$$

Mostraremos que $T \in \mathcal{L}^m_{\gamma_s,s_1,\ldots,s_n}(E_1\ldots,E_n;F)$ e que $\|T-T_k\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_s,s_1,\ldots,s_n}} \to 0$. De fato, como $T_k \in \mathcal{L}^m_{\gamma_s,s_1,\ldots,s_n}(E_1\ldots,E_n;F)$, pelo Lema 3.1.12, $\|\hat{T}_k\| = \|T_k\|_{\mathcal{L}_{\gamma_s,s_1,\ldots,s_n}}$. Assim,

$\left(\hat{T}_k\right)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}\left(\gamma_{s_1}(E_1),\ldots,\gamma_{s_n}(E_n);\gamma_s\left(F;\mathbb{N}^n\right)\right)$. Consequentemente, existe $A\in\mathcal{L}\left(\gamma_{s_1}(E_1),\ldots,\gamma_{s_n}(E_n);\gamma_s\left(F;\mathbb{N}^n\right)\right)$ tal que $\|\hat{T}_k-A\|\xrightarrow{\|\cdot\|}0$. Dadas $\left(x_{j_i}^{(i)}\right)_{j_i=1}^{\infty}\in\gamma_{s_i}\left(E_i\right)$, $i=1,\ldots,n$, defina

$$(y_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}:=A\left(\left(x_{j_1}^{(1)}\right)_{j_1=1}^{\infty},\ldots,\left(x_{j_n}^{(n)}\right)_{j_n=1}^{\infty}\right).$$

Então,

$$\begin{aligned}\left\|T_k\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\right)-y_{j_1,\ldots,j_n}\right\|_F &\leq \left\|\left(T_k\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\right)\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}-(y_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F;\mathbb{N}^n)}\\ &=\left\|(\hat{T}_k-A)\left(\left(x_{j_1}^{(1)}\right)_{j_1=1}^{\infty},\ldots,\left(x_{j_n}^{(n)}\right)_{j_n=1}^{\infty}\right)\right\|_{\gamma_s(F;\mathbb{N}^n)}\\ &\leq\|\hat{T}_k-A\|\prod_{i=1}^{n}\left\|\left(x_{j_i}^{(i)}\right)_{j_i=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_i}(E_i)}.\end{aligned}$$

Portanto, $T_k\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\right)\xrightarrow{k}y_{j_1,\ldots,j_n}$ para quaisquer $j_1,\ldots,j_n\in\mathbb{N}$. Assim,

$$T\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\right)=y_{j_1,\ldots,j_n}.$$

Logo,

$$\left(T\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\right)\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}=(y_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}.$$

Isto mostra que

$$\left(T\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\right)\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\in\gamma_s\left(F;\mathbb{N}^n\right),$$

para quaisquer $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}\in\gamma_{s_i}(E_i)$, $i=1,\ldots,n$ e, consequentemente,

$$T\in\mathcal{L}^m_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}(E_1\ldots,E_n;F).$$

Também afirmamos que $A=\hat{T}$. De fato,

$$\begin{aligned}\hat{T}\left(\left(x_{j_1}^{(1)}\right)_{j_1=1}^{\infty},\ldots,\left(x_{j_n}^{(n)}\right)_{j_n=1}^{\infty}\right)&=\left(T\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\right)\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\\ &=(y_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\\ &=A\left(\left(x_{j_1}^{(1)}\right)_{j_1=1}^{\infty},\ldots,\left(x_{j_n}^{(n)}\right)_{j_n=1}^{\infty}\right),\end{aligned}$$

para quaisquer $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}\in\gamma_{s_i}(E_i), i=1,\ldots,n$, em que resulta $\hat{T}=A$. Como, para

qualquer $k \in \mathbb{N}$, T_k e T pertencem a $\mathcal{L}^m_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}(E_1 \ldots, E_n; F)$, temos

$$T - T_k \in \mathcal{L}^m_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}(E_1 \ldots, E_n; F)$$

e, pelo Lema 3.1.12,

$$\|T - T_k\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}} = \|(T - T_k)^\wedge\| = \left\|\hat{T} - \hat{T}_k\right\| = \left\|A - \hat{T}_k\right\|.$$

Assim, T_k converge para T em $\mathcal{L}^m_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}(E_1 \ldots, E_n; F)$. Portanto, $\mathcal{L}^m_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}(E_1 \ldots, E_n; F)$ é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}}$. □

3.2 $\left(\mathcal{L}^m_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}, \|\cdot\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}}\right)$ é um ideal Banach

A prova de que $\left(\mathcal{L}^m_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}, \|\cdot\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}}\right)$ é um ideal de Banach de operadores n-lineares, se divide em várias etapas. O primeiro passo foi apresentado na Proposição 3.1.13. Antes de prosseguirmos para as próximas etapas, vamos apresentar uma condição na qual as classes de sequências devem satisfazer para que nosso objetivo seja alcançado.

Dadas classes de sequências $\gamma_{s_1}, \ldots, \gamma_{s_n}$ e uma classe de n-sequências $\gamma_s(\cdot; \mathbb{N}^n)$, escreveremos

$$\gamma_{s_1}(\mathbb{K}) \cdots \gamma_{s_n}(\mathbb{K}) \overset{mult,1}{\hookrightarrow} \gamma_s(\mathbb{K}; \mathbb{N}^n)$$

se $\left(\lambda^{(1)}_{j_1} \cdots \lambda^{(n)}_{j_n}\right)^\infty_{j_1,\ldots,j_n=1} \in \gamma_s(\mathbb{K}; \mathbb{N}^n)$ e

$$\left\|\left(\lambda^{(1)}_{j_1} \cdots \lambda^{(n)}_{j_n}\right)^\infty_{j_1,\ldots,j_n=1}\right\|_{\gamma_s(\mathbb{K};\mathbb{N}^n)} \leq \prod_{i=1}^\infty \left\|\left(\lambda^{(i)}_j\right)^\infty_{j=1}\right\|_{\gamma_{s_i}(\mathbb{K})},$$

sempre que $\left(\lambda^{(i)}_j\right)^\infty_{j=1} \in \gamma_{s_i}(\mathbb{K}), i = 1, \ldots, n$.

Proposição 3.2.1. *Suponha que $\gamma_{s_1}(\mathbb{K}) \cdots \gamma_{s_n}(\mathbb{K}) \overset{mult,1}{\hookrightarrow} \gamma_s(\mathbb{K}; \mathbb{N}^n)$. Então, para quaisquer $E_1, \ldots, E_n$ e F espaços de Banach, $\mathcal{L}^m_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}(E_1, \ldots, E_n; F)$ contém os operadores n-lineares de tipo finito.*

Demonstração. Considere o operador n-linear

$$B\colon E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F \ , \ B(x_1, \ldots, x_n) = \varphi^{(1)}(x_1) \cdots \varphi^{(n)}(x_n) b,$$

onde $b \in F$, $\varphi^{(r)} \in E'_r$, $r = 1, \ldots, n$. Considere também o operador linear

$$f\colon \mathbb{K} \to F \ , \ f(\lambda) = \lambda b.$$

É imediato que $\|f\| = \|b\|$ e que f é um operador contínuo. Dada $\left(x^{(r)}_j\right)^\infty_{j=1} \in \gamma_{s_r}(E_r)$,

segue da estabilidade linear de γ_{s_r} que $\left(\varphi^{(r)}\left(x_j^{(r)}\right)\right)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_{s_r}(\mathbb{K})$, para qualquer $r = 1,\ldots,n$. Agora, como $\gamma_{s_1}(\mathbb{K})\cdots\gamma_{s_n}(\mathbb{K}) \overset{mult,1}{\hookrightarrow} \gamma_s(\mathbb{K};\mathbb{N}^n)$, segue que

$$\left(\varphi^{(1)}\left(x_{j_1}^{(1)}\right)\cdots\varphi^{(n)}\left(x_{j_n}^{(n)}\right)\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \in \gamma_s(\mathbb{K};\mathbb{N}^n)$$

e da estabilidade linear de $\gamma_s(\cdot;\mathbb{N}^n)$, temos

$$\left(\varphi^{(1)}\left(x_{j_1}^{(1)}\right)\cdots\varphi^{(n)}\left(x_{j_n}^{(n)}\right)b\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} = \left(f\left(\varphi^{(1)}\left(x_{j_1}^{(1)}\right)\cdots\varphi^{(n)}\left(x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \in \gamma_s(F;\mathbb{N}^n).$$

Isso prova que $B \in \mathcal{L}^m_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}(E_1\ldots,E_n;F)$. Como $\mathcal{L}^m_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}(E_1\ldots,E_n;F)$ é um espaço vetorial, concluímos que ele contém os operadores n-lineares de tipo finito. □

O próximo resultado prova a propriedade de multi-ideal.

Proposição 3.2.2. *Sejam $E_1,\ldots,E_n,G_1,\ldots,G_n,F$ e H espaços de Banach, $t \in \mathcal{L}(F;H)$, $T \in \mathcal{L}^m_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}(E_1,\ldots,E_n;F)$ e $u_i \in \mathcal{L}(G_i;E_i), i = 1,\ldots,n$. Então,*

$$t \circ T \circ (u_1,\ldots,u_n) \in \mathcal{L}^m_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}(G_1,\ldots,G_n;H)$$

e

$$\|t \circ T \circ (u_1,\ldots,u_n)\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}} \leq \|t\|\|T\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}}\|u_1\|\cdots\|u_n\|.$$

Demonstração. Sejam $\left(x_{j_i}^{(i)}\right)_{j_i=1}^{\infty} \in \gamma_{s_i}(G_i)$, $i = 1,\ldots,n$. Como cada γ_{s_i} é linearmente estável, segue que

$$\left(u_i\left(x_j^{(i)}\right)\right)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_{s_i}(E_i)$$

para $i = 1,\ldots n$. Como $T \in \mathcal{L}^m_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}(E_1\ldots,E_n;F)$, temos

$$\left(T \circ (u_1,\ldots,u_n)\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\right)\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \in \gamma_s(F;\mathbb{N}^n).$$

Segue da estabilidade linear de $\gamma_s(\cdot;\mathbb{N}^n)$ que

$$\left(t \circ T \circ (u_1,\ldots,u_n)\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\right)\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \in \gamma_s(H;\mathbb{N}^n),$$

sempre que $\left(x_{j_i}^{(i)}\right)_{j_i=1}^{\infty} \in \gamma_{s_i}(G_i)$, $i = 1,\ldots,n$. Portanto,

$$t \circ T \circ (u_1,\ldots,u_n) \in \mathcal{L}^m_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}(G_1,\ldots,G_n;H).$$

Novamente, da estabilidade linear de $\gamma_s(\cdot;\mathbb{N}^n)$ e γ_{s_i} $i = 1,\ldots,n$, temos

$$\left\|\left(t \circ T \circ (u_1,\ldots,u_n)\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\right)\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(H;\mathbb{N}^n)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\| \left(t \circ T \circ \left(u_1 \left(x_{j_1}^{(1)} \right), \ldots, u_n \left(x_{j_n}^{(n)} \right) \right) \right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_s(H;\mathbb{N}^n)} \\
&= \left\| \hat{t} \left(\left(T \left(u_1 \left(x_{j_1}^{(1)} \right), \ldots, u_n \left(x_{j_n}^{(n)} \right) \right) \right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \right) \right\|_{\gamma_s(H;\mathbb{N}^n)} \\
&\leq \|\hat{t}\| \left\| \left(T \left(u_1 \left(x_{j_1}^{(1)} \right), \ldots, u_n \left(x_{j_n}^{(n)} \right) \right) \right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_s(F;\mathbb{N}^n)} \\
&= \|t\| \left\| \left(T \left(u_1 \left(x_{j_1}^{(1)} \right), \ldots, u_n \left(x_{j_n}^{(n)} \right) \right) \right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_s(F;\mathbb{N}^n)} \\
&\leq \|t\| \|T\|_{\mathcal{L}_{\gamma_s,s_1,\ldots,s_n}} \prod_{i=1}^{n} \left\| \left(u_i \left(x_{j_i}^{(i)} \right) \right)_{j_i=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_{s_i}(G_i)} \\
&\leq \|t\| \|T\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_s,s_1,\ldots,s_n}} \|u_1\| \cdots \|u_n\| \prod_{i=1}^{n} \left\| \left(x_{j_i}^{(i)} \right)_{j_i=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_{s_i}(E_i)}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
&\left\| \left(t \circ T(u_1, \ldots, u_n) \left(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_n}^{(n)} \right) \right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_s(H;\mathbb{N}^n)} \\
&\leq \|t\| \|T\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_s,s_1,\ldots,s_n}} \|u_1\| \cdots \|u_n\| \prod_{i=1}^{n} \left\| \left(x_{j_i}^{(i)} \right)_{j_i=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_{s_i}(E_i)}
\end{aligned}
$$

que completa a demonstração.

□

Proposição 3.2.3. *Considere a aplicação*

$$
Id_{\mathbb{K}^n} \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K} \ , \ Id_{\mathbb{K}^n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \lambda_1 \cdots \lambda_n,
$$

e suponha que $\gamma_{s_1}(\mathbb{K}) \cdots \gamma_{s_n}(\mathbb{K}) \overset{mult,1}{\hookrightarrow} \gamma_s(\mathbb{K};\mathbb{N}^n)$. *Então* $\|Id_{\mathbb{K}^n}\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_s,s_1,\ldots,s_n}} = 1$.

Demonstração. Dados $\left(\lambda_{j_i}^{(i)}\right)_{j_i=1}^{\infty} \in \gamma_{s_i}(\mathbb{K})$, $i = 1, \ldots, n$, segue de

$$
\gamma_{s_1}(\mathbb{K}) \cdots \gamma_{s_n}(\mathbb{K}) \overset{mult,1}{\hookrightarrow} \gamma_s(\mathbb{K};\mathbb{N}^n)
$$

que $\left(\lambda_{j_1}^{(1)} \cdots \lambda_{j_n}^{(n)}\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \in \gamma_s(\mathbb{K};\mathbb{N}^n)$ e

$$
\begin{aligned}
\left\| \left(Id_{\mathbb{K}^n} \left(\lambda_{j_1}^{(1)} \cdots \lambda_{j_n}^{(n)} \right) \right)_{j_1 \cdots j_n=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_s(\mathbb{K};\mathbb{N}^n)} &= \left\| \left(\lambda_{j_1}^{(1)} \cdots \lambda_{j_n}^{(n)} \right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_s(\mathbb{K};\mathbb{N}^n)} \\
&\leq \prod_{i=1}^{n} \left\| \left(\lambda_j^{(i)} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_{s_i}(\mathbb{K})}.
\end{aligned}
$$

Então, $\|Id_{\mathbb{K}^n}\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_s,s_1,\ldots,s_n}} \leq 1$. A outra desigualdade segue diretamente da Proposição 3.1.13 (a). □

Combinando as Proposições 3.1.13, 3.2.1, 3.2.2 e 3.2.3 obtemos o seguinte resultado:

Teorema 3.2.4. *Sejam $\gamma_{s_1}, \ldots, \gamma_{s_n}$ e $\gamma_s(\cdot;\mathbb{N}^n)$ classes de sequências e de n-sequências finitamente determinadas e linearmente estáveis. Suponha que $\gamma_{s_1}(\mathbb{K}) \cdots \gamma_{s_n}(\mathbb{K}) \overset{mult,1}{\hookrightarrow} \gamma_s(\mathbb{K};\mathbb{N}^n)$. Então $\left(\mathcal{L}^m_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}, \|\cdot\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}}\right)$ é um ideal Banach de alicações n-lineares.*

É importante observar que, a condição $\gamma_{s_1}(\mathbb{K}) \cdots \gamma_{s_n}(\mathbb{K}) \overset{mult,1}{\hookrightarrow} \gamma_s(\mathbb{K};\mathbb{N}^n)$ foi utilizada por duas vezes, uma prova das Proposição 3.2.2 e outra na prova da Proposição 3.2.3. Esta condição é muito importante por estabelecer uma relação entre a norma do espaço de sequências $\gamma_{s_i}(\mathbb{K})$, $i = 1, \ldots, n$ e do espaço de n-sequências $\gamma_s(\mathbb{K};\mathbb{N}^n)$. Note também que, esta condição não representa uma importante restrição, pois muitas classes conhecidas na literatura possuem esta propriedade.

Para comparar a classe de operadores que estamos analisando com a classe dos operadores multilineares absolutamente $\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}$-somante na origem $a = (0, \ldots, 0) \in E_1 \times \cdots \times E_n$, introduzida em [57] e denotada por $\prod_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}(E_1, \ldots, E_n; F)$, precisamos da seguinte definição:

Definição 3.2.5. Dado $n \in \mathbb{N}$, dizemos que uma classe de n-sequências $\gamma_s(\cdot;\mathbb{N}^n)$ é sequencialmente compatível com a classe de sequências $\gamma_s(\cdot) := \gamma_s(\cdot;\mathbb{N}^1)$ se, para toda $(x_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \in \gamma_s(E;\mathbb{N}^n)$, temos $(x_j)_{j=1}^{\infty} := (x_{j,\ldots,j})_{j=1}^{\infty} \in \gamma_s(E)$ e

$$\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(E)} \leq \left\|(x_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(E;\mathbb{N}^n)}.$$

Exemplo 3.2.6. *Todas as classes mencionadas nos Exemplos 3.1.3 satisfazem a Definição 3.2.5.*

Proposição 3.2.7. *Sejam $E_1, \ldots, E_n, F$ espaços de Banach e suponha $\gamma_s(\cdot;\mathbb{N}^n)$ sequencialmente compatível com $\gamma_s(\cdot)$. Então $\mathcal{L}^m_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}(E_1, \ldots, E_n; F) \subset \prod_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e*

$$\pi_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}(T) \leq \|T\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}}$$

para qualquer $T \in \mathcal{L}^m_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}(E_1, \ldots, E_n; F)$.

Demonstração. Dados $T \in \mathcal{L}^m_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_{s_i}(E_i), i = 1, \ldots, n$, segue diretamente da Definição 3.2.5 que $\left(T\left(x_j^{(1)}, \ldots, x_j^{(n)}\right)\right)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_s(F)$, dando-nos $T \in \prod_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}(E_1, \ldots, E_n; F)$, e

$$\begin{aligned}\left\|\left(T\left(x_j^{(1)}, \ldots, x_j^{(n)}\right)\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F)} &\leq \left\|\left(T\left(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_n}^{(n)}\right)\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F;\mathbb{N}^n)} \\ &\leq \|T\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}} \prod_{i=1}^{n} \left\|\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_i}(E_i)},\end{aligned}$$

provando que $\pi_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}(T) \leq \|T\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}}$. $\square$

Finalizamos esta seção apresentando outra consequência da Definição 3.2.5.

Proposição 3.2.8. *Sejam $\gamma_{s_1},\ldots,\gamma_{s_n}$ classes de sequências finitamente determinadas e linearmente estáveis, $\gamma_s(\cdot;\mathbb{N}^n)$ uma classe de n-sequências finitamente determinada e suponha que $\gamma_s(\cdot;\mathbb{N}^n)$ é sequencialmente compatível com $\gamma_s(\cdot)$. Se $\gamma_{s_1}(\mathbb{K})\cdots\gamma_{s_n}(\mathbb{K}) \overset{mult,1}{\hookrightarrow} \gamma_s(\mathbb{K};\mathbb{N}^n)$, então $\gamma_{s_1}(\mathbb{K})\cdots\gamma_{s_n}(\mathbb{K}) \overset{1}{\hookrightarrow} \gamma_s(\mathbb{K})$.*

Demonstração. Dados $\left(\lambda_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_{s_i}(\mathbb{K})$, $i=1,\ldots,n$, pela Definição 3.2.5 temos que $\left(\lambda_j^{(1)}\cdots\lambda_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_s(\mathbb{K})$ e

$$\left\|\left(\lambda_j^{(1)}\cdots\lambda_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(\mathbb{K})} \leq \left\|\left(\lambda_{j_1}^{(1)}\cdots\lambda_{j_n}^{(n)}\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(\mathbb{K};\mathbb{N}^n)} \leq \prod_{i=1}^{\infty}\left\|\left(\lambda_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_i}(\mathbb{K})}.$$

$\square$

3.3 Coerência e compatibilidade

Nesta seção, investigaremos a coerência e a compatibilidade no contexto múltiplo somante, porém, para cumprir este objetivo é necessário introduzir as classes dos polinômios absolutamente múltiplo somantes. Denotaremos a classe dos polinômios homogêneos entre espaços de Banach por $\mathcal{P}$. Dado um polinômio n-homogêneo $P\colon E \to F$, denotamos por $\check{P}$ a única aplicação multilinear simétrica associada a P. Para mais detalhes referentes a estas notações, ver [8, 43].

Denotaremos a classe dos operadores n-lineares múltiplo $\gamma_{s,s_1,\ldots,s_1}$-somantes por $\mathcal{L}^{m,n}_{\gamma_{s,s_1}}$. A razão para isso é evidenciar o grau de multilinearidade das componentes do ideal.

Definição 3.3.1. Dados E e F espaços de Banach, a classe dos polinômios n-homogêneos γ_{s,s_1}-somante é definida por

$$\mathcal{P}^{m,n}_{\gamma_{s,s_1}} := \mathcal{P}_{\mathcal{L}^{m,n}_{\gamma_{s,s_1}}} := \left\{P \in \mathcal{P}; \check{P} \in \mathcal{L}^{m,n}_{\gamma_{s,s_1}}\right\}.$$

Como $\left(\mathcal{L}^{m,n}_{\gamma_{s,s_1}}, \|\cdot\|_{\mathcal{L}^{m,n}_{\gamma_{s,s_1}}}\right)$ é um ideal Banach de aplicações multilineares, segue da Proposição 1.3.5 o seguinte resultado.

Proposição 3.3.2. *$\left(\mathcal{P}^{m,n}_{\gamma_{s,s_1}}, \|P\|_{\mathcal{P}^{m,n}_{\gamma_{s,s_1}}}\right)$, munido com a norma $\|P\|_{\mathcal{P}^{m,n}_{\gamma_{s,s_1}}} := \left\|\check{P}\right\|_{\mathcal{L}^{m,n}_{\gamma_{s,s_1}}}$, é um ideal Banach de polinômios n-homogêneos.*

Com o objetivo de provarmos a coerência, vamos exigir que as classes de n-sequências possuam duas propriedades adicionais, a serem exibidas na próxima definição.

Definição 3.3.3. Uma sequência $(\gamma_s(\cdot;\mathbb{N}^n))_{n=1}^M$, onde $M \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ e cada $\gamma_s(\cdot;\mathbb{N}^n)$ é uma classe de n-sequências, é dita ser:
(a) **múltiplo regular** com a classe de sequências $\gamma_{s_1}(\cdot)$ quando a seguinte condição for verdadeira: para qualquer espaço de Banach F, se $(\lambda_j)_{j=1}^\infty \in \gamma_{s_1}(\mathbb{K})$, $i = 1, \ldots, n$ e $\left(a_{j_1,\ldots,j_{i-1},j_{i+1},\ldots,j_n}\right)_{j_1,\ldots,j_{i-1},j_{i+1},\ldots,j_n=1}^\infty \in \gamma_s(F;\mathbb{N}^{n-1})$, então $\left(\lambda_{j_i} a_{j_1,\ldots,j_{i-1},j_{i+1},\ldots,j_n}\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^\infty \in \gamma_s(F;\mathbb{N}^n)$ e

$$\begin{aligned}&\left\|\left(\lambda_{j_i} a_{j_1,\ldots,j_{i-1},j_{i+1},\ldots,j_n}\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^\infty\right\|_{\gamma_s(F;\mathbb{N}^n)}\\ &\leq \left\|(\lambda_j)_{j=1}^\infty\right\|_{\gamma_{s_1}(\mathbb{K})} \left\|\left(a_{j_1,\ldots,j_{i-1},j_{i+1},\ldots,j_n}\right)_{j_1,\ldots,j_{i-1},j_{i+1},\ldots,j_n=1}^\infty\right\|_{\gamma_s(F;\mathbb{N}^{n-1})}.\end{aligned}$$

(b) **regular para baixo** se, para qualquer espaço de Banach E e todo $(x_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^\infty \in \gamma_s(E;\mathbb{N}^n)$ com $n \geq 2$, fixado qualquer j_i, $i = 1, \ldots, n$, vale que $(x_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_{i-1},j_{i+1},\ldots,j_n=1}^\infty \in \gamma_s(E;\mathbb{N}^{n-1})$ e

$$\left\|(x_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_{i-1},j_{i+1},\ldots,j_n=1}^\infty\right\|_{\gamma_s(E;\mathbb{N}^{n-1})} \leq \left\|(x_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^\infty\right\|_{\gamma_s(E;\mathbb{N}^n)}.$$

Exemplo 3.3.4. Todas as classes apresentadas no Exemplo 3.1.3 são múltiplo regulares com seus níveis $n = 1$ e regulares para baixo.

Além de garantir a coerência, como mostraremos em breve, as definições anteriores evitam as sequências de classes de n-sequências artificiais, como ilustra o exemplo a seguir,

Exemplo 3.3.5. Seja $\gamma_n(\cdot;\mathbb{N}^n)$ definida por, $\gamma_n(\cdot;\mathbb{N}^n) := \ell_p^w(\cdot;\mathbb{N}^n)$ se n é par e $\gamma_n(\cdot;\mathbb{N}^n) := \ell_p(\cdot;\mathbb{N}^n)$ se n é ímpar. Evidentemente, a sequência $(\gamma_n(\cdot;\mathbb{N}^n))_{n=1}^M$ não é nem múltiplo regular com ℓ_p e nem regular para baixo.

Foi mostrado em [52, Lema 2.1.5] o seguinte resultado, que terá um papel fundamental para a prova do próximo teorema.

Lema 3.3.6. *Sejam $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$ e $a \in E$. Então $(P_a)^\vee = \check{P}_a$.*

Agora, apresentaremos o principal resultado desta seção.

Teorema 3.3.7. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, γ_{s_1} uma classe de sequências finitamente determinada e linearmente estável, e $\gamma_s(\cdot,\mathbb{N}^n)$ uma classe de n-sequências finitamente determinada e linearmente estável. Suponha que a sequência de classes de n-sequências $(\gamma_s(\cdot;\mathbb{N}^n))_{n=1}^\infty$ é múltiplo regular com γ_{s_1} e regular para baixo. Então, a sequência de pares*

$$\left(\left(\mathcal{L}_{\gamma_{s,s_1}}^{m,n}, \|\cdot\|_{\mathcal{L}_{\gamma_{s,s_1}}^{m,n}}\right); \left(\mathcal{P}_{\gamma_{s,s_1}}^{m,n}, \|\cdot\|_{\mathcal{P}_{\gamma_{s,s_1}}^{m,n}}\right)\right)_{n=1}^\infty$$

é coerente e compatível com $\mathcal{L}_{\gamma_{s,s_1}}$ no sentido de [43].

Demonstração. Iniciaremos mostrando a condição (CH1). Faremos apenas o caso $i = 1$. O caso geral é análogo. Sejam $T \in \mathcal{L}^{m,n+1}_{\gamma_{s,s_1}}(E_1, \ldots, E_{n+1}; F)$ e $a_1 \in E_1$.

Considere a sequência $\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}$ tal que, $x_1^{(1)} = a_1$ e $x_j^{(1)} = 0$ para $j \neq 1$. É imediato que $\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_{s_1}(E_1)$. Sejam $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_{s_1}(E_i)$, $i = 2, \ldots, n+1$. Assim,

$$\left(T\left(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{\infty} \in \gamma_s\left(F; \mathbb{N}^{n+1}\right).$$

Como $(\gamma_S(\cdot; \mathbb{N}^n))_{n=1}^{\infty}$ é regular para baixo, fixando $j_1 = 1$, temos

$$\left(T_{a_1}\left(x_{j_2}^{(2)}, \ldots, x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)_{j_2,\ldots,j_{n+1}=1}^{\infty} = \left(T\left(a_1, x_{j_2}^{(2)}, \ldots, x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)_{j_2,\ldots,j_{n+1}=1}^{\infty} \in \gamma_s\left(F; \mathbb{N}^n\right)$$

e

$$\begin{aligned}
\left\|\left(T_{a_1}\left(x_{j_2}^{(2)}, \ldots, x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)_{j_2,\ldots,j_{n+1}=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F;\mathbb{N}^n)} &= \left\|\left(T\left(a_1, x_{j_2}^{(2)}, \ldots, x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)_{j_2,\ldots,j_{n+1}=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F;\mathbb{N}^n)} \\
&\leq \left\|\left(T\left(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F;\mathbb{N}^{n+1})} \\
&\leq \|T\|_{\mathcal{L}^{m,n+1}_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_{n+1}}}} \prod_{i=1}^{n+1} \left\|\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_i}(E_i)} \\
&= \|T\|_{\mathcal{L}^{m,n+1}_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_{n+1}}}} \|a_1\| \prod_{i=2}^{n+1} \left\|\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_i}(E_i)}.
\end{aligned}$$

Portanto, $T_{a_1} \in \mathcal{L}^{m,n}_{\gamma_{s,s_1}}(E_2, \ldots, E_{n+1}; F)$ e

$$\|T_{a_1}\|_{\mathcal{L}^{m,n}_{\gamma_{s,s_1}}} \leq \|T\|_{\mathcal{L}^{m,n+1}_{\gamma_{s,s_1}}} \|a_1\|.$$

Checaremos agora a condição (CH3). Sejam $T \in \mathcal{L}^{m,n}_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $\varphi \in E'_{n+1}$. Sejam $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_{s_i}(E_i)$, $i = 1, \ldots, n+1$. Como $(\gamma_s(\cdot; \mathbb{N}^n))_{n=1}^{\infty}$ é múltiplo regular com $\gamma_{s_1}(\cdot)$, temos

$$\left(\varphi T\left(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{\infty} = \left(\varphi\left(x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right) T\left(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_n}^{(n)}\right)\right)_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{\infty} \in \gamma_s\left(F; \mathbb{N}^{n+1}\right)$$

e

$$\begin{aligned}
&\left\|\left(\varphi T\left(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F;\mathbb{N}^{n+1})} \\
&= \left\|\left(\varphi\left(x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right) T\left(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_n}^{(n)}\right)\right)_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F;\mathbb{N}^{n+1})} \\
&\leq \left\|\left(\varphi\left(x_j^{(n+1)}\right)\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_{n+1}}(\mathbb{K})} \left\|\left(T\left(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_n}^{(n)}\right)\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F;\mathbb{N}^n)}
\end{aligned}$$

$$\leq \|\varphi\| \left\| \left(x_j^{(n+1)}\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_{s_{n+1}}(E_{n+1})} \left\| \left(T\left(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_n}^{(n)}\right)\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_s(F;\mathbb{N}^n)}$$

$$\leq \|\varphi\| \|T\|_{\mathcal{L}_{\gamma_s,s_1}^{m,n}} \prod_{i=1}^{n+1} \left\| \left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_{s_i}(E_i)}.$$

Portanto, $\varphi T \in \mathcal{L}_{\gamma_s,s_1}^{m,n+1}(E_1, \ldots, E_{n+1}; F)$ e $\|\varphi T\|_{\mathcal{L}_{\gamma_s,s_1}^{m,n+1}} \leq \|\varphi\| \|T\|_{\mathcal{L}_{\gamma_s,s_1}^{m,n}}$.

