Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática - IM
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PGMAT
Tese de Doutorado

# Elementos Simétricos e Antissimétricos sob Involuções Orientadas Generalizadas em Anéis de Grupo

Edward Landi Tonucci

**Salvador-Bahia**
25 de Agosto de 2017

# Elementos Simétricos e Antissimétricos sob Involuções Orientadas Generalizadas em Anéis de Grupo

Edward Landi Tonucci

Tese apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática UFBA/UFAL como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática, aprovada em 25 de Agosto de 2017.

**Orientador:** Prof. Dr. Thierry Corrêa Petit Lobão.

**Salvador-Bahia**

25 de Agosto de 2017

Tonucci, Edward Landi.

Elementos Simétricos e Antissimétricos sob Involuções Orientadas Generalizadas em Anéis de Grupo/ Edward Landi Tonucci. – Salvador: UFBA, 2017.

Orientador: Prof. Dr. Thierry Corrêa Petit Lobão.

Dissertação (doutorado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2017.

Referências bibliográficas.

1. Anéis (Álgebra). 2. Anéis de Grupo. 3. Teoria de Grupos. I. Petit Lobão, Thierry Corrêa. II. Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática. III. Título.

CDU : 512.552.7

# Elementos Simétricos e Antissimétricos sob Involuções Orientadas Generalizadas em Anéis de Grupo

Edward Landi Tonucci

Tese apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática UFBA/UFAL como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática, aprovada em 25 de Agosto de 2017.

## Banca examinadora:

---

Prof. Dr. Thierry Corrêa Petit Lobão (Orientador)
UFBA

---

Prof$^{a}$. Dra. Manuela da Silva Souza
UFBA

---

Prof$^{a}$. Dra. Carmela Sica
UFBA

---

Prof$^{a}$. Dra. Ana Cristina Vieira
UFMG

---

Prof$^{a}$. Dr. Osnel Broche Cristo
UFLA

*Aos meus pais, Cláudio e Rita, minha companheira Jacqueline e meus irmãos João Paulo e Caroline.*

# Agradecimentos

Primeiro, agradeço imensamente à minha família por todo apoio moral e financeiro, pois sem este tenho certeza que nunca alcançaria o nível intelectual, acadêmico e profissional no qual me encontro. Em especial, agradeço muito aos meus pais Cláudio e Rita por todo amor, carinho, incentivo e educação moral, pois cada um desses detalhes ajudou a construir minha personalidade e a pessoa que sou. Agradeço também aos meus irmãos, João Paulo e Caroline, e aos meus primos pelos quais possuo tanto afeto, por todo o carinho, amizade e diversão que me proporcionaram desde a minha infância até o presente momento.

Agradeço à minha companheira Jacqueline por todo carinho, amor, confiança, companheirismo e por estar sempre ao meu lado me ajudando a passar por todos os momentos difíceis que apareceram nesta jornada, incentivando e apoiando as decisões importantes que tive que tomar após iniciar minha carreira acadêmica, além de ser uma pessoa excepcional com quem posso dividir meus desejos e gostos.

Agradeço aos meus amigos, ex-colegas de graduação, mestrado e doutorado pelos bons momentos que passamos estudando e por ajudarem a me divertir e distrair nos momentos de descanso. Agradeço em especial às minhas irmãs Alejandra e Elen por todo o companheirismo durante toda a jornada.

Agradeço muito também ao meu orientador, Thierry Petit Lobão, tanto pela sua disposição, dedicação e prestatividade quanto pelo seu constante incentivo e profissionalismo durante a minha jornada da pós-graduação.

Agradeço aos professores Manuela da Silva Souza, Carmela Sica, Ana Cristina Vieira e Osnel Broche Cristo por participarem da comissão julgadora da minha tese e me darem a grande honra de tê-los como membros da banca examinadora de minha defesa.

Agradeço a todos os professores do DCE-UESB e IM-UFBA que contribuíram efetivamente para minha formação como matemático. Agradeço ainda mais aos que contribuíram para minha formação não somente como matemático, mas também como ser humano. Agradecimentos especiais aos professores Adelzito, Acioly, Claudinei, Clênia, Débora, Eridan, Flaulles, Júlio, Márcio, Reginaldo, Tânia, Diego e ao meu orientador Augusto, por seus exemplos como profissionais e ótimos professores.

Finalmente, agradeço à CAPES e à FAPESB pelo apoio financeiro concedido a mim durante todo o meu doutorado.

*"Sonho que se sonha só é só um sonho que se sonha só. Mas sonho que se sonha junto é realidade."*

–John Lenon, traduzido por Raul Seixas

# Resumo

Seja $RG$ um anel de grupo de um grupo $G$ sobre um anel $R$ tal que $char(R) \neq 2$. A partir de um homomorfismo $\sigma : G \to \{\pm 1\}$, chamado de orientação em $G$, e uma involução $*$, podemos munir $RG$ com uma involução de anéis $\sigma*$, chamada de involução orientada, a partir da extensão linear de $*$ torcida pela orientação $\sigma$.

É notável a concentração de pesquisa relacionando identidades polinomiais e involuções, sendo que, no caso de uma involução $*$ em $RG$, parte dessa é focada no estudo da relação existente entre uma identidade verificada em $RG^+ = \{\alpha \in RG : \alpha^* = \alpha\}$ ou em $RG^- \{\alpha \in RG : \alpha^* = -\alpha\}$ e as estruturas base deste anel, no caso $R$ e $G$.

Os principais resultados que exibem estas relações são alcançados quando $RG^+$ ou $RG^-$, sob involuções dadas pela extensão linear de $*$ em $RG$ ou involuções orientadas $\sigma*$, verificam comutatividade, anticomutatividade ou alguma propriedade de Lie. Neste sentido, buscamos no presente trabalho estudar os casos não explorados na literatura, assim como generalizar os resultados conhecidos para uma involução orientada generalizada, onde supomos a orientação $\sigma$ agora sendo um homomorfismo de $G$ em $\mathcal{U}(R)$.

Classificaremos de forma parcial quando $RG^+$, sob uma involução orientada, é comutativo, sendo este o último caso a ser tratado do ponto de vista exposto acima, e, além disto, descreveremos de forma integral quando a anticomutatividade é verificada em $RG^+$ ou $RG^-$ agora sob a ótica das involuções orientadas generalizadas.

**Palavras-chave:** Anéis de Grupos; Involuções; Involuções Orientadas Generalizadas; Comutatividade; Anticomutatividade.

# Abstract

Let $RG$ be a group ring of a group $G$ over a ring $R$ with $charR \neq 2$. From a homomorfism $\sigma : G \to \{\pm 1\}$, called orientation in $G$, and an involution $*$, we can assign $RG$ with a ring involution $\sigma *$, called oriented involution, by the linear extension of $*$ twisted by the orientation $\sigma$.

A remarkable amount of research has be done connecting polynomial identities with involutions. In this sense, part of the research, in the case of an involution on RG, is focused on the study of the relation between an identity in $RG^+ = \{\alpha \in RG : \alpha^* = \alpha\}$ or in $RG^- \{\alpha \in RG : \alpha^* = -\alpha\}$ and the basic structures of the ring, namely, R and G.

The main results concerning these relations are obtained when $RG^+$ or $RG^-$, under involutions given by the linear extension of $*$ in $RG$ ou the oriented involutions $\sigma *$, satifies commutativity or anticommutativity, or even some Lie property.

In this way, we intend to address cases not yet explored in the literature, as well as extending known results to a generalized oriented involution, considering the orientation $\sigma$ as a homomorfism of $G$ into $\mathcal{U}(R)$.

We shal partially classify the case in which $RG^+$, under an oriented involution, is commutative, such is the last case to be treated in the sense mentioned above. Besides, we shall fully describe the case in which anticommutativity is verified in $RG^+$ or $RG^-$ under the light of generalized oriented involutions.

**Keywords:** Group Rings; Involutions; Oriented Involutions; Generalized Oriented Involutions; Commutativity; Anticommutativity.

# Índice

**Introdução** **1**

**1 Preliminares** **7**

1.1 Anéis de Grupos . . . . . 7

1.2 Involuções . . . . . 8

1.2.1 Involuções em Grupos . . . . . 8

1.2.2 Involuções em Anéis de Grupo . . . . . 10

1.3 Involuções Orientadas . . . . . 14

1.4 Involuções Orientadas Generalizadas . . . . . 16

**2 Anticomutatividade dos Antissimétricos** **19**

**3 Anticomutatividade dos Simétricos** **32**

**4 Comutatividade dos Antissimétricos** **51**

4.1 $R_2 \neq \{0\}$ ou $(G_* \cap \mathcal{Z}(G)) \backslash N \neq \emptyset$ . . . . . 52

4.1.1 $G^2 \not\subset G_*$ . . . . . 56

4.1.2 $G^2 \subset G_*$ . . . . . 59

**5 Conclusões** **66**

5.1 Considerações Finais . . . . . 66

5.2 Trabalhos Futuros . . . . . 67

**Referências** **68**

# Introdução

A Teoria dos Anéis de Grupos cumpre um papel de destaque dentro da matemática, visto que essa funciona como um ponto em que temos uma via de mão dupla ligando as mais diversas subáreas da álgebra, na qual conhecendo resultados acerca de grupos, anéis, módulos e álgebras, podemos avançar com a teoria em questão e, por outro lado, dado a quantidade de informações que possuímos de um dado anel de grupo, podemos extrair propriedades bastante fortes dessas estruturas, além de tomá-las como um ponto de partida e motivação para a busca de análogos para as Teorias de Anéis e Módulos.

Um exemplo claro de como funciona essa troca de informações pode ser vista nos resultados abordados nesse trabalho.

Dado um anel $R$ com involução $*$, chamamos de conjunto dos elementos simétricos e antissimétricos, respectivamente, aos conjuntos

$$R^+ := \{r \in R : r^* = r\} \quad \text{e} \quad R^- := \{r \in R : r^* = -r\}\,;$$

utilizamos também a notação $R_*$ e $R_*^-$ quando é conveniente especificar a involução em tela. O interesse em estudar tais conjuntos tornou-se evidente após Amitsur ter provado em um artigo clássico, [A69], que se $R^+$ ou $R^-$ satisfaz alguma identidade polinomial, então $R$ também satisfaz alguma identidade polinomial.