Provaremos agora a condição (CH2). Sejam $P \in \mathcal{P}_{\gamma_s,s_1}^{m,n+1}(^{n+1}E; F)$ e $a \in E$. Para ver que $P_a \in \mathcal{P}_{\gamma_s,s_1}^{m,n}(^nE; F)$ é suficiente mostrar que $(P_a)^\vee \in \mathcal{L}_{\gamma_s,s_1}^{m,n}(^nE; F)$. Como $P \in \mathcal{P}_{\gamma_s,s_1}^{n+1}(^{n+1}E; F)$, então

$$\check{P} \in \mathcal{L}_{\gamma_s,s_1}^{m,n+1}(E^{n+1}; F),$$

assim, de (CH1),

$$\check{P}_a \in \mathcal{L}_{\gamma_s,s_1}^{m,n}(E^n; F).$$

Pelo Lema 3.3.6, temos

$$(P_a)^\vee = \check{P}_a \in \mathcal{L}_{\gamma_s,s_1}^{m,n}(E^n; F).$$

Dessa forma,

$$\|P_a\|_{\mathcal{P}_{\gamma_s,s_1}^{m,n}} = \|(P_a)^\vee\|_{\mathcal{L}_{\gamma_s,s_1}^{m,n}} = \|\check{P}_a\|_{\mathcal{L}_{\gamma_s,s_1}^{m,n}} \leq \|\check{P}\|_{\mathcal{L}_{\gamma_s,s_1}^{m,n+1}} \|a\|.$$

Agora, provaremos a condição (CH4). Sejam $P \in \mathcal{P}_{\gamma_s,s_1}^{m,n}(^nE; F)$ e $\varphi \in E'$. Como feito para provar (CH2), para ver que $\varphi P \in \mathcal{P}_{\gamma_s,s_1}^{m,n+1}(^{n+1}E; F)$ é suficiente mostrar que $(\varphi P)^\vee \in \mathcal{L}_{\gamma_s,s_1}^{m,n+1}(E^{n+1}; F)$. Note que

$$(\varphi P)^\vee \left(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right) = \frac{\varphi\left(x_{j_1}^{(1)}\right) \check{P}\left(x_{j_2}^{(2)}, \ldots, x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right) + \cdots + \varphi\left(x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right) \check{P}\left(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_n}^{(n)}\right)}{(n+1)!}.$$

Como $P \in \mathcal{P}_{\gamma_s,s_1}^{m,n}(^nE; F)$, então $\check{P} \in \mathcal{L}_{\gamma_s,s_1}^{m,n}(E^n; F)$. Assim, para quaisquer $\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_{s_1}(E)$, $k = 1, \ldots, n+1$,

$$\left(\check{P}\left(x_{j_2}^{(2)}, \ldots, x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)_{j_2,\ldots,j_{n+1}=1}^{\infty}, \ldots, \left(\check{P}\left(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_n}^{(n)}\right)\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \in \gamma_s\left(F; \mathbb{N}^n\right).$$

Uma vez que $(\gamma_s(\cdot; \mathbb{N}^n))_{n=1}^{\infty}$ é múltiplo regular com $\gamma_{s_1}(\cdot)$, temos

$$\left(\varphi\left(x_{j_k}^{(k)}\right) \check{P}\left(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_{k-1}}^{(k-1)}, x_{j_{k+1}}^{(k+1)}, \ldots, x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{\infty} \in \gamma_s\left(F; \mathbb{N}^{n+1}\right).$$

Portanto,

$$\left((\varphi P)^\vee \left(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{\infty}$$

$$= \left(\frac{\varphi\left(x_{j_1}^{(1)}\right) \check{P}\left(x_{j_2}^{(2)}, \ldots, x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right) + \cdots + \varphi\left(x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right) \check{P}\left(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_n}^{(n)}\right)}{n+1} \right)_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{\infty}$$

$$\in \gamma_s\left(F; \mathbb{N}^{n+1}\right).$$

Assim, $(\varphi P)^{\vee} \in \mathcal{L}_{\gamma_{s,s_1}}^{m,n+1}(E^{n+1}; F)$. Note também que, por (CH3)

$$\|\varphi P\|_{\mathcal{P}_{\gamma_{s,s_1}}^{m,n+1}} = \|\,(\varphi P)^{\vee}\,\|_{\mathcal{L}_{\gamma_{s,s_1}}^{m,n+1}} \leq \|\varphi \check{P}\|_{\mathcal{L}_{\gamma_{s,s_1}}^{m,n+1}} \leq \|\varphi\|\|\check{P}\|_{\mathcal{L}_{\gamma_{s,s_1}}^{m,n+1}} = \|\varphi\|\|P\|_{\mathcal{P}_{\gamma_{s,s_1}}^{m,n+1}}.$$

A condição (CH5) segue da Definição 3.3.1.

□

3.4 Resultados de inclusão

Nesta seção, serão apresentados três resultados de inclusão.

Proposição 3.4.1. *Sejam $\gamma_s, \gamma_{s_1}, \ldots, \gamma_{s_n}$ classes de sequências e $\gamma_s(\cdot; \mathbb{N}^n)$ classe de n-sequências finitamente determinadas e linearmente estáveis. Supondo que $(\gamma_s(\cdot; \mathbb{N}^n))_{n=1}^{\infty}$ seja uma sequência de classes de n-sequências regular para baixo e as classes de n-sequências que compõem esta sequência sejam sequencialmente compatíveis com γ_s, então*

$$\mathcal{L}_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}^{m}(E_1, \ldots, E_n; F) \overset{1}{\hookrightarrow} \prod\nolimits_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}^{(ev)}(E_1, \ldots, E_n; F).$$

Demonstração. Provaremos apenas o caso $n = 2$. O caso geral é análogo. Para quaisquer $(a_1, a_2) \in E_1 \times E_2$, $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_{s_i}(E_i)$, $i = 1, 2$ e $T \in \mathcal{L}_{\gamma_{s,s_1,s_2}}^{m,2}(E_1, E_2; F)$, segue da sequência $(\gamma_s(\cdot; \mathbb{N}^n))_{n=1}^{\infty}$ ser regular para baixo e da classe de 2-sequências $\gamma_s(\cdot; \mathbb{N}^2)$ ser sequencialmente compatível com γ_s que

$$\begin{aligned}
&\left(T\left(a_1 + x_j^{(1)}, a_2 + x_j^{(2)}\right) - T(a_1, a_2)\right)_{j=1}^{\infty} \\
&= \left(T\left(a_1, x_j^{(2)}\right)\right)_{j=1}^{\infty} + \left(T\left(x_j^{(1)}, a_2\right)\right)_{j=1}^{\infty} + \left(T\left(x_j^{(1)}, x_j^{(2)}\right)\right)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_s(F).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{L}_{\gamma_{s,s_1,s_2}}^{m}(E_1, E_2; F) \subset \prod\nolimits_{\gamma_{s,s_1,s_2}}^{(ev)}(E_1, E_2; F).$$

Temos também que

$$\begin{aligned}
&\left\|\left(T\left(a_1 + x_j^{(1)}, a_2 + x_j^{(2)}\right) - T(a_1, a_2)\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F)} \\
&\leq \left\|\left(T\left(a_1, x_j^{(2)}\right)\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F)} + \left\|\left(T\left(x_j^{(1)}, a_2\right)\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F)} + \left\|\left(T\left(x_j^{(1)}, x_j^{(2)}\right)\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F)}
\end{aligned}$$

$$= \left\| \left(T_{a_1}\left(x_j^{(2)}\right)\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_s(F)} + \left\| \left(T_{a_2}\left(x_j^{(1)}\right)\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_s(F)} + \left\| \left(T\left(x_j^{(1)}, x_j^{(2)}\right)\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_s(F)}$$
$$\leq \|T_{a_1}\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_s,s_2}} \left\| \left(x_j^{(2)}\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_{s_2}(E_2)} + \|T_{a_2}\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_s,s_1}} \left\| \left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_{s_1}(E_1)} + \left\| \left(T\left(x_j^{(1)}, x_j^{(2)}\right)\right)_{j_1,j_2=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_s(F)}.$$

Novamente, pelo Teorema 3.3.7 e da classe de 2-sequências $\gamma_s(\cdot;\mathbb{N}^2)$ ser sequenciamente compatível com γ_s, temos que

$$\left\| \left(T\left(a_1 + x_j^{(1)}, a_2 + x_j^{(2)}\right) - T(a_1,a_2)\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_s(F)} \leq \|T\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_s,s_1,s_2}} \|a_1\| \left\| \left(x_j^{(2)}\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_{s_2}(E_2)} +$$
$$+ \|T\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_s,s_1,s_2}} \|a_2\| \left\| \left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_{s_1}(E_1)} + \|T\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_s,s_1,s_2}} \left\| \left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_{s_1}(E_1)} \left\| \left(x_j^{(2)}\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_{s_2}(E_2)}$$
$$\leq \|T\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_s,s_1,s_2}} \left(\|a_1\| + \left\| \left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_{s_1}(E_1)} \right) \left(\|a_2\| + \left\| \left(x_j^{(2)}\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_{s_2}(E_2)} \right).$$

Portanto, $\pi^{ev}_{\gamma_s,s_1,s_2}(T) \leq \|T\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_s,s_1,s_2}}$. □

Proposição 3.4.2. *Sejam $\gamma_{s_i}, \gamma_{\overline{s}_i}$, $i = 1,\ldots,n$ e γ_s classes de sequências finitamente determinadas. Supondo que $\gamma_{\overline{s}_i}(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \gamma_{s_i}(E)$, então*

$$\mathcal{L}^m_{\gamma_s,s_1,\ldots,s_n}(E_1,\ldots,E_n;F) \overset{1}{\hookrightarrow} \mathcal{L}^m_{\gamma_s,\overline{s}_1,\ldots,\overline{s}_n}(E_1,\ldots,E_n;F).$$

Demonstração. Sejam $T \in \mathcal{L}^m_{\gamma_s,s_1,\ldots,s_n}(E_1,\ldots,E_n)$ e $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_{\overline{s}_i}(E_i)$. Então $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_{s_i}(E)$, $i = 1,\ldots,n$. Assim

$$\left(T\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\right)\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \in \gamma_s(F;\mathbb{N}^n),$$

mostrando que $T \in \mathcal{L}^m_{\gamma_s,\overline{s}_1,\ldots,\overline{s}_n}(E_1,\ldots,E_n)$. Temos ainda que,

$$\left\| \left(T\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\right)\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_s(F;\mathbb{N}^n)} \leq \|T\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_s,s_1,\ldots,s_n}} \prod_{i=1}^{n} \left\| \left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_{s_i}(E_i)}$$
$$\leq \|T\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_s,s_1,\ldots,s_n}} \prod_{i=1}^{n} \left\| \left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_{\overline{s}_i}(E_i)},$$

de onde segue que $\|T\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_s,\overline{s}_1,\ldots,\overline{s}_n}} \leq \|T\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_s,s_1,\ldots,s_n}}$.

□

Um outro resultado de inclusão interessante é o seguinte.

Proposição 3.4.3. *Sejam γ_{s_i}, $i = 1,\ldots,n$, γ_s e $\gamma_{\overline{s}}$ classes de sequências finitamente determinadas. Se, para qualquer espaço de Banach F, $\gamma_s(F;\mathbb{N}^n) \overset{1}{\hookrightarrow} \gamma_{\overline{s}}(F;\mathbb{N}^n)$, então*

$$\mathcal{L}^m_{\gamma_s,s_1,\ldots,s_n}(E_1,\ldots,E_n;F) \overset{1}{\hookrightarrow} \mathcal{L}^m_{\gamma_{\overline{s}},s_1,\ldots,s_n}(E_1,\ldots,E_n;F),$$

para quaisquer espaços de Banach $E_1, \ldots E_n, F$.

Demonstração. Dado $T \in \mathcal{L}^m_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}(E_1, \ldots, E_n; F)$, para quaisquer sequências $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}$ $\in \gamma_{s_i}(E_i)$, $i = 1, \ldots, n$, temos

$$\left(T\left(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_n}^{(n)}\right)\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \in \gamma_s(F; \mathbb{N}^n).$$

Como $\gamma_s(F; \mathbb{N}^n) \overset{1}{\hookrightarrow} \gamma_{\overline{s}}(F; \mathbb{N}^n)$,

$$\left(T\left(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_n}^{(n)}\right)\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \in \gamma_{\overline{s}}(F; \mathbb{N}^n)$$

e

$$\begin{aligned}\left\|\left(T\left(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_n}^{(n)}\right)\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{\overline{s}}(F;\mathbb{N}^n)} &\leq \left\|\left(T\left(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_n}^{(n)}\right)\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F;\mathbb{N}^n)} \\ &\leq \|T\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}} \prod_{k=1}^{n} \left\|\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_k}(E_k)}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\mathcal{L}^m_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}(E_1, \ldots, E_n; F) \subset \mathcal{L}^m_{\gamma_{\overline{s},s_1,\ldots,s_n}}(E_1, \ldots, E_n; F) \text{ e } \|T\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_{\overline{s},s_1,\ldots,s_n}}} \leq \|T\|_{\mathcal{L}^m_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_n}}}.$$

□

3.5 Aplicações

Nesta seção, apresentaremos algumas classes de operadores multilineares que podem ser recuperadas como casos particulares de nossa abordagem abstrata.

Operadores múltiplo $(p, q_1, \ldots, q_n)$-somantes

A classe dos operadores múltiplo $(p, q_1, \ldots, q_n)$-somantes, denotada por

$$\mathcal{L}_{ms(p,q_1,\ldots,q_n)}(E_1, \ldots, E_n; F),$$

tem sido amplamente estudada por diversos autores, dos quais destacamos [11, 16, 30]. Essa classe é recuperada pela nossa abordagem abstrata quando escolhemos

$$\gamma_{s_k}(\cdot) = \ell^w_{q_k}(\cdot) \text{ e } \gamma_s(\cdot; \mathbb{N}^n) = \ell_p(\cdot; \mathbb{N}^n),$$

para $1 \leq q \leq p \leq \infty$ e $k = 1, \ldots, n$.

Operadores múltiplo Cohen absolutamente p-somantes

A classe dos operadores Cohen absolutamente p-somantes, denotada por

$$\mathcal{L}_{mCoh,p}(E_1, \ldots, E_m; F),$$

foi estudada em [23, 24]. Em nossa abordagem abstrata, esta classe é recuperada escolhendo

$$\gamma_{s_k}(\cdot) = \ell_p(\cdot) \text{ e } \gamma_s(\cdot; \mathbb{N}^n) = \ell_p \langle \cdot; \mathbb{N}^n \rangle,$$

onde $1 < p < \infty$ e $k = 1, \ldots, n$.

Operadores múltiplo misto (s, q, p)-somantes

O conceito de sequências misto $m(s, q)$-somáveis e de operadores múltiplo misto (s, q, p)-somantes foi estudado nos trabalhos [7, 35, 37]. Relembraremos apenas a definição principal. Supondo $1 \leq p_1, \ldots, p_n \leq q \leq s < \infty$, um operador multilinear contínuo $T\colon E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ é múltiplo $(s, q, p_1, \ldots, p_n)$-misto somante se

$$\left(T\left(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_n}^{(n)}\right)\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \in \ell_{m(s,q)}(F; \mathbb{N}^n),$$

sempre que $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{p_i}^w(E_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Note que, considerando

$$\gamma_s(\cdot; \mathbb{N}^n) = \ell_{m(s,q)}(\cdot; \mathbb{N}^n) \text{ e } \gamma_{s_i}(\cdot) = \ell_{p_i}^w(\cdot),$$

para $i = 1, \ldots, n$, esta classe é um caso particular de nossa construção geral.

As próximas três subseções introduzirão novas classes de operadores multilineares que são casos particulares de nossa estrutura abstrata, deixando claro que nossos resultados também podem ser aplicados a classes que ainda não haviam sido consideradas na literatura.

Operadores múltiplo absolutamente (s, q, p)-misto somantes

Sejam $1 \leq q \leq s \leq \infty$, $E_1, \ldots, E_n, F$ espaços de Banach e $p \leq q$. Uma aplicação multilinear contínua $T\colon E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ é dita múltiplo absolutamente (s, q, p)-mixing somante se

$$\left(T\left(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_n}^{(n)}\right)\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \in \ell_p(F; \mathbb{N}^n)$$

sempre que $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{m(s,q)}(E_i), i = 1, \ldots, n$.

Escolhendo

$$\gamma_s(\cdot; \mathbb{N}^n) = \ell_p(\cdot; \mathbb{N}^n) \text{ e } \gamma_{s_i} = \ell_{m(s,q)},$$

concluímos que a classe dos operadores múltiplo (s,q,p)-misto somantes é um caso particular de nossa construção geral.

Operadores múltiplo absolutamente mid p-somantes

Sejam $1 \leq p < \infty$, $n \in \mathbb{N}$ e $E_1, \ldots, E_n, F$ espaços de Banach. Um operador multilinear contínuo $T\colon E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ é dito múltiplo absolutamente mid p-somante se

$$\left(T\left(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_n}^{(n)}\right)\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \in \ell_p\left(F; \mathbb{N}^n\right)$$

sempre que $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^{mid}(E_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

Como as classes de sequências ℓ_p e ℓ_p^{mid} são finitamente determinadas e linearmente estáveis (ver [12, 13]), a classe dos operadores múltiplo absolutamente mid p-somantes é mais um caso particular da nossa abordagem abstrata.

Operadores múltiplo mid fracamente p-somantes

Sejam $1 < p < \infty$, $n \in \mathbb{N}$ e $E_1, \ldots, E_n, F$ espaços de Banach. Um operador multilinear contínuo $T\colon E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ é dito múltiplo fracamente mid p-somante se

$$\left(T\left(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_n}^{(n)}\right)\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \in \ell_p^{mid}\left(F; \mathbb{N}^n\right)$$

sempre que $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^{w}(E_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

Pela mesma razão da classe anterior, a classe de todos os operadores múltiplo mid fracamente p-somantes é um caso particular da nossa abordagem abstrata.

Capítulo 4

Ideais fortemente coerentes e fortemente compatíveis

Neste capítulo, apresentaremos um novo conceito de coerência e compatibilidade, mais restritivo que o introduzido por Pellegrino e Ribeiro em [43], ao qual chamamos coerência forte e compatibilidade forte. A motivação para a construção deste conceito se baseia na ideia de hiper-ideais introduzida por Torres em [19] em que as formas multilineares e polinomiais ocupam o lugar de destaque, antes ocupado pelos funcionais lineares. No decorrer deste capítulo, exploraremos suas propriedades e testaremos seus limites através alguns métodos de geradores de ideais.

Observação 4.0.1. *Os resultados contidos neste capítulo foram aceitos para publicação na revista Linear and Multilinear Algebra [55] e obtidos em parceria com E. Torres.*

4.1 Par de ideais fortemente coerentes e fortemente compatíveis

Começaremos definindo os conceitos de par de ideais fortemente coerentes e par de ideais fortemente compatíveis.

Definição 4.1.1 (Par de ideais fortemente coerentes)**.** Sejam $\mathcal{M}$ um ideal normado de operadores multilineares, $\mathcal{U}$ um ideal normado de polinômios homogêneos e $N \in (\mathbb{N} - \{1\}) \cup \{\infty\}$. A sequência $(\mathcal{U}_k, \mathcal{M}_k)_{k=1}^{N}$, com $\mathcal{U}_1 = \mathcal{M}_1 = \mathcal{I}$, é *fortemente coerente*, se existem constantes β_1, β_2 e β_3 tais que, para quaisquer espaços de Banach $E, E_1, \ldots, E_{k+1}, F$, as seguintes condições são verdadeiras para qualquer $k = 1, ..., N-1$:

(CH1) Se $T \in \mathcal{M}_{k+1}(E_1 \ldots, E_{k+1}; F)$ e $a_j \in E_j$ para $j = 1, ..., k+1$, então,

$$T_{a_j} \in \mathcal{M}_k(E_1, \ldots, E_{j-1}, E_{j+1}, \ldots, E_{k+1}; F)$$

e

$$\left\|T_{a_j}\right\|_{\mathcal{M}_k} \leq \beta_1 \left\|T\right\|_{\mathcal{M}_{k+1}} \left\|a_j\right\|.$$

(CH2) Se $P \in \mathcal{U}_{k+1}\left({}^{k+1}E; F\right)$, $a \in E$, então, P_a pertence a $\mathcal{U}_k\left({}^{k}E; F\right)$ e

$$\left\|P_a\right\|_{\mathcal{U}_k} \leq \beta_2 \max\left\{\left\|\check{P}\right\|_{\mathcal{M}_{k+1}}, \left\|P\right\|_{\mathcal{U}_{k+1}}\right\}\left\|a\right\|.$$

(CH3) Se $T \in \mathcal{M}_k(E_1, \ldots, E_k; F), Q \in \mathcal{L}\left(E_{k+1}, \ldots, E_{k+n}\right)$, então,

$$QT \in \mathcal{M}_{k+n}(E_1, \ldots, E_{k+n}; F)$$

e

$$\left\|QT\right\|_{\mathcal{M}_{k+n}} \leq \beta_3 \|Q\| \left\|T\right\|_{\mathcal{M}_k}.$$

(CH4) Se $P \in \mathcal{U}_k\left({}^{k}E; F\right)$ e $Q \in \mathcal{P}\left({}^{n}E\right)$, então,

$$QP \in \mathcal{U}_{k+n}\left({}^{k+n}E; F\right).$$

(CH5) Para qualquer $k = 1, \ldots, N$, P pertence a $\mathcal{U}_k\left({}^{k}E; F\right)$ se, e somente se, $\check{P}$ pertence a $\mathcal{M}_k({}^{k}E; F)$.

Definição 4.1.2 (Par de ideais fortemente compatíveis)**.** Sejam $\mathcal{M}$ um ideal normado de operadores multilineares, $\mathcal{U}$ um ideal normado de polinômios homogêneos e $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. A sequência $(\mathcal{U}_k, \mathcal{M}_k)_{k=1}^{N}$, com $\mathcal{U}_1 = \mathcal{M}_1 = \mathcal{I}$, é *fortemente compatível* com $\mathcal{I}$, se existem constantes α_1, α_2 e α_3 tais que, para todos espaços de Banach E e F, as seguintes condições são verdadeiras:

(CP1) Se $k \in \{1, \ldots, n\}, T \in \mathcal{M}_n(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $a_j \in E_j$, para todo $j \in \{1, ..., n\} \backslash k$, então

$$T_{a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_n} \in \mathcal{I}(E_k; F)$$

e

$$\|T_{a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_n}\|_{\mathcal{I}} \leq \alpha_1 \left\|T\right\|_{\mathcal{M}_n} \|a_1\| \cdots \|a_{k-1}\| \; \|a_{k+1}\| \cdots \|a_n\|.$$

(CP2) Se $P \in \mathcal{U}_n({}^{n}E; F)$ e $a \in F$, então $P_{a^{n-1}} \in \mathcal{I}(E; F)$ e

$$\|P_{a^{n-1}}\|_{\mathcal{I}} \leq \alpha_2 \max\left\{\left\|\check{P}\right\|_{\mathcal{M}_n}, \left\|P\right\|_{\mathcal{U}_n}\right\}\|a\|^{n-1}.$$

(CP3) Se $u \in \mathcal{I}(E_n; F)$ e $Q \in \mathcal{L}\left(E_1, \ldots, E_{n-1}\right)$, então

$$Qu \in \mathcal{M}_n(E_1, ..., E_n; F) \;\text{ e }\; \left|\left|Qu\right|\right|_{\mathcal{M}_n} \leq \alpha_3 \|Q\| \left|\left|u\right|\right|_{\mathcal{I}}.$$

(CP4) Se $u \in \mathcal{U}(E;F)$ e $P \in \mathcal{P}(^{n-1}E)$, então

$$Pu \in \mathcal{U}_n(^nE;F).$$

(CP5) P pertence a $\mathcal{U}_n(^nE;F)$ se, e somente se, $\check{P}$ pertence a $\mathcal{M}_n(^nE;F)$.

Observação 4.1.3.

(1) As definições acima são mais restritivas que [43, Definition 3.1] em relação às condições (CH3) e (CP3).

(2) Como feito em [43], não usamos a condição de controle da norma em (CH4) e (CP4) pois, sob essas condições, alguns pares canônicos de ideais não seriam fortemente coerentes nem fortemente compatíveis.

(3) Em relação à notação do grau de multilinearidade, ou homogeneidade, vamos nos reservar à opção de sobrescrever ou subscrever esse índice, quando acharmos apropriado para a notação global.

De maneira análoga ao que foi feito em [52, Proposição 2.1.6], a coerência forte implica na compatibilidade forte quando $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$, como afirma o próximo resultado.

Proposição 4.1.4. *Seja $(\mathcal{U}_n, \mathcal{M}_n)_{n=1}^N$ uma sequência de ideais de polinômios homogêneos e multi-ideais fortemente coerentes com constantes $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$. Então essa sequência é fortemente compatível com o ideal $\mathcal{U}_1 = \mathcal{M}_1 = \mathcal{I}$.*

O próximo resultado será muito útil para analisar a coerência e compatibilidade das classes que serão apresentadas nas próximas seções deste capítulo.

Proposição 4.1.5. *Seja $(\mathcal{M}_n, \|\cdot\|_{\mathcal{M}_n})_{n=1}^N$ uma sequência de multi-ideais normados e simétricos satisfazendo as condições (CH1) e (CH3) da Definição 4.1.1. Então, a sequência de ideais normados de polinômios homogêneos $\left(\mathcal{P}_{\mathcal{M}_n}, \|\cdot\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}_n}}\right)_{n=1}^N$ satisfaz as condições (CH2) e (CH4).*

Demonstração. Iniciaremos com a condição (CH2). Sejam E, F espaços de Banach, $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}_{n+1}}(^{n+1}E;F)$ e $a \in E$. Por (CH1), temos que

$$(P_a)^\vee = \check{P}_a \in \mathcal{M}_n.$$

Da definição de $\mathcal{P}_{\mathcal{M}_n}$ segue que

$$P_a \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}_n}.$$

Agora, novamente de (CH1),

$$\|P_a\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}_n}} = \|(P_a)^\vee\|_{\mathcal{M}_n} = \|\check{P}_a\|_{\mathcal{M}_n} \leq \beta_1 \|\check{P}\|_{\mathcal{M}_{n+1}} \|a\|.$$

Assim, precisamos apenas escolher $\beta_2 = \beta_1$.

Passemos à verificação da condição (CH4). Sejam $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}_n}(^nE;F)$ e $Q \in \mathcal{P}(^mE)$. Note que,

$$\begin{aligned}
&(QP)^\vee(x_1,\ldots,x_{n+m}) = \\
&= \frac{\check{Q}(x_{n+1},\ldots,x_{n+m})\check{P}(x_1,\ldots,x_n) + \cdots + \check{Q}(x_1,\ldots,x_m)\check{P}(x_{m+1},\ldots,x_{n+m})}{\begin{pmatrix} n+m \\ m \end{pmatrix}} \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{\sigma\in S_{n+m}} \check{Q}\check{P}(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n+m)})}{n!m!\frac{(n+m)!}{n!m!}} \\
&= \left(\check{Q}\check{P}\right)_s(x_1,\ldots,x_{n+m}).
\end{aligned}$$

Logo, $(QP)^\vee = \left(\check{Q}\check{P}\right)^s$. Como $(\mathcal{M}_n)_{n=1}^N$ satisfaz (CH3) e $\check{P} \in \mathcal{M}_n$ (pela definição de $\mathcal{P}_{\mathcal{M}_n}$) segue que $\check{P}\check{Q} \in \mathcal{M}_{n+m}(^{n+m}E;F)$. Então, da simetria de $(\mathcal{M}_n)_{n=1}^N$ temos

$$(QP)^\vee = (\check{P}\check{Q})^s \in \mathcal{M}_{n+m}(^{n+m}E;F).$$

□

Observação 4.1.6.