Infelizmente, no contexto do parágrafo anterior, a identidade que $R$ verifica, não é, em geral, a mesma verificada pela identidade previamente conhecida em $R^+$ ou $R^-$. Caso $R$ satisfaça a mesma identidade encontrada em $R^+$ (ou $R^-$), dizemos que a identidade foi levantada dos simétricos (ou dos antissimétricos) para $R$. Dessa forma, surge a pergunta para quais identidades o levantamento referido acima é garantido.

Tomando $R$ um anel comutativo com unidade e $G$ um grupo qualquer, definimos $RG$ como o $R$-módulo livremente gerado por $G$. Munindo $RG$ de um produto a partir das operações de $R$ e $G$, respeitando a distributividade, temos que $RG$ possui uma estrutura natural de anel, o qual chamamos de anel de grupo.

A partir de uma involução $*$ de grupos em $G$, é possível estender $R$-linearmente essa involução para uma involução de anéis no anel de grupo $RG$, nesse caso também

denotada por $*$, ou seja, se $\alpha = \sum_{x\in G} \alpha_x x$, então

$$\alpha^* = \left(\sum_{x\in G} \alpha_x x\right)^* = \sum_{x\in G} \alpha_x x^*,$$

chamada de involução induzida de $G$ em $RG$. Note que a aplicação que leva um elemento do grupo em seu inverso é uma involução de grupos; chamamos de involução clássica do anel de grupo $RG$ a involução induzida por essa anterior. Obviamente, dada uma involução $*$ induzida em um anel de grupo, podemos considerar os subconjuntos $RG^+$ e $RG^-$.

Dado um anel $R$, podemos definir o colchete de Lie $[r, s] = rs - sr$ e, por indução,

$$[r_1, r_2, \ldots, r_n] = [[r_1, r_2], r_3, \ldots, r_n],$$

para todo $r, s, r_i \in R$. Trivialmente podemos observar que um subconjunto $A \subset R$ é comutativo se, e somente se, $[a, b] = 0$, $\forall a, b \in A$; nesse sentido, fazendo uma extensão desse conceito, podemos estudar os subconjuntos $A \subset R$ tais que

$$[a_1, \ldots, a_n] = 0,$$

ou

$$[a, \underbrace{b, \ldots, b}_{n \text{ vezes}}] = 0,$$

para todo $a, a_i, b \in A$. Dizemos que um subcojunto que verifica a primeira identidade, para algum $n$, é Lie nilpotente, e Lie $n$-Engel, se este verifica a segunda. É fácil ver que

$$\text{Comutatividade} \Rightarrow \text{Lie nilpotência} \Rightarrow \text{Lie } n\text{-Engel}.$$

Em [GS93], Giambruno e Sehgal mostraram que se $K$ é um corpo de característica diferente de 2 e $G$ um grupo que não possui 2-elementos, então a propriedade de Lie nilpotência pode ser levantada de $KG^+$ e $KG^-$, no caso de $*$ ser a involução clássica. Em [L99, L00], Lee estendeu esse resultado para grupos maiores e para o caso Lie $n$-Engel, além de estudar quando o levantamento não é possível. Posteriormente, em [GPS09, LSS09], os resultados acima foram trabalhados no caso de uma involução induzida qualquer.

Note que no caso particular em que $RG^+$ e $RG^-$ são comutativos, o levantamento dessa identidade é equivalente ao grupo $G$ ser abeliano. Dessa forma estudar a comutatividade dos simétricos se resume ao estudo da estrutura do grupo $G$. A caracterização nesses casos se encontra em [JR06, BJPR09].

Uma outra identidade de grande interesse na área surge a partir do Produto de Jordan, dado por $r \circ s = rs + sr$, $\forall r, s \in R$. Dizemos que um subconjunto $A \subset R$ é

anticomutativo se o Produto de Jordan é identicamente nulo sobre esse conjunto, ou seja, $r \circ s = 0$, $\forall r, s \in A$. Não é dificíl verificar que no caso de $RG^+$ ou $RG^-$ ser anticomutativo, o levantamento dessa identidade é equivalente a $G$ ser um grupo abeliano e $charR = 2$, portanto, assim como no caso da comutatividade, o estudo é feito sobre a estrutura do grupo $G$, e este foi completamente caracterizado em [GP13a].

Dado as referências acima, podemos concluir que para o estudo da relação entre os conjuntos $RG^+$ e $RG^-$ e as identidades citadas anteriormente, pouco tem-se a acrescentar. Dito isto, surgem as involuções orientadas $\sigma*$ em anéis de grupos, que são dadas pela extensão linear de uma involução $*$ em $G$ acrescida de uma torsão proveniente de um homomorfismo $\sigma : G \to \{\pm 1\}$, mais precisamente $\sigma* : RG \to RG$ com

$$\alpha^{\sigma*} = \left( \sum_{x \in G} \alpha_x x \right)^{\sigma*} = \sum_{x \in G} \sigma(x) \alpha_x x^*.$$

Tais involuções foram introduzidas por Novikov, em [N70], no contexto da $K$-teoria. Naturalmente para que esta involução seja distinta de uma involução não orientada, é necessário que $char(R) \neq 2$, o qual será hipótese assumida em todo o trabalho.

Tomando $N := ker\sigma$, podemos observar que se $N_* = \{n^* : n \in N\} \subset N$, a restrição de $\sigma*$ ao subanel $RN \subset RG$ define uma involução em $RN$. Por outro lado, admitindo que $RG^+$ ou $RG^-$ satisfaça alguma das identidades referidas acima, temos que $RN^+$ ou $RN^-$ também o faz, dessa forma, os resultados já citados fornecem informações importantes sobre a estrutura de $N$ e, a partir disso, podemos descrever o grupo $G$. Tais técnicas ficarão mais claras ao longo do texto. Surpreendentemente, na maioria dos casos, o levantamento da identidade continua sendo garantido com as mesmas hipóteses dos casos não orientados; no caso do não levantamento, também é possível verificar que, exceto em algumas indentidades, os grupos tais que $(RG)_{\sigma*}$ ou $(RG)^-_{\sigma*}$ satisfazem alguma das identidades citadas pertencem a mesma classe do caso não orientado. Tais resultados podem ser encontrados em [CP12, GP13b, GP14], por exemplo.

Estendendo o conceito de involução orientada, chegamos finalmente às involuções orientadas generalizadas, obtidas de forma análoga ao substituir o contradomínio da orientação $\sigma$ de $\{\pm 1\}$ por $\mathcal{U}(R)$, o grupo das unidades do anel $R$. Nesse caso, para que a aplicação $\sigma*$ seja de fato uma involução, a condição $N^* \subset N$ se traduz nesse caso por $xx^* \in N$.

Em [V13], Villa estudou as propriedades de Lie sob a ótica dessa nova involução, generalizando os resultados encontrados em [CP12], mostrando, de forma similiar aos casos anteriores, que o grupo $G$ não possui elementos de ordem 2 é uma condição suficiente para o levantamento das identidades de Lie verificadas em $KG^+$ e $KG^-$, no caso de $K$ ser um corpo tal que $charK \neq 2$.

Nesse trabalho continuaremos estendendo resultados conhecidos da teoria, estu-

dando alguns casos ainda não abordados, relacionados à comutatividade e anticomutatividade dos conjuntos $RG^+$ e $RG^-$.

No Capítulo 2, caracterizaremos o grupo $G$, assim como iremos fornecer algumas propriedades relativas ao anel $R$ para que o conjunto $RG^-$ seja anticomutativo, no caso de $\sigma$ ser uma orientação generalizada, estendendo assim os resultados contidos em [GP13b]. Nesse caso, observaremos que a classe de grupos para que $RG^-$ seja anticomutativo permanece a mesma dos casos em que $\sigma$ é a orientação clássica ($\sigma \equiv \{\pm 1\}$) ou uma orientação trivial.

No Capítulo 3, faremos um estudo análogo ao do Capítulo 2, porém admitindo agora que a anticomutatividade é verificada em $RG^+$. Esse caso vem a ter um destaque nesse trabalho, visto que, as classes de grupos que caracterizam essa identidade nesse conjunto são as mesmas no caso de uma orientação $\sigma$ clássica ou trivial, ao passo que ao fazermos a extensão para a orientação generalizada, uma nova classe de grupos aparece como possibilidade. Outro fato interessante é que, para concluir os resultados encontrados no Capítulo 2 e em [V13], o conhecimento do subgrupo $N$, estudados quando a orientação é trivial em [GP13a, L99, L00], foi suficiente para tal caracterização, portanto, os resultados associados a cada um dos casos para as involuções orientadas não foram explicitamente utilizados, e poderiam ser tratados como corolários dessa extensão; surpreendentemente tal fato não se repete no tema abordado neste capítulo, dessa forma, faz-se necessário a introdução de um novo subgrupo $C \subset G$ dado por

$$C = \{x \in G : \sigma(x) = \pm 1\},$$

que essencialmente é formado pelos elementos do grupo sob os quais a orientação generalizada se comporta como a orientação clássica, sendo assim, o estudo da anticomutatividade dos elementos simétricos sob uma involução orientada generalizada seria impossibilitado sem o conhecimento do caso $\sigma \equiv \{\pm 1\}$, encontrado em [GP14].

Por fim, no Capítulo 4, iniciaremos o estudo da comutatividade dos antissimétricos para uma involução orientada usual, sendo que este é o último caso a ser tratado para o fechamento do quadro desse tipo de involução (na verdade, para a involução clássica, já existe uma caracterização que pode ser encontrada em [BJR07]). Estudar essa particular involução é justificada devido ao grau maior de complexidade desse caso, visto que desde a abordagem não orientada, a caracterização já apresenta uma classe maior de grupos e propriedades do anel $R$, o que torna ainda mais complexo o estudo dos casos orientados; ademais, assim como o que foi apresentado no Capítulo 3, é possível que um conhecimento prévio desse caso seja fundamental para a caracterização no caso de uma orientação generalizada. Devido a dificuldade justificada acima, denotando $G_* = \{x \in G : x^* = x\}$, apresentaremos uma resposta para o caso particular em que $(G_* \cap \mathcal{Z}(G))\backslash N \neq \emptyset$ ou o

anel $R$ possui elementos de torsão 2, ou seja, o conjunto

$$R_2 := \{r \in R : 2r = 0\},$$

é diferente de $\{0\}$.