(1) Se $(\mathcal{M}_n, \|\cdot\|_{\mathcal{M}_n})_{n=1}^N$ é uma N-upla de ideais normados de operadores multilineares simétricos satisfazendo às condições (CH1) e (CH3) com $\beta_1 = \beta_3 = 1$, então, pelas Proposições 4.1.4 e 4.1.5 temos que $\left(\left(\mathcal{P}_{\mathcal{M}_n}, \|\cdot\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}_n}}\right), (\mathcal{M}_n, \|\cdot\|_{\mathcal{M}_n})\right)_{n=1}^N$ é fortemente coerente e fortemente compatível com $\mathcal{M}_1 = \mathcal{P}_{\mathcal{M}_1} = \mathcal{I}$.

(2) Vale um resultado análogo à Proposição 4.1.5 para a coerência e compatibilidade introduzida em [43], apenas adaptando a verificação de (CH4) para funcionais lineares no lugar das formas multilineares.

Agora estamos no momento apropriado para falar sobre o conceito de hiper-ideal de polinômios homogêneos. A definição de hiper-ideais de aplicações multilineares e polinômios homogêneos foram originalmente apresentadas em [60]. Abordaremos estes conceitos a seguir.

Definição 4.1.7. *[19, Definição 2.1]* Um hiper-ideal de aplicações multilineares é uma subclasse $\mathcal{H}$ da classe de todas aplicações multilineares entre espaços de Banach tal que para todos $n \in \mathbb{N}$ e espaços de Banach $E_1,\ldots,E_n$ e F, as componentes

$$\mathcal{H}(E_1,\ldots,E_n;F) := \mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F) \cap \mathcal{H}$$

satisfazem:

(a) $\mathcal{H}(E_1,\ldots,E_n;F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F)$ contendo todas as aplicações n-lineares de tipo finito.

(b) Sejam $n\in\mathbb{N}$ e $1\leq m_1<m_2<\cdots<m_n$. Dados $E_1,\ldots,E_n,G_1,\ldots,G_{m_n},F$ e H espaços de Banach, se $B_1\in\mathcal{L}(G_1,\ldots,G_{m_1};E_1),\ldots,B_n\in\mathcal{L}(G_{m_{n-1}+1},\ldots,G_{m_n};E_n)$, $t\in\mathcal{L}(F;H)$ e $A\in\mathcal{H}(E_1,\ldots,E_n;F)$, então,

$$t\circ A\circ(B_1,\ldots,B_n)\in\mathcal{H}(G_1,\ldots,G_{m_n};H).$$

Se existe $p\in(0,1]$ e uma aplicação $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}\colon\mathcal{H}\to[0,\infty)$ tais que:

(i) $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ restrito a qualquer componente $\mathcal{H}(E_1,\ldots,E_n;F)$ é uma p-norma.

(ii) $\|Id_{\mathbb{K}^n}\colon\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}, Id_{\mathbb{K}^n}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)=\lambda_1\cdots\lambda_n\|_{\mathcal{H}}=1$ para todo n.

(iii) Sejam $n\in\mathbb{N}$ e $1\leq m_1<m_2<\cdots<m_n$. Dados $E_1,\ldots,E_n,G_1,\ldots,G_{m_n},F$ e H espaços de Banach, se $B_1\in\mathcal{L}(G_1,\ldots,G_{m_1};E_1),\ldots,B_n\in\mathcal{L}(G_{m_{n-1}+1},\ldots,G_{m_n};E_n)$, $t\in\mathcal{L}(F;H)$ e $A\in\mathcal{H}(E_1,\ldots,E_n;F)$, então,

$$\|t\circ A\circ(B_1,\ldots,B_n)\|_{\mathcal{H}}\leq\|t\|\|A\|_{\mathcal{H}}\|b_1\|\cdots\|B_n\|,$$

então $(\mathcal{H},\|\cdots\|_{\mathcal{H}})$ é chamado um hiper-ideal p-normado. Se as componentes $\mathcal{H}(E_1,\ldots,E_n;F)$ são completas com respeito à topologia gerada por $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, então $(\mathcal{H},\|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ é chamado hiper-ideal p-Banach de aplicações multilineares. Quando $p=1$ dizemos que $(\mathcal{H},\|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ é um hiper-ideal normado (Banach) de aplicações multilineares.

Definição 4.1.8. *[21, Definição* 2.1*]* Sejam $0<p\leq 1$, $(\mathcal{Q},\|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ a classe de todos os polinômios homogêneos munida com a função $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}}\colon\mathcal{Q}\to[0,\infty)$ e $(C_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de números reais com $C_n\geq 1$ para qualquer $n\in\mathbb{N}$ e $C_1=1$. Para todo $n\in\mathbb{N}$ e espaços de Banach E e F, assuma que:
(i) A componente

$$\mathcal{Q}(^nE;F):=\mathcal{P}(^nE;F)\cap\mathcal{Q}$$

é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}(^nE;F)$, contendo os polinômios n-homogêneos de tipo finito,
(ii) A restrição de $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}}$ a $\mathcal{Q}(^nE;F)$ é uma p-norma,
(iii) $\|\widehat{I}_n\colon\mathbb{K}\longrightarrow\mathbb{K}\ ,\ \widehat{I}_n(\lambda)=\lambda^n\|_{\mathcal{Q}}=1$ para todo $n\in\mathbb{N}$.
(a) Dizemos que $(\mathcal{Q},\|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ é um $(C_n)_{n=1}^{\infty}$*-hiper-ideal p-normado de polinômios homogêneos* se satisfaz:
Propriedade de Hiper-ideal: Para $n,m\in\mathbb{N}$, e espaços de Banach E, F, G e H, se $P\in\mathcal{Q}(^nE;F)$, $Q\in\mathcal{P}(^mG;E)$ e $t\in\mathcal{L}(F;H)$, então $t\circ P\circ Q\in\mathcal{Q}(^{mn}G;H)$ e

$$\|t\circ P\circ Q\|_{\mathcal{Q}}\leq C_m^n\cdot\|t\|\cdot\|P\|_{\mathcal{Q}}\cdot\|Q\|^n.$$

Quando $C_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, diremos simplesmente que $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ é um *hiper-ideal p-normado de polinômios homogêneos.* Se as componentes $\mathcal{Q}(^nE;F)$ são completas com respeito à topologia gerada por $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}}$, então $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ é chamado $(C_n)_{n=1}^{\infty}$*-hiper-ideal p-Banach de polinômios homogêneos.* Quando $p = 1$, dizemos que $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ é um $(C_n)_{n=1}^{\infty}$*-hiper-ideal normado (Banach) de polinômios homogêneos.*

Definição 4.1.9. *[60, Definição* 3.3.1*]* Seja $\mathcal{G}$ uma subclasse da classe de todos operadores multilineares entre espaços de Banach munido com a função $\|\cdot\|_{\mathcal{G}} \colon \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{R}$. Defina $\mathcal{P}^{\mathcal{G}} := \{P \in \mathcal{P} :$ existe $A \in \mathcal{G}$ tal que $P = \widehat{A}\}$, e

$$\|P\|_{\mathcal{P}^{\mathcal{G}}} = \inf\{\|A\|_{\mathcal{G}} : \ A \in \mathcal{G} \text{ e } P = \widehat{A}\}.$$

Essa classe naturalmente forma um hiper-ideal quando $\mathcal{G}$ é um hiper-ideal de aplicações multilineares, como garante o próximo resultado.

Proposição 4.1.10. *[60, Teorema* 3.3.2*] Se $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ é um hiper-ideal p-normado (p-Banach) de operadores multilineares, então $(\mathcal{P}^{\mathcal{H}}, \|\cdot\|_{\mathcal{P}^{\mathcal{H}}})$ é um $\left(\frac{n^n}{n!}\right)_{n=1}^{\infty}$-hiper-ideal p-normado (p-Banach) de polinômios homogêneos.*

Como citado em [60, Página 100], contrário ao caso dos ideais de aplicações multilineares/polinômios homogêneos, não é de se esperar que $(\mathcal{P}_{\mathcal{H}}, \|\cdot\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{H}}})$ seja um hiper-ideal de polinômios homogêneos sempre que $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ for um hiper-ideal de aplicações multilineares, pois, dado $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}(^nE;F)$ e $Q \in \mathcal{P}(^mG;E)$, em geral, $P \circ Q$ não pertence à $\mathcal{P}_{\mathcal{H}}$. Na verdade, tudo que temos é que $\check{P} \in \mathcal{H}(^nE;F)$ e da propriedade de hiper-ideal de $\mathcal{H}$ podemos somente concluir que $\check{P} \circ (\check{Q}, \ldots, \check{Q})$ pertence à $\mathcal{H}$. Para $P \circ Q$ pertencer à $\mathcal{P}_{\mathcal{H}}$ deveríamos ter $(P \circ Q)^{\vee}$ em $\mathcal{H}$, então, isso funcionará se $(P \circ Q)^{\vee} = \check{P} \circ (\check{Q}, \ldots, \check{Q})$. Não há esperança para essa igualdade, porque o operador multilinear $\check{P} \circ (\check{Q}, \ldots, \check{Q})$ em geral não é simétrico.

Para solucionar tal problema, é imposto sobre o hiper-ideal de aplicações multilineares $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ um condição extra para garantir que $(\mathcal{P}_{\mathcal{H}}, \|\cdot\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{H}}})$ seja um hiper-ideal de polinômios homogêneos. Como será visto a seguir.

Lema 4.1.11.

(a) *[60, Lema* 3.3.5*] Uma subclasse $\mathcal{G}$ da classe das aplicações multilineares contínuas entre espaços de Banach é simétrica se, e somente se, $\mathcal{P}^{\mathcal{G}} = \mathcal{P}_{\mathcal{G}}$.*

(b) *[60, Proposição* 3.3.6*] Se $0 < p \leq 1$ e $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ é um hiper-ideal p-normado de operadores multilineares fortemente simétrico, então,*

$$\|P\|_{\mathcal{P}^{\mathcal{H}}} \leq \|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{H}}} \leq (n!)^{\frac{1}{p}-1}\|P\|_{\mathcal{P}^{\mathcal{H}}}$$

para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}(^nE;F)$.

Proposição 4.1.12. *[60, Proposição 3.3.6] Se $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ é um hiper-ideal de aplicações multilineares normado (Banach) fortemente simétrico, então, $\mathcal{P}^{\mathcal{H}} = \mathcal{P}_{\mathcal{H}}$ isometricamente. Em particular, $(\mathcal{P}_{\mathcal{H}}, \|\cdot\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{H}}})$ é um $\left(\frac{n^n}{n!}\right)_{n=1}^{\infty}$-hiper-ideal normado (Banach) de polinômios homogêneos.*

Com este resultado, podemos obter uma versão da Proposição 4.1.5 para hiper-ideais.

Proposição 4.1.13. *Sejam $(\mathcal{H}_n, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_n})_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de hiper-ideais de aplicações multilineares simétricas satisfazendo as condições (CH1) e (CH3) da Definição 4.1.1. Então, a sequência de hiper-ideais de polinômios homogêneos $\left(\mathcal{P}_{\mathcal{H}_n}, \|\cdot\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{H}_n}}\right)_{n=1}^{\infty}$ satisfaz as condições (CH2) e (CH4).*

Nos exemplos contidos nas próximas seções, todas as classes são, pelo menos, multi-ideais. Para as classes $(\mathcal{M}_n)_{n=1}^{N}$ que satisfazem as condições (CH1) e (CH3), obtemos, de acordo com a Proposição 4.1.5, as condições (CH2) e (CH4) da Definição 4.1.1, quando consideramos a sequência $(\mathcal{P}_{\mathcal{M}_n})_{n=1}^{N}$, assim, podemos concluir que o par $\left(\left(\mathcal{P}_{\mathcal{M}_n}, \|\cdot\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}_n}}\right), (\mathcal{M}_n, \|\cdot\|_{\mathcal{M}_n})\right)_{n=1}^{N}$ é fortemente coerente. Vale também salientar que, mesmo com a condição (CH5) dando a forma do ideal de polinômios homogêneos associados à $\mathcal{M}_n$, para tornar $\left(\left(\mathcal{P}_{\mathcal{M}_n}, \|\cdot\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}_n}}\right), (\mathcal{M}_n, \|\cdot\|_{\mathcal{M}_n})\right)_{n=1}^{N}$ fortemente coerente (ou fortemente compatível), ainda temos uma variedade de normas (não necessariamente equivalentes) $\|\cdot\|_n$ que podemos escolher em $\mathcal{P}_{\mathcal{M}_n}$ que ainda mantém a sequência de pares $\left(\left(\mathcal{P}_{\mathcal{M}_n}, \|\cdot\|_n\right), (\mathcal{M}_n, \|\cdot\|_{\mathcal{M}_n})\right)_{n=1}^{N}$ fortemente coerentes (ou fortemente compatíveis). Note, além disso, que as propriedades multi (hiper)-ideal não estão diretamente relacionadas às condições das Definições 4.1.1 e 4.1.2 ou mesmo da Definição 3.1 de [43].

4.2 Ideal de Composição

O método de composição é um processo gerador de multi-ideais e ideais de polinômios homogêneos, isto é, produz multi-ideais/ideais de polinômios homogêneos que são a composição de um ideal de operadores lineares com o ideal das aplicações multilineares/polinômios homogêneos contínuos. Este método foi inicialmente introduzido por Pietsch em [51] e estudado em detalhes por Botelho, Pellegrino e Rueda em [17]. Nesta seção, iremos investigar a coerência forte e a compatibilidade forte referente aos ideais assim obtidos.

Iniciaremos relembrando a definição do objeto de estudo desta seção, a qual pode ser encontrada em [17].

Definição 4.2.1. Sejam $\mathcal{I}$ um ideal de operadores e $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Escreveremos $A \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ se existem um espaço de Banach G, um operador linear $u \in$

$\mathcal{I}(G;F)$ e um operador n-linear $B \in \mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;G)$ tais que

$$A = u \circ B.$$

Se $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é um ideal p-normado, definimos

$$\|A\|_{\mathcal{I}\circ\mathcal{L}} = \inf\{\|u\|_{\mathcal{I}}\,\|B\|\},$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as representações $u \circ B$ de A.

O ideal de composição é um hiper-ideal, para mais detalhes ver [19]. Quando $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é um ideal p-Banach, então, o ideal de composição é um hiper-ideal p-Banach.

Definição 4.2.2. Sejam $\mathcal{I}$ um ideal de operadores e um polinômio n-homogêneo $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$. Escreveremos $P \in \mathcal{I} \circ \mathcal{P}(^nE;F)$, se existem um espaço de Banach G, um operador linear $u \in \mathcal{I}(G;F)$ e um polinômio n-homogêneo $B \in \mathcal{P}(^nE;F)$ tais que

$$P = u \circ B.$$

Se $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é um ideal p-normado, definimos

$$\|P\|_{\mathcal{I}\circ\mathcal{P}} = \inf \|u\|_{\mathcal{I}}\,\|P\|.$$

A propriedade/desigualdade de hiper-ideal para $\mathcal{I} \circ \mathcal{P}$ segue facilmente e assim temos:

Proposição 4.2.3. *[60, Teorema 3.4.5] Quando $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é um ideal p-Banach, então $\mathcal{I} \circ \mathcal{P}$ será um hiper-ideal de polinômios p-Banach.*

Foi mostrado em [17, Proposição 3.7 (b)] que $P \in \mathcal{I} \circ \mathcal{P}(^nE;F)$ se, e somente se, $\check{P} \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E^n;F)$ e que as normas $\|\cdot\|_{\mathcal{I}\circ\mathcal{P}}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{I}\circ\mathcal{L}}}$ são equivalentes. Podemos, então, considerar esta definição em vez de $\mathcal{P}_{\mathcal{I}\circ\mathcal{L}}$.

Proposição 4.2.4. *[17, Proposição 3.2] Para todo ideal de operadores p-normado (p-Banach) $\mathcal{I}$, tem-se*

$$\mathcal{I} \circ \mathcal{P}_n = \mathcal{P}_{\mathcal{I}\circ\mathcal{L}_n}.$$

Iremos verificar que a sequência $(\mathcal{I} \circ \mathcal{P}_n, \mathcal{I} \circ \mathcal{L}_n)_{n=1}^N$ é fortemente coerente e fortemente compatível com $\mathcal{I}$. A prova da próxima proposição segue a mesma linha que [25, Proposição 3.1].

Proposição 4.2.5. *Sejam $T \in \mathcal{I}\circ\mathcal{L}_{n+1}(E_1,\ldots,E_{n+1};F)$ e $a_j \in E_j$, onde $j = 1,\ldots,n+1$. Então*

$$T_{a_j} \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}_n(E_1,\ldots,E_{j-1},E_{j+1},\ldots,E_{n+1};F)$$

e

$$\left\|T_{a_j}\right\|_{\mathcal{I}\circ\mathcal{L}_n} \leq \|T\|_{\mathcal{I}\circ\mathcal{L}_{n+1}} \|a_j\|_E.$$

Demonstração. Faremos apenas o caso $j = 1$. O caso geral é análogo. Como $T \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}^{(n+1)}(E_1, \ldots, E_{n+1}; F)$, existem um espaço de Banach G, um operador linear $u \in \mathcal{I}(G; F)$ e uma aplicação $(n+1)$-linear $B\colon E_1 \times \cdots \times E_{n+1} \to F$ tais que $T = u \circ B$. Então,

$$\begin{aligned} T_{a_1}(x_2, \ldots, x_{n+1}) &= T(a_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \\ &= u \circ B(a_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \\ &= u \circ B_{a_1}(x_2, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Como $B_{a_1} \in \mathcal{L}(E_2, \ldots, E_{n+1})$, então $T_{a_1} \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}^{(n)}(E_2, \ldots, E_{n+1}; F)$. Temos ainda,

$$\|T_{a_1}\|_{\mathcal{I}\circ\mathcal{L}} \leq \inf\{\|u\|_{\mathcal{I}}.\|B_{a_1}\|\} \leq \inf\{\|u\|_{\mathcal{I}}.\|B\|\}\|a_1\| = \|T\|_{\mathcal{I}\circ\mathcal{L}^{(n+1)}} \|a_1\|,$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as representações $T = u \circ B$. □

Proposição 4.2.6. *Sejam $T \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}_n(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $Q \in \mathcal{L}(E_{n+1}, \ldots, E_m)$. Então,*

$$QT \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}_m(E_1, \ldots, E_m; F)$$

e

$$\|QT\|_{\mathcal{I}\circ\mathcal{L}_m} \leq \|Q\|\|T\|_{\mathcal{I}\circ\mathcal{L}_n}.$$

Demonstração. Sejam $T \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}_n(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $Q \in \mathcal{L}(E_{n+1}, \ldots, E_m)$, então, existem um espaço de Banach G, um operador linear $u \in \mathcal{I}(G; F)$ e uma aplicação n-linear $B\colon E_1 \times \cdots \times E_n \to F$, tais que

$$\begin{aligned} QT(x_1, \ldots, x_m) &= Q(x_{n+1}, \ldots, x_m)T(x_1, \ldots, x_n) \\ &= Q(x_{n+1}, \ldots, x_m)u \circ B(x_1, \ldots, x_n) \\ &= u\left(Q(x_{n+1}, \ldots, x_m)B(x_1, \ldots, x_n)\right) \\ &= u\left(QB(x_1, \ldots, x_m)\right) \\ &= u \circ QB(x_1, \ldots, x_m). \end{aligned}$$

Como $QB \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$, então $QT \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}_m(E_1, \ldots, E_m; F)$ e também

$$\|QT\|_{\mathcal{I}\circ\mathcal{L}_m} \leq \inf\{\|u\|_{\mathcal{I}}.\|QB\|\} = \inf\{\|u\|_{\mathcal{I}}.\|B\|\}\|Q\| = \|T\|_{\mathcal{I}\circ\mathcal{L}_n}\|Q\|,$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as representações $T = u \circ B$. □

Do item (1) da Observação 4.1.6 e de $\|\cdot\|_{\mathcal{I}\circ\mathcal{P}} \leq \|\cdot\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{I}\circ\mathcal{L}}}$, o seguinte resultado independe da norma escolhida em $\mathcal{I} \circ \mathcal{P}$:

Teorema 4.2.7. *O par* $(\mathcal{I} \circ \mathcal{P}_n, \mathcal{I} \circ \mathcal{L}_n)_{n=1}^N$ *é fortemente coerente e fortemente compatível com o ideal* $\mathcal{I}$.

Exemplo 4.2.8. Sendo $\mathcal{K}$ o ideal dos operadores lineares compactos e $\mathcal{W}$ o ideal de operadores lineares fracamente compactos. Denotaremos por $\mathcal{P}_\mathcal{K}$ e $\mathcal{L}_\mathcal{K}$ a classe dos polinômios homogêneos e aplicações multilineares compactas, respectivamente, e por $\mathcal{P}_\mathcal{W}$ e $\mathcal{L}_\mathcal{W}$ a classe dos polinômios homogêneos e aplicações multilineares fracamente compactas, respectivamente. Ryan [56] provou que

$$\mathcal{P}_\mathcal{K} = \mathcal{K} \circ \mathcal{P} \quad \text{e} \quad \mathcal{P}_\mathcal{W} = \mathcal{W} \circ \mathcal{P}$$

e Pełczyński [45] mostrou que

$$\mathcal{L}_\mathcal{K} = \mathcal{K} \circ \mathcal{L} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}_\mathcal{W} = \mathcal{W} \circ \mathcal{L},$$

O Teorema 4.2.7 garante que a sequência formada pelos pares $(\mathcal{P}_{\mathcal{K},n}, \mathcal{L}_{\mathcal{K},n})_{n=1}^N$ de polinômios homogêneos compactos e aplicações multilineares compactas e $(\mathcal{P}_{\mathcal{W},n}, \mathcal{L}_{\mathcal{W},n})_{n=1}^N$ de polinômios homogêneos fracamente compactos e aplicações multilineares fracamente compactas são fortemente coerentes e fortemente compatíveis com $\mathcal{K}$ e $\mathcal{W}$, respectivamente. O mesmo vale para o par formado pelos polinômios homogêneos/operadores multilineares de posto finito (ver [40, Proposição 3.1(b)]) e aplicações multilineares/polinômios homogêneos aproximáveis por aplicações multilineares/polinômios homogêneos de posto finito (ver [14, Teorema 2.2]).

4.3 Operadores Dunford-Pettis

Já vimos em seções anteriores que sob certas condições a coerência forte implica na compatibilidade forte, permitindo-nos reduzir, neste caso particular, o trabalho de provar apenas cinco condições para obter a coerência forte e a compatibilidade forte. Surge, deste modo, de forma natural, o seguinte questionamento: será que as condições que determinam a coerência forte são independentes? Uma parte da resposta a essa pergunta aparece na Proposição 4.1.5 que vale apenas se exigirmos a simetria do multi-ideal em questão. Neste caso, reduzimos apenas para três condições a serem provadas para obter a coerência forte. Podemos então perguntar se é possível melhorar ainda mais este cenário.

Outra inquietação que surge naturalmente, é a seguinte: uma vez que o conceito de coerência forte e compatibilidade forte tem como um dos principais motivadores a teoria dos hiper-ideais, na qual, as formas multilineares e polinomiais ocupam o lugar de destaque das aplicações lineares, será que a condição (CH3) é uma exclusividade dos hiper-ideais?

Para responder a tais questionamentos, introduziremos, nesta seção, a classe dos

operadores multilineares e polinômios homogêneos Dunford-Pettis, que nos permitirá analisar a independência entre as condições (CH1) e (CH3) e da condição (CH3) com a definição de hiper-ideal.

Definição 4.3.1. Sejam $E_1, \ldots, E_n$ e F espaços de Banach. Uma aplicação multilinear contínua $T\colon E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ é dita *Dunford-Pettis* quando $\left(T\left(x_j^{(1)}, \ldots, x_j^{(n)}\right)\right)_{j=1}^{\infty}$ converge para zero, para quaisquer $(x_j^{(i)})_{j=1}^{\infty}$ em E_i, $i = 1, \ldots, n$, fracamente convergentes para zero, isto é,

$$x_j^{(i)} \xrightarrow{w} 0, \forall i = 1, \ldots, n \Rightarrow \left\| T\left(x_j^{(1)}, \ldots, x_j^{(n)}\right) \right\| \longrightarrow 0.$$

Neste caso, escreveremos $T \in \mathcal{L}_{DP}(E_1, \ldots, E_n; F)$.

Definição 4.3.2. Sejam E e F espaços de Banach. Um polinômio n-homogêneo contínuo $P\colon E \to F$ é dito *Dunford-Pettis* quando $(P(x_j))_{j=1}^{\infty}$ converge para zero, para quaisquer $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em E fracamente convergente para zero, isto é,

$$x_j \xrightarrow{w} 0 \Rightarrow \|P(x_j)\| \longrightarrow 0.$$

Neste caso, escreveremos $P \in \mathcal{P}_{DP}(^nE; F)$.

Um fato importante sobre estas classes é apresentado no seguinte resultado.

Proposição 4.3.3.

(*i*) *A classe* $(\mathcal{L}_{DP}; \|\cdot\|)$ *é um multi-ideal Banach.*

(*ii*) *A classe* $(\mathcal{P}_{DP}; \|\cdot\|)$ *é um ideal Banach de polinômios homogêneos.*

Demonstração. Mostraremos apenas a primeira afirmação, a segunda é análoga. Iniciaremos mostrando que as aplicações de tipo finito estão contidas em $\mathcal{L}_{DP}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Seja $T \in \mathcal{L}_f(E_1, \ldots, E_n; F)$, isto é, T possui a forma

$$T(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{m} \varphi_k^1(x_1) \cdots \varphi_k^n(x_n) y_k$$

onde $\varphi_k^i \in E_i'$ e $y_k \in F$, $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, m$. Sejam $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}$ em E_i sequências fracamente convergentes para zero. Então,

$$T\left(x_j^{(1)}, \ldots, x_j^{(n)}\right) = \sum_{k=1}^{m} \varphi_k^1\left(x_j^{(1)}\right) \cdots, \varphi_k^n\left(x_j^{(n)}\right) y_k$$

claramente converge para zero.

Agora, checaremos a propriedade de ideal. Sejam $G_1, \ldots, G_n, E_1, \ldots, E_n, F, H$ espaços de Banach, $u_i \in \mathcal{L}(G_i; E_i)$, $i = 1, \ldots, n$, $T \in \mathcal{L}_{DP}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $t \in \mathcal{L}(F; H)$. Seja também $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}$ em G_i $i = 1, \ldots, n$, sequências fracamente convergentes para zero. Como,

$$t \circ T \circ (u_1, \ldots, u_n)\left(x_j^{(1)}, \ldots, x_j^{(n)}\right) = t\left(T\left(u_1\left(x_j^{(1)}\right), \ldots, u_n\left(x_j^{(n)}\right)\right)\right)$$

e u_i é contínua, temos $\left(u_i\left(x_j^{(i)}\right)\right)_{j=1}^{\infty}$ são sequências fracamente convergentes para zero em E_i, $i = 1, \ldots, n$. Resultando diretamente que $t \circ T \circ (u_1, \ldots, u_n) \in \mathcal{L}_{DP}(G_1, \ldots, G_n; H)$.

Agora, precisamos mostrar que $\mathcal{L}_{DP}(E_1, \ldots, E_n; F)$ é fechado em $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Seja $(T_k)_{k=1}^{\infty}$ em $\mathcal{L}_{DP}(E_1, \ldots, E_n; F)$ uma sequência convergente, digamos para $T \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Mostraremos que T é Dunford-Pettis. Dado $\epsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \geq k_0 \Rightarrow \|T_k - T\| < \epsilon.$$

Sejam $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}$ em E_i, $i = 1, \ldots, n$ sequências fracamente convergentes para zero. Como toda sequência fracamente convergente é limitada, existe $M > 0$ tal que $\left\|x_j^{(1)}\right\| \cdots \left\|x_j^{(n)}\right\| \leq M$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Então, para qualquer $k \geq k_0$,

$$\begin{aligned}
\left\|T\left(x_j^{(1)}, \ldots, x_j^{(n)}\right)\right\| &\leq \left\|(T_{k_0} - T)\left(x_j^{(1)}, \ldots, x_j^{(n)}\right)\right\| + \left\|T_{k_0}\left(x_j^{(1)}, \ldots, x_j^{(n)}\right)\right\| \\
&\leq \|T_{k_0} - T\| \left\|x_j^{(1)}\right\| \cdots \left\|x_j^{(n)}\right\| + \left\|T_{k_0}\left(x_j^{(1)}, \ldots, x_j^{(n)}\right)\right\| \\
&< \epsilon M + \left\|T_{k_0}\left(x_j^{(1)}, \ldots, x_j^{(n)}\right)\right\|.
\end{aligned}$$

Portanto, $T \in \mathcal{L}_{DP}(E_1, \ldots, E_n; F)$. □

Um resultado muito interessante sobre estas classes é o seguinte:

Proposição 4.3.4. *Para quaisquer espaços de Banach E e F, temos $P \in \mathcal{P}_{DP}(E; F)$ se, e somente se, $\check{P} \in \mathcal{L}_{DP}(E^n; F)$.*

Demonstração. Sejam E e F espaços de Banach. Suponha que $\check{P} \in \mathcal{L}_{DP}(E; F)$ e tome $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ uma sequência fracamente convergente para zero. Assim,

$$\|P(x_j)\| = \|\check{P}(x_j, \ldots, x_j)\|$$

converge para zero. Daí, $P \in \mathcal{P}_{DP}(E; F)$. Para a outra implicação, considere $P \in \mathcal{P}_{DP}(E; F)$ e tome $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}$, $i = 1, \ldots, n$, sequências fracamente convergentes para zero. Como,

$$\check{P}\left(x_j^{(i)}, \ldots, x_j^{(i)}\right) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\epsilon_i = \pm 1} \epsilon_1 \cdots \epsilon_n P\left(\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i x_j^{(i)}\right),$$

para qualquer $\varphi \in E'$ temos que,

$$\varphi\left(x_j^{(i)}\right) \underset{j\to\infty}{\to} 0, \forall i = 1, \ldots, n,$$

então

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i x_j^{(i)}\right) = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \varphi\left(x_j^{(i)}\right) \underset{j\to\infty}{\to} 0.$$

Logo, $\left(\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}$ é fracamente convergente para zero. Portanto,

$$\left\|\check{P}\left(x_j^{(i)}, \ldots, x_j^{(i)}\right)\right\| \underset{j\to\infty}{\to} 0$$

e concluímos que $\check{P} \in \mathcal{L}_{DP}(E; F)$. □

Observação 4.3.5. A classe $(\mathcal{L}_{DP}, \|\cdot\|)$ não é um hiper-ideal. De fato, considere $T\colon \ell_2 \times \ell_2 \to \ell_1$ dada por

$$T\left((x_j)_{j=1}^{\infty}, (y_j)_{j=1}^{\infty}\right) = (x_j y_j)_{j=1}^{\infty}.$$

Não é difícil de ver que $T \notin \mathcal{L}_{DP}(\ell_2, \ell_2; \ell_1)$. Pelo Teorema de Schur [18, Teorema 6.2.12], $I_d \in \mathcal{CC}(\ell_1) = \mathcal{L}_{DP}(\ell_1)$. Logo, se $\mathcal{L}_{DP}$ fosse um hiper-ideal, teríamos que

$$T = Id_{\ell_1} \circ T \in \mathcal{L}_{DP}(\ell_2, \ell_2; \ell_1).$$

Tomando $e_j \in \ell_2$, é fácil ver que $e_j \overset{w}{\to} 0$. Assim,

$$T(e_j, e_j) \overset{\|\cdot\|_{\ell_1}}{\to} 0.$$

Por outro lado

$$\|T(e_j, e_j)\|_{\ell_1} = \|e_j\|_{\ell_1} = 1,$$

o que contradiz a convergência anterior.