# Capítulo 1

# Preliminares

Neste capítulo, iremos abordar alguns conceitos e resultados fundamentais para o desenvolvimento desse trabalho.

## 1.1 Anéis de Grupos

Já vimos como os anéis de grupo funcionam como ponto de encontro das diversas teorias algébricas. Iremos agora apresentar, com mais precisão, essa estrutura.

Embora não seja uma exigência necessária para a definição, admitiremos sempre que o anel $R$ tomado por base de um anel de grupo $RG$, seja comutativo e com unidade $1_R \in R$.

**Definição 1.1.** *Sejam $G$ um grupo e $R$ um anel com unidade. Denote por $RG$ o conjunto de todas as combinações lineares formais da forma*

$$\alpha = \sum_{g \in G} a_x x,$$

*onde $a_x \in R$ e $\{a_x\}_{x \in G}$ é quase nula, ou seja, $a_x \neq 0$ apenas para uma quantidade finita de índices. O conjunto $(RG, +, \cdot)$ dotado das operações de soma e produto definido da forma a seguir é um anel, chamado anel de grupo de $G$ sobre $R$:*

$$\left(\sum_{x \in G} a_x x\right) + \left(\sum_{x \in G} b_x x\right) = \sum_{x \in G} (a_x + b_x)x;$$

$$\left(\sum_{x \in G} a_x x\right) \cdot \left(\sum_{x \in G} b_x x\right) = \sum_{x,y \in G} (a_x b_y)(xy).$$

Note que $RG$ é um anel com identidade, onde $1_{RG} = 1_R 1_G$, que, de agora em diante, denotaremos simplesmente por 1.

Dado $\alpha = \sum_{x \in G} a_x x \in RG$, chamamos de suporte de $\alpha$, $supp(\alpha)$, o conjunto dos elementos $x \in G$ que aparecem na composição de $\alpha$ de forma não trivial, ou seja,

$$supp(\alpha) = \{x \in G : \alpha_x \neq 0\}.$$

Podemos também definir um produto por escalares do anel $R$ da seguinte maneira

$$r \cdot \left( \sum_{x \in G} a_x x \right) = \sum_{x \in G} r a_x x, \ \forall r \in R,$$

e facilmente verificamos que $RG$ é um $R$-módulo. Ademais, se $R$ é comutativo, então $RG$ é uma álgebra sobre $R$.

Diretamente da definição, e pelo fato de $R$ ser comutativo, não é difícil verificar que $RG$ será comutativo se, e somente se, $G$ for abeliano.

**Exemplo 1.2.** *Sejam $G = C_\infty \simeq \{\ldots, x^{-2}, x^{-1}, x^0, x^1, x^2, \ldots\}$ e $R = \mathbb{R}$, o corpo dos números reais. Temos que $RG = \mathbb{R}C_\infty$ é isomorfo ao anel dos polinômios de Laurent.*

Utilizando o monomorfismo de inclusão $i : R \to RG$ definido por $i(r) \mapsto r1_G$, temos naturalmente que $RG$ contém um subanel isomorfo a $R$, o qual frequentemente trataremos como o próprio $R$; analogamente, como $R$ possui unidade, dado a inclusão $x \mapsto 1_R x$, $\forall x \in G$, temos que o grupo das unidades do anel $RG$, $\mathcal{U}(RG)$, possui um subgrupo isomorfo ao grupo $G$, que também será identificado por $G$.

## 1.2 Involuções

Iremos apresentar nesta seção a principal ferramenta utilizada nesse trabalho para o estudo dos anéis de grupos.

### 1.2.1 Involuções em Grupos

**Definição 1.3.** *Dizemos que uma aplicação $* : G \to G$, em um grupo $G$, é uma involução de grupos se verifica as seguintes condições:*

*(i)* $(xy)^* = y^* x^*$,

*(ii)* $(x^*)^* = x$,

*para todo $x, y \in G$. Nesse caso dizemos que $G$ é um grupo com involução $*$.*

**Exemplo 1.4.** *A aplicação $x \mapsto x^{-1}$ define uma involução em qualquer grupo $G$, chamada de Involução Clássica.*

**Exemplo 1.5.** *A transposição de matrizes define uma involução de grupos no grupo geral linear $GL(n, K)$, sendo $K$ um corpo.*

**Exemplo 1.6.** *Seja $G$ um grupo com involução $*$ e $H \leq G$. Se $h^* \in H$, $\forall h \in H$, então $*|_H$ é uma involução em $H$. Em particular, a transposição é uma involução no grupo $H = \{M \in GL(n, K) : det(M) = \pm 1\}$.*

**Exemplo 1.7.** *Seja $D_n = \langle x, y : x^n = y^2 = 1,\ yx = x^{-1}y\rangle$ o grupo diedral de $2n$ elementos. A aplicação $* : D_n \to D_n$ definida pela extensão ao produto a partir de $x^* = x^{-1}$, $y^* = xyx$, é uma involução nesse grupo.*

Durante todo o trabalho, denotaremos as conjugações e comutadores em $G$ por $x^y = y^{-1}xy$ e $(x, y) = x^{-1}y^{-1}xy$, $\forall x, y \in G$, respectivamente.

**Exemplo 1.8.** *Seja o $Q_8$ grupo dos quatérnios de ordem 8, cuja presentação é*

$$Q_8 = \langle x, y; x^4 = 1, x^2 = y^2, x^y = x^{-1}\rangle.$$

*A involução clássica em $Q_8$ é dada explicitamente por*

$$g^* = \begin{cases} g & , \text{ se } g \in \{1, x^2\} \\ x^2 g & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

*Note que $\{1, x^2\} = \mathcal{Z}(Q_8) = Q_8' = \langle x^2\rangle$.*

Observe no exemplo acima que a involução é dada precisamente pela multiplicação por elementos do subgrupo derivado de $Q_8$. Veremos mais adiante que involuções desse tipo são recorrentes na linha de pesquisa abordada nesse texto.

**Definição 1.9.** *Dizemos que um grupo não abeliano $G$ é um LC-grupo*[1]*, se para todo $x, y \in G$ tais que $xy = yx$, então $x, y$ ou $xy \in \mathcal{Z}(G)$.*

Uma classe bastante interessante de grupos com involução surge quando admitimos que um LC-grupo $G$ possui um subgrupo derivado de ordem 2, ou seja $G' = \langle s\rangle \simeq C_2$. Neste caso, dizemos que $G$ possui um único comutador não trivial $s$. O seguinte teorema classifica essa classe de grupos, caracterizando-os por serem munidos de uma involução muito particular do tipo citado no Exemplo 1.8.

**Teorema 1.10** (Teoremas III.3.3 e III.3.6, [GJP96])**.** *Seja $G$ um grupo não abeliano. As seguintes condições são equivalentes:*

*(i) $G$ é um LC-grupo com um único comutador não trivial $s$.*

[1] Do inglês Limited Commutativity.

*(ii)* *$G$ possui uma involução $*$ com a propriedade $x^{-1}yx \in \{y, y^*\}$, $\forall x, y \in G$, que nesse caso é dada precisamente por*

$$x^* = \begin{cases} x & , \text{ se } x \in \mathcal{Z}(G) \\ sx & , \text{ se } x \notin \mathcal{Z}(G). \end{cases}$$

*(iii)* $G/\mathcal{Z}(G) \simeq C_2 \times C_2$.

**Definição 1.11.** *Os LC-grupos com um único comutador não trivial $s$ munido da involução $*$ apresentada no teorema anterior são chamados de SLC-grupos*[2]*. A involução $*$ é chamada de involução canônica dos SLC-grupos.*

**Exemplo 1.12.** *$Q_8$ munido com a involução $*$ do Exemplo 1.8 é um SLC-grupo. Note que nesse caso a involução dos SLC-grupos coincide com a involução clássica em $Q_8$.*

**Exemplo 1.13.** *Dado a presentação de $D_4$ no Exemplo 1.7, podemos verificar que este grupo é um LC-grupo com único comutador não trivial $x^2$, porém não podemos dizer que $D_4$ munido da involução $*$ desse mesmo exemplo seja um SLC-grupo, já que essa não é do tipo do teorema anterior. Por outro lado, este mesmo teorema afirma que a aplicação*

$$w^* = \begin{cases} w & , \text{ se } w \in \{1, x^2\} \\ x^2 w & , \text{ se } w \notin \{1, x^2\}, \end{cases}$$

*é uma involução em $D_4$; ao munir $D_4$ com essa involução, dizemos que este é um SLC-grupo.*

**Exemplo 1.14.** *A propriedade de ser um LC-grupo é independente de possuir um único comutador não trivial. De fato, note que o grupo*

$$G = \left\langle x_1, x_2, x_3 : x_i^4 = (x_i^2, x_j) = ((x_i, x_j), x_k) = 1 \text{ para } i, j, k \text{ distintos} \right\rangle$$

*possui três comutadores não triviais $(x_1, x_2), (x_2, x_3)$ e $(x_1, x_3)$, e, por outro lado, $G/\mathcal{Z}(G)$ possui expoente 2, o que garante que o produto de dois elementos não centrais é central, e consequentemente a condição de LC-grupo é verficada. Note que devido à quantidade de comutadores, este não se encaixa na classe dos SLC-grupos.*

*Observe que neste caso, $H = \langle x_1, x_2 \rangle$ e $I = \langle x_1, x_2, x_3^2 \rangle$ são SLC-grupos de ordem 32 e 64, respectivamente, sendo $s = (x_1, x_2)$ o único comutador não trivial de $H$ e $I$.*

### 1.2.2 Involuções em Anéis de Grupo

**Definição 1.15.** *Dizemos que uma aplicação $* : R \to R$, em $R$ é um anel, é uma involução de anéis se verifica as seguintes condições:*

[2] LC-grupos especiais

*(i)* $(rs)^* = s^*r^*$,

*(ii)* $(r+s)^* = r^* + s^*$,

*(iii)* $(r^*)^* = r$,

*para todo* $r, s \in R$. *Nesse caso dizemos que* $R$ *é um anel com involução* $*$.

**Exemplo 1.16.** *A transposição de matrizes define uma involução no anel* $M_n(R)$ *das matrizes* $n \times n$ *com entradas em um anel* $R$.

**Exemplo 1.17.** *A conjugação complexa é uma involução em* $\mathbb{C}$.

Das possíveis involuções a serem definidas em um anel de grupo $RG$, destacam-se as involuções provenientes de uma involução $*$ do grupo $G$.

**Exemplo 1.18** (Involução Induzida em Anéis de Grupos)**.** *Seja* $RG$ *o anel de grupo de* $G$ *sobre* $R$ *e* $*$ *uma involução em* $G$. *A aplicação, também denotada por* $*$, $* : RG \to RG$, *definida a partir da extensão linear*

$$\left(\sum_{x \in G} \alpha_x x\right)^* = \sum_{x \in G} \alpha_x x^*,$$

*é uma involução em* $RG$, *chamada de Involução Induzida de* $G$ *em* $RG$.

Como todo grupo é munido da involução clássica, em particular, podemos fazer a extensão linear definida acima, fazendo com que todo anel de grupo $RG$ seja naturalmente um portador dessa involução, chamada de Involução Canônica (ou Clássica) em Anéis de Grupos. Essa particular involução é objeto de grande interesse em qualquer estudo que relacione anéis de grupos e involuções, sendo que a partir dos resultados obtidos nesses casos, buscam-se estendê-los para uma involução induzida qualquer ou até para uma involução geral de anéis. Exemplos do estudo dessa involução e da sua extensão, podem ser encontrados em [L99, L00, L10, GPS09, LSS09].

**Definição 1.19.** *Sejam* $R$ *um anel e* $*$ *uma involução em* $R$. *Um elemento* $r \in R$ *é chamado de simétrico ou antissimétrico, se* $r^* = r$ *ou* $r^* = -r$, *respectivamente. Denotamos por* $R_*$ *e* $R_*^-$ *o conjunto dos elementos simétricos e antissimétricos de* $R$, *ou seja,*

$$R_* = \{r \in R; r^* = r\} \text{ e } R_*^- = \{r \in R; r^* = -r\}.$$

Na literatura é comum encontrar a notação $R^+$, para o conjunto dos simétricos, e $R^-$, para os antissimétricos. Utilizaremos as duas notações devido ao fato de que, em alguns momentos, será interessante identificar a involução em questão e, portanto, a

primeira se torna mais adequada, em contrapartida, a segunda é mais econômica. Utilizaremos também as notações $(x^{-1})^* = x^{-*}$, $\forall x \in G$ e $G_*$ ao conjunto dos simétricos do grupo $G$, ou seja,

$$G_* = \{x \in G : x = x^*\}$$

**Observação 1.20.** *Note que $1 \in G_*$ e portanto, se $x \in G_*$, então $1 = 1^* = (xx^{-1})^* = x^{-*}x^* = x^{-*}x$, assim, $x^{-*} = x^{-1}$, ou seja $x^{-1} \in G_*$. Analogamente mostramos que se $x \notin G_*$, então $x^{-1} \notin G_*$, ou seja, $x \in G_*$ se, e somente se $x^{-1} \in G_*$. Ademais $x^{-*} = (x^*)^{-1}$.*

Utilizaremos os fato acima ao longo do texto sem fazer referência a essa observação.

Seja $RG$ um anel de grupo com uma involução $*$ induzida por $G$, assim, dado $\alpha = \sum_{x \in G} \alpha_x x \in RG$, temos

$$\alpha^* = \sum_{x \in G} \alpha_x x^*,$$

portanto, se $\alpha \in RG^+$, então

$$\sum_{x \in G} \alpha_x x = \sum_{x \in G} \alpha_x x^*.$$

Devido ao fato de $RG$ ser livremente gerado como $R$-módulo por $G$, particionando $G = G_* \cup (G \backslash G_*)$, podemos verificar que se $\alpha \in RG^+$, então $\alpha_x = \alpha_{x^*}$ se $x \notin G_*$; ademais, nenhuma condição é exigida para os coeficientes associados a elementos de $G_*$, logo, podemos concluir que $RG^+$ é gerado como um $R$-módulo por

$$G_* \cup \{x + x^* : x \in G \backslash G_*\}.$$

De uma forma análoga, é fácil verificar que $RG^-$ é gerado por

$$\{rx : x \in G_*,\ r \in R_2\} \cup \{x - x^* : x \in G \backslash G_*\},$$

onde $R_2 = \{r \in R : 2r = 0\}$.

O interesse em estudar esses conjuntos foi impulsionado após Amitsur provar, em [A69], que se $R^+$ ou $R^-$ satisfaz alguma identidade polinomial, então $R$ também satisfaz alguma identidade. Naturalmente, em geral, as identidades podem não ser preservadas dos simétricos para todo o anel $R$, sendo assim, um problema que surge imediatamente desse resultado é conhecer quais identidades verificadas em $R^+$ ou $R^-$ também o serão em $R$, nesse caso, dizemos que a identidade foi levantada de $R^+$ ou $R^-$ para $R$.

Denotando o colchete de Lie em um anel $R$ por $[r, s] = rs - sr$, $\forall r, s \in R$, a partir da iterada desses colchetes,

$$[r_1, \ldots, r_n] = [[r_1, r_2], r_3, \ldots, r_n],$$

$\forall r_i \in R$, podemos definir as seguintes identidades

$$[r_1, \ldots, r_n] = 0$$

e

$$[r, \underbrace{s, s, \ldots, s}_{n-\text{vezes}}] = 0,$$

chamadas de Lie nilpotência de índice $n$ e Lie $n$-Engel, respectivamente.

No caso de $K$ ser um corpo de característica diferente de 2, Giambruno, Sehgal e Lee, provaram, em [GS93, L00], que se $G$ é um grupo que não possui 2-elementos e $*$ é a involução clássica em $G$, então as identidades de Lie nilpotência e Lie $n$-Engel podem ser levantadas de $KG^+$ e $KG^-$ para todo o $KG$. Posteriormente Giambruno, Polcino e Sehgal, mostraram, em [GPS09], que para o conjunto dos simétricos a condição de $G$ não possuir 2-elementos continua sendo suficiente para garantir que essas identidades sejam levantadas no caso da involução $*$ ser uma involução induzida qualquer em $KG$; além disso, Lee, em [L99], estendeu um dos resultados encontrados em [GS93], garantindo que no caso da involução clássica, o levantamento ainda é verificado caso o grupo dos quatérnios $Q_8$ não esteja contido em $G$.

Por outro lado, quando os conjuntos $RG^+$ e $RG^-$ verificam alguma identidade polinomial e o levantamento não ocorre, é possível ainda extrair informações acerca da estrutura do anel de grupo $RG$, buscando caracterizar o grupo $G$ que o compõe, assim como algumas propriedades do anel $R$. Nesse sentido os resultados encontrados em [L99, L00, LSS09] complementam o estudo comentado no parágrafo anterior. De uma forma resumida, a seguinte tabela localiza os resultados que acabamos de abordar:

| | Lie nilpotência | Lie $n$-Engel |
|---|---|---|
| $RG_*$ | [GS93, L99, GPS09, LSS09] | [L00, GPS09] |
| $RG_*^-$ | [GS93] | [L00] |

Tabela 1.1: Propriedades de Lie para involuções induzidas

Existem outras identidades de interesse na teoria, dentre elas, destacaremos aquelas que estão diretamente ligadas à possibilidade de munir os conjuntos $R^+$ e $R^-$ de uma estrutura de anel.

**Definição 1.21.** *Dizemos que um subconjunto $A \subset R$ é anticomutativo se $ab = -ba$, $\forall a, b \in A$, ou seja, o operador de Jordan $a \circ b = ab + ba$ é identicamente nulo em $A$.*

O impedimento para que os conjuntos $R^+$ e $R^-$ herdem a estrutura de anel de $R$, se encontra no fato de que estes podem não ser fechados para o produto, e é justamente sobre a comutatividade a anticomutatividade que repousam as condições para que esses conjuntos sejam subanéis, como mostra a proposição a seguir.

**Proposição 1.22.** *Se $R$ um anel com uma involução $*$, então são verdadeiras:*

*(a) $R^+$ é um subanel de $R$ se, e somente se, $R^+$ é comutativo.*

*(b) $R^-$ é um subanel de $R$ se, e somente se, $R^-$ é anticomutativo.*

*Demonstração.* (a) Sejam $a, b \in R^+$. Então $(a-b)^* = a^* - b^* = a - b$. Logo $a - b \in R^+$. Agora, $(ab)^* = b^*a^* = ba$. Assim, $ab \in R^+$ se, e somente se, $ab = ba$; isto é, se, e somente se, $R^+$ é comutativo. O item (b) segue de forma análoga. □

Essa proposição motiva a busca por resultados que relacionem estas identidades sobre esses subconjuntos, que é exatamente o propósito dessa tese para certas involuções que iremos em breve abordar.

Podemos encontrar na crescente literatura acerca desse tema, resultados garantindo, para a involução $*$ induzida em $RG$, condições para que a comutatividade e anticomutatividade de $RG_*$ e $RG_*^-$ sejam verificadas. Tais resultados podem ser encontrados, no caso $charR \neq 2$, conforme a seguinte tabela:

| | Comutatividade | Anticomutatividade |
|---|---|---|
| $RG_*$ | [JR06] | [GP13a] |
| $RG_*^-$ | [BJPR09] | |

Tabela 1.2: Comutatividade e anticomutatividade para involuções lineares

Observe que se $charR = 2$, então os conjuntos $RG^+$ e $RG^-$ coincidem, e o mesmo ocorre para essas identidades. Esse caso foi estudado em [JR06].

## 1.3 Involuções Orientadas

Observando os resultados citados acima acerca das identidades de Lie nilpotência, Lie $n$-Engel, comutatividade e anticomutatividade verificadas nos conjuntos $RG^+$ e $RG^-$, podemos concluir que, num certo sentido, pouco tem-se a acrescentar nesse estudo. Dessa forma, para prosseguirmos devemos buscar novas formas de construir involuções no anel de grupo $RG$ a partir de involuções em $G$. Na busca dessas involuções, surge o conceito de Involuções Orientadas, introduzidos por Novikov no contexto da $K$-Teoria.