Proposição 4.3.6. *A classe $\mathcal{L}_{DP}$ satisfaz (CH3) mas não (CH1).*

Demonstração. Sejam $T \in \mathcal{L}_{DP}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $Q \in \mathcal{L}(E_{n+1}, \ldots, E_m)$. Considere também as sequências fracamente convergentes para zero $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}$ em E_i, $i = 1, \ldots, m$. Assim, a sequência $(Q(x_j^{n+1}, \ldots, x_j^m))_{j=1}^{\infty}$ é limitada e a sequência $(T(x_j^1, \ldots, x_j^n))_{j=1}^{\infty}$ converge, em norma, para zero. Então,

$$(QT(x_j^1, \ldots, x_j^m))_{j=1}^{\infty}$$

converge para zero. Logo, $QT \in \mathcal{L}_{DP}(E_1, \ldots, E_{n+m}; F)$. O controle das normas é imediato.

Mostraremos que $\mathcal{L}_{DP}$ não satisfaz (CH1). Considere E um espaço de Banach e tome $a \in E\backslash\{0\}$. Então, pelo Teorema de Hahn Banach, existe $\varphi \in E'$ tal que $\|\varphi(a)\| = 1$. Defina $T\colon E \times \ell_2 \to \ell_2$ por

$$T\left(x, (x_j)_{j=1}^{\infty}\right) := (\varphi(x)x_j)_{j=1}^{\infty}.$$

É fácil ver que T é uma aplicação bilinear e contínua. Se $x_j \xrightarrow{w} 0$ em E e $y_j \xrightarrow{w} 0$ em ℓ_2 então $\varphi(x_j) \xrightarrow{|\cdot|} 0$ e $(y_j)_{j=1}^{\infty}$ é limitado em ℓ_2, daí

$$T(x_j, y_j) \xrightarrow{\|\cdot\|_2} 0,$$

isto é, $T \in \mathcal{L}_{DP}(E, \ell_2; \ell_2)$.

Por outro lado, $T_a \notin \mathcal{L}_{DP}(\ell_2; \ell_2)$. De fato, considere $e_j \in \ell_2$, $j \in \mathbb{N}$. Não é difícil ver que $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ converge fracamente para zero em ℓ_2. Mas,

$$\|T(a, e_j)\|_2 = |\varphi(a)|,$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Logo, $(T_a(e_j))_{j=1}^{\infty}$ não converge para zero em ℓ_2, isto é, $\mathcal{L}_{DP}$ não satisfaz (CH1).

□

Vale destacar o fato desta classe estabelecer, sem nenhuma dúvida, a independência entre a condição (CH3) e a definição de hiper-ideal, em outras palavras, existem classes de aplicações multilineares que não são hiper-ideais que satisfazem a condição (CH3).

4.4 Método da desigualdade

O método da desigualdade foi introduzido em [20] como um método que gera hiper-ideais de aplicações multilineares e polinômios homogêneos. Recordaremos algumas definições e resultados relativos a este método.

Definição 4.4.1. [20, Definition 2.1 (a)] Seja $0 < p \leq 1$. Por $\mathcal{BAN}$, denotaremos a classe de todos espaços de Banach sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e por p-$\mathcal{BAN}$, a classe de todos espaços p-Banach sobre $\mathbb{K}$. Uma correspondência

$$\mathcal{X}\colon \mathcal{BAN} \longrightarrow p - \mathcal{BAN}$$

que associa a cada espaço de Banach E a um espaço p-Banach $\left(\mathcal{X}(E), \|\cdot\|_{\mathcal{X}(E)}\right)$ é chamado um p-funtor de sequências se:

(i) $\mathcal{X}(E)$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{E}^{\mathbb{N}}$ com as operações algébricas usuais;

(ii) Para quaisquer $x \in E$ e $j \in \mathbb{N}$, temos $(0, \dots, 0, x, 0, \dots) \in \mathcal{X}(E)$, onde x aparece na j-ésima coordenada, e $\|(0, \dots, 0, x, \dots)\|_{\mathcal{X}(E)} = \|x\|_E$.

(iii) Para todo $u \in \mathcal{L}(E; F)$ e toda sequência finita com valores em E, $(x_j)_{j=1}^k := (x_1, \dots, x_k, 0, 0, \dots)$, $k \in \mathbb{N}$, vale que

$$\left\|(u(x_j))_{j=1}^k\right\|_{\mathcal{X}(F)} \leq \|u\| \left\|(x_j)_{j=1}^k\right\|_{\mathcal{X}(E)}.$$

Quando $p = 1$, diremos simplesmente que $\mathcal{X}$ é um funtor de sequências.

Definição 4.4.2. [20, Definição 2.4] Sejam $0 < p, q \leq 1$, um p-funtor de sequências $\mathcal{X}$ e um q-funtor de sequências $\mathcal{Y}$. Dizemos que um operador $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ é $(\mathcal{X} - \mathcal{Y})$-*somante*, se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left\|\left(A(x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(n)})\right)_{j=1}^k\right\|_{\mathcal{Y}(F)} \leq C \sup_{T \in B_{\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n)}} \left\|\left(T(x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(n)})\right)_{j=1}^k\right\|_{\mathcal{X}(\mathbb{K})}, \tag{4.1}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e qualquer sequência finita $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^k$ em E_i, $i = 1, \dots, n$. Neste caso escreveremos $A \in (\mathcal{X} - \mathcal{Y})(E_1, \dots, E_n; F)$.

O ínfimo das constantes $C > 0$ que satisfazem a desigualdade (4.1) é uma q-norma em $(\mathcal{X} - \mathcal{Y})(E_1, \dots, E_n; F)$, denotada por $\|\cdot\|_{(\mathcal{X}-\mathcal{Y})}$.

Definição 4.4.3. [20, Definição 2.1 (b)] Sejam $0 < p, q \leq 1$. Dizemos que um p-funtor de sequências $\mathcal{X}$ é *escalarmente dominado* pelo q-funtor de sequências $\mathcal{Y}$ quando, para qualquer sequência finita $(\lambda_j)_{j=1}^k \subset \mathbb{K}$, $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\left\|(\lambda_j)_{j=1}^k\right\|_{\mathcal{X}(\mathbb{K})} \leq \left\|(\lambda_j)_{j=1}^k\right\|_{\mathcal{Y}(\mathbb{K})}.$$

Teorema 4.4.4. *[20, Teorema 2.7] Sejam $0 < p, q \leq 1$, um p-functor de sequências $\mathcal{X}$ e um q-functor de sequências $\mathcal{Y}$, tais que $\mathcal{X}$ é escalarmente dominada por $\mathcal{Y}$. Então,*

$$\left((\mathcal{X} - \mathcal{Y}), \|\cdot\|_{(\mathcal{X}-\mathcal{Y})}\right)$$

é um hiper-ideal q-Banach.

Passemos ao estudo da coerência forte e compatibilidade forte para esta classe.

Proposição 4.4.5. *Sejam $T \in (\mathcal{X} - \mathcal{Y})_{n+1}(E_1, \dots, E_{n+1}; F)$ e $a_i \in E_i$, $i = 1, \dots, n+1$. Então,*

$$T_{a_i} \in (\mathcal{X} - \mathcal{Y})_n(E_1, \dots, E_{i-1}, E_{i+1}, \dots E_{n+1}; F)$$

e

$$\|T_{a_i}\|_{(\mathcal{X}-\mathcal{Y})_n} \leq \|T\|_{(\mathcal{X}-\mathcal{Y})_{n+1}} \|a_i\|.$$

Demonstração. Verificaremos apenas o caso $i = n+1$. O caso geral é análogo. Sejam $T \in (\mathcal{X}-\mathcal{Y})_{n+1}(E_1,\ldots,E_{n+1};F)$ e $a_{n+1} \in E_{n+1}$. Então,

$$\begin{aligned}
&\left\|\left(T_{a_{n+1}}\left(x_j^{(1)},\ldots,x_j^{(n)}\right)\right)_{j=1}^k\right\|_{\mathcal{Y}(F)} = \left\|\left(T\left(x_j^{(1)},\ldots,x_j^{(n)},a_{n+1}\right)\right)_{j=1}^k\right\|_{\mathcal{Y}(F)}\\
&\leq \|T\|_{(\mathcal{X}-\mathcal{Y})_{n+1}}\|a_{n+1}\| \sup_{\varphi\in B_{\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_{n+1})}}\left\|\left(\varphi\left(x_j^{(1)},\ldots,x_j^{(n)},\frac{a_{n+1}}{\|a_{n+1}\|}\right)\right)_{j=1}^k\right\|_{\mathcal{X}(\mathbb{K})}\\
&\leq \|T\|_{(\mathcal{X}-\mathcal{Y})_{n+1}}\|a_{n+1}\| \sup_{\psi\in B_{\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n)}}\left\|\left(\psi\left(x_j^{(1)},\ldots,x_j^{(n)}\right)\right)_{j=1}^k\right\|_{\mathcal{X}(\mathbb{K})}
\end{aligned}$$

e assim,

$$T_{a_{n+1}} \in (\mathcal{X}-\mathcal{Y})_n(E_1,\ldots,E_n;F) \text{ e } \|T_{a_{n+1}}\|_{(\mathcal{X}-\mathcal{Y})_n} \leq \|T\|_{(X-Y)_{n+1}}\|a_{n+1}\|.$$

□

Proposição 4.4.6. *Sejam $n < m$, $T \in (\mathcal{X}-\mathcal{Y})_n(E_1,\ldots,E_n;F)$ e $Q \in \mathcal{L}(E_{n+1},\ldots,E_m)$. Então,*

$$QT \in (\mathcal{X}-\mathcal{Y})_m(E_1,\ldots,E_m;F)$$

e

$$\|QT\|_{(\mathcal{X}-\mathcal{Y})_m} \leq \|Q\|\ \|T\|_{(\mathcal{X}-\mathcal{Y})_n}.$$

Demonstração. Sejam $T \in (\mathcal{X}-\mathcal{Y})_n(E_1,\ldots,E_n;F)$ e $Q \in \mathcal{L}(E_{n+1},\ldots,E_m)$. Então,

$$\begin{aligned}
&\left\|\left(QT(x_j^{(1)},\ldots,x_j^{(m)})\right)_{j=1}^k\right\|_{\mathcal{Y}(F)}\\
&= \left\|\left(Q(x_j^{(n+1)},\ldots,x_j^{(m)})T(x_j^{(1)},\ldots,x_j^{(n)})\right)_{j=1}^k\right\|_{\mathcal{Y}(F)}\\
&= \left\|\left(T(Q(x_j^{(n+1)},\ldots,x_j^{(m)})x_j^{(1)},\ldots,x_j^{(n)})\right)_{j=1}^k\right\|_{\mathcal{Y}(F)}\\
&\leq \|T\|_{(\mathcal{X}-\mathcal{Y})_n} \sup_{\varphi\in B_{\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n)}}\left\|\left(\varphi(Q(x_j^{(n+1)},\ldots,x_j^{(m)})x_j^{(1)},\ldots,x_j^{(n)})\right)_{j=1}^k\right\|_{\mathcal{X}(\mathbb{K})}\\
&= \|T\|_{(\mathcal{X}-\mathcal{Y})_n} \sup_{\varphi\in B_{\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n)}}\left\|\left(Q(x_j^{(n+1)},\ldots,x_j^{(m)})\varphi(x_j^{(1)},\ldots,x_j^{(n)})\right)_{j=1}^k\right\|_{\mathcal{X}(\mathbb{K})}\\
&\leq \|T\|_{(\mathcal{X}-\mathcal{Y})_n}\|Q\| \sup_{\psi\in B_{\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_m)}}\left\|\left(\psi(x_j^{(1)},\ldots,x_j^{(m)})\right)_{j=1}^k\right\|_{\mathcal{X}(\mathbb{K})}
\end{aligned}$$

e assim,

$$QT \in (\mathcal{X}-\mathcal{Y})_m(E_1,\ldots,E_m;F) \text{ e } \|QT\|_{(\mathcal{X}-\mathcal{Y})_m} \leq \|Q\|\ \|T\|_{(\mathcal{X}-\mathcal{Y})_n}.$$

□

Poderíamos definir o caso polinomial de maneira intuitiva, no entanto, este tratamento não é adequado em nosso contexto. Por exemplo, em [31], foi mostrado que o ideal de polinômios homogêneos $\left(\mathcal{P}\prod_p^{n,str}, \|\cdot\|_{\mathcal{P}\prod_p^{n,str}}\right)_{n=1}^N$ gerado por este método não é compatível com o ideal $\prod_p$. Assim, seguimos um caminho natural e trabalhamos com a classe $\mathcal{P}_{(\mathcal{X}-\mathcal{Y})}$. Como $(\mathcal{X}-\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}-\mathcal{Y}})$ é fortemente simétrico (ver [60, Lema 3.4.11]), segue da Proposição 4.1.5 que valem as condições (CH2) e (CH4). Portanto, da Observação 4.1.3 item (3) concluímos o seguinte resultado.

Teorema 4.4.7. *A sequência* $\left(\left(\mathcal{P}_{(\mathcal{X}-\mathcal{Y})_n}, \|\cdot\|_{\mathcal{P}_{(\mathcal{X}-\mathcal{Y})_n}}\right), \left((\mathcal{X}-\mathcal{Y})_n, \|\cdot\|_{(\mathcal{X}-\mathcal{Y})_n}\right)\right)_{n=1}^N$ *é fortemente coerente e fortemente compatível com* $(\mathcal{X}-\mathcal{Y})_1$.

4.5 Método da $\mathcal{I}$-limitação

O método da $\mathcal{I}$-limitação foi introduzido em [59] e explorado em diversos trabalhos, dos quais destacamos [3, 20, 21, 33]. Ele se destaca por ser um método que também gera hiper-ideais de aplicações multilineares e polinômios homogêneos. Nesta seção, analisaremos a coerência forte e a compatibilidade forte para a classe das aplicações multilineares e polinômios homogêneos $\mathcal{I}$-limitados.

Definição 4.5.1. [20, Definição 3.1] Seja $\mathcal{I}$ um ideal de operadores lineares. Dizemos que um subconjunto K de um espaço de Banach F é *$\mathcal{I}$-limitado*, se existem um espaço de Banach H e um operador linear $u \in \mathcal{I}(H;F)$, tais que, $K \subset u(B_H)$. A classe dos subconjuntos $\mathcal{I}$-limitados de F é denotada por $C_{\langle\mathcal{I}\rangle}(F)$.

Definição 4.5.2. [20, Definição 3.2] Seja $\mathcal{I}$ um ideal de operadores lineares. Dizemos que a aplicação $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ é *$\mathcal{I}$-limitada* se

$$A(B_{E_1} \times \cdots \times B_{E_n}) \in C_{\langle\mathcal{I}\rangle}(F).$$

Em outras palavras, se existem um espaço de Banach H e um operador linear $u \in \mathcal{I}(H;F)$ tais que

$$A(B_{E_1} \times \cdots \times B_{E_n}) \subset u(B_H). \tag{4.2}$$

Denotamos por $\mathcal{L}_{\langle\mathcal{I}\rangle}^{(n)}$ a classe de todas as aplicações n-lineares $\mathcal{I}$-limitadas. Se $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ é uma p-norma em $\mathcal{I}$, então, podemos definir uma p-norma em $\mathcal{L}_{\langle\mathcal{I}\rangle}^{(n)}$ por

$$\|A\|_{\mathcal{L}_{\langle\mathcal{I}\rangle}^{(n)}} = \inf\left\{\|u\|_{\mathcal{I}}; u \text{ satisfaz } (4.2)\right\}.$$

Em [20] foi mostrado o seguinte resultado.

Teorema 4.5.3. *[60, Teorema 2.6.4] Sejam* $0 \leq p \leq 1$ *e* $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ *um ideal p-Banach de operadores (p-normado). Então,* $\left(\mathcal{L}_{\langle\mathcal{I}\rangle}^{(n)}, \|\cdot\|_{\mathcal{L}_{\langle\mathcal{I}\rangle}^{(n)}}\right)$ *é um hiper-ideal p-Banach (p-normado).*

Agora, mostraremos que $\mathcal{L}_{\langle\mathcal{I}\rangle}$ satisfaz as condições da coerência forte e compatibilidade forte.

Proposição 4.5.4. *Sejam* $T \in \mathcal{L}_{\langle\mathcal{I}\rangle}^{(n+1)}(E_1, \ldots, E_{n+1}; F)$ *e* $a_j \in E_j$, $j = 1, \ldots, n+1$. *Então,*

$$T_{a_j} \in \mathcal{L}_{\langle\mathcal{I}\rangle}^{(n)}(E_1, \ldots, E_{j-1}, E_{j+1}, \ldots, F)$$

e

$$\|T_{a_j}\|_{\mathcal{L}_{\langle\mathcal{I}\rangle}^{(n)}} \leq \|T\|_{\mathcal{L}_{\langle\mathcal{I}\rangle}^{(n+1)}} \|a_j\|.$$

Demonstração. Faremos apenas o caso $j = 1$. Os outros casos são análogos. Dados $T \in \mathcal{L}_{\langle\mathcal{I}\rangle}^{(n+1)}(E_1, \ldots, E_{n+1}; F)$ e $a_1 \in E_1$, existem um espaço de Banach H e um operador linear $u \in \mathcal{I}(H; F)$, tais que, para quaisquer $x_j \in B_{E_j}, j = 1, \ldots, n$,

$$T(x_1, \ldots, x_n) \in u(B_H).$$

Uma vez que,

$$T_{a_1}(x_2, \ldots, x_n) = T(a_1, x_2, \ldots, x_n) = T\left(\frac{a_1}{\|a_1\|}, x_2, \ldots, x_m\right)\|a_1\|,$$

considerando o operador linear $\|a_1\|u \in \mathcal{I}(H; F)$, temos

$$T\left(\frac{a_1}{\|a_1\|}, x_2, \ldots, x_m\right) \in u(B_H),$$

e, portanto,

$$T\left(\frac{a_1}{\|a_1\|}, x_2, \ldots, x_m\right)\|a_1\| \in (\|a_1\|u)(B_H).$$

Assim,

$$T_{a_1}(x_2, \ldots, x_n) = T\left(\frac{a_1}{\|a_1\|}, x_2, \ldots, x_m\right)\|a_1\| \in (\|a_1\|u)(B_H).$$

Logo, $T_{a_j} \in \mathcal{L}_{\langle\mathcal{I}\rangle}^{(n)}(E_1, \ldots, E_{j-1}, E_{j+1}, \ldots, F)$ e

$$\|T_{a_1}\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{I}}^{(n)}} \leq \|(\|a_1\|u)\|_{\mathcal{I}} = \|a_1\|\|u\|_{\mathcal{I}},$$

para todo u satisfazendo

$$T(x_1, \ldots, x_n) \in u(B_H)$$

com $x_i \in B_{E_j}$, $j = 1, \ldots, n$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\|T_{a_1}\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{I}}^{(n)}} &\leq \inf\{\|a_1\|\|u\|_{\mathcal{I}}\,; u \text{ satisfaz}(4.2)\} \\
&= \inf\{\|u\|_{\mathcal{I}}; u \text{ satisfaz } (4.2)\}\,\|a_1\| \\
&= \|T\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{I}}^{n+1}}\|a_1\|.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|T_{a_1}\|_{\mathcal{L}^{(n)}_{\langle\mathcal{I}\rangle}} \leq \|T\|_{\mathcal{L}^{(n+1)}_{\langle\mathcal{I}\rangle}}\|a_1\|.$$

□

Proposição 4.5.5. *Sejam n, $m \in \mathbb{N}$, $T \in \mathcal{L}^{(n)}_{\langle\mathcal{I}\rangle}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $Q \in \mathcal{L}(E_{n+1}, \ldots, E_{n+m})$. Então,*

$$QT \in \mathcal{L}^{(n+m)}_{\langle\mathcal{I}\rangle}(E_1, \ldots, E_m; F)$$

e

$$\|QT\|_{\mathcal{L}^{(n+m)}_{\langle\mathcal{I}\rangle}} \leq \|Q\|\|T\|_{\mathcal{L}^{(n)}_{\langle\mathcal{I}\rangle}}.$$

Demonstração. Sejam $T \in \mathcal{L}^{(n)}_{\langle\mathcal{I}\rangle}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $Q \in \mathcal{L}(E_{n+1}, \ldots, E_{n+m})$. Então, existem um espaço de Banach H e um operador linear $u \in \mathcal{I}(H; F)$ tais que, para qualquer $(x_1, \ldots, x_n) \in B_{E_1} \times \cdots \times B_{E_n}$,

$$T(x_1, \ldots, x_n) \in u(B_H).$$

Isto é, existe $h \in B_H$, tal que $T(x_1, \ldots, x_n) = u(h)$. Assim,

$$\begin{aligned} QT(x_1, \ldots, x_{n+m}) &= Q(x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})T(x_1, \ldots, x_n) \\ &= Q(x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})u(h) \\ &= u\left(Q(x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})h\right) \\ &= u\left(\frac{Q}{\|Q\|}(x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})h\right)\|Q\|, \end{aligned}$$

onde $(x_1, \ldots, x_{n+m}) \in B_{E_1} \times \cdots \times B_{E_{n+m}}$. Considerando o operador linear

$$\tilde{u} := \|Q\|u\colon H \to F,$$

temos que $\tilde{u} \in \mathcal{I}(H; F)$ e $QT(x_1, \ldots, x_{n+m}) = \tilde{u}(\tilde{h})$, onde $\tilde{h} = \frac{Q}{\|Q\|}(x_{n+1}, \ldots, x_m)h \in B_H$, pois

$$\left\|\tilde{h}\right\|_H = \left\|\frac{Q}{\|Q\|}(x_{n+1}, \ldots, x_m)h\right\|_H \leq \left|\frac{Q}{\|Q\|}(x_{n+1}, \ldots, x_m)\right|\|h\|_H \leq 1.$$

Assim,

$$QT \in \mathcal{L}^{(n+m)}_{\langle\mathcal{I}\rangle}(E_1, \ldots, E_{n+m}; F)$$

e como

$$\|QT\|_{\mathcal{L}^{(n+m)}_{\langle\mathcal{I}\rangle}} \leq \|\tilde{u}\|_{\mathcal{I}} = \|Q\|\|u\|_{\mathcal{I}},$$

temos

$$\|QT\|_{\mathcal{L}^{(n+m)}_{\langle\mathcal{I}\rangle}} \leq \inf\{\|\|Q\|u\|_{\mathcal{I}}\,;\ u \text{ satisfaz } (4.2)\}$$

$$= \inf\{\|u\|_{\mathcal{I}}\,;\ u \text{ satisfaz } (4.2)\}\|Q\|$$
$$= \|T\|_{\mathcal{L}^{(n)}_{\langle\mathcal{I}\rangle}}\|Q\|$$

Portanto,

$$\|QT\|_{\mathcal{L}^{(n+m)}_{\langle\mathcal{I}\rangle}} \leq \|T\|_{\mathcal{L}^{(n)}_{\langle\mathcal{I}\rangle}}\|Q\|.$$

□

Passemos a análise do caso polinomial. Em [60, Proposição 3.4.19], foi mostrado que $\left(\mathcal{L}_{\langle\mathcal{I}\rangle}, \|\cdot\|_{\mathcal{L}_{\langle\mathcal{I}\rangle}}\right)$ é um hiper-ideal fortemente simétrico, implicando que o par

$$\left(\left(\mathcal{P}_{\mathcal{L}^{(n)}_{\langle\mathcal{I}\rangle}}, \|\cdot\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{L}^{(n)}_{\langle\mathcal{I}\rangle}}}\right), \left(\mathcal{L}^{(n)}_{\langle\mathcal{I}\rangle}, \|\cdot\|_{\mathcal{L}^{(n)}_{\langle\mathcal{I}\rangle}}\right)\right)_{n=1}^{N}$$

é fortemente coerente e fortemente compatível com $\mathcal{L}^{(1)}_{\langle\mathcal{I}\rangle}$, de acordo com a Proposição 4.1.5 e item (3) da Observação 4.1.3. Abordaremos, agora, o caso polinomial em que a definição independe do caso multilinear.

Definição 4.5.6. [60, Definição 3.4.16] Sejam $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$ e $\mathcal{I}$ um ideal de operadores. Dizemos que P é *$\mathcal{I}$-limitado* se $P(B_E) \in C_{\langle\mathcal{I}\rangle}$, isto é, se existem um espaço de Banach H e um operador linear $u \in \mathcal{I}(H;F)$ tais que

$$P(B_E) \subset u(B_H). \tag{4.3}$$

Denotaremos o espaço dos polinômios n-homogêneos $\mathcal{I}$-limitados por $\mathcal{P}^{(n)}_{\langle\mathcal{I}\rangle}(^nE;F)$. Também definiremos, como no caso multilinear, uma p-norma em $\mathcal{P}^{(n)}_{\langle\mathcal{I}\rangle}$ através da p-norma de $\mathcal{I}$, da seguinte forma:

$$\|P\|_{\mathcal{P}^{(n)}_{\langle\mathcal{I}\rangle}} = \inf\{\|u\|_{\mathcal{I}}; u \text{ satisfazendo } (4.3)\}.$$

Em [19, Teorema 3.4.17], foi mostrado o seguinte resultado.

Teorema 4.5.7. *Seja $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ um ideal de operadores p-Banach. Então $(\mathcal{P}_{\langle\mathcal{I}\rangle}, \|\cdot\|_{\mathcal{P}_{\langle\mathcal{I}\rangle}})$ é um hiper-ideal de polinômios homogêneos p-Banach.*

Checaremos as condições da coerência forte.

Proposição 4.5.8. *$P \in \mathcal{P}^{(n)}_{\langle\mathcal{I}\rangle}(^nE;F)$ se, e somente se, $\check{P} \in \mathcal{L}^{(n)}_{\langle\mathcal{I}\rangle}(^nE;F)$.*

Demonstração. Dado $P \in \mathcal{P}_{\langle\mathcal{I}\rangle}(^nE;F)$, existem um espaço de Banach H e um operador linear $u \in \mathcal{I}(H;F)$ tais que $P(B_E) \subseteq u(B_H)$. Sejam $x_1, \ldots, x_n \in B_E$ e $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n = \pm 1$. Como $\dfrac{\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n}{n} \in B_E$, existe $z_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n} \in B_H$ tal que

$$P\left(\frac{\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n}{n}\right) = u\left(z_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}\right).$$

Como $w := \dfrac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_j=\pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n z_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n} \in B_H$, segue da Fórmula de Polarização que

$$\begin{aligned}
\check{P}(x_1,\ldots,x_n) &= \frac{1}{n!2^n} \sum_{\epsilon_j=\pm 1} \epsilon_1 \cdots \epsilon_n P(\epsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n) \\
&= \frac{1}{n!2^n} \sum_{\epsilon_j=\pm 1} \epsilon_1 \cdots \epsilon_n n^n P\left(\frac{\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n}{n}\right) \\
&= \frac{n^n}{n!2^n} \sum_{\varepsilon_j=\pm 1} \epsilon_1 \cdots \epsilon_n u(z_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n}) = \frac{n^n}{n!} u(w) \in \frac{n^n}{n!} u(B_H).
\end{aligned}$$

Como $\frac{n^n}{n!} u \in \mathcal{I}(H;F)$, concluímos que $\check{P}(B_E \times \overset{n}{\cdots} \times B_E) \subseteq \frac{n^n}{n!} u(B_H)$, provando que $\check{P} \in \mathcal{L}^{(n)}_{\langle \mathcal{I} \rangle}(^nE;F)$.