**Definição 1.23.** *Sejam $R$ um anel e $G$ um grupo com involução $*$. Seja $\sigma : G \to \{\pm 1\}$ um homomorfismo de grupos, o qual chamamos de orientação de $G$, compatível com a involução $*$, no sentido de $xx^* \in N := ker\sigma$. Então, a aplicação $\sigma* : RG \to RG$ dada por*

$$\left(\sum_{x\in G} \alpha_x x\right)^{\sigma*} = \sum_{x\in G} \sigma(x)\alpha_x x^*,$$

*define uma involução de anéis no anel de grupo $RG$, chamada de Involução Orientada.*

Note que se $\sigma*$ definida acima é uma involução, devemos ter $(x^{\sigma*})^{\sigma*} = x$, ou seja,

$$(x^{\sigma*})^{\sigma*} = (\sigma(x)x^*)^{\sigma*} = \sigma(xx^*)x = x,$$

donde concluímos que, de fato, a condição $xx^* \in N$ é necessária para a boa definição dessa involução. Da mesma forma, podemos verificar que essa mesma condição também é suficiente para que $\sigma*$ seja uma involução em $RG$.

**Observação 1.24.** *Se $\sigma$ for trivial, ou seja, $\sigma \equiv 1$, então a involução orientada $\sigma*$ coincide com a involução induzida $*$. Dessa forma, todas as orientações serão assumidas não triviais. Note se $\sigma*$ é uma involução orientada com $\sigma$ não trivial, então $charR \neq 2$. Desta forma assumiremos também durante todo o trabalho a hipótese de que $charR \neq 2$.*

Os próximos exemplos mostram que existe uma grande quantidade de involuções compatíveis com orientações.

**Exemplo 1.25.** *Tomando o grupo $GL(n, \mathbb{K})$ com a involução $*$ dada pela transposição de matrizes, tomando $\sigma(A) = \frac{detA}{|detA|}$, $A \in GL(n, \mathbb{K})$, facilmente concluímos que $\sigma$ e $*$ são compatíveis e portanto $\sigma*$ define uma involução em $\mathbb{K}GL(n, \mathbb{K})$. Da mesma maneira, é fácil ver que $\sigma*$ define uma involução em $\mathbb{K}H$, com $H$ dado no Exemplo 1.6.*

**Exemplo 1.26.** *Como uma orientação $\sigma$ é um homomorfismo de $G$ em $\{\pm 1\}$, podemos concluir que existe uma relação biunívoca entre as orientações de um grupo $G$ e os subgrupos $N \leq G$ tais que $(G : N) = 2$. Para isto, basta verificar que tomando $ker\sigma = N$, então $(G : N) = 2$; reciprocamente, para um dado $N \leq G$ tal que $(G : N) = 2$, definindo $\sigma : G \to G$ por*

$$\sigma(x) = \begin{cases} -1 & , \text{ se } x \notin N \\ 1 & , \text{ se } x \in N, \end{cases}$$

*temos a relação desejada. Note que essa propriedade garante que a involução clássica em um grupo $G$ é compatível com qualquer orientação deste.*

Por outro lado, o exemplo a seguir mostra que dados uma involução $*$ qualquer e uma orientação em um grupo $G$, nem sempre estas serão compatíveis.

**Exemplo 1.27.** *Dado o grupo $D_4$ com involução $*$ definida no Exemplo 1.7, tomando a orientação $\sigma(x) = -1$, $\sigma(y) = 1$, podemos verificar que $*$ não é compatível com $\sigma$ e portando a aplicação $\sigma*$ definida acima não é uma involução em $RD_4$.*

Dado esse novo tipo de involução, surgem naturalmente as mesmas questões já estudadas no caso não orientado. Além disso, todo o estudo feito anteriormente mostra-se bastante útil na resolução desses novos problemas, visto que, dada a involução orientada $\sigma*$, facilmente podemos verificar que $\sigma * |_{RN} : RN \to RN$ é precisamente a involução

induzida por $*$ em $RN$; dessa forma, se $RG_{\sigma*}$ (ou $RG^-_{\sigma*}$) verifica alguma identidade polinomial, necessariamente, $RN_{\sigma*} = RN_*$ (ou $RN^-_*$) irá satisfazer a mesma identidade, logo, se for conhecida uma caracterização de quando o conjunto dos simétricos (ou antissimétricos) satifaz essa identidade, então, conheceremos o subgrupo $N \leq G$ e, portanto, grande parte do grupo $G$ é conhecida, visto que $(G : N) = 2$.

Da mesma forma que fizemos para o caso não orientado, podemos encontrar um conjunto de geradores para $RG^+$ e $RG^-$. Iremos descrever esses conjuntos na próxima seção de uma maneira mais geral.

Finalmente, utilizando os resultados que caracterizam o subgrupo $N$, vide a Tabela 1.2, e a descrição dos geradores de $RG_{\sigma*}$ e $RG^-_{\sigma*}$, foi possível quase que completamente esgotar o estudo desse tipo de involução em relação as identidades usuais, restando apenas descrever quando o conjunto dos antissimétricos comutam sendo $*$ uma involução qualquer, visto que esse caso foi abordado apenas para a involução clássica. Esse último problema em aberto é o tópico do Capítulo 4, onde iremos apresentar uma resposta parcial para esse condição. Aos demais casos, e a resposta de quando o conjunto dos antissimétricos comutam sendo $*$ a involução clássica, podem ser encontrados em

| | Comutatividade | Anticomutatividade | Propriedades de Lie |
|---|---|---|---|
| $RG_{\sigma*}$ | [BP06, GP13b] | [GP14] | [CP12, V13] |
| $RG^-_{\sigma*}$ | [BJR07] | [GP13b] | |

Tabela 1.3: Identidades para involuções orientadas

Um fato interessante que ocorre ao compararmos os resultados acerca das involuções induzidas e orientadas, é que, a estrutura dos grupos e da involução, ou as condições para o levantamento da identidade, são, na maioria dos casos, as mesmas do caso orientado e o induzido.

Um exemplo desse fato pode ser visto no estudo da anticomutatividade dos elementos simétricos e antissimétricos, onde tanto os casos orientados e não orientados apresentam como soluções grupos que possuem no máximo um único comutador não trivial, e, além disso, a involução nos elementos não simétricos em $G$ é dada precisamente pela multiplicação por um elemento $s$ fixo de $G$, que, no caso não abeliano, é o próprio gerador de $G'$. No caso da Lie nilpotência ou Lie $n$-Engel, a ausência de elementos de ordem dois é fator comum para o levantamento dessas identidades, independentemente da involução ser orientada ou não.

## 1.4 Involuções Orientadas Generalizadas

No intuito de estender ainda mais a construção de involuções em anéis de grupos $RG$, surge o conceito de involuções orientadas generalizadas, que simplesmente substitui

o contradomínio $\{\pm 1\}$ da orientação usual $\sigma$ pelo grupo das unidades do anel $R$. Dessa maneira, uma orientação generalizada está fortemente ligada ao anel $R$ base do anel de grupo $RG$ sobre o qual pretendemos construir essas novas involuções. Tomando essa nova orientação, podemos, de forma análoga às involuções orientadas, definir uma involução em $RG$.

Da mesma forma que verificamos anteriormente, a condição $xx^* \in N = ker\sigma$ é necessária e suficiente para que a aplicação a seguir seja uma involução. Mais precisamente, temos:

**Definição 1.28.** *Seja $RG$ um anel de grupo de $R$ sobre um grupo $G$ com involução $*$. Um homomorfismo de grupos $\sigma : G \to \mathcal{U}(R)$ é chamado de orientação generalizada de $G$. Se $*$ é compatível com a orientação generalizada $\sigma$ no sentido de $xx^* \in N := ker\sigma$, então a aplicação $\sigma* : RG \to RG$ dada*

$$\left(\sum_{x\in G} \alpha_x x\right)^{\sigma*} = \sum_{x\in G} \sigma(x)\alpha_x x^*$$

*define uma involução no anel de grupo $RG$, chamada de Involução Orientada Generalizada.*

**Observação 1.29.** *Afim de tornar a escrita mais limpa, quando não houver risco de confusão, iremos nos referir apenas por orientação e involução à essas novas aplicações.*

No caso de uma orientação usual, vimos que, para que esta não seja trivial, é necessário que $charR \neq 2$, entretanto essa condição não é exigida no caso de uma orientação generalizada. Por outro lado, como iremos estudar a comutatividade e anticomutatividade de $RG^+$ e $RG^-$, queremos a princípio que estes conjuntos e estas identidades sejam distintas, portanto, em todo o trabalho $R$ será admitido com $charR \neq 2$.

Para estudar essa nova involução, podemos seguir o mesmo caminho apresentado no estudo das orientações usuais. Nesse sentido, utilizaremos a estrutura do subgrupo $N \leq G$, já estabelecida a partir do estudo dos casos não orientados, e, caso seja necessário, temos também à disposição a estrutura do subgrupo $C \leq G$ dado por

$$C = \{x \in G : \sigma(x) = \pm 1\},$$

que essencialmente é o subgrupo de $G$ dado pelos elementos tais que a orientação generalizada se comporta como a usual. É fácil ver que $N \leq C \leq G$. A estrutura do subgrupo $C$ pode ser encontrada via a Tabela 1.3, onde sabemos que ainda existe uma lacuna no caso geral da comutatividade dos antissimétricos, caso esse que iremos abordar no Capítulo 4.

Iremos agora descrever um conjunto de geradores para os conjuntos $RG^+$ e $RG^-$ relativos a essa nova involução.

Seja $\beta = \sum_{x \in G} \beta_x x$. Se $\beta \in RG^+$ então

$$\sum_{x \in G} \beta_x x = \left( \sum_{x \in G} \beta_x x \right)^{\sigma *} = \sum_{x \in G} \sigma(x) \beta_x x^*,$$

portanto $\beta_{x^*} = \sigma(x)\beta_x$, $\forall x \in supp(\beta)$. Dessa forma temos que se $x \in supp(\beta) \cap G_*$ então $\beta_x = \sigma(x)\beta_x$, ou seja

$$(1 - \sigma(x))\beta_x = 0;$$

se $x \in supp(\beta) \cap (G \backslash G_*)$, então $\beta_{x^*} = \sigma(x)\beta_x$. Visto que estas são as condições para que um elemento seja simétrico, concluímos então que $(RG)_{\sigma *}$ é gerado como $R$-módulo pelos conjuntos

$$\mathcal{S}_1 = \{\alpha x : x \in G_*,\ \alpha(1 - \sigma(x)) = 0\} \text{ e}$$

$$\mathcal{S}_2 = \{x + \sigma(x)x^* : x \notin G_*\}.$$

De forma análoga, podemos verificar que os geradores de $RG^-$ são dados por

$$\mathcal{A}_1 = \{\alpha x : x \in G_*,\ (1 + \sigma(x))\alpha = 0\} \text{ e}$$

$$\mathcal{A}_2 = \{x - \sigma(x)x^* : x \notin G_*\}.$$

Note também que o fato de $\sigma$ ser generalizada não foi utilizado, portanto, essa mesma construção ainda é válida no caso de orientações usuais e, dessa forma, temos que estes também são os geradores do caso que omitimos na seção anterior.

Essa nova involução é objeto recente de pesquisa e, portanto, poucos resultados acerca dela são conhecidos. Seguindo o caminho apontado pelos artigos já citados, podemos afirmar que, até o presente momento, apenas foi realizado o estudo do levantamento das propriedades de Lie no caso de $*$ ser a involução clássica. Tais resultados podem ser encontrados em [V13].

No intuito de estender os resultados conhecidos para essa nova involução, iremos, nos Capítulos 2 e 3, caracterizar quando os conjuntos $RG^-$ e $RG^+$ são anticomutativos, respectivamente, e, no Capítulo 4, iniciar o estudo da comutatividade de $RG^+$ no caso de $\sigma$ ser uma orientação usual e $*$ uma involução qualquer, visto que um resultado desse tipo irá descrever a estrutura do subgrupo $C \leq G$, e este possivelmente será essencial na descrição análoga quando $\sigma$ for uma orientação generalizada.

# Capítulo 2

# Anticomutatividade dos Antissimétricos

Neste Capítulo iremos descrever a estrutura dos grupos $G$ tais que $RG^- = RG^-_{\sigma *}$ é anticomutativo, sendo $\sigma$ uma orientação generalizada e $charR \neq 2$. Desta forma, estas duas últimas hipóteses serão omitidas dos enunciados dos resultados.

Para estudar $RG^-$, lembramos que o conjunto $RG^-$ é gerado por

$$\mathcal{A}_1 = \{\alpha x : x \in G_* \text{ e } \alpha(1+\sigma(x)) = 0\}$$

$$\mathcal{A}_2 = \{x - \sigma(x)x^* : x \in G \backslash G_*\}.$$

Os lemas a seguir são fundamentais para o desenvolvimento do trabalho, pois são eles que exibem as principais relações entre os elementos do grupo entre si, e entre elementos do grupo $G$ e do anel $R$.

**Lema 2.1.** *Suponha que $RG^-$ é anticomutativo. Se $x \in G_*$ então $\sigma(x) \neq -1$.*

*Demonstração.* Se $x \in G_*$ e $\sigma(x) = -1$, então, para todo $\alpha \in R$, a equação $\alpha(1+\sigma(x)) = 0$ é satisfeita, portanto $\alpha x \in RG^-$. Assim, tomando $\alpha = 1$, $\alpha x = x \in RG^-$ e, como $RG^-$ é anticomutativo, temos que $x$ anticomuta consigo mesmo, ou seja $x^2 = -x^2$, o que implica em $2x^2 = 0$, um absurdo, já que $charR \neq 2$ e $RG$ é livremente gerado por $G$. □

**Lema 2.2.** *Suponha que $RG^-$ é anticomutativo. Se $* \neq Id$, então $charR = 4$ e, para todo $x \notin G_*$ tem-se $xx^* = x^*x$, $x^2 \in G_*$ e $2(1+\sigma(x)^2) = 0$.*

*Demonstração.* Seja $x \notin G_*$. Sabemos que $(x - \sigma(x)x^*) \in RG^-$ e, como $RG^-$ é anticomutativo, temos

$$(x - \sigma(x)x^*)(x - \sigma(x)x^*) = -(x - \sigma(x)x^*)(x - \sigma(x)x^*),$$

portanto

$$\begin{aligned} 0 &= 2(x - \sigma(x)x^*)^2 \\ &= 2x^2 - 2\sigma(x)xx^* - 2\sigma(x)x^*x + 2\sigma(x)^2(x^*)^2. \end{aligned}$$

Como $charR \neq 2$, então $2 \neq 0$, portanto $x^2$ deve ser igual a algum outro elemento de $G$ que aparece na equação. Observe que $x^*x \neq x^2 \neq xx^*$, pois $x \notin G_*$, assim, devemos ter necessariamente $x^2 = (x^*)^2 = (x^2)^*$, logo $x^2 \in G_*$; pelo mesmo argumento, encontramos que $x^*x = xx^*$. Substituindo essas informações na equação acima obtemos

$$2(1+\sigma(x)^2)x^2 - 4\sigma(x)xx^* = 0,$$

portanto, para que a mesma faça sentido, é necessário que $2(1+\sigma(x)^2) = 0 = 4\sigma(x)$. Por fim, como $4\sigma(x) = 0$, e $\sigma(x) \in \mathcal{U}(R)$, temos que $4 = 0$, ou seja, $charR = 4$. □

O seguinte corolário afirma que, se $* \neq Id|_G$, então cada elemento de $G_*$ tem ao menos um múltiplo presente nos geradores de $RG^-$.

**Corolário 2.3.** *Se os antissimétricos anticomutam e $* \neq Id|_G$, então, dado $x \in G_*$, sempre existe $\alpha \in R\setminus\{0\}$ tal que $\alpha x \in RG^-$.*

*Demonstração.* Se $\sigma(x) = 1$, então basta tomar $\alpha = 2$, já que $charR = 4$. Se $\sigma(x) \neq 1$, então $\alpha = 1 - \sigma(x) \neq 0$ e satisfaz a equação, pois $(1-\sigma(x))(1+\sigma(x)) = 1 - \sigma(x)^2$, e como $x \in G_*$, pela compatibilidade da orientação com a involução, temos $\sigma(x)^2 = 1$. □

Observe que o corolário continua válido mesmo se $* = Id|_G$, não garantindo apenas a existência de tais escalares para os elementos em $N$.

**Lema 2.4.** *Suponha que $RG^-$ é anticomutativo. Dados $x, y \in G$, então, $xy = yx$ se, e somente se, $x^*y = yx^*$. Além disso, se $x, y \notin G_*$ e $xy = yx$, então $xy = yx = x^*y^* = y^*x^*$ e $xy^* = y^*x = x^*y = yx^*$.*

*Demonstração.* Suponha que $xy = yx$. Se $x \in G_*$, trivialmente temos a equivalência. Se $y \in G_*$, então, aplicando a involução em ambos os membros de $xy = yx$, obtemos $yx^* = x^*y$, e o resultado é válido.

Podemos assumir que $x, y \notin G_*$. Nesse caso, $(x - \sigma(x)x^*), (y - \sigma(y)y^*) \in RG^-$, assim,

$$(x-\sigma(x)x^*)(y-\sigma(y)y^*) = -(y-\sigma(y)y^*)(x-\sigma(x)x^*),$$

logo,

$$xy + yx + \sigma(xy)x^*y^* + \sigma(xy)y^*x^* = \sigma(y)xy^* + \sigma(y)y^*x + \sigma(x)yx^* + \sigma(x)x^*y. \tag{2.1}$$

como $xy = yx$, aplicando a involução, temos $y^*x^* = x^*y^*$, assim

$$2xy + 2\sigma(xy)x^*y^* = \sigma(y)xy^* + \sigma(y)y^*x + \sigma(x)yx^* + \sigma(x)x^*y.$$

Observe que nenhum elemento do membro direito da equação pode ser igual a algum do membro esquerdo, pois nesse caso, $x$ ou $y$ seria simétrico, um absurdo. Portanto,

para que a equação faça sentido, ambos os membros são nulos. Dessa forma, como $2 \neq 0$ e $\sigma \in \mathcal{U}(G)$, então $xy = x^*y^*$. Por outro lado, cada elemento do membro direito é igual a apenas um outro elemento do mesmo membro ou os quatro elementos são iguais entre si.

Suponha, por absurdo, que $x^*y \neq yx^*$, ou seja, ou $x^*y = y^*x$ ou $x^*y = xy^*$.

Se $x^*y = y^*x$, então $xy^* = yx^*$, portanto, $x(y^*y) = yx^*y = yy^*x = (y^*y)x$, assim, como $(x, y) = 1 = (x, y^*y)$, então $(x, y^*) = 1$, absurdo; se $x^*y = xy^*$, então $y^*x = yx^*$, portanto, $x(yy^*) = yxy^* = yx^*y = y^*xy = (y^*y)x$, assim, como $(x, y) = 1 = (x, yy^*)$, então $(x, y^*) = 1$, contradição. Portanto, $x^*y = yx^*$. Observe que se os quatro elementos do membro direito não forem todos iguais entre si, então $2\sigma(x) = 0$, o que é um absurdo. Portanto $xy^* = y^*x = x^*y = yx^*$.

Para a recíproca, basta aplicar o resultado a $x^*$ e $y$. □

Esse último lema nos afirma que se $(RG)^-_{\sigma*}$ é anticomutativo, então dois elementos de $G$ comutam entre si se, e somente se, um deles comuta com a imagem pela involução do outro. Esse fato eventualmente será utilizado sem fazer referência ao lema.

A partir de agora iremos particionar $G$ em $G_*$ e $G \backslash G_*$ e procurar exibir o que ocorre com o produto de elementos entre estes subconjuntos. Mostraremos nos lemas a seguir que a involução em um elemento não simétrico $x$ é dada pela conjugação por um elemento $y$ qualquer do grupo $G$ tal que $xy \neq yx$. Mostraremos também a relação existente entre o comutador de dois elementos $x$ e $y$ destes subconjuntos e a simetria do produto $xy$.