Por outro lado, se $\check{P} \in \mathcal{L}_{\langle \mathcal{I} \rangle}(^nE;F)$, então, existem um espaço de Banach H e um operador linear $u \in \mathcal{I}(H;F)$ tais que $\check{P}(B_E \times \overset{n}{\cdots} \times B_E) \subseteq u(B_H)$. Por conseguinte, para qualquer $x \in B_E$,

$$P(x) = \check{P}(x, \overset{n}{\ldots}, x) \in u(H)$$

e, portanto, $P \in \mathcal{P}_{\langle \mathcal{I} \rangle}(^nE;F)$.

□

Proposição 4.5.9. *Sejam $a \in E$ e $P \in \mathcal{P}^{(n+1)}_{\langle \mathcal{I} \rangle}(^{n+1}E;F)$. Então,*

$$P_a \in \mathcal{P}^{(n)}_{\mathcal{I}}(^nE;F)$$

e

$$\|P_a\|_{\mathcal{P}^{(n)}_{\langle \mathcal{I} \rangle}} \leq \|\check{P}\|_{\mathcal{L}^{(n+1)}_{\langle \mathcal{I} \rangle}} \|a\|.$$

Demonstração. Sejam $a \in E$, $a \neq 0$ e $P \in \mathcal{P}^{(n+1)}_{\mathcal{I}}(^{n+1}E;F)$. Pela Proposição 4.5.8,

$$\check{P} \in \mathcal{L}^{(n+1)}_{\langle \mathcal{I} \rangle}(^{n+1}E;F).$$

Logo,

$$\check{P}_a \in \mathcal{L}^{(n)}_{\langle \mathcal{I} \rangle}(^nE;F).$$

Como $\check{P}_a = (P_a)^\vee$, temos $(P_a)^\vee \in \mathcal{L}^{(n)}_{\langle \mathcal{I} \rangle}(^nE;F)$ e portanto,

$$P_a \in \mathcal{P}^{(n)}_{\mathcal{I}}(^nE;F).$$

Como $\check{P} \in \mathcal{L}^{(n+1)}_{\langle \mathcal{I} \rangle}(^{n+1}E;F)$, existem um espaço de Banach H e $u \in \mathcal{I}(H;F)$ tais que

$$\check{P}(B_E \times \overset{n+1}{\cdots} \times B_E) \subset u(B_H).$$

Uma vez que,

$$P_a(x) := \check{P}(a, x, \overset{n}{\ldots}, x) = \check{P}\left(\frac{a}{\|a\|}, x, \ldots, x\right)\|a\|,$$

concluímos que $P_a(x) \in \|a\|u(B_H)$, pois $\|a\|u \in \mathcal{I}(H;F)$. Logo,

$$\|P_a\|_{\mathcal{P}_{\langle\mathcal{I}\rangle}} \leq \|a\|\|u\|_{\mathcal{I}},$$

para todo $u \in \mathcal{I}(H;F)$ tal que $\check{P}(B_E \times \overset{n+1}{\cdots} \times B_E) \subset u(B_H)$. Portanto,

$$\|P_a\|_{\mathcal{P}_{\langle\mathcal{I}\rangle}} \leq \|a\| \left\|\check{P}\right\|_{\mathcal{L}^{(n+1)}_{\langle\mathcal{I}\rangle}}.$$

□

Usando os mesmos argumentos da Proposição 4.5.5, podemos mostrar o seguinte resultado.

Proposição 4.5.10. *Sejam $P \in \mathcal{P}^{(n)}_{\langle\mathcal{I}\rangle}(^nE;F)$ e $Q \in \mathcal{P}(^mE)$. Então,*

$$PQ \in \mathcal{P}^{(n+m)}_{\langle\mathcal{I}\rangle}(^{n+m}E;F) \text{ e } \|PQ\|_{\mathcal{P}^{(n+m)}_{\langle\mathcal{I}\rangle}} \leq \|\check{P}\|_{\mathcal{L}^{(n)}_{\langle\mathcal{I}\rangle}}\|Q\|.$$

Assim, concluímos que o par

$$\left(\left(\mathcal{P}^{(n)}_{\langle\mathcal{I}\rangle}, \|\cdot\|_{\mathcal{P}^{(n)}_{\langle\mathcal{I}\rangle}}\right), \left(\mathcal{L}^{(n)}_{\langle\mathcal{I}\rangle}, \|\cdot\|_{\mathcal{L}^{(n)}_{\langle\mathcal{I}\rangle}}\right)\right)_{n=1}^{N}$$

é fortemente coerente e fortemente compatível com $\mathcal{L}_{\langle\mathcal{I}\rangle}$.

Capítulo 5

Multipolinômios

O conceito de multipolinômio utilizado neste capítulo é o apresentado por T. Velanga em [62]. Esta classe se destaca por apresentar uma unificação no tratamento das aplicações multilineares e polinômios homogêneos, além de contemplar outras classes que ainda não foram estudadas na literatura em espaços de dimensão infinita, como por exemplo, o operador

$$P\colon \ell_1 \times \ell_1 \to \mathbb{K},\ P\left((x_j)_{j=1}^{\infty}, (y_j)_{j=1}^{\infty}\right) = \sum_j x_j^2 y_j^4.$$

Neste capítulo, será apresentada uma nova abordagem para o conceito de multipolinômio. O principal objetivo deste nova abordagem é facilitar o tratamento de certas classes não triviais de multipolinômios. Aplicaremos esta nova proposta na construção dos multipolinômios absolutamente $\gamma_{s,s_1,\ldots,s_m}$ - somantes e também na formulação de um novo conceito de coerência e compatibilidade no contexto dos multipolinômios.

Observação 5.0.1. *Por uma questão de simplicidade utilizaremos durante todo este capítulo as seguintes notações:*

- $L\left({}^{n_1}E_1, \ldots, {}^{n_m}E_m; F\right) := L\left(E_1, \overset{n_1}{\ldots}, E_1, \ldots, E_m, \overset{n_m}{\ldots}, E_m; F\right)$.
- *Para qualquer* $T \in L\left({}^{n_1}E_1, \ldots, {}^{n_m}E_m; F\right)$,

$$T\left(x_1^{n_1}, \ldots, x_m^{n_m}\right) := T\left(x_1, \overset{n_1}{\ldots}, x_1, \ldots, x_m, \overset{n_m}{\ldots}, x_m\right).$$

- $\mathcal{L}_s({}^{n_1+\cdots+n_m}E; F) := \mathcal{L}_s\left(E, {}^{n_1+\cdots+n_m}, E; F\right)$.

5.1 Multipolinômios

Nesta seção, apresentaremos uma nova caracterização para os polinômios $(n_1, \ldots, n_m)$-homogêneos. A fim de explorar esta nova abordagem, definiremos um conceito de simetria

que generaliza o já existente na literatura e também uma versão da Fórmula de Polarização nesse novo contexto de simetria.

Definição 5.1.1. *[62]* Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $(n_1, \ldots, n_m) \in \mathbb{N}^m$. Uma aplicação $P\colon E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$ é dita um *polinômio* $(n_1, \ldots, n_m)$*-homogêneo* se, para cada $i = 1, \ldots, m$, a aplicação

$$P(x_1, \ldots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \ldots, x_m)\colon E_i \longrightarrow F$$

é um polinômio n_i-homogêneo, para qualquer $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m) \in E_1 \times \cdots \times E_{i-1} \times E_{i+1} \times \cdots \times E_m$ fixado. A aplicação P é um *multipolinômio*, se é um polinômio $(n_1, \ldots, n_m)$-homogêneo para algum $(n_1, \ldots, n_m) \in \mathbb{N}^m$. O espaço vetorial de todos os polinômios $(n_1, \ldots, n_m)$-homogêneos de $E_1 \times \cdots \times E_m$ em F é denotado por $\mathcal{MP}_a\left({}^{n_1}E_1, \ldots, {}^{n_m}E_m\ ; F\right)$, enquanto que denotaremos por $\mathcal{MP}\left({}^{n_1}E_1, \ldots, {}^{n_m}E_m; F\right)$ o supespaço vetorial de todos os elementos contínuos de $\mathcal{MP}_a\left({}^{n_1}E_1, \ldots, {}^{n_m}E_m; F\right)$. Quando $F = \mathbb{K}$, escrevemos simplesmente $\mathcal{MP}_a\left({}^{n_1}E_1, \ldots, {}^{n_m}E_m\right)$ ou $\mathcal{MP}\left({}^{n_1}E_1, \ldots, {}^{n_m}E_m\right)$. Quando munimos $\mathcal{MP}\left({}^{n_1}E_1, \ldots, {}^{n_m}E_m; F\right)$ com a norma

$$\|P\| = \sup\left\{\|P(x_1, \ldots, x_m)\|\colon x_i \in B_{E_i},\ i = 1, \ldots, m\right\},$$

este espaço torna-se um espaço de Banach.

Proposição 5.1.2. *P é um polinômio $(n_1, \ldots, n_m)$-homogêneo se, e somente se, existe $T \in L({}^{n_1}E_1, \ldots, {}^{n_m}E_m; F)$ tal que*

$$P(x_1, \ldots, x_m) = T\left(x_1^{n_1}, \ldots, x_m^{n_m}\right),$$

para quaisquer $x_i \in E_i$ $i = 1, \ldots, m$.

Demonstração. $\Leftarrow$ É imediato.

$\Rightarrow$ Seguindo as mesmas ideias de [63, Teorema 2.1] podemos mostrar que, sendo $B_{E_i} = \{e_j^{(i)}\}_{j \in J_i}$ a base de Hamel de E_i e $\xi^{(i)}_{j_{n_i}^{(i)}}$ os funcionais coordenados correspondentes, para cada $i = 1, \ldots, m$, qualquer polinômio $(n_1, \ldots, n_m)$-homogêneo $P\colon E_1 \times \cdots \times E_m \to F$ pode ser unicamente representado na forma

$$P(x_1, \ldots, x_m) =$$
$$\sum_{j_1^{(1)}, \ldots, j_{n_1}^{(1)} \in J_1} \cdots \sum_{j_1^{(m)}, \ldots, j_{n_m}^{(m)} \in J_m} b_{j_1^{(1)}, \ldots, j_{n_1}^{(1)}, \ldots, j_1^{(m)}, \ldots j_{n_m}^{(m)}} \left(\xi^{(1)}_{j_1^{(1)}} \cdots \xi^{(1)}_{j_{n_1}^{(1)}}\right)(x_1) \cdots \left(\xi^{(m)}_{j_1^{(m)}} \cdots \xi^{(m)}_{j_{n_m}^{(m)}}\right)(x_m).$$

onde

$$b_{j_1^{(1)}, \ldots, j_{n_1}^{(1)}, \ldots, j_1^{(m)}, \ldots j_{n_m}^{(m)}}$$

$$= \frac{1}{2^{n_1+\cdots+n_m} n_1! \cdots n_m!} \sum_{\epsilon_i^{(j)}=\pm 1} \prod_{i=1}^{m} \epsilon_1^{(i)} \cdots \epsilon_{n_m}^{(i)} P\left(\sum_{k=1}^{n_1} \epsilon_k^{(1)} e_k^{(1)}, \ldots, \sum_{k=1}^{n_m} \epsilon_k^{(m)} e_k^{(m)} \right).$$

Defina

$$T\colon E_1 \times \overset{n_1}{\cdots} \times E_1 \times \cdots \times E_m \overset{n_m}{\cdots} \times E_m \to F$$

dada por,

$$T\left(x_1^{(1)}, \ldots, x_{n_1}^{(1)}, \ldots, x_1^{(m)}, \ldots, x_{n_m}^{(m)}\right) =$$
$$\sum_{\substack{j_1^{(i)}, \ldots, j_{n_i}^{(i)} \in J_i \\ i=1,\ldots,m}} b_{j_1^{(1)},\ldots,j_{n_1}^{(1)},\ldots,j_1^{(m)},\ldots j_{n_m}^{(m)}} \xi_{j_1^{(1)}}^{(1)}\left(x_1^{(1)}\right) \cdots \xi_{j_{n_1}^{(1)}}^{(1)}\left(x_{n_1}^{(1)}\right) \cdots \xi_{j_1^{(m)}}^{(m)}\left(x_1^{(m)}\right) \cdots \xi_{j_{n_m}^{(m)}}^{(m)}\left(x_{n_m}^{(m)}\right).$$

É fácil ver que B é uma aplicação $(n_1 + \cdots + n_m)$-linear e que

$$P(x_1, \ldots, x_m) = T\left(x_1, \overset{n_1}{\ldots}, x_1, \ldots, x_m, \overset{n_m}{\ldots}, x_m\right).$$

$\square$

A próxima definição apresentará o conceito de aplicações multilineares $(n_1, \ldots, n_m)$ - simétricas, sendo esta necessária para garantir que cada polinômio $(n_1, \ldots, n_m)$-homogêneo pode ser associado com uma, e apenas uma, aplicação multilinear $(n_1, \ldots, n_m)$-simétrica.

Definição 5.1.3. Seja $T \in L\left({}^{n_1}E_1, \ldots, {}^{n_m}E_m; F\right)$. Dizemos que T é $(n_1, \ldots, n_m)$-simétrica quando,

$$T\left(x_{\sigma_1(1)}^{(1)}, \ldots, x_{\sigma_1(n_1)}^{(1)}, \ldots, x_{\sigma_m(1)}^{(m)}, \ldots, x_{\sigma_m(n_m)}^{(m)}\right) = T\left(x_1^{(1)}, \ldots, x_{n_1}^{(1)}, \ldots, x_1^{(m)}, \ldots, x_{n_m}^{(m)}\right)$$

para quaisquer $\sigma_i \in S_{n_i}$, $i = 1, \ldots, m$.

A Definição 5.1.3 pode ser pensada como uma simetrização por blocos e foi motivada pela [65, Definição 1.1].

Exemplos 5.1.4. (1) Sejam $E_1 = \mathbb{R}$ e $E_2 = \mathbb{C}$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. A aplicação 4-linear $T\colon E_1 \times E_1 \times E_2 \times E_2 \to \mathbb{C}$, dada por

$$T(x, y, \alpha, \beta) = xy\alpha\beta$$

é $(2,2)$-simétrica, mas não é simétrica, pois $E_1 \neq E_2$.

(2) Sejam $E_1 = E_2 = \mathbb{R}^2$. Então, a aplicação 4-linear $T\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada

por

$$T\left((x,y),(z,w),(a,b),(c,d)\right) = xzbd$$

é $(2,2)$-simétrica, mas não é simétrica, ainda que tenhamos $E_1 = E_2$.

O espaço vetorial de todas as aplicações $(n_1+\cdots+n_m)$-lineares $(n_1,\ldots,n_m)$-simétricas saindo de $E_1 \times \overset{n_1}{\cdots} \times E_1 \times \cdots \times E_m \times \overset{n_m}{\cdots} \times E_m$ e chegando em F será denotado por $L_s^{(n_1,\ldots,n_m)}(^{n_1}E_1,\ldots,^{n_m}E_m;F)$, enquanto que denotaremos por $\mathcal{L}_s^{(n_1,\ldots,n_m)}(^{n_1}E_1,\ldots,^{n_m}E_m;F)$ o subespaço vetorial de todos os elementos contínuos de $L_s^{(n_1,\ldots,n_m)}(^{n_1}E_1,\ldots,^{n_m}E_m;F)$.

A prova da proposição seguinte é imediata e por isso será omitida.

Proposição 5.1.5.

(a) *Sendo E e F espaços de Banach, a seguinte inclusão é sempre verdadeira*

$$\mathcal{L}_s(^{n_1+\cdots+n_m}E;F) \subset \mathcal{L}_s^{(n_1,\ldots,n_m)}(^{n_1}E,\ldots,^{n_m}E;F).$$

Quando $dimE > 1$, a inclusão acima será própria.

(b) *Se E é um espaço vetorial de dimensão 1 sobre $\mathbb{K}$, então*

$$\mathcal{L}_s(^{n_1+\cdots+n_m}E;F) = \mathcal{L}_s^{(n_1,\ldots,n_m)}(^{n_1}E,\ldots,^{n_m}E;F).$$

Um fato bem conhecido é o seguinte: nem toda aplicação $(n_1+\cdots+n_m)$-linear é $(n_1,\ldots,n_m)$-simétrica. O próximo resultado mostra que qualquer aplicação $(n_1+\cdots+n_m)$-linear pode ser $(n_1,\ldots,n_m)$ - simetrizada, cuja prova pode ser obtida aplicando a simetrização para aplicações multilineares em cada bloco.

Lema 5.1.6. *Seja $T \in L(^{n_1}E_1,\ldots,^{n_m}E_m;F)$. A aplicação*

$$\begin{aligned} &T_s^{(n_1,\ldots,n_m)}\left(x_1^{(1)},\ldots,x_{n_1}^{(1)},\ldots,x_1^{(m)},\ldots,x_{n_m}^{(m)}\right) \\ &= \frac{1}{n_1!\cdots n_m!} \sum_{\substack{\sigma_i \in S_{n_i} \\ i=1,\ldots,m}} T_{\sigma_1,\ldots,\sigma_m}\left(x_1^{(1)},\ldots,x_{n_1}^{(1)},\ldots,x_1^{(m)},\ldots,x_{n_m}^{(m)}\right), \end{aligned}$$

onde

$$T_{\sigma_1,\ldots,\sigma_m}\left(x_1^{(1)},\ldots,x_{n_1}^{(1)},\ldots,x_1^{(m)},\ldots,x_{n_m}^{(m)}\right) = T\left(x_{\sigma_1(1)}^{(1)},\ldots,x_{\sigma_1(n_1)}^{(1)},\ldots,x_{\sigma_m(1)}^{(1)},\ldots,x_{\sigma_m(n_m)}^{(m)}\right),$$

é $(n_1,\ldots,n_m)$-simétrica e é chamada de $(n_1,\ldots,n_m)$-simetrização de T.

Corolário 5.1.7. *Seja $T \in \mathcal{L}(^{n_1}E_1,\ldots,^{n_m}E_m;F)$. Então,*

$$T(x_1,\overset{n_1}{\ldots},x_1,\ldots,x_m,\overset{n_m}{\ldots},x_m) = T_s^{(n_1,\ldots,n_m)}(x_1,\overset{n_1}{\ldots},x_1,\ldots,x_m,\overset{n_m}{\ldots},x_m).$$

Podemos também obter uma versão da Fórmula de Polarização neste novo contexto de simetria.

Proposição 5.1.8. (***Fórmula de*** $(n_1,\ldots,n_m)$***-Polarização***) *Sejam* $E_1,\ldots,E_m$ *e* F *espaços de Banach. Se* $T\in L_s^{(n_1,\ldots,n_m)}({}^{n_1}E_1,\ldots,{}^{n_m}E_m;F)$*, então*

$$T\left(x_1^{(1)},\ldots,x_{n_1}^{(1)},x_1^{(2)},\ldots,x_{n_2}^{(2)},\ldots,x_1^{(m)},\ldots,x_{n_m}^{(m)}\right)=$$
$$\mathcal{A}_{n_1,\ldots,n_m}\prod_{k=1}^{m}\left(\sum_{\epsilon_i^{(k)}=\pm1}\epsilon_1^{(k)}\cdots\epsilon_{n_k}^{(k)}\right)T\left(\left(x_0^{(1)}+\sum_{i=1}^{n_1}\epsilon_i^{(1)}x_i^{(1)}\right)^{n_1},\ldots,\left(x_0^{(m)}+\sum_{i=1}^{n_m}\epsilon_i^{(m)}x_i^{(m)}\right)^{n_m}\right)$$

para quaisquer $x_0^{(i)},x_1^{(i)},\ldots,x_{n_i}^{(i)}\in E_i$*,* $i=1,\ldots,m$*, onde* $\mathcal{A}_{n_1,\ldots,n_m}=\dfrac{1}{2^{n_1+\cdots+n_m}n_1!\cdots n_m!}$.

Demonstração. Seja $T\in L_s^{(n_1,\ldots,n_m)}({}^{n_1}E_1,\ldots,{}^{n_m}E_m;F)$. Para quaisquer $x_0^{(i)},x_1^{(i)},\ldots,x_{n_i}^{(i)}\in E_i$, $i=1,\ldots,m$, temos

$$\begin{aligned}
&T\left(x_1^{(1)},\ldots,x_{n_1}^{(1)},x_1^{(2)},\ldots,x_{n_2}^{(2)},\ldots,x_1^{(m)},\ldots x_{n_m}^{(m)}\right)\\
&=T_{x_1^{(2)},\ldots,x_{n_m}^{(m)}}\left(x_1^{(1)},\ldots,x_{n_1}^{(1)}\right)\\
&=\frac{1}{2^{n_1}n_1!}\sum_{\epsilon_i^{(1)}=\pm1}\epsilon_1^{(1)}\cdots\epsilon_{n_1}^{(1)}T_{x_1^{(2)},\ldots,x_{n_m}^{(m)}}\left(x_0^{(1)}+\sum_{i=1}^{n_1}\epsilon_i^{(1)}x_i^{(1)}\right)^{n_1}\\
&=\frac{1}{2^{n_1}n_1!}\sum_{\epsilon_i^{(1)}=\pm1}\epsilon_1^{(1)}\cdots\epsilon_{n_1}^{(1)}T\left(\left(x_0^{(1)}+\sum_{i=1}^{n_1}\epsilon_i^{(1)}x_i^{(1)}\right)^{n_1},x_1^{(2)},\ldots,x_{n_m}^{(m)}\right).
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
&T\left(\left(x_0^{(1)}+\sum_{i=1}^{n_1}\epsilon_i^{(1)}x_i^{(1)}\right)^{n_1},x_1^{(2)},\ldots,x_{n_m}^{(m)}\right)\\
&=T_{\left(x_0^{(1)}+\sum_{i=1}^{n_1}\epsilon_i^{(1)}x_i^{(1)}\right)^{n_1},x_1^{(3)},\ldots,x_{n_m}^{(m)}}\left(x_1^{(2)},\ldots,x_{n_2}^{(2)}\right)\\
&=\frac{1}{2^{n_2}n_2!}\sum_{\epsilon_i^{(2)}=\pm1}\epsilon_1^{(2)}\cdots\epsilon_{n_2}^{(2)}T\left(\left(x_0^{(1)}+\sum_{i=1}^{n_1}\epsilon_i^{(1)}x_i^{(1)}\right)^{n_1},\left(x_0^{(2)}+\sum_{i=1}^{n_2}\epsilon_i^{(2)}x_i^{(2)}\right)^{n_2},x_1^{(3)},\ldots,x_{n_m}^{(m)}\right),
\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}
&T(x_1^{(1)},\ldots,x_{n_1}^{(1)},\ldots,x_1^{(m)},\ldots,x_{n_m}^{(m)})=\\
&\mathcal{A}_{n_1,n_2}\prod_{k=1}^{2}\left(\sum_{\epsilon_i^{(k)}=\pm1}\begin{matrix}\epsilon_1^{(1)}\cdots\\ \cdots\epsilon_{n_k}^{(k)}\end{matrix}\right)T\left(\begin{matrix}\left(x_0^{(1)}+\sum_{i=1}^{n_1}\epsilon_i^{(1)}x_i^{(1)}\right)^{n_1},\left(x_0^{(2)}+\sum_{i=1}^{n_2}\epsilon_i^{(2)}x_i^{(2)}\right)^{n_2}\\ ,x_1^{(3)},\ldots,x_{n_m}^{(m)}\end{matrix}\right),
\end{aligned}$$

onde

$$\mathcal{A}_{n_1,n_2} = \frac{1}{2^{n_1+n_2} n_1! n_2!}.$$

Repetindo este processo, obtemos

$$T\left(x_1^{(1)}, \ldots, x_{n_1}^{(1)}, x_1^{(2)}, \ldots, x_{n_2}^{(2)}, \ldots, x_1^{(m)}, \ldots, x_{n_m}^{(m)}\right) =$$

$$\mathcal{A}_{n_1,\ldots,n_m} \prod_{k=1}^{m} \left(\sum_{\epsilon_i^{(k)}=\pm 1} \epsilon_1^{(k)} \cdots \epsilon_{n_k}^{(k)} \right) T\left(\left(x_0^{(1)} + \sum_{i=1}^{n_1} \epsilon_i^{(1)} x_i^{(1)} \right)^{n_1}, \ldots, \left(x_0^{(m)} + \sum_{i=1}^{n_m} \epsilon_i^{(m)} x_i^{(m)} \right)^{n_m} \right),$$

onde

$$\mathcal{A}_{n_1,\ldots,n_m} = \frac{1}{2^{n_1+\cdots+n_m} n_1! \cdots n_m!}.$$

□

Uma consequência imediata da Fórmula de $(n_1, \ldots, n_m)$-Polarização, é o seguinte resultado.

Corolário 5.1.9. *Sejam $E_1, \ldots, E_m$ e F espaços de Banach e*

$$T, R \in \mathcal{L}_s^{(n_1,\ldots,n_m)}(^{n_1}E_1, \ldots, ^{n_m}E_m; F).$$

Se $T(x_1, \overset{n_1}{\ldots}, x_1, \ldots, x_m, \overset{n_m}{\ldots}, x_m) = R(x_1, \overset{n_1}{\ldots}, x_1, \ldots, x_m, \overset{n_m}{\ldots}, x_m)$ para quaisquer $x_i \in E_i$ $i = 1, \ldots, m$, então

$$T(x_1^{(1)}, \ldots, x_{n_1}^{(1)}, \ldots, x_1^{(m)}, \ldots, x_{n_m}^{(m)}) = R(x_1^{(1)}, \ldots, x_{n_1}^{(1)}, \ldots, x_1^{(m)}, \ldots, x_{n_m}^{(m)}),$$

para quaisquer $x_1^{(i)}, \ldots, x_{n_i}^{(i)} \in E_i$, $i = 1, \ldots, m$.

O próximo resultado estabelece que cada polinômio $(n_1, \ldots, n_m)$-homogêneo pode ser associado a uma, e apenas uma, aplicação $(n_1 + \cdots + n_m)$-linear $(n_1, \ldots, n_m)$-simétrica.

Proposição 5.1.10. *Seja $P \in \mathcal{MP}(^{n_1}E_1, \ldots, ^{n_m}E_m; F)$. Então existe uma, e somente uma, aplicação $(n_1 + \cdots + n_m)$-linear $(n_1, \ldots, n_m)$-simétrica*

$$\check{P} \in \mathcal{L}_s^{(n_1,\ldots,n_m)}(^{n_1}E_1, \ldots .^{n_m}E_m; F),$$

tal que

$$P(x_1, \ldots, x_m) = \check{P}(x_1, \overset{n_1}{\ldots}, x_1, \ldots, x_m, \overset{n_m}{\ldots}, x_m)$$

para quaisquer $x_i \in E_i$, $i = 1, \ldots, m$.

Demonstração. Seja $P \in \mathcal{MP}(^{n_1}E_1, \ldots, ^{n_m}E_m; F)$. Pela Proposição 5.1.2 e pelo Corolário 5.1.7 existe $T \in \mathcal{L}(^{n_1}E_1, \ldots, ^{n_m}E_m; F)$ tal que

$$P(x_1, \ldots, x_m) = T(x_1, \overset{n_1}{\ldots}, x_1, \ldots, x_m, \overset{n_m}{\ldots}, x_m)$$

$$= T_s^{(n_1,\ldots,n_m)}(x_1, \overset{n_1}{\ldots}, x_1, \ldots, x_m, \overset{n_m}{\ldots}, x_m),$$

para quaisquer $x_i \in E_i$, $i = 1, \ldots, m$, o que mostra a existência. Para mostrar a unicidade, suponha que exista $R \neq \check{P} \in \mathcal{L}_s^{(n_1,\ldots,n_m)}(^{n_1}E_1, \ldots .^{n_m}E_m; F)$ tal que

$$P(x_1, \ldots, x_m) = R(x_1, \overset{n_1}{\ldots}, x_1, \ldots, x_m, \overset{n_m}{\ldots}, x_m)$$

para quaisquer $x_i \in E_i$, $i = 1, \ldots, m$. Desta forma,

$$\check{P}(x_1, \overset{n_1}{\ldots}, x_1, \ldots, x_m, \overset{n_m}{\ldots}, x_m) = R(x_1, \overset{n_1}{\ldots}, x_1, \ldots, x_m, \overset{n_m}{\ldots}, x_m)$$

para quaisquer $x_i \in E_i$, $i = 1, \ldots, m$ e segue diretamente do Corolário 5.1.9 que $\check{P} = R$.

□

Como feito na teoria dos polinômios homogêneos, podemos associar cada $T \in \mathcal{L}(^{n_1}E_1, \ldots, ^{n_m}E_m; F)$ a um polinômio $(n_1, \ldots, n_m)$-homogêneo, denotado por $\hat{T}$, fazendo

$$\hat{T}(x_1, \ldots, x_m) = T(x_1, \overset{n_1}{\ldots}, x_1, \ldots, x_m, \overset{n_m}{\ldots}, x_m).$$

Proposição 5.1.11. *Sejam $E_1, \ldots, E_m$ e F espaços de Banach. Então, a aplicação*

$$\Phi\colon \mathcal{L}_s^{(n_1,\ldots,n_m)}(^{n_1}E_1, \ldots, ^{n_m}E_m; F) \to \mathcal{MP}(^{n_1}E_1, \ldots, ^{n_m}E_m; F)$$

definida por, $\Phi(T) = \hat{T}$, é um isomorfismo. E ainda,

$$\|\hat{T}\| \leq \|T\| \leq \frac{n_1^{n_1} \cdots n_m^{n_m}}{n_1! \cdots n_m!} \|\hat{T}\|.$$

Demonstração. Não é difícil mostrar que Φ é linear e um isomorfismo.