Primeiro, vamos estudar o que ocorre com os elementos em $G \backslash G_*$.

**Lema 2.5.** *Suponha que $RG^-$ é anticomutativo. Se $x \notin G_*$ e $y \notin N \cup G_*$, então, $x^y \in \{x^*, x\}$.*

*Demonstração.* Por hipótese temos $(x - \sigma(x)x^*), (y - \sigma(y)y^*) \in RG^-$, assim

$$(x - \sigma(x)x^*)(y - \sigma(y)y^*) = -(y - \sigma(y)y^*)(x - \sigma(x)x^*),$$

logo

$$xy + yx + \sigma(xy)x^*y^* + \sigma(xy)y^*x^* = \sigma(y)xy^* + \sigma(y)y^*x + \sigma(x)yx^* + \sigma(x)x^*y. \tag{2.2}$$

Como esta equação é verdadeira, então $xy \in \{yx, x^*y^*, y^*x^*, xy^*, y^*x, x^*y, yx^*\}$. Note que $xy \notin \{xy^*, x^*y\}$, pois, caso contrário, $x$ ou $y \in G_*$, contrariando a hipótese. Se $xy \in \{yx, yx^*\}$, então $x^y \in \{x, x^*\}$ e o resultado é válido.

Suponha, por absurdo que $xy \notin \{yx, yx^*\}$, assim, temos $xy \in \{y^*x, x^*y^*, y^*x^*\}$. Vamos analisar estas 3 possibilidades.

**Caso 1:** $xy = y^*x$. Como $y \notin N$, devemos ter ao menos um outro termo em (2.2) igual a $xy$ e note que a única possibilidade é $xy = x^*y^*$ pois, caso contrário teríamos

$y^*x = xy = y^*x^*$, o que implicaria em $x \in G_*$. Aplicando a involução em $xy = y^*x = x^*y^*$, encontramos $y^*x^* = x^*y = yx$, assim, substituindo na equação (2.2), temos

$$(1 + \sigma(xy) - \sigma(y))xy + (1 + \sigma(xy) - \sigma(x))yx - \sigma(y)xy^* - \sigma(x)yx^* = 0,$$

sendo que para esta fazer sentido, é necessário que $xy^* = yx^*$, logo $xy^* \in G_*$, e $\sigma(x) = -\sigma(y)$; multiplicando essa última equação por $\sigma(y^*) = \sigma(y^{-1})$, obtemos $\sigma(xy^*) = -1$, contrariando o Lema 2.1.

**Caso 2.a:** $xy = x^*y^*$ e $\sigma(xy) \neq -1$. Sabemos que $xy$ deve ser igual a outro elemento da expressão. Se $xy = y^*x$, podemos proceder como no caso anterior. Dessa forma, podemos assumir que $xy = x^*y^* = y^*x^*$. Aplicando a involução em $x^*y^* = y^*x^*$, encontramos $xy = yx$, contradição.

**Caso 2.b:** $xy = x^*y^*$ e $\sigma(xy) = -1$. Aplicando a involução, temos $y^*x^* = yx$, logo $(xy)^* = yx$, assim $xy - \sigma(xy)(xy)^* = xy + yx \in RG^-$, portanto, como $RG^-$ é anticomutativo, e denotando $(x^{-1})^* = x^{-*}$, temos

$$(xy + yx)(x^{-1} - \sigma(x^{-1})x^{-*}) = -(x^{-1} - \sigma(x^{-1})x^{-*})(xy + yx),$$

logo,

$$\begin{gathered} xyx^{-1} + y + y + x^{-1}yx \\ = \\ \sigma(x^{-1})xyx^{-*} + \sigma(x^{-1})yxx^{-*} + \sigma(x^{-1})x^{-*}xy + \sigma(x^{-1})x^{-*}yx, \end{gathered}$$

o que implica em $y \in \{xyx^{-1}, xyx^{-*}, yxx^{-*}, x^{-1}yx, x^{-*}xy, x^{-*}yx\}$. Observe que se $y \in \{xyx^{-1}, xyx^{-*}, x^{-1}yx, yxx^{-*}, x^{-*}xy\}$, então encontraremos $x \in G_*$ ou $x^y \in \{x, x^*\}$, contradição; portanto, $y = x^*yx^{-1}$, ou seja, $yx = x^*y$. Como $yx = y^*x^*$, se $yx = x^*y$, então, $y^*x^* = x^*y$, e aplicando a involução, encontramos $xy = y^*x$, donde, pelo **Caso 1**, uma contradição com a hipótese.

**Caso 3:** $xy = y^*x^*$. Pelos casos anteriores, é suficiente analisar o caso em que $xy$ é diferente dos demais elementos da equação. Nesse caso, temos que $\sigma(xy) = -1$, além do mais $xy \in G_*$, o que sabemos, pelo Lema 2.1, ser impossível.

Assim, por todos os casos analizados, encontramos que, $x^y \in \{x, x^*\}$. □

Como foi dito no Capítulo 1, para estudar as involuções orientadas, é necessário conhecer de antemão os resultados acerca das involuções induzidas. Neste caso, a descrição de quando o conjunto $RG_*^-$ é anticomutativo se encontra em [GP13a] e é dado por:

**Teorema 2.6** (Teorema 2.2, [GP13a]). *Se $charR \neq 2$, então $RG_*^-$ é anticomutativo se, e somente se, ocorre uma das seguintes afirmações:*

*(A) $G$ é abeliano e $* = Id$.*

*(B) $charR = 4$, $G$ é abeliano, e existe $s \in G$ tal que $s^2 = 1$ e $g^* \in \{g, sg\}$, $\forall g \in G$.*

*(C)* $charR = 4$, *$G$ é não abeliano, possui um único comutador não trivial $s$ e $g^* \in \{g, sg\}$, $\forall g \in G$.*

Dessa forma, ao estudarmos a anticomutatividade de $(RG)^-_{\sigma*}$, necessariamente devemos ter que $N$ satisfaz alguma dessas condições.

**Lema 2.7.** *Suponha que $RG^-$ é anticomutativo. Se $x, y \notin G_*$, então, são verdadeiras:*

*(i)* $x^y \in \{x, x^*\}$. *Em particular,* $xy = x^*y^*$.

*(ii)* $xy \in G_* \Leftrightarrow xy = yx$.

*(iii) Se* $xy \neq yx$, *então* $1 + \sigma(xy) = \sigma(x) + \sigma(y)$. *Se* $xy = yx$, *então* $2(1 + \sigma(xy)) = 0 = 2(\sigma(x) + \sigma(y))$.

*Demonstração.* Se $(x, y) = 1$, então o item (i) segue do Lema 2.4. Dessa forma, suponha que $(x, y) \neq 1$.

Se $x, y \in N$, então, $N$ satisfaz o item (C) do Teorema 2.6 e possui um único comutador não trivial $s$, logo $x^y = x(x, y) = xs = x^*$. Observe também que $xy = xssy = x^*y^*$.

Se $x, y \notin N$, então, aplicando o Lema 2.5 a $x$ e $y$, temos que $xy = yx^*$, além do mais, aplicando o mesmo lema a $y$ e $x^*$, encontramos que $yx^* = x^*y^*$, ou seja $xy = x^*y^*$.

Se $x \in N$ e $y \notin N$, pelo Lema 2.5, temos $x^y = x^*$. Observe que o mesmo resultado pode ser aplicado a $x^*$ e $y^*$, ou seja, $x^*y^* = y^*x$. Note que $x^{-1} \in N \backslash G_*$ e $(x^{-1}, y) \neq 1$, portanto, $yx^{-1} = (x^{-1})^*y \neq (x^{-1})^*y^* = (yx^{-1})^*$, ou seja $yx^{-1} \notin G_*$, assim, aplicando o caso anterior a $y$ e $yx^{-1}$, já que $yx^{-1} \notin N$, obtemos $y^{x^{-1}} = y^{yx^{-1}} = y^*$, ou seja, $xy = y^*x = x^*y^*$.

Se $x \notin N$ e $y \in N$, pelo caso anterior, temos que $yx = xy^* = y^*x^*$. Aplicando a involução em $xy^* = y^*x^*$, encontramos $yx^* = xy$, ou seja, $x^y = x^*$. Além disso, aplicando a involução em $yx = y^*x^*$, verificamos $xy = x^*y^*$. Dessa forma, garantimos (i).

Para verificar (ii) observe que,

$$\begin{aligned} xy \in G_* \quad &\Leftrightarrow \quad x^*y^* = xy = y^*x^* \quad \text{(item (i))} \\ &\Leftrightarrow \quad yx = y^*x^* = xy \quad \text{(aplicando a involução).} \end{aligned}$$

Vamos mostrar (iii). Como $x, y \notin G_*$ e $RG^-$ é anticomutativo, temos

$$(x - \sigma(x)x^*)(y - \sigma(y)y^*) = -(y - \sigma(y)y^*)(x - \sigma(x)x^*),$$

ou seja

$$xy + yx + \sigma(xy)x^*y^* + \sigma(xy)y^*x^* = \sigma(y)xy^* + \sigma(y)y^*x + \sigma(x)yx^* + \sigma(x)x^*y.$$

Pelo item (i), $xy = x^*y^*$, $yx = y^*x^*$, $xy^* = x^*y$ e $y^*x = yx^*$, portanto a equação acima se reescreve como

$$(1+\sigma(xy))xy + (1+\sigma(xy))yx = (\sigma(x)+\sigma(y))x^*y + (\sigma(x)+\sigma(y))yx^*.$$

Assim, se $xy \neq yx$, novamente pelo item (i), $xy = yx^*$, além disso, $xy \neq x^*y$, já que $x \notin G_*$, portanto, $1+\sigma(xy) = \sigma(x)+\sigma(y)$. Por outro lado, se $xy = yx$, então $xy \notin \{x^*y, yx^*\}$, já que $x \notin G_*$; além disso $xy = yx$ implica $x^*y = yx^*$, portanto, para que a equação faça sentido, devemos ter que $2(1+\sigma(xy)) = 0 = 2(\sigma(x)+\sigma(y))$. □

O lema a seguir mostra a relação de um elemento de $G_*$ com um elemento de $G \backslash G_*$

**Lema 2.8.** *Suponha que $RG^-$ é anticomutativo. Então, para todo $y \in G_*$, $x \notin G_*$ e $\alpha$ tal que $\alpha y \in RG^-$, são verdadeiras*

*(i)* $x^y \in \{x, x^*\}$.

*(ii)* $xy \in G_* \Leftrightarrow xy \neq yx$.

*(iii) Se $xy \neq yx$, então $\alpha(1-\sigma(x)) = 0$. Se $xy = yx$, então $\alpha \in R_2$.*

*Demonstração.* Pelo Corolário 2.3, podemos tomar $\alpha$ não nulo em $R$ tal que $\alpha y \in RG^-$, assim, por hipótese, $\alpha y$ anticomuta com $(x - \sigma(x)x^*)$, ou seja

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha y(x-\sigma(x)x^*) + (x-\sigma(x)x^*)\alpha y \\ &= \alpha(xy + yx - \sigma(x)x^*y - \sigma(x)yx^*). \end{aligned}$$

Como $\alpha$ é não nulo, para que esta equação seja verdadeira, é necessário que ou $xy = yx$, ou $xy = yx^*$, já que $x \notin G_*$. Isso prova (i).

Ainda admitindo que $\alpha \neq 0$, se a primeira possibilidade apresentada no parágrafo anterior ocorre, então $2\alpha$ deve ser nulo e, portanto, $\alpha \in R_2$; caso $xy = yx^*$, então a equação fornece $\alpha(1-\sigma(x)) = 0$. Dessa forma concluímos que (iii) decorre do argumento acima e o fato de que se $\alpha = 0$ então trivialmente são verificada as condições desse item.

Resta, portanto, verificar (ii). Para isso, é suficiente notar que

$$xy \neq yx \Leftrightarrow xy = yx^* \Leftrightarrow xy \in G_*.$$

□

Antes de prosseguir no entendimento das relações entre os elementos de $G$, iremos verificar que, se os simétricos do grupo comutam entre si, então podemos, neste momento, caracterizar os grupos tais que $RG^-$ é anticomutativo, mostrando que, neste caso, $G$ é abeliano ou um SLC-grupo. Para provar esse fato, necessitaremos do seguinte resultado:

**Teorema 2.9** (Teorema 2.4, [JR06]). *Seja $G$ um grupo não abeliano com involução $*$ e $R$ um anel tal que $\mathrm{char} R \neq 2$. As seguintes condições são equivalentes:*

*(1) $(RG)_*$ é comutativo;*

*(2) $G$ é um SLC-grupo com involução canônica $*$;*

*(3) $G/\mathcal{Z}(G) \simeq C_2 \times C_2$, $x^* = x$ se $x \in \mathcal{Z}(G)$ e $x^* = x^y$ para todo $y$ tal que $(x, y) \neq 1$.*

**Proposição 2.10.** *Suponha que $RG^-$ é anticomutativo. Se $(G_*)' = \{1\}$, então $G$ é abeliano ou um SLC-grupo com involução canônica $*$.*

*Demonstração.* Sejam $x \in G_*$ e $y \notin G_*$. Se $xy \neq yx$, então, pelo item (ii) do Lema 2.8, temos que $xy \in G_*$, logo, por hipótese, $(x, xy) = 1$, ou seja $x(xy) = (xy)x$, o que implica em $xy = yx$, um absurdo; portanto devemos ter que $xy = yx$ para todo $x \in G_*$ e $y \notin G_*$. Como por hipótese $(G_*)' = 1$, concluímos que $G_* \subset \mathcal{Z}(G)$.

**Afirmação:** $(RG)_*$ é comutativo.

Note que $(RG)_*$ é gerado por $G_* \cup \{x + x^* : x \notin G_*\}$, logo, é suficiente mostrar que os elementos geradores comutam entre si. Além disso, como $G_* \subset \mathcal{Z}(G)$, basta verificar que $(x + x^*)$ comuta com $(y + y^*)$, $\forall x, y \notin G_*$.

Se $xy = yx$ facilmente encontramos $(x + x^*)(y + y^*) = (y + y^*)(x + x^*)$. Suponha então que $xy \neq yx$, assim,

$$\begin{aligned}
(x + x^*)(y + y^*) &= xy + xy^* + x^*y + x^*y^* \\
&= yx^* + y^*x^* + yx + y^*x \quad \text{(pelo item (i) do Lema 2.7)} \\
&= (y + y^*)(x + x^*).
\end{aligned}$$

Dessa forma, concluímos a afirmação.

Por fim, como $(RG)_*$ é comutativo, aplicando o Teorema 2.9, encontramos que $G$ é abeliano ou um SLC-grupo com involução canônica $*$. □

Até o momento verificamos o que acontece com o produto $xy$ quando ambos $x, y \in G \backslash G_*$ ou um deles pertence a este conjunto e o outro ao seu complementar em $G$. A seguinte observação é um fato geral de involuções em grupos e será utilizada nos demais capítulos.

**Observação 2.11.** *Caso $x, y \in G_*$, note que $xy \in G_*$ se, e somente se, $xy = (xy)^* = y^*x^* = yx$.*

**Lema 2.12.** *Suponha que $RG^-$ é anticomutativo, $x, y \in G_*$. Se $\alpha, \beta \in R \backslash \{0\}$ são tais que $\alpha x, \beta y \in RG^-$, então $xy \neq yx$ implica em $\alpha\beta = 0$ e $xy = yx$ implica em $2\alpha\beta = 0$.*

*Demonstração.* Como $RG^-$ é anticomutativo, então $\alpha\beta xy = -\beta\alpha yx$, assim, se $xy \neq yx$ essa equação só faz sentido se $\alpha\beta = 0$. Se $xy = yx$, então $2\alpha\beta xy = 0$, donde concluímos o resultado. □

Dado $x \in G$, podemos escrever $x^* = xc_x$, sendo $c_x = x^{-1}x^*$ o multiplicador da involução do elemento $x$. Naturalmente se $x \in G_*$, então $c_x = 1$. Iremos mostrar no próximo lema que se $x \notin G_*$, então $c_x$ é uma constante, a qual chamaremos de $s$, para todo elemento não simétrico, ou seja $c_x = c_y$ para todo $y \notin G_*$. Além disso, mostraremos que se $G$ é não abeliano, então $G'$ será um grupo cíclico de 2 elementos gerado por essa constante $s$.

**Lema 2.13.** *Se $RG^-$ é anticomutativo, então valem as seguintes propriedades:*

*(i) Se $* \neq Id$, então existe $s \in G$ tal que $s^2 = 1$ e $x^* \in \{x, sx = xs\}$ $\forall x \in G$.*

*(ii) Se $G$ é não abeliano, então $G$ possui um único comutador não trivial $s \in G$ (logo de ordem 2) e $x^* \in \{x, sx = xs\}$ $\forall x \in G$. Além disso, $s \in \mathcal{Z}(G) \cap G_*$.*

*Demonstração.* (i) Suponha que $* \neq Id$, portanto $G \backslash G_* \neq \emptyset$. Sejam $x \notin G_*$ e $s = x^{-1}x^*$. Naturalmente $x^* = xs$ e como $(x, x^*) = 1$, então $x^* = sx$; além disso, pelo Lema 2.2, $s^2 = (x^{-1}x^*)^2 = x^{-2}(x^*)^2 = x^{-2}x^2 = 1$ e $s = xx^{-*}$. Para finalizar, se $y \notin G_*$, então, pelo item (i) do Lema 2.7, temos que $xy = x^*y^*$, ou seja $s = xx^{-*} = y^{-1}y^*$; assim $s$ não depende de $x$ portanto $y^* \in \{y, sy = ys\}$ $\forall y \in G$.

(ii) Se $G$ é não abeliano, então a identidade não define uma involução em $G$, portanto $Id \neq *$, assim, pelo item (i), temos que se $x \notin G_*$, então $x^* = xs = sx$.

Observe que se $x \notin G_*$ e $y \in G$ são tais que $(x, y) \neq 1$, pelo item (i) do Lema 2.7, se $y \notin G_*$, ou pelo item (i) do Lema 2.8, se $y \in G_*$, sabemos que $x^y = x^*$, ou seja, $(x, y) = x^{-1}x^y = x^{-1}x^* = x^{-1}xs = s$.

Suponha que $x, y \in G_*$ e $(x, y) \neq 1$. Pelo item (i) do Lema 2.12, temos que $xy \notin G_*$, assim, pelo item (i), temos que $yx = y^*x^* = (xy)^* = sxy$, ou seja $(x, y) = s$.

Por fim, note que se $(s, x) \neq 1$, para algum $x \in G$, então $sx^{-1}sx = (s, x) = s$, ou seja $s^x = 1$, absurdo, portanto, $s \in \mathcal{Z}(G)$. Além disso, se $s \notin G_*$, então $s^* = s^2 = 1$, absurdo, pois $1^* = 1 \neq s$. □

Note que se $* = Id$, então para todo $x, y \in G$, $xy = (xy)^* = y^*x^* = yx$ e, portanto, $G$ é abeliano. Com essa informação, estamo prontos para provar o teorema principal deste capítulo.

**Teorema 2.14.** *Sejam $R$ um anel comutativo com $charR \neq 2$, $G$ um grupo com uma involução $*$ e $\sigma : G \to \mathcal{U}(R)$ uma orientação compatível com $*$ e $N = ker\sigma$. Então, $RG^-$ é anticomutativo se, e somente se, as seguintes condições são verdadeiras:*

*(i) Ocorre uma das seguintes possibilidades:*

*(a) $* = Id_G$ e $G$ é abeliano.*

*(b) $* \neq Id_G$ e $G$ satisfaz alguma das condições a seguir:*

*(1) $G$ é abeliano e existe $s \in G_* \cap \mathcal{Z}(G)$, tal que $x^* \in \{x, xs\}$, $\forall x \in G$.*

*(2) $G' = \{1, s\} \subset N_* \cap \mathcal{Z}(G)$ e $x^* \in \{x, xs\}$, $\forall x \in G$.*

*(ii) $\forall x, y \notin G_*$, se $xy \neq yx$, então $1+\sigma(xy) = \sigma(x)+\sigma(y)$; se $xy = yx$, então $1+\sigma(xy)$ e $\sigma(x) + \sigma(y) \in R_2$.*

*(iii) $