Seja $T \in \mathcal{L}_s^{(n_1,\ldots,n_m)}(^{n_1}E_1, \ldots, ^{n_m}E_m; F)$. Como

$$\|\hat{T}(x_1, \ldots, x_m)\| = \|T(x_1, \overset{n_1}{\ldots}, x_1, \ldots, x_m, \overset{n_m}{\ldots}, x_m))\| \leq \|T\| \|x_1\|^{n_1} \cdots \|x_m\|^{n_m},$$

temos $\|\hat{T}\| \leq \|T\|$. Por outro lado, seja $\left(x_1^{(i)}, \ldots, x_{n_i}^{(i)}\right) \in E_i \times \overset{n_i}{\cdots} \times E_i$ com $\left\|\left(x_1^{(i)}, \ldots, x_{n_i}^{(i)}\right)\right\| \leq 1$, para todo $i = 1, \ldots, m$. Usando a Fórmula de $(n_1, \ldots, n_m)$-Polarização, com $x_0^{(1)} = \cdots = x_0^{(m)} = 0$, temos

$$\begin{aligned}
&\|T(x_1, \overset{n_1}{\ldots}, x_1, \ldots, x_m, \overset{n_m}{\ldots}, x_m))\| \\
&\leq \mathcal{A}_{n_1,\ldots,n_m} \prod_{j=1}^{m} \left(\sum_{\epsilon_i^{(j)} = \pm 1} \left| \epsilon_1^{(j)} \cdots \epsilon_{n_j}^{(j)} \right| \right) \left\| T\left(\left(\sum_{i=1}^{n_1} \epsilon_i^{(1)} x_i^{(1)} \right)^{n_1}, \ldots, \left(\sum_{i=1}^{n_m} \epsilon_i^{(m)} x_i^{(m)} \right)^{n_m} \right) \right\|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathcal{A}_{n_1,\ldots,n_m} \prod_{j=1}^{m} \left(\sum_{\epsilon_i^{(j)}=\pm 1} \left| \epsilon_1^{(j)} \cdots \epsilon_{n_j}^{(j)} \right| \right) \left\| \hat{T} \left(\sum_{i=1}^{n_1} \epsilon_i^{(1)} x_i^{(1)}, \ldots, \sum_{i=1}^{n_m} \epsilon_i^{(m)} x_i^{(m)} \right) \right\| \\
&\leq \mathcal{A}_{n_1,\ldots,n_m} \prod_{j=1}^{m} \left(\sum_{\epsilon_i^{(j)}=\pm 1} \left| \epsilon_1^{(j)} \cdots \epsilon_{n_j}^{(j)} \right| \right) \|\hat{T}\| \left\| \sum_{i=1}^{n_1} \epsilon_i^{(1)} x_i^{(1)} \right\|^{n_1} \cdots \left\| \sum_{i=1}^{n_m} \epsilon_i^{(m)} x_i^{(m)} \right\|^{n_m} \\
&\leq \mathcal{A}_{n_1,\ldots,n_m} \prod_{j=1}^{m} \left(\sum_{\epsilon_i^{(j)}=\pm 1} \left| \epsilon_1^{(j)} \cdots \epsilon_{n_j}^{(j)} \right| \right) \|\hat{T}\| \left(\sum_{i=1}^{n_1} \left\| x_i^{(1)} \right\| \right)^{n_1} \cdots \left(\sum_{i=1}^{n_m} \left\| x_i^{(m)} \right\| \right)^{n_m} \\
&\leq \frac{n_1^{n_1} \cdots n_m^{n_m}}{n_1! \cdots n_m!} \|\hat{T}\|,
\end{aligned}
$$

onde $\mathcal{A}_{n_1,\ldots,n_m} = \frac{1}{2^{n_1+\cdots+n_m} n_1! \cdots n_m!}$. □

Corolário 5.1.12. *Seja $P \in \mathcal{MP}(^{n_1}E_1 \ldots, ^{n_m}E_m; F)$. Então,*

$$\|P\| \leq \|\check{P}\| \leq \frac{n_1^{n_1} \cdots n_m^{n_m}}{n_1! \cdots n_m!} \|P\|.$$

A Fórmula de Polarização assume um papel fundamental na teoria dos polinômios homogêneos, pois usando-a podemos obter a tão importante desigualdade de polarização ([39, Teorema 2.2]), a qual diz o seguinte: se E e F são espaços vetoriais normados e $P\colon E \to F$ é um polinômio m-homogêneo, então, existe uma constante $c(m, E)$ tal que

$$\|P\| \leq \|\check{P}\| \leq c(m, E)\|P\|$$

onde $\check{P}\colon E \times \overset{m}{\cdots} \times E \to F$ é a única aplicação multilinear simétrica associada a P. Seguindo esta ideia, porém, em seu contexto, foi mostrado em [65, Teorema 3.2] a seguinte desigualdade,

$$\|P\| \leq \|\check{P}\| \leq \frac{(n_1 + n_2)^{(n_1+n_2)}}{n_1! n_2!} \|P\| \tag{5.1}$$

como consequência da Fórmula de Polarização. Utilizando a Fórmula de $(n_1, \ldots, n_m)$-Polarização, obtemos no Corolário 5.1.12 uma constante mais precisa para a desigualdade (superior) de polarização em nosso contexto, pois

$$\frac{n_1^{n_1} n_2^{n_2}}{n_1! n_2!} \leq \frac{(n_1 + n_2)^{(n_1+n_2)}}{n_1! n_2!}.$$

O próximo exemplo mostra que esta constante é a melhor possível. A inspiração para a construção deste exemplo vem dos polinômios de Nachbin e segue as mesmas ideias de [1, Exemplo 1.2.3].

Exemplo 5.1.13. Sejam $E_1 = \cdots = E_m = \ell_1(\mathbb{C})$, onde

$$\ell_1(\mathbb{C}) = \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}};\ \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| < \infty \right\}.$$

A norma sobre $\ell_1(\mathbb{C})$ é definida por

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|.$$

Dados $m, n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$, defina a aplicação $(n_1 + \cdots + n_m)$-linear

$$A_{n_1,\ldots,n_m} \colon \ell_1 \times \overset{n_1}{\cdots} \times \ell_1 \times \cdots \ell_1 \times \overset{n_m}{\cdots} \times \ell_1 \to \mathbb{K}$$

dada por

$$\begin{aligned} &A_{n_1,\ldots,n_m}\left(\left(x_j^{(1,1)}\right)_{j=1}^{\infty}, \ldots, \left(x_j^{(1,n_1)}\right)_{j=1}^{\infty}, \ldots, \left(x_j^{(m,1)}\right)_{j=1}^{\infty}, \ldots, \left(x_j^{(m,n_m)}\right)_{j=1}^{\infty} \right) \\ &= \frac{1}{n_1! \cdots n_m!} \sum_{\substack{\sigma_i \in S_{n_i} \\ i = 1, \ldots, m}} x_1^{(1,\sigma_1(1))} \cdots x_{n_1}^{(1,\sigma_1(n_1))} \cdots x_1^{(m,\sigma_m(1))} \cdots x_{n_m}^{(m,\sigma_m(n_m))}. \end{aligned}$$

Não é difícil ver que $\|A_{n_1,\ldots,n_m}\| = \frac{1}{n_1! \cdots n_m!}$. Como

$$\begin{aligned} \hat{A}_{n_1,\ldots,n_m}\left(\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}, \ldots, \left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty} \right) &= A_{n_1,\ldots,n_m}\left(\left(\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty} \right)^{n_1}, \ldots, \left(\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty} \right)^{n_m} \right) \\ &= x_1^{(1)} \cdots x_{n_m}^{(1)} \cdots x_1^{(m)} \cdots x_{n_m}^{(m)} \end{aligned}$$

sempre que $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1(\mathbb{C})$, $i = 1, \ldots, m$, não é difícil provar que

$$\|\hat{A}_{n_1,\ldots,n_m}\| = \frac{1}{n_1^{n_1} \cdots n_m^{n_m}}.$$

Relembraremos agora o conceito de ideal de multipolinômos, introduzido por Velanga em [62]. Primeiro definiremos o conceito de polinômios $(n_1, \ldots, n_m)$-homogêneos de tipo finito.

Definição 5.1.14. *[62, Definição 4.1]* Sejam $E_1, \ldots, E_m, F$ espaços normados. Um polinômio $(n_1, \ldots, n_m)$-homogêneo contínuo $P \colon E_1 \times \cdots \times E_m \to F$ é dito de tipo finito, se existem $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_i^{(j)} \in E_j'$ e $b_i \in F$ com $i = 1, \ldots, k$ e $j = 1, \ldots, m$ tais que

$$P(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i^{(1)}(x_1)^{n_1} \cdots \varphi_i^{(m)}(x_m)^{n_m} b_i.$$

Passemos ao conceito de ideal de multipolinômos.

Definição 5.1.15. *[62, Definição 4.2]* Para cada $m, n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$, denotaremos por $\mathcal{MP}_m^{(n_1,\ldots,n_m)}$, a classe de todos polinômios $(n_1, \ldots, n_m)$-homogêneos contínuos entre espaços de Banach. Um ideal de multipolinômios $\mathcal{U}$ é uma subclasse da classe

$$\bigcup_{m=1}^{\infty}\left(\bigcup_{(n_1,\ldots,n_m)\in\mathbb{N}^m}\mathcal{MP}_m^{(n_1,\ldots,n_m)}\right)$$

de todos os multipolinômios entre espaços de Banach tal que para todos $m \in \mathbb{N}$, $(n_1, \ldots, n_m) \in \mathbb{N}^m$ e quaisquer espaços de Banach $E_1, \ldots, E_m$ e F, as componentes

$$\mathcal{U}_m^{(n_1,\ldots,n_m)}(^{n_1}E_1, \ldots, ^{n_m}E_m; F) := \mathcal{MP}_m^{(n_1,\ldots,n_m)}(^{n_1}E_1, \ldots, ^{n_m}E_m; F) \cap \mathcal{U}$$

satisfazem:

(a) A componente $\mathcal{U}_m^{(n_1,\ldots,n_m)}(^{n_1}E_1, \ldots, ^{n_m}E_m; F)$ é um subespaço vetorial de

$$\mathcal{MP}_m^{(n_1,\ldots,n_m)}(^{n_1}E_1, \ldots, ^{n_m}E_m; F)$$

que contém os polinômios $(n_1, \ldots, n_m)$-homogêneos de tipo finito;

(b) *Propriedade de ideal*: Se $P \in \mathcal{U}_m^{(n_1,\ldots,n_m)}(^{n_1}E_1, \ldots, ^{n_m}E_m; F)$, $u_j \in \mathcal{L}(G_j; E_j)$ para $j = 1, \ldots, m$, e $t \in \mathcal{L}(F; H)$, então,

$$t \circ P \circ (u_1, \ldots, u_j) \in \mathcal{U}_m^{(n_1,\ldots,n_m)}(^{n_1}G_1, \ldots, ^{n_m}G_m; H).$$

$\mathcal{U}$ é dito um ideal (quase)-normado de multipolinômios, se existe uma função $\|\cdot\|_{\mathcal{U}} \colon \mathcal{U} \to [0.\infty)$ satisfazendo:

1. $\|\cdot\|_{\mathcal{U}}$ restrita a $\mathcal{U}_m^{(n_1,\ldots,n_m)}(^{n_1}E_1, \ldots, ^{n_m}E_m; F)$ é uma (quase)-norma, para todos $m \in \mathbb{N}$, $(n_1, \ldots, n_m) \in \mathbb{N}^m$ e $E_1, \ldots, E_m, F$ espaços de Banach;

2. $\left\| id_m^{(n_1,\ldots,n_m)} \colon \mathbb{K}^m \to \mathbb{K} \colon id_m^{(n_1,\ldots,n_m)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \lambda_1^{n_1} \cdots, \lambda_m^{n_m} \right\|_{\mathcal{U}} = 1$ para todos $m \in \mathbb{N}$ e $(n_1, \ldots, n_m) \in \mathbb{N}^m$;

3. Se $P \in \mathcal{U}_m^{(n_1,\ldots,n_m)}(^{n_1}E_1, \ldots, ^{n_m}E_m; F)$, $u_j \in \mathcal{L}(G_j; E_j)$, para $j = 1, \ldots, m$, e $t \in \mathcal{L}(F; H)$, então,

$$\|t \circ P \circ (u_1, \ldots, u_j)\|_{\mathcal{U}} \leq \|t\| \|P\|_{\mathcal{U}} \|u_1\|^{n_1} \cdots \|u_m\|^{n_m}.$$

Quando todas as componentes $\mathcal{U}_m^{(n_1,\ldots,n_m)}(^{n_1}E_1, \ldots, ^{n_m}E_m; F)$ são completas sobre a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{U}}$ acima, então, $\mathcal{U}$ é chamado ideal (quasi-) Banach de multipolinômios.

Fixados um ideal de multipolinômios $\mathcal{U}$ e $m, n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$, a classe

$$\mathcal{U}_m^{(n_1,\ldots,n_m)} = \bigcup_{E_1,\ldots,E_m,F} \mathcal{U}_m^{(n_1,\ldots,n_m)}(^{n_1}E_1, \ldots, ^{n_m}E_m; F)$$

é chamada ideal de polinômios $(n_1, \ldots, n_m)$-homogêneos.

No próximo resultado, utilizaremos a seguinte notação:

$$\mathcal{MP}^{(n_1+\cdots+n_m)} = \mathcal{MP}\left(^{n_1}(\cdot), \ldots, ^{n_m}(\cdot); (\cdot)\right).$$

Teorema 5.1.16. *Seja $\mathcal{M}$ um ideal de aplicações $(n_1 + \cdots + n_m)$-lineares e defina*

$$\mathcal{MP}_{\mathcal{M}} := \{P \in \mathcal{MP}^{(n_1+\cdots+n_m)};\ \check{P} \in \mathcal{M}\}.$$

Então, $\mathcal{MP}_{\mathcal{M}}$ é um ideal de polinômios $(n_1, \ldots, n_m)$-homogêneos. Se $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ é um ideal normado de aplicações $(n_1 + \cdots + n_m)$-linear, então, definindo

$$\|P\|_{\mathcal{MP}_{\mathcal{M}}} := \|\check{P}\|_{\mathcal{M}}$$

temos que

$$(\mathcal{MP}_{\mathcal{M}}, \|\cdot\|_{\mathcal{MP}_{\mathcal{M}}})$$

é um ideal normado de polinômios $(n_1, \ldots, n_m)$-homogêneos.

Demonstração. Não é difícil perceber que, para quaisquer $E_1, \ldots, E_m$ e F espaços de Banach,

$$\mathcal{MP}_{\mathcal{M}}(^{n_1}E_1, \ldots, ^{n_m}E_m; F)$$

é um subespaço vetorial de $\mathcal{MP}(^{n_1}E_1, \ldots, ^{n_m}E_m; F)$ e que este espaço contém os polinômios $(n_1, \ldots, n_m)$-homogêneos de tipo finito.

Agora sejam $G_1, \ldots, G_m, E_1, \ldots, E_m, F$ e H espaços de Banach,

$$P \in \mathcal{MP}_{\mathcal{M}}(^{n_1}E_1, \ldots, ^{n_m}E_m; F),$$

$t \in \mathcal{L}(F; H)$ e $u_j \in \mathcal{L}(G_j; E_j)$, $j = 1, \ldots, m$. Então, pela Fórmula de $(n_1, \ldots, n_m)$-Polarização, com $x_0^{(1)}, \ldots, x_0^{(m)} = 0$, temos,

$$\begin{aligned}
&(t \circ P \circ (u_1, \ldots, u_m))^{\vee}\left(x_1^{(1)}, \ldots, x_{n_1}^{(1)}, \ldots, x_1^{(m)}, \ldots, x_{n_m}^{(m)}\right)\\
=&\mathcal{C}_{n_1,\ldots,n_m}(t \circ P \circ (u_1, \ldots, u_m))^{\vee}\left(\left(\sum_{i=1}^{n_1}\epsilon_i^{(1)}x_i^{(1)}\right)^{n_1}, \ldots, \left(\sum_{i=1}^{n_m}\epsilon_i^{(m)}x_i^{(m)}\right)^{n_m}\right)\\
=&t\left(\mathcal{C}_{n_1,\ldots,n_m}P\left(\sum_{i=1}^{n_1}\epsilon_i^{(1)}u_1\left(x_i^{(1)}\right), \ldots, \sum_{i=1}^{n_m}\epsilon_i^{(m)}u_m\left(x_i^{(m)}\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=&t\left(\mathcal{C}_{n_1,\ldots,n_m}\check{P}\left(\left(\sum_{i=1}^{n_1}\epsilon_i^{(1)}u_1\left(x_i^{(1)}\right)\right)^{n_1},\ldots,\left(\sum_{i=1}^{n_m}\epsilon_i^{(m)}u_m\left(x_i^{(m)}\right)\right)^{n_m}\right)\right)\\
&=t\left(\check{P}\left(u_1\left(x_1^{(1)}\right),\ldots,u_1\left(x_{n_1}^{(1)}\right),\ldots,u_m\left(x_1^{(m)}\right),\ldots,u_m\left(x_{n_m}^{(m)}\right)\right)\right)\\
&=t\circ\check{P}\circ(u_1,\overset{n_1}{\ldots},u_1,\ldots,u_m,\overset{n_m}{\ldots},u_m)\left(x_1^{(1)},\ldots,x_{n_1}^{(1)},\ldots,x_1^{(m)},\ldots,x_{n_m}^{(m)}\right),
\end{aligned}
$$

onde

$$
\mathcal{C}_{n_1,\ldots,n_m}=\frac{1}{2^{n_1+\cdots+n_m}n_1!\cdots n_m!}\prod_{k=1}^{m}\left(\sum_{\epsilon_i^{(k)}=\pm1}\epsilon_1^{(k)}\cdots\epsilon_{n_k}^{(k)}\right).
$$

Assim, $(t\circ P\circ(u_1,\ldots,u_m))^\vee = t\circ\check{P}\circ(u_1,\overset{n_1}{\ldots},u_1,\ldots,u_m,\overset{n_m}{\ldots},u_m)$. Como $t\circ\check{P}\circ(u_1,\overset{n_1}{\ldots},u_1,\ldots,u_m,\overset{n_m}{\ldots},u_m)\in\mathcal{M}^{n_1+\cdots+n_m}({}^{n_1}G_1,\ldots,{}^{n_m}G_m;H)$, segue que,

$$
(t\circ P\circ(u_1,\ldots,u_m))^\vee\in\mathcal{M}^{n_1+\cdots+n_m}({}^{n_1}G_1,\ldots,{}^{n_m}G_m;H).
$$

Então, $\mathcal{MP}_{\mathcal{M}}$ é um ideal de polinômios $(n_1,\ldots,n_m)$-homogêneos.

Suponha agora que $(\mathcal{M},\|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ seja um ideal normado de aplicações $(n_1+\cdots+n_m)$-lineares, mostraremos que $(\mathcal{MP}_{\mathcal{MP}},\|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ é um ideal normado de polinômios $(n_1,\ldots,n_m)$-homogêneos. Sabemos que $\mathcal{MP}_{\mathcal{M}}$ é um ideal de polinômios $(n_1,\ldots,n_m)$-homogêneos e é fácil de mostrar que $\|P\|_{\mathcal{MP}_{\mathcal{M}}}$ é uma norma sobre $\mathcal{MP}_{\mathcal{M}}({}^{n_1}E_1,\ldots,{}^{n_m}E_m;F)$, para quaisquer $E_1,\ldots,E_m$ e F espaços de Banach. Vamos mostrar que

$$
\|Id_{\mathbb{K}}^{(n_1,\ldots,n_m)}\colon\mathbb{K}^m\to\mathbb{K},\ Id_{\mathbb{K}}^{(n_1,\ldots,n_m)}(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)=\lambda_1^{n_1}\cdots\lambda_m^{n_m}\|_{\mathcal{MP}}=1. \tag{5.2}
$$

Defina,

$$
\overline{Id}_{\mathbb{K}}^{(n_1,\ldots,n_m)}(\lambda_1^{(1)},\ldots,\lambda_{n_1}^{(1)},\ldots,\lambda_1^{(m)},\ldots,\lambda_{n_m}^{(m)})=\lambda_1^{(1)}\cdots\lambda_{n_1}^{(1)}\cdots\lambda_1^{(m)}\cdots\lambda_{n_m}^{(m)}.
$$

Note que, $\overline{Id}_{\mathbb{K}}^{(n_1,\ldots,n_m)}\in\mathcal{L}_s^{(n_1,\ldots,n_m)}({}^{n_1}\mathbb{K},\ldots,{}^{n_m}\mathbb{K};\mathbb{K})$ e que

$$
\overline{Id}_{\mathbb{K}}^{(n_1,\ldots,n_m)}(\lambda_1,\overset{n_1}{\ldots}\lambda_1,\ldots,\lambda_m,\overset{n_m}{\ldots},\lambda_m)=Id_{\mathbb{K}}^{(n_1,\ldots,n_m)}(\lambda_1,\ldots,\lambda_m).
$$

Logo, $(Id_{\mathbb{K}}^{(n_1,\ldots,n_m)})^\vee=\overline{Id}_{\mathbb{K}}^{(n_1,\ldots,n_m)}$. Uma vez que, $\left\|\overline{Id}_{\mathbb{K}}^{(n_1,\ldots,n_m)}\right\|_{\mathcal{M}}=1$, segue imediatamente que $\left\|Id_{\mathbb{K}}^{(n_1,\ldots,n_m)}\right\|_{\mathcal{MP}}=1$.

Sejam $G_1,\ldots,G_m,E_1,\ldots,E_m,F$ e H espaços de Banach, $P\in\mathcal{MP}_{\mathcal{M}}({}^{n_1}E_1,\ldots,{}^{n_m}E_m;F)$, $t\in\mathcal{L}(F;H)$ e $u_j\in\mathcal{L}(G_j;E_j)$, $j=1,\ldots,m$. Já sabemos que

$$
(t\circ P\circ(u_1,\ldots,u_m))^\vee=t\circ\check{P}\circ(u_1,\overset{n_1}{\ldots},u_1,\ldots,u_m,\overset{n_m}{\ldots},u_m).
$$

Logo,

$$\begin{aligned}\|t\circ P\circ(u_1,\dots,u_m)\|_{\mathcal{MP}_{\mathcal{M}}} &:= \|(t\circ P\circ(u_1,\dots,u_m))^{\vee}\|_{\mathcal{M}}\\ &= \left\|t\circ \check{P}\circ(u_1,\overset{n_1}{\dots},u_1,\dots,u_m,\overset{n_m}{\dots},u_m)\right\|_{\mathcal{M}}\\ &\leq \|t\|\left\|\check{P}\right\|_{\mathcal{M}}\|u_1\|^{n_1}\cdots\|u_m\|^{n_m}\\ &= \|t\|\,\|P\|_{\mathcal{MP}_{\mathcal{M}}}\|u_1\|^{n_1}\cdots\|u_m\|^{n_m}.\end{aligned}$$

□

5.2 Multipolinômios absolutamente γ-somantes

A teoria dos operadores multilineares/polinômios homogêneos somantes tem conquistado um lugar especial na Análise Funcional, sendo explorada por diversos autores, dos quais podemos destacar [4, 7, 12, 23, 37, 38, 42]. Em geral, a busca por resultados nestes trabalhos seguem caminhos similares, como por exemplo, caracterizar estas classes por desigualdades para obter uma norma que tornem essas classes espaços de Banach.

Seguindo este espírito, Serrano-Rodríguez em [57] construiu uma abordagem abstrata para os operadores multilineares absolutamente somantes e no Capítulo 2 foi construída uma abordagem abstrata para os polinômios homogêneos absolutamente somantes. Relembraremos estas definições.

Definição 5.2.1 (Definição 1.6.1)**.** Seja $m\in\mathbb{N}$. Um operador $T\in\mathcal{L}(E_1,\dots,E_m;F)$ é $\gamma_{s,s_1,\dots,s_m}$-somante em $a=(a_1,\dots,E_m)\in E_1\times\cdots\times E_m$ quando,

$$\left(T\left(a_1+x_j^{(1)},\dots,a_m+x_j^{(m)}\right)-T(a_1,\dots,a_m)\right)_{j=1}^{\infty}\in\gamma_s(F)$$

sempre que $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}\in\gamma_{s_i}(E_i)$, $i=1,\dots,m$.

Definição 5.2.2 (Definição 2.1.2)**.** Sejam E e F espaços de Banach. Um polinômio m-homogêneo $P\colon E\longrightarrow F$ é dito γ_{s,s_1}-somante em $a\in E$, se

$$(P(a+x_j)-P(a))_{j=1}^{\infty}\in\gamma_s(F)$$

sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty}\in\gamma_{s_1}(E)$.

A classe de todos os operadores multilineares $\gamma_{s,s_1,\dots,s_m}$-somantes em todo ponto é denotada por $\prod^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1,\dots,s_m}}$ e a classe de todos os polinômios homogêneos γ_{s,s_1}-somantes em todo ponto é denotada por $\mathcal{P}^{ev}_{\gamma_{s,s_1}}$.

Nesta seção, iremos apresentar a classe dos polinômios $(n_1,\dots,n_m)$-homogêneos contínuos, que unifica os conceitos destacados acima e, utilizando a abordagem introduzida

na seção anterior, exploraremos suas propriedades. No caso da origem, este tratamento unificado foi proposto por T. Velanga em [61].

Observação 5.2.3.

(a) *No decorrer desta seção e da próxima, $\gamma_s, \gamma_{s_1}, \ldots, \gamma_{s_m}$ denotarão classes de sequências finitamente determinadas e linearmente estáveis.*

(b) *Por uma questão de simplicidade escreveremos*

$$\prod\nolimits^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1^{n_1},\ldots,s_m^{n_m}}}(^{n_1}E_1,\ldots,^{n_m}E_m;F) := \prod\nolimits^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1,\overset{n_1}{\ldots},s_1,\ldots,s_m,\overset{n_m}{\ldots},s_m}}(^{n_1}E_1,\ldots,^{n_m}E_m;F).$$

Definição 5.2.4. Dizemos que um polinômio $(n_1,\ldots,n_m)$-homogêneo contínuo $P\colon E_1\times\cdots\times E_m\to F$ é absolutamente $\gamma_{s,s_1,\ldots,s_m}$-somante em $a=(a_1,\ldots,a_m)\in E_1\times\cdots\times E_m$ se

$$\left(P\left(a_1+x_j^{(1)},\ldots,a_m+x_j^{(m)}\right)-P(a_1,\ldots,a_m)\right)_{j=1}^{\infty}\in\gamma_s(F),$$

sempre que $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}\in\gamma_{s_i}(E_i)$, $i=1,\ldots,m$.

O conjunto dos polinômios $(n_1,\ldots,n_m)$-homogêneos absolutamente $\gamma_{s,s_1,\ldots,s_m}$-somantes em $a=(a_1,\ldots,a_m)$ será denotado por $\mathcal{MP}^{(a)}_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_m}}(^{n_1}E_1,\ldots,^{n_m}E_m;F)$. Se a é a origem, escreveremos apenas $\mathcal{MP}_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_m}}(^{n_1}E_1,\ldots,^{n_m}E_m;F)$. Quando for absolutamente $\gamma_{s,s_1,\ldots,s_m}$-somante em todo ponto, escreveremos $\mathcal{MP}^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_m}}(^{n_1}E_1,\ldots,^{n_m}E_m;F)$.

Observação 5.2.5. *Note que*

$$\mathcal{MP}^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_m}}(^{n_1}E_1,\ldots,^{n_m}E_m;F)=\bigcap_{a\in E_1\times\cdots\times E_m}\mathcal{MP}^{(a)}_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_m}}(^{n_1}E_1,\ldots,^{n_m}E_m;F).$$

Lema 5.2.6. *Sejam $E_1,\ldots,E_m$ e F espaços de Banach e $P\in\mathcal{MP}(^{n_1}E_1,\ldots,^{n_m}E_m;F)$. Então,*

$$P\in\mathcal{MP}_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_m}}(^{n_1}E_1,\ldots,^{n_m}E_m;F)$$

se, e somente se, a aplicação induzida

$$\tilde{P}\colon\gamma_{s_1}(E_1)\times\cdots\times\gamma_{s_m}(E_m)\to\gamma_s(F)$$

dada por

$$\tilde{P}\left(\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty},\ldots,\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}\right)=\left(P\left(x_j^{(1)},\ldots,x_j^{(m)}\right)\right)_{j=1}^{\infty},$$

está bem definida. E ainda, $\tilde{P}$ é uma aplicação contínua.

Demonstração. A equivalência segue diretamente da definição de polinômio $(n_1,\ldots,n_m)$-homogêneo absolutamente $\gamma_{s,s_1,\ldots,s_m}$-somante na origem.

Vamos mostrar que $\tilde{P}$ é um polinômio $(n_1,\ldots,n_m)$-homogêneo. Uma vez que $P \in \mathcal{MP}_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_m}}(^{n_1}E_1,\ldots,^{n_m}E_m;F)$, existe uma única aplicação $(n_1+\cdots+n_m)$-linear $(n_1,\ldots,n_m)$-simétrica $\check{P}$ tal que $P(x_1,\ldots,x_m)=\check{P}(x_1^{n_1},\ldots,x_m^{n_m})$, assim

$$\begin{aligned}\tilde{P}\left(\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty},\ldots,\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}\right) &= \left(P\left(x_j^{(1)},\ldots,x_j^{(m)}\right)\right)_{j=1}^{\infty} \\ &= \left(\check{P}\left(\left(x_j^{(1)}\right)^{n_1},\ldots,\left(x_j^{(m)}\right)^{n_m}\right)\right)_{j=1}^{\infty}.\end{aligned} \tag{5.3}$$

Vamos apresentar uma aplicação $(n_1+\cdots+n_m)$-linear associada a $\tilde{P}$. Defina a aplicação

$$(\tilde{P})^{\vee}\colon \gamma_{s_1}(E_1)^{n_1}\times\cdots\times\gamma_{s_m}(E_m)^{n_m}\to\gamma_s(F)$$

dada por

$$\begin{aligned}&(\tilde{P})^{\vee}\left(\left(x_j^{(1,1)}\right)_{j=1}^{\infty},\ldots,\left(x_j^{(1,n_1)}\right)_{j=1}^{\infty},\ldots,\left(x_j^{(m,1)}\right)_{j=1}^{\infty}\ldots,\left(x_j^{(m,n_m)}\right)_{j=1}^{\infty}\right)\\ &=\left(\check{P}\left(x_j^{(1,1)},\ldots,x_j^{(1,n_1)},\ldots,x_j^{(m,1)},\ldots,x_j^{(m,n_m)}\right)\right)_{j=1}^{\infty}.\end{aligned}$$

Não é difícil mostrar que esta aplicação está bem definida, é $(n_1+\cdots+n_m)$-linear e $(n_1,\ldots,n_m)$-simétrica e de (5.3) temos que,

$$\begin{aligned}(\tilde{P})^{\vee}\left(\left(\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}\right)^{n_1},\ldots,\left(\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}\right)^{n_m}\right) &= \left(\check{P}\left(\left(x_j^{(1)}\right)^{n_1},\ldots,\left(x_j^{(m)}\right)^{n_m}\right)\right)_{j=1}^{\infty}\\ &= \tilde{P}\left(\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty},\ldots,\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}\right),\end{aligned}$$

mostrando que $\tilde{P}$ é um polinômio $(n_1,\ldots,n_m)$-homogêneo.

Seguindo as mesmas ideias da demonstração do Teorema 2.1.10, podemos mostrar que a aplicação $\tilde{P}$ é contínua.

□

O próximo resultado evidenciará uma relação entre $\mathcal{MP}^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_m}}(^{n_1}E_1,\ldots,^{n_m}E_m;F)$ e $\prod^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1,\overset{n_1}{\ldots},s_1,\ldots,s_m,\overset{n_m}{\ldots},s_m}}(^{n_1}E_1,\ldots,^{n_m}E_m;F)$.

Proposição 5.2.7. *Sejam $E_1,\ldots,E_m$ e F espaços de Banach e $P\in\mathcal{MP}(^{n_1}E_1,\ldots,^{n_m}E_m;F)$. $P\in\mathcal{MP}^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_m}}(^{n_1}E_1,\ldots,^{n_m}E_m;F)$ se, e somente se, $\check{P}\in\prod^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1^{n_1},\ldots,s_m^{n_m}}}(^{n_1}E_1,\ldots,^{n_m}E_m;F)$.*

Demonstração. Seja $\check{P}\in\prod^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1,\overset{n_1}{\ldots},s_1,\ldots,s_m,\overset{n_m}{\ldots},s_m}}(^{n_1}E_1,\ldots,^{n_m}E_m;F)$. Para quaisquer

$$\left(a_1^{(i)},\ldots,a_{n_i}^{(i)}\right)\in E_i^{n_i}\ \text{ e }\ \left(\left(x_j^{(i,1)}\right)_{j=1}^{\infty},\ldots,\left(x_j^{(i,n_i)}\right)_{j=1}^{\infty}\right)\in\gamma_{s_i}(E_i)^{n_i},\ i=1,\ldots,m,$$

temos,

$$\left(\begin{array}{c}\check{P}\left(a_1^{(1)}+x_j^{(1,1)},\ldots,a_{n_1}^{(1)}+x_j^{(1,n_1)},\ldots,a_1^{(m)}+x_j^{(m,1)},\ldots,a_m^{(m)}+x_j^{(m,n_m)}\right)\\ -\check{P}\left(a_1^{(1)},\ldots,a_{n_1}^{(1)},\ldots,a_1^{(m)},\ldots,a_{n_m}^{(m)}\right)\end{array}\right)_{j=1}^{\infty}\in\gamma_s(F).$$

Então,

$$\begin{aligned}&\left(P(a_1+x_j^{(1)},\ldots,a_m+x_j^{(m)})-P(a_1,\ldots,a_m)\right)_{j=1}^{\infty}\\ &=\left(\begin{array}{c}\check{P}\left(a_1+x_j^{(1)},\overset{n_1}{\ldots},a_1+x_j^{(1)},\ldots,a_m+x_j^{(m)},\overset{n_m}{\ldots},a_m+x_j^{(m)}\right)\\ -\check{P}\left(a_1,\overset{n_1}{\ldots},a_1,\ldots,a_m,\overset{n_m}{\ldots},a_m\right)\end{array}\right)_{j=1}^{\infty}\in\gamma_s(F),\end{aligned}$$

para quaisquer $a_i\in E_i$ e $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}\in\gamma_{s_i}(E_i)$, $i=1,\ldots,m$. Logo,

$$P\in\mathcal{MP}^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_m}}(^{n_1}E_1,\ldots,^{n_m}E_m;F).$$

A recíproca é consequência imediata da Fórmula de $(n_1,\ldots,n_m)$-Polarização.

□

A demonstração do próximo resultado segue do Lema 1.6.2, do Teorema 5.1.2 e da Proposição 5.2.7.

Proposição 5.2.8. *Sejam $P\in\mathcal{MP}^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_m}}(^{n_1}E_1,\ldots,^{n_m}E_m;F)$ e $a=(a_1,\ldots,a_m)\in E_1\times\cdots\times E_m$. Então, existe uma constante $C_{a_1,\ldots,a_m}>0$ tal que*

$$\left\|\left(P\left(a_1+x_j^{(1)},\ldots,a_m+x_j^{(m)}\right)-P(a_1,\ldots,a_m)\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F)}\leq C_{a_1,\ldots,a_m}$$

sempre que $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}\in B_{\gamma_{s_i}(E_i)}$, $i=1,\ldots m$.

Os argumentos usados na demonstração do próximo teorema são uma adaptação do argumento original feito por M. C. Matos em [38]. Para o próximo resultado considere $G_i=E_i\times\gamma_{s_i}(E_i)$ munido da norma

$$\left\|\left(a_i,\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}\right)\right\|_{G_i}=\|a_i\|_{E_i}+\left\|\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_i}(E_i)}. \tag{5.4}$$

Teorema 5.2.9. *Sejam $E_1,\ldots,E_m$ e F espaços de Banach e $P\in\mathcal{MP}(^{n_1}E_1,\ldots,^{n_m}E_m;F)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $P\in\mathcal{MP}^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_m}}(^{n_1}E_1,\ldots,^{n_m}E_m;F)$;

(b) A aplicação induzida

$$\Phi(P)\colon G_1\times\cdots\times G_m\to\gamma_s(F)$$

definida por

$$\Phi(P)\left(\left(a_1,\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}\right),\ldots,\left(a_m,\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}\right)\right)$$
$$=\left(P\left(a_1+x_j^{(1)},\ldots,a_m+x_j^{(m)}\right)-P(a_1,\ldots,a_m)\right)_{j=1}^{\infty}.$$

é um polinômio $(n_1,\ldots,n_m)$*-homogêneo bem definido. E ainda,* $\Phi(T)$ *é continuo;*

(*c*) *Existe* $C>0$ *tal que*

$$\left\|\left(P\left(a_1+x_j^{(1)},\ldots,a_m+x_j^{(m)}\right)-P(a_1,\ldots,a_m)\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F)}$$
$$\leq C\prod_{i=1}^{m}\left(\|a_i\|_{E_i}+\left\|\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_i}(E_i)}\right)^{n_i}, \tag{5.5}$$

sempre que $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}\in\gamma_{s_i}(E_i)$, $i=1,\ldots,m$ *e* $(a_1,\ldots,a_m)\in E_1\times\cdots\times E_m$*;*

(*d*) *Existe* $C>0$ *tal que*

$$\left\|\left(P\left(a_1+x_j^{(1)},\ldots,a_m+x_j^{(m)}\right)-P(a_1,\ldots,a_m)\right)_{j=1}^{n}\right\|_{\gamma_s(F)}$$
$$\leq C\prod_{i=1}^{m}\left(\|a_i\|_{E_i}+\left\|\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{n}\right\|_{\gamma_{s_i}(E_i)}\right)^{n_i},$$

sempre que $n\in\mathbb{N}$, $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{n}\subset E_i$, $i=1,\ldots,m$ *e* $(a_1,\ldots,a_m)\in E_1\times\cdots\times E_m$.

Demonstração. $(a)\Rightarrow(b)$ A boa definição de $\Phi(P)$ segue diretamente da definição de $\mathcal{MP}^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_m}}(^{n_1}E_1,\ldots,^{n_m}E_m;F)$ e não é difícil mostrar que $\Phi(P)$ é um polinômio $(n_1,\ldots,n_m)$-homogêneo para qualquer $P\in\mathcal{MP}^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_m}}(^{n_1}E_1,\ldots,^{n_m}E_m;F)$. Vamos mostrar que $\Phi(P)$ é contínua.

Iniciaremos mostrando que, para qualquer $P\in\mathcal{MP}^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_m}}(^{n_1}E_1,\ldots,^{n_m}E_m;F)$, o conjunto

$$F_{k,\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty},\ldots,\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}}=\left\{\begin{array}{c}(a_1,\ldots,a_m)\in E_1\times\cdots\times E_m;\\ \left\|\Phi(P)\left(\left(a_1,\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}\right),\ldots,\left(a_m,\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}\right)\right)\right\|_{\gamma_s(F)}\leq k\end{array}\right\}$$

é fechado para quaisquer $k\in\mathbb{K}$ e $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}\in B_{\gamma_{s_i}(E_i)}$, $i=1,\ldots,m$. Para todo $n\in\mathbb{N}$, considere

$$F_{k,\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{n},\ldots,\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{n}}=\left\{\begin{array}{c}(a_1,\ldots,a_m)\in E_1\times\cdots\times E_m;\\ \left\|\Phi(P)\left(\left(a_1,\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{n}\right),\ldots,\left(a_m,\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{n}\right)\right)\right\|_{\gamma_s(F)}\leq k\end{array}\right\}.$$

Uma vez que as classes de sequências $\gamma_s, \gamma_{s_1}, \ldots, \gamma_{s_m}$ são finitamente determinadas, podemos mostrar que

$$F_{k,\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty},\ldots,\left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty}} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_{k,\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{n},\ldots,\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{n}}.$$

Para quaisquer $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \in B_{\gamma_{s_i}(E_i)}$, $i = 1, \ldots, m$, e fixado $k \in \mathbb{N}$, podemos definir

$$D_k \colon E_1 \times \cdots \times E_m \to [0, \infty)$$

por,

$$D_k(a_1, \ldots, a_m) = \left\| \left(P\left(a_1 + x_j^{(1)}, \ldots, a_m + x_j^{(m)}\right) - P(a_1, \ldots, a_m) \right)_{j=1}^{k} \right\|_{\gamma_s(F)}.$$

Veremos que D_k é contínua para todo $k \in \mathbb{N}$. Seja $(b_n)_{n=1}^{\infty} = ((b_1^n, \ldots, b_m^n))_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em $E_1 \times \cdots \times E_m$ convergindo para $b = (b_1, \ldots, b_m)$. É fácil perceber que,

$$\lim_{n\to\infty} D_k(b_1^n, \ldots, b_m^n) = \left\| \lim_{n\to\infty} \left(P\left(b_1^n + x_j^{(1)}, \ldots, b_m^n + x_j^{(m)}\right) - P(b_1^n, \ldots, b_m^n) \right)_{j=1}^{k} \right\|_{\gamma_s(F)}. \tag{5.6}$$

Por simplicidade, escreveremos

$$h_j^n = P\left(b_1^n + x_j^{(1)}, \ldots, b_m^n + x_j^{(m)}\right) - P(b_1^n, \ldots, b_m^n)$$

e

$$h_j = P\left(b_1 + x_j^{(1)}, \ldots, b_m + x_j^{(m)}\right) - P(b_1, \ldots, b_m).$$

Segue da continuidade de P que, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0^j \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| h_j^n - h_j \right\|_F \leq \frac{\epsilon}{k},$$

para todo $n \geq n_0^j$. Tomando $n_0 = max\{n_0^j;\, j = 1, \ldots, k\}$, teremos

$$\begin{aligned}
&\|(h_1^n - h_1, \ldots, h_k^n - h_k, 0, \ldots)\|_{\gamma_s(F)} \\
&\leq \|(h_1^n - h_1, 0, \ldots)\|_{\gamma_s(F)} + \cdots + \|(0, \ldots, 0, h_k^n - h_k, 0, \ldots)\|_{\gamma_s(F)} \\
&= \|h_1^n - h_1\|_F + \cdots + \|h_k^n - h_k\|_F \\
&< \epsilon,
\end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$. Assim,

$$\|(h_1^n, \ldots, h_k^n, 0, \ldots) - (h_1, \ldots, h_k, 0, \ldots)\|_{\gamma_s(F)} < \epsilon$$

para todo $n \geq n_0$ e de (5.6), segue que

$$\lim_{n\to\infty} D_k\left(b_1^n, \ldots, b_m^n\right) = D_k\left(b_1, \ldots, b_m\right).$$

Logo, D_k é contínua. Como

$$F_{k,\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^n,\ldots,\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^n} = D_k^{-1}([0,k]),$$

segue que $F_{k,\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^n,\ldots,\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^n}$ é um conjunto fechado e assim $F_{k,\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^\infty,\ldots,\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^\infty}$ também é um conjunto fechado para quaisquer $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^\infty \in B_{\gamma_{s_i}(E_i)}$, $i = 1, \ldots, m$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, considere $F_k = F_{k,\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^\infty,\ldots,\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^\infty}$. Da Proposição 5.2.8, obtemos

$$E_1 \times \cdots \times E_m = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k$$

e, pelo Teorema da Categoria de Baire, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que o interior de F_{k_0} não é vazio. Seja $(b_1, \ldots, b_m)$ um elemento do interior de F_{k_0}. Daí, existe $0 < \epsilon < 1$ tal que

$$\left\|\Phi(P)\left[\left(c_1, \left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^\infty\right), \ldots, \left(c_m, \left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^\infty\right)\right]\right\|_{\gamma_s(F)} \leq k_0 \tag{5.7}$$

sempre que $\|c_r - b_r\|_{E_r} < \epsilon$ e $\left(x_j^{(r)}\right)_{j=1}^\infty \in B_{\gamma_{s_r}(E_r)}$, $r = 1, \ldots, m$. Se

$$\left\|\left(v_r, \left(x_j^{(r)}\right)_{j=1}^\infty\right)\right\| < \epsilon$$

para todo $r = 1, \ldots, m$, então,

$$\|v_r\|_{E_r} < \epsilon \quad \text{e} \quad \left\|\left(x_j^{(r)}\right)_{j=1}^\infty\right\|_{\gamma_{s_r}(E_r)} < \epsilon < 1.$$

De (5.7) temos

$$\begin{aligned}&\left\|\Phi(P)\left[\left(\left(b_1, (0)_{j=1}^\infty\right), \ldots, \left(b_m, (0)_{j=1}^\infty\right)\right) + \left(v_1, \left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^\infty\right), \ldots, \left(v_m, \left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^\infty\right)\right]\right\|_{\gamma_s(F)}\\ &= \left\|\Phi(P)\left[\left(v_1 + b_1, \left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^\infty\right), \ldots, \left(v_m + b_m, \left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^\infty\right)\right]\right\|_{\gamma_s(F)} \leq k_0,\end{aligned}$$

pois,

$$\|v_r + b_r - b_r\|_{E_r} = \|v_r\|_{E_r} < \epsilon$$

e

$$\left\|\left(x_j^{(r)}\right)_{j=1}^\infty\right\|_{\gamma_{s_r}(E_r)} < \epsilon < 1,$$

para todo $r = 1, \ldots, m$. Portanto, $\Phi(P)$ é limitada na bola de raio ϵ e centro

$$\left(\left(b_1, (0)_{j=1}^{\infty}\right), \ldots, \left(b_m, (0)_{j=1}^{\infty}\right)\right) \in G_1 \times \cdots \times G_m$$

e, de [62, Teorema 3.3], segue que $\Phi(P)$ é uma aplicação contínua.

$(b) \Rightarrow (c)$. Sejam $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \in B_{\gamma_{s_i}(E_i)}$, $i = 1, \ldots m$ e

$$P \in \mathcal{MP}^{ev}_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_m}}(^{n_1}E_1, \ldots, ^{n_m}E_m; F).$$

Como $\phi(P)$ é um polinômio $(n_1, \ldots, n_m)$-homogêneo contínuo, temos

$$\begin{aligned}
&\left\| \left(P\left(a_1 + x_j^{(1)}, \ldots, a_m + x_j^{(m)}\right) - P(a_1, \ldots, a_m) \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_s(F)} \\
&= \left\| \Phi(P)\left(\left(a_1, \left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}\right), \ldots, \left(a_m, \left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty}\right) \right) \right\|_{\gamma_s(F)} \\
&\leq \|\Phi(P)\| \prod_{i=1}^{m} \left(\|a_i\|_{E_i} + \left\| \left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_{s_i}(E_i)} \right)^{n_i}.
\end{aligned}$$

$(c) \Rightarrow (d)$ É imediato.

$(d) \Rightarrow (a)$ É consequência imediata das classes serem finitamente determinadas.

□

A prova do próximo resultado pode ser feita de forma análoga à do Corolário 3.1.11 e da Proposição 3.1.13.

Proposição 5.2.10. *(a) O ínfimo das constantes $C > 0$ satisfazendo (5.5) define uma norma em $\mathcal{MP}^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_m}}(^{n_1}E_1, \ldots, ^{n_m}E_m; F)$, denotada por $\pi^{ev}_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_m}}(\cdot)$.*

(b) Para qualquer $P \in \mathcal{MP}^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_m}}(^{n_1}E_1, \ldots, ^{n_m}E_m; F)$, temos que $\pi^{ev}_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_m}}(P) = \|\Phi(P)\|$.

(c) Se $P \in \mathcal{MP}^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_m}}(^{n_1}E_1, \ldots, ^{n_m}E_m; F)$, então $\|P\| \leq \pi^{ev}_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_m}}(P)$.

O próximo resultado é uma consequência imediata da Fórmula de $(n_1, \ldots, n_m)$-Polarização.

Proposição 5.2.11. *A norma $\pi^{ev}_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_m}}(\cdot)$ satisfaz a relação*

$$\pi^{ev}_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_m}}(P) \leq \pi^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1,\overset{n_1}{\ldots},s_1,\ldots,s_m,\overset{n_m}{\ldots}s_m}}(\check{P}) \leq \frac{n_1^{n_1} \cdots n_m^{n_m}}{n_1! \cdots n_m!} \pi^{ev}_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_m}}(P).$$

Agora, mostraremos o principal resultado desta seção.

Teorema 5.2.12. *Se $\gamma_{s_1}(\mathbb{K})^{\overset{n_1}{\cdots}}\gamma_{s_1}(\mathbb{K}) \cdots \gamma_{s_m}(\mathbb{K})^{\overset{n_m}{\cdots}}\gamma_{s_m}(\mathbb{K}) \overset{1}{\hookrightarrow} \gamma_s(\mathbb{K})$, então,*

$$\left(\mathcal{MP}^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_m}}(^{n_1}(\cdot), \ldots, ^{n_m}(\cdot); (\cdot)), \pi^{ev}_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_m}}(\cdot)\right)$$

é um ideal Banach de polinômios $(n_1, \ldots, n_m)$*-homogêneos.*

Demonstração. Pela Proposição 5.2.7, podemos ver facilmente que

$$\mathcal{MP}^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_m}} = \mathcal{MP}_{\prod^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1,\overset{n_1}{\ldots},s_1,\ldots,s_m,\overset{n_m}{\ldots}s_m}}}.$$

Dessa forma, segue do Teorema 5.1.16 que $\mathcal{MP}^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_m}}$ é um ideal normado de polinômios $(n_1, \ldots, n_m)$-homogêneos. Restaria a nós verificar a completude, entretanto, essa pode ser verificada seguindo as mesmas ideias da Proposição 2.1.17. □

Exemplos 5.2.13. Sejam $0 < p, q_1, \ldots, q_m < \infty$ e $E_1, \ldots, E_m, F$ espaços de Banach. Um polinômio $(n_1, \ldots, n_m)$-homogêneo contínuo $P\colon E_1 \times \cdots \times E_m \to F$ é dito

- *absolutamente* $(p; q_1, \ldots, q_m)$*-somante* em $a = (a_1, \ldots, a_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$ quando

$$\left(P\left(a_1 + x_j^{(1)}, \ldots, a_m + x_j^{(m)}\right) - P(a_1, \ldots, a_m)\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(F),$$

  sempre que $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{q_i}^w(E_i)$, $i = 1, \ldots, m$.

- *Cohen fortemente p-somante* em $a = (a_1, \ldots, a_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$ quando

$$\left(P\left(a_1 + x_j^{(1)}, \ldots, a_m + x_j^{(m)}\right) - P(a_1, \ldots, a_m)\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p\langle F\rangle,$$

  sempre que $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E_i)$, $i = 1, \ldots, m$.

Um conceito muito útil na teoria dos multi-ideais é o de ideais simétricos. A próxima definição apresentará o conceito de multi-ideais $(n_1, \ldots, n_m)$-simétricos e mostraremos que $\prod^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1,\overset{n_1}{\ldots},s_1,\ldots,s_m\overset{n_m}{\ldots},s_m}}$ é um ideal de aplicações $(n_1, \ldots, n_m)$-simétrico.

Definição 5.2.14. Seja $\mathcal{M}_{n_1+\cdots+n_m}$ um ideal de aplicações $(n_1 + \cdots + n_m)$-lineares. Dizemos que $\mathcal{M}_{n_1+\cdots+n_m}$ é $(n_1, \ldots, n_m)$-simétrico se $T_s^{(n_1,\ldots,n_m)} \in \mathcal{M}_{n_1+\cdots+n_m}$ sempre que $T \in \mathcal{M}_{n_1+\cdots+n_m}$.

Proposição 5.2.15. *O ideal* $\prod^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1,\overset{n_1}{\ldots},s_1,\ldots,s_m,\overset{n_m}{\ldots},s_m}}$ *é um multi-ideal* $(n_1, \ldots, n_m)$*-simétrico.*

Demonstração. Sejam $E_1, \ldots, E_m$ e F espaços de Banach e

$$T \in \prod^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1,\overset{n_1}{\ldots},s_1,\ldots,s_m,\overset{n_m}{\ldots},s_m}}(^{n_1}E_1, \ldots, {}^{n_m}E_m; F).$$

Então, para quaisquer

$$\left(a_1^{(1)}, \ldots, a_{n_1}^{(1)}, \ldots, a_1^{(m)}, \ldots, a_{n_m}^{(m)}\right) \in E_1 \times \overset{n_1}{\cdots} \times E_1 \times \cdots \times E_m \times \overset{n_m}{\cdots} \times E_m$$

e $\left(x_j^{(i,1)}\right)_{j=1}^{\infty}, \ldots, \left(x_j^{(i,n_i)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_{s_i}(E_i)$, $i = 1, \ldots, m$,

$$\left(\begin{array}{c} T\left(a_1^{(1)} + x_j^{(1,1)}, \ldots, a_{n_1}^{(1)} + x_j^{(1,n_1)}, \ldots, a_1^{(m)} + x_j^{(m,1)}, \ldots, a_{n_m}^{(m)} + x_j^{(m,n_m)}\right) \\ -T\left(a_1^{(1)}, \ldots, a_{n_1}^{(1)}, \ldots, a_1^{(m)}, \ldots, a_{n_m}^{(m)}\right) \end{array} \right)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_s(F).$$

Assim, para todas $\sigma_i \in S_{n_i}$, $i = 1, \ldots, m$

$$\left(\begin{array}{c} T_{\sigma_1,\ldots,\sigma_m}\left(a_1^{(1)} + x_j^{(1,1)}, \ldots, a_{n_1}^{(1)} + x_j^{(1,n_1)}, \ldots, a_1^{(m)} + x_j^{(m,1)}, \ldots, a_{n_m}^{(m)} + x_j^{(m,n_m)}\right) \\ -T_{\sigma_1,\ldots,\sigma_m}\left(a_1^{(1)}, \ldots, a_{n_1}^{(1)}, \ldots, a_1^{(m)}, \ldots, a_{n_m}^{(m)}\right) \end{array} \right)_{j=1}^{\infty}$$

pertence a $\gamma_s(F)$. Assim, $T_{\sigma_1,\ldots,\sigma_m} \in \prod^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1,\overset{n_1}{\ldots},s_1,\ldots,s_m,\overset{n_m}{\ldots},s_m}}(^{n_1}E_1, \ldots, ^{n_m}E_m; F)$. Como $\prod^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1,\overset{n_1}{\ldots},s_1,\ldots,s_m,\overset{n_m}{\ldots},s_m}}(^{n_1}E_1, \ldots, ^{n_m}E_m; F)$ é um espaço vetorial, segue que

$$T_s^{(n_1,\ldots,n_m)} \in \prod^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1,\overset{n_1}{\ldots},s_1,\ldots,s_m,\overset{n_m}{\ldots},s_m}}(^{n_1}E_1, \ldots, ^{n_m}E_m; F).$$

□

5.3 $(\mathcal{Q}, \mathcal{M})$-Coerência e $(\mathcal{Q}, \mathcal{M})$-compatibilidade

Nesta seção, apresentaremos um conceito de coerência e compatibilidade no contexto dos multipolinômios, no qual a referência deixa de ser um ideal de operadores lineares e passa a ser um par formado por um ideal de polinômios homogêneos e um multi-ideal.

Começaremos definindo nosso objeto de estudo. Para esta seção,

$$\mathcal{M}^{n_1+\cdots+n_m}(^{n_1}E_1, \ldots, ^{n_m}E_m; F) := \mathcal{M}^{n_1+\cdots+n_m}(E_1, \overset{n_1}{\ldots}, E_1, \ldots, E_m, \overset{n_m}{\ldots}, E_m; F).$$

Definição 5.3.1 (Par de ideais compatíveis)**.** Sejam $\mathcal{Q}$ um ideal normado de polinômios homogêneos, $\mathcal{M}$ um ideal normado de operadores multilineares, $\mathcal{MQ}$ um ideal de multipolinômios, $N \in (\mathbb{N} - \{1\}) \cup \{\infty\}$ e $(n_1, \ldots, n_m) \in \mathbb{N}^m$. Sendo $\mathcal{Q}^{n_i}(^{n_i}E; F)$ e $\mathcal{M}^{n_i}(E_1, \ldots, E_{n_i}; F)$ para $i = 1, \ldots, m$, componentes de $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{M}$, respectivamente, a sequência

$$\left(\mathcal{MQ}^{(n_1,\ldots,n_m)}, \mathcal{M}^{n_1+\cdots+n_m}\right)_{m=1}^{N}$$

é compatível com $(\mathcal{Q}, \mathcal{M})$, se existem constantes positivas, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, tais que, para quaisquer espaços de Banach $E, E_1, \ldots, E_m$ e F, as seguintes condições são verdadeiras para todo $n \in \{2, \cdots, N\}$:

$(CP1)$ Se $k \in \{1, \ldots, m\}$, $T \in \mathcal{M}^{n_1+\cdots+n_m}(^{n_1}E_1, \ldots, ^{n_m}E_m; F)$ e $a_1^{(j)}, \ldots, a_{n_j}^{(j)} \in E_j$ para

todo $j \in \{1,\ldots,m\} \setminus \{k\}$, então, $T_{a_1^{(1)},\ldots,a_{n_1}^{(1)},\ldots,a_1^{(k-1)},\ldots,a_{n_{k-1}}^{(k-1)},a_1^{(k+1)},\ldots,a_{n_{k+1}}^{(k+1)},\ldots,a_1^{(m)},\ldots,a_{n_m}^{(m)}} \in \mathcal{M}^{n_k}(^{n_k}E_k;F)$ e

$$\left\|T_{a_1^{(1)},\ldots,a_{n_1}^{(1)},\ldots,a_1^{(k-1)},\ldots,a_{n_{k-1}}^{(k-1)},a_1^{(k+1)},\ldots,a_{n_{k+1}}^{(k+1)},\ldots,a_1^{(m)},\ldots,a_{n_m}^{(m)}}\right\|_{\mathcal{M}^{n_k}} \leq$$
$$\alpha_1 \|T\|_{\mathcal{M}^{n_1+\cdots+n_m}} \left(\prod_{i=1}^{n_1}\left\|a_i^{(1)}\right\|\right)\cdots\left(\prod_{i=1}^{n_{k-1}}\left\|a_i^{(k-1)}\right\|\right)\cdot\left(\prod_{i=1}^{n_{k+1}}\left\|a_i^{(k+1)}\right\|\right)\cdots\left(\prod_{i=1}^{n_m}\left\|a_i^{(m)}\right\|\right).$$

$(CP2)$ Se $k \in \{1,\ldots,m\}$, $P \in \mathcal{MP}^{(n_1,\ldots,n_m)}(^{n_1}E_1,\ldots,^{n_m}E_m;F)$ e $a_j \in E_j$ para todo $j \in \{1,\ldots,m\} \setminus \{k\}$, então, $P_{a_1,\ldots,a_{k-1},a_{k+1},\ldots,a_m} \in \mathcal{Q}^{n_k}(^{n_k}E_k;F)$ e

$$\left\|P_{a_1,\ldots,a_{k-1},a_{k+1},\ldots,a_m}\right\|_{\mathcal{Q}^{n_k}} \leq$$
$$\alpha_2 \max\left\{\left\|\overset{\vee}{P}\right\|_{\mathcal{M}^{n_1+\cdots+n_m}}, \|P\|_{\mathcal{MQ}^{(n_1,\ldots,n_m)}}\right\}\|a_1\|^{n_1}\cdots\|a_{k-1}\|^{n_{k-1}}\ \|a_{k+1}\|^{n_{k+1}}\cdots\|a_m\|^{n_m}.$$

$(CP3)$ Se $u \in \mathcal{M}^{n_m}(^{n_m}E_m;F)$, $\gamma_1^{(j)},\ldots,\gamma_{n_j}^{(j)} \in E_j'$ para todo $j = 1,\ldots,m-1$, então,

$$\gamma_1^{(1)}\cdots\gamma_{n_1}^{(1)}\cdots\gamma_1^{(n-1)}\cdots\gamma_{n_{m-1}}^{(m-1)}u \in \mathcal{M}^{n_1+\cdots+n_m}(^{n_1}E_1,\ldots,^{n_m}E_m;F)$$

e

$$\left\|\gamma_1^{(1)}\cdots\gamma_{n_1}^{(1)}\cdots\gamma_1^{(n-1)}\cdots\gamma_{n_{m-1}}^{(m-1)}u\right\|_{\mathcal{M}^{n_1+\cdots+n_m}}$$
$$\leq \alpha_3\left\|\gamma_1^{(1)}\right\|\cdots\left\|\gamma_{n_1}^{(1)}\right\|\cdots\left\|\gamma_1^{(n-1)}\right\|\cdots\left\|\gamma_{n_{m-1}}^{(m-1)}\right\|\|u\|_{\mathcal{M}^{n_m}}.$$

$(CP4)$ Se $u \in \mathcal{Q}^{n_1}(^{n_1}E_1;F)$ e $\gamma_i \in E_i'$, $i = 2,\ldots,m$ então,

$$\gamma_2^{n_2}\cdots\gamma_m^{n_m}u \in \mathcal{MP}^{(n_1,\ldots,n_m)}(^{n_1}E_1,\ldots,^{n_m}E_m;F).$$

$(CP5)$ $P \in \mathcal{MP}^{(n_1,\ldots,n_m)}(^{n_1}E_1,\ldots,^{n_m}E_m;F)$ se, e somente se,

$$\overset{\vee}{P} \in \mathcal{M}^{n_1+\cdots+n_m}(^{n_1}E_1,\ldots,^{n_m}E_m;F).$$

Definição 5.3.2 (Par de ideais coerentes)**.** Sejam $\mathcal{M}$ um ideal normado de operadores multilineares, $\mathcal{MQ}$ um ideal de multipolinômios, $N \in (\mathbb{N}-\{1\}) \cup \{\infty\}$ e $(n_1,\ldots,n_m) \in \mathbb{N}^m$. Sendo $\mathcal{M}^{n_i}(E_1,\ldots,E_{n_i};F)$ para $i = 1,\ldots,m$, componentes de $\mathcal{M}$, a sequência

$$\left(\mathcal{MQ}^{(n_1,\ldots,n_m)}, \mathcal{M}^{n_1+\cdots+n_m}\right)_{m=1}^{N}$$

é coerente, se existem constantes positivas, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, tais que, para quaisquer espaços de Banach $E, E_1,\ldots,E_{k+1}$ e F, as seguintes condições são verdadeiras para qualquer

$k = 1, \ldots, N-1$:

$(CH1)$ Sejam $T \in \mathcal{M}^{n_1+\cdots+n_{k+1}}\left({}^{n_1}E_1, \ldots, {}^{n_{k+1}}E_{k+1}; F\right)$ e $a_1^{(j)}, \ldots, a_{n_j}^{(j)} \in E_j$, para $j = 1, \ldots, k+1$. Então,

$$T_{a_1^{(j)}, \ldots, a_{n_j}^{(j)}} \in \mathcal{M}^{n_1+\cdots+n_{j-1}+n_{j+1}+\cdots+n_{k+1}}\left({}^{n_1}E_1, \ldots, {}^{n_{j-1}}E_{j-1}, {}^{n_{j+1}}E_{j+1}, \ldots, {}^{n_{k+1}}E_{k+1}; F\right)$$

e

$$\left\|T_{a_1^{(j)}, \ldots, a_{n_j}^{(j)}}\right\|_{\mathcal{M}^{n_1+\cdots+n_{j-1}+n_{j+1}+\cdots+n_{k+1}}} \leq \beta_1 \|T\|_{\mathcal{M}^{n_1+\cdots+n_{k+1}}} \left\|a_1^{(j)}\right\| \cdots \left\|a_{n_j}^{(j)}\right\|.$$

$(CH2)$ Sejam $P \in \mathcal{MQ}^{(n_1, \ldots, n_{k+1})}\left({}^{n_1}E_1, \ldots, {}^{n_{k+1}}E_{k+1}; F\right)$ e $a_j \in E_j$, $j = 1, \ldots, k+1$. Então,

$$P_{a_j} \in \mathcal{MQ}^{(n_1, \ldots, n_{j-1}, n_{j+1}, \ldots, n_{k+1})}\left({}^{n_1}E_1, \ldots, {}^{n_{j-1}}E_{j-1}, {}^{n_{j+1}}E_{j+1}, \ldots, {}^{n_{k+1}}E_{k+1}; F\right)$$

e

$$\left\|P_{a_j}\right\|_{\mathcal{MQ}^{(n_1, \ldots, n_{j-1}, n_{j+1}, \ldots, n_{k+1})}} \leq \beta_2 \max\left\{\left\|\overset{\vee}{P}\right\|_{\mathcal{M}^{n_1+\cdots+n_m}}, \|P\|_{\mathcal{MQ}^{(n_1, \ldots, n_{k+1})}}\right\} \|a_j\|^{n_j}.$$

$(CH3)$ Sejam $T \in \mathcal{M}^{n_1+\cdots+n_k}\left({}^{n_1}E_1, \ldots, {}^{n_k}E_k; F\right)$ e $\gamma_1^{(k+1)}, \ldots, \gamma_{n_{k+1}}^{(k+1)} \in E'_{k+1}$. Então,

$$\gamma_1^{(k+1)} \cdots \gamma_{n_{k+1}}^{(k+1)} T \in \mathcal{M}^{n_1+\cdots+n_{k+1}}\left({}^{n_1}E_1, \ldots, {}^{n_{k+1}}E_{k+1}; F\right)$$

e

$$\left\|\gamma_1^{(k+1)} \cdots \gamma_{n_{k+1}}^{(k+1)} T\right\|_{\mathcal{M}^{n_1+\cdots+n_{k+1}}} \leq \beta_3 \left\|\gamma_1^{(k+1)}\right\| \cdots \left\|\gamma_{n_{k+1}}^{(k+1)}\right\| \|T\|_{\mathcal{M}^{n_1+\cdots+n_k}}.$$

$(CH4)$ Sejam $P \in \mathcal{MQ}^{(n_1, \ldots, n_k)}\left({}^{n_1}E_1, \ldots, {}^{n_k}E_k; F\right)$ e $\gamma^{(k+1)} \in E'_{k+1}$. Então,

$$\left[\gamma_1^{(k+1)}\right]^{n_{k+1}} P \in \mathcal{MP}^{(n_1, \ldots, n_{k+1})}\left({}^{n_1}E_1, \ldots, {}^{n_{k+1}}E_{k+1}; F\right).$$

$(CH5)$ Para todo $k = 1, \ldots, N$, P pertence a $\mathcal{MP}^{(n_1, \ldots, n_k)}\left({}^{n_1}E_1, \ldots, {}^{n_k}E_k; F\right)$ se, e somente se, $\overset{\vee}{P}$ pertence a $\mathcal{M}^{n_1+\cdots+n_k}\left({}^{n_1}E_1, \ldots, {}^{n_k}E_k; F\right)$.

Seguindo as mesmas ideias que [52, Proposição 2.1.6], podemos mostrar o seguinte resultado.

Proposição 5.3.3. *Se $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$, então, a coerência de uma sequência*

$$\left(\mathcal{MQ}^{(n_1, \ldots, n_m)}, \mathcal{M}^{n_1+\cdots+n_m}\right)_{m=1}^{N}$$

implica na sua compatibilidade com o par $(\mathcal{Q}, \mathcal{M})$.

Observação 5.3.4. *A coerência e a compatibilidade no contexto multipolinomial foi inicialmente explorada por T. Velanga em [64, Seção 3.4], este conceito considera apenas a sequência de ideais de multipolinômios, o que a torna diferente da explorada nesta seção que considera a sequência de pares formados por um ideal aplicações multilineares e de multipolinômios.*

Teorema 5.3.5. *Sejam $m, n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$ e $\mathcal{M}^{n_1+\cdots+n_m}$ é um ideal de aplicações $(n_1 + \cdots + n_m)$-linear. Considere o ideal de polinômos $(n_1, \ldots, n_m)$-homogêneos*

$$\mathcal{MP}_{\mathcal{M}^{n_1+\cdots+n_m}} := \{P \in \mathcal{MP}^{(n_1,\ldots,n_m)};\ \check{P} \in \mathcal{M}^{n_1+\cdots+n_m}\}.$$

Se $\mathcal{M}^{n_1+\cdots+n_m}$ satisfaz $(CH1)$ e $(CH3)$, então, $\mathcal{MP}_{\mathcal{M}^{n_1+\cdots+n_m}}$ satisfaz $(CH2)$ e $(CH4)$.

Demonstração. Seja $P \in \mathcal{MP}_{\mathcal{M}^{n_1+\cdots+n_m}}(^{n_1}E_1, \ldots, ^{n_m}E_m; F)$, segue da definição que

$$\check{P} \in \mathcal{M}^{n_1+\cdots+n_m}(^{n_1}E_1, \ldots, ^{n_m}E_m; F)$$

e de $(CH1)$ podemos concluir que

$$\check{P}_{a_1,\overset{n_1}{\ldots},a_1} \in \mathcal{M}^{n_2+\cdots+n_m}(^{n_2}E_2, \ldots, ^{n_m}E_m; F)$$

para todo $a_1 \in E_1$. Como consequência imediata da Fórmula de $(n_1, \ldots, n_m)$-Polarização, temos

$$\check{P}_{a_1,\overset{n_1}{\ldots},a_1} = (P_{a_1})^{\vee}.$$

Logo, $(P_{a_1})^{\vee} = \check{P}_{a_1,\overset{n_1}{\ldots},a_1} \in \mathcal{M}^{n_2+\cdots+n_m}$ e, portanto, $P_{a_1} \in \mathcal{MP}_{\mathcal{M}^{n_2+\cdots+n_m}}(^{n_2}E_2, \ldots, ^{n_m}E_m; F)$.

Sejam $P \in \mathcal{MP}_{\mathcal{M}^{(n_1,\ldots,n_m)}}(^{n_1}E_1, \ldots, ^{n_m}E_m; F)$ e $\gamma^{(m+1)} \in E'_{m+1}$. Uma vez que

$$\begin{aligned}\left(\left[\gamma^{(m+1)}\right]^{n_{m+1}} P\right)^{\vee}(x_1^{n_1}, \ldots x_m^{n_m}) &= \left[\gamma^{(m+1)}\right]^{n_{m+1}} P(x_1, \ldots, x_m) \\ &= \gamma^{(m+1)} \overset{n_{m+1}}{\cdots} \gamma^{(m+1)} \check{P}\,(x_1^{n_1}, \ldots, x_m^{n_m})\end{aligned}$$

e que $\left(\left[\gamma^{(m+1)}\right]^{n_{m+1}} P\right)^{\vee}$ e $\gamma^{(m+1)} \overset{n_{m+1}}{\cdots} \gamma^{(m+1)} \check{P}$ são aplicações $(n_1 + \cdots + n_m)$-lineares $(n_1, \ldots, n_m)$-simétricas segue da Proposição 5.1.9 que

$$\left(\left[\gamma^{(m+1)}\right]^{n_{m+1}} P\right)^{\vee} = \gamma^{(m+1)} \overset{n_{m+1}}{\cdots} \gamma^{(m+1)} \check{P}$$

e da condição (CH3) que

$$\left(\left[\gamma^{(m+1)}\right]^{n_{m+1}} P\right)^{\vee} \in \mathcal{M}^{n_1+\cdots+n_{m+1}}\left(^{n_1}E_1, \ldots, ^{n_{m+1}}E_{m+1}; F\right).$$

Portanto, $\left[\gamma^{(m+1)}\right]^{n_{m+1}} P \in \mathcal{MP}_{\mathcal{M}^{n_1+\cdots+n_{m+1}}}(^{n_1}E_1, \ldots, ^{n_{m+1}}E_{m+1}; F)$.

□

Seguindo as mesmas ideias das Proposições 2.2.2 e 2.2.3, podemos mostrar os seguintes resultados.

Proposição 5.3.6. *Sejam* $T \in \prod^{m,(ev)}_{\gamma_{s,s_1^{n_1}\ldots,s_m^{n_m}}}(^{n_1}E_1,\ldots,^{n_m}E_m;F)$ *e* $a_1^{(i)},\ldots,a_{n_i}^{(i)} \in E_i$, $i = 1,\ldots,m$. *Então,*

$$T_{a_1^{(i)},\ldots,a_{n_i}^{(i)}} \in \prod^{m-1,(ev)}_{\gamma_{s,s_1^{n_1},\ldots,s_{i-1}^{n_{i-1}},s_{i+1}^{n_{i+1}},\ldots,s_m^{n_m}}}(^{n_1}E_1,\ldots,^{n_{i-1}}E_{i-1},^{n_{i+1}}E_{i+1},\ldots,^{n_m}E_m;F)$$

e

$$\pi^{m-1,ev}_{\gamma_{s,s_1^{n_1},\ldots,s_{i-1}^{n_{i-1}},s_{i+1}^{n_{i+1}},\ldots,s_m^{n_m}}}(T_{a_1^{(j)},\ldots,a_{n_j}^{(j)}}) \leq \pi^{m,ev}_{\gamma_{s,s_1^{n_1},\ldots,s_m^{n_m}}}(T)\left\|a_1^{(j)}\right\|\cdots\left\|a_{n_j}^{(j)}\right\|.$$

Proposição 5.3.7. *Sejam* $P \in \mathcal{MP}^{(m,ev)}_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_m}}(^{n_1}E_1,\ldots,^{n_m}E_m;F)$ *e* $a_i \in E_i$, $i = 1,\ldots,m$. *Então,* $P_{a_i} \in \mathcal{MP}^{(m-1,ev)}_{\gamma_{s_1,\ldots,s_{i-1},s_{i+1},\ldots,s_m}}$ *e*

$$\pi^{(m-1,ev)}_{\gamma_{s_1,\ldots,s_{i-1},s_{i+1},\ldots,s_m}}(P_{a_i}) \leq \pi^{(m,ev)}_{\gamma_{s,s_1^{n_1},\ldots,s_m^{n_m}}}(\check{P})\|a_i\|^{n_i}.$$

Supondo que γ_s e γ_{s_i}, $i = 1,\ldots,m$ sejam $\mathbb{K}$-fechadas e finitamente coincidentes, conceitos introduzidos nas Definições 2.2.4 e 2.2.5, podemos provar, seguindo as mesmas ideias das Proposições 2.2.8 e 2.2.9, os seguintes resultados:

Proposição 5.3.8. *Sejam* $E_1,\ldots,E_m,F$ *espaços de Banach,*

$$T \in \prod^{m,(ev)}_{\gamma_{s,s_1^{n_1},\ldots,s_m^{n_m}}}(^{n_1}E_1,\ldots,^{n_m}E_m;F)$$

e $\varphi_1^{(m+1)},\ldots,\varphi_{n_{m+1}}^{(m+1)} \in E'_{k+1}$. *Então,*

$$\varphi_1^{(m+1)}\cdots\varphi_{n_{m+1}}^{(m+1)}T \in \prod^{m+1,(ev)}_{\gamma_{s,s_1^{n_1},\ldots,s_{m+1}^{n_{m+1}}}}(^{n_1}E_1,\ldots,^{n_{m+1}}E_{m+1};F)$$

e

$$\pi^{m+1,ev}_{\gamma_{s,s_1^{n_1},\ldots,s_{m+1}^{n_{m+1}}}}\left(\varphi_1^{(m+1)}\cdots\varphi_{n_{m+1}}^{(m+1)}T\right) \leq \pi^{m,ev}_{\gamma_{s,s_1^{n_1},\ldots,s_m^{n_m}}}(T)\left\|\varphi_1^{(m+1)}\right\|\cdots\left\|\varphi_{n_{m+1}}^{(m+1)}\right\|.$$

Proposição 5.3.9. *Sejam* $E_1,\ldots,E_m,F$ *espaços de Banach,* $P \in \mathcal{MP}^{m,ev}_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_m}}(^{n_1}E_1,\ldots,E_m;F)$ *e* $\varphi_1^{(m+1)},\ldots,\varphi_{n_{m+1}}^{(m+1)} \in E'_{m+1}$. *Então,*

$$\varphi_1^{(m+1)}\cdots\varphi_{n_{m+1}}^{(m+1)}P \in \mathcal{MP}_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_{m+1}}}(^{n_1}E_1,\ldots,^{n_{m+1}}E_{m+1};F)$$

e

$$\left\|\varphi_1^{(m+1)}\cdots\varphi_{n_{m+1}}^{(m+1)}P\right\|_{\mathcal{MP}^{m,ev}_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_{m+1}}}} \leq \left\|\varphi_1^{(m+1)}\right\|\cdots\left\|\varphi_{n_{m+1}}^{(m+1)}\right\|\left\|\check{P}\right\|_{\prod^{m,(ev)}_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_m,s_m}}}.$$

Juntando estas proposições, podemos enunciar o seguinte resultado.

Teorema 5.3.10. *Supondo que as classes de sequências são linearmente estáveis, finitamente determinadas,* $\mathbb{K}$ *- fechadas e finitamente coincidentes, então, a sequência de pares*

$$\left(\mathcal{MP}^{(m,ev)}_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_m}}({}^{n_1}(\cdot),\ldots,{}^{n_m}(\cdot);(\cdot)),\prod\nolimits^{m,(ev)}_{\gamma_{s,s_1,\overset{n_1}{\ldots},s_1,\ldots,s_m,\overset{n_m}{\ldots},s_m}}\right)^{\infty}_{m=1}$$

é coerente e compatível com $\left(\mathcal{P}^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1}},\prod^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1,\ldots,s_m}}\right)$.

Referências Bibliográficas

[1] Alves, T. R.: *Polinômios dominados entre espaços de Banach.* Dissertação de mestrado, UFU, (2011).

[2] Aliprantis, C. D.; Burkinshaw, O.: *Dunford-Pettis operators on Banach Lattices.* Transactions of the American Mathemathcal Society. **274**, n. I, (1982).

[3] Aron, R. M.; Rueda, P.: *Ideals of homogeneous polynomials*, Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences Kyoto Universty. **46**, 957-969, (2012).

[4] Barbosa, J.; Botelho, G.; Diniz, D.; Pellegrino, D.: *Spaces of absolutely summing polynomials.* Mathematica Scandinavica. **101**, 219-237, (2007).

[5] Bernardino, A. T.: *Ideais de aplicações multilineares e polinômios entre espaços de Banach.* http://www.mat.ufpb.br/ pgmat/alunos/Dissertacoes/thiago.pdf, (2008).

[6] Bombal, F.; Garcia, D.; Villanueva, I.: *Multilinear extensions of Grothendieck's theorem.* The Quartely Journal of Mathematics. **55** (4), 441-450, (2004).

[7] Bernardino, A.; Pellegrino, D.; Seoane-Sepúlveda, J. B.; Souza, M. L. V.: *Nonlinear absolutely summing operators revisited.* Sociedade Brasileira de Matematica. Boletim, Nova Serie. **46**, 205-249, (2015).

[8] Botelho, G.: *Ideals of polynomials generated by weakly compact operators*, Note di Matematica. **25**, 69-102, (2005).

[9] Botelho, G.; Braunss, H. A.; Junek, H.: *Almost p-summing polynomials and multilinear mappings.* Archiv der Mathematik. **76**, 109-118, (2001).

[10] Botelho, G.; Braunss, H.-A.; Junek H.; Pellegrino D.: *Holomorphy types and ideals of multilinear mappings.* Studia Mathematica. **177**, 43-65, (2006)

[11] Botelho, G.; Braunss, H.; Junek, H.; Pellegrino, D.: *Inclusions and Coincidences for Multiple Summing Multilinear Mappings.* Proceedings of the American Mathematical Society. **137** (3), 991-1000, (2009).

[12] Botelho, G.; Campos, J.: *On the transformation of vector-valued sequences by linear and multilinear operators.* Monatshefte fur Mathematik. **183**, 415-435, (2017).

[13] Botelho, G.; Campos, J.; Santos, J.: *Operator ideals related to absolutely summing and Cohen strongly summing operators.* Pacific Journal of Mathematics. **287**, 1-17, (2017).

[14] Botelho, G.; Polac, L.: *A polynomial Hutton theorem with applications.* Journal of Mathematical Analysis and Applications. **415**, n 1, 294-301, (2014).

[15] Botelho, G.; Pellegrino, D.: *Two new properties of ideals of polynomials and applications.* Indagationes Mathematicae. **16**, 157-169, (2005)

[16] Botelho, G: Pellegrino, D: *When every multilinear mapping is multiple summing.* Mathematische Nachrichten. **282**, 1414-1422, (2009).

[17] Botelho, G.; Pellegrino, D.; Rueda, P.: *On Composition ideals of multilinear mappings and homogeneous polynomials.* Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences. **43**, 1139-1155, (2007).

[18] Botelho, G.; Pellegrino, D.; Teixeira, E.: *Fundamentos de Análise Funcional.* Rio de Janeiro: SBM, (Coleção Textos Universitário; 13), (2012).

[19] Botelho, G.; Torres, E. R.: *Hyper-ideals of multilinear operators.* Linear Algebra and its Applications **482**, 1-20, (2015).

[20] Botelho, G.; Torres, E. R.: *Techniques to generate hyper-ideals of multilinear operators.* Linear and Multilinear Algebra. **65**, 1232-1246, (2017).

[21] Botelho, G.; Torres, E. R.: *Two-sided polynomial ideals on Banach spaces.* Journal of Mathematical Analysis and Applications. **462** n 1, 900-914, (2018).

[22] Braunss, H.-A.; Junek, H.; *Ideals of Polnomials and Multilinear Mappings.* Archiv der Mathematik. **81** n 3, 300-308, (2003).

[23] Campos, J.: *Cohen and multiple Cohen strongly summing multilinear operators.* Linear and Multilinear Algebra. **62**, 322-346, (2014).

[24] Campos, J.: *Contribuições à teoria dos operadores Cohen fortemente somantes.* Tese de Doutorado, UFPB, (2013).

[25] Carando, D.; Dimant, V.; Muro, S.: *Coherent sequences of polynomial ideals on Banach spaces.* Mathematische Nachrichten. **282**, 1111-1133, (2009).

[26] Carando, D.; Dimant, V.; Muro, S.: *Every Banach ideal of polynomials is compatible with an operator ideal.* Monatshefte fur Mathematik. **165**, 1-14, (2012).

[27] Carando, D.; Dimant, V.; Muro, S.: *Holomorphic functions and polynomial ideals on Banach spaces.* Collectanea Mathematica. **63**, 71-91, (2012).

[28] Chernega, I.; Zagorodnyuk, A.: *Generalization of the polarization formula for nonhomogeneous polynomials and analytic mappings on Banach spaces.* Topology. **48**, 197-202, (2009).

[29] Çalişkan, E.; Pellegrino, D.: *On the multilinear generalizations of the concept of absolutely summing operators.* Rocky Mountain Journal of Mathematics. **37**, 1137-1154, (2007).

[30] Defant, A.; Popa, D.; Schwarting, U.: *Coordinatewise multiple summing operators in Banach spaces.* Journal of Functional Analysis. **259**, 220-242, (2010).

[31] Dimant, V.: *Strongly p-summing multilinear operators.* Journal of Mathematical Analysis and Applications. **278**, 182-193 (2003).

[32] Floret, K.; García, D.: *On ideals of polynomials and multilinear mappings between Banach spaces.* Archiv der Mathematik. **81**, 300-308, (2003).

[33] González, M.; Gutiérrez, J. M.: *Surjective factorization of holomorphic mappings.* Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae. **41**, 469-476, (2000).

[34] Karn, A.; Sinha, D.: *An operator summability of sequences in Banach spaces.* Glasgow Mathematical Journal. **56** , n 2, 427-437, (2014).

[35] Matos, M. C.: *Absolutely summing mapping, nuclear mappings and convolution equations.* $http : www.ime.unicamp.br/rel_p esq/2007/pdf/rp03 - 07.pdf$, (2005).

[36] Matos, M.: *Fully absolutely summing mappings and Hilbert Schmidt operators.* Collectanea Mathematica. **54**, 111-136, (2003).

[37] Matos, M.: *Mappings between Banach spaces that send mixed summable sequences into absolutely summable sequences.* Journal of Mathematical Analysis and Applications. **297**, 833-851, (2004).

[38] Matos, M. C.: *Nonlinear absolutely summing mappings.* Mathematische Nachrichten. **258**, 71-89, (2003).

[39] Mujica, J.: *Complex Analysis in Banach Spaces.* Dover Publications, Mineola, New York, (2010).

[40] Mujica, J.: *Linearization of bounded holomorphic mappings on Banach spaces.* Transactions of the American Mathematical Society. **324** (1991), 867-887.

[41] Oliveira, F. R.: *O Teorema do tipo Dvoretzky-Rogers para Sequências Misto somáveis e o Resultados de Espaçabilidade.* Dissertação de mestrado, UFU, (2012).

[42] Pellegrino, D.; Ribeiro, J.: *On almost summing polynomials and multilinear mappings.* Linear and Multilinear Algebra. **60**, 397-413, (2012).

[43] Pellegrino, D.; Ribeiro, J.: *On multi-ideals and polynomial ideals of Banach spaces: a new approach to coherence and compatibility.* Monatshefte fur Mathematik. **173**, 379-415, (2014).

[44] Pellegrino, D.; Santos, J.: *Absolutely summing operators: a panorama.* Quaestiones Mathematicae. **34**, 447-478, (2011).

[45] Pełczyński, A.: *On weakly compact polynomial operators on B-spaces with Dunford-Pettis Property.* Bulletin L'Académie Polonaise des Science, Série des Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques. **11**, 371-377, (1963).

[46] Pérez-García, D.: *Comparing different classes of absolutely summing multilinear operators.* Archiv der Mathematik. **85**, 258-267, (2005).

[47] Pérez-García, D.: *Operadores multilineales absolutamente sumantes.* PhD Thesis, Universidad Complutense de Madrid, (2004).

[48] Pérez-García, D.: *The inclusion theorem for multiple summing operators.* Studia Mathematica, **165** n 3, 275-290, (2004).

[49] Pérez-García, D.; Villanueva, I.: *Multiple summing operators on Banach spaces.* Journal of Mathematical Analysis and Applications. **285** n 1, 86-96, (2003).

[50] Pietsch, A.: *Absolut p-summierende Abbildungen in normieten Raumen.* Studia Mathematica. **27**, 333-353, (1967).

[51] Pietsch, A.: *Ideals of multilinear functionals.* Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals and their Applications in theoretical Physics. 185-199, Teubner-Texte, Leipzig, (1983).

[52] Ribeiro, J.: *Ideais coerentes e compatíveis entre espaços de Banach*, Tese de doutorado, UFPE, (2011).

[53] Ribeiro, J.; Santos, F.: *Absolutely summing polynomials.* To appear in Methods of Functional Analysis and Topology, (2020).

[54] Ribeiro, J.; Santos, F.: *Generalized Multiple Summing Multilinear Operators on Banach Spaces.* Mediterranean Journal of Mathematics. **16**, n. 108, (2019).

[55] Ribeiro, J.; Santos, F.; Torres, E. R.: *Coherence and compatibility: a stronger approach.* To appear in Linear and Multilinear Algebra, (2020).

[56] Ryan, R. A.: *Applications of topological tensor products to infinite dimensional holomorphy.* Thesis, Trinity College Dublin, (1980).

[57] Serrano-Rodríguez, D. M.: *Absolutely γ-summing multilinear operators.* Linear Algebra and its Applications. **439**, 4110-4118, (2013).

[58] Serrano-Rodríguez, D. M.: *Sobre as extensões multilineares dos operadores absolutamente somantes.* Tese de doutorado, UFPB, (2014).

[59] Stephani, I.: *Generating systems of sets and quotients of surjective operator ideals.* Mathematische Nachrichten. **99**, 13-27, (1980).

[60] Torres, E. R.: *Hiper-ideais de aplicações multilineares e polinômios homogêneos entre espaços de Banach.* Tese de doutorado, USP, (2015).

[61] Velanga, T.: *Absolutely summing multipolynomials.* Results in Mathematics. **74**, no. 1, Art. 19, 17 pp., (2019).

[62] Velanga, T.: *Ideals of polynomials between Banach spaces revisited.* Linear and Multilinear Algebra. **66**, 2328-2348, (2018).

[63] Velanga, T.: *Multilinear mappings versus homogeneous polynomials and a multipolynomial polarization formula.* Linear and Multilinear Algebra. Available from https://doi.org/10.1080/03081087.2019.1634672.

[64] Velanga, T.: *Multipolynomials between Banach spaces: designs of a theory.* Doctoral thesis, IMECC-UNICAMP. Dispon?vel em: https://www.ime.unicamp.br/posgraduacao/multipolinomios-entreespacos-banach-esbocos-uma-teoria, (2019).

[65] Vasylyshyn, T. V.; Zagorodnyuk, A. V.: *Polarization formula for (p, q)-polynomials on a complex normed space.* Methods of Functional Analysis and Topology. **17**, n 1, 75-83, (2011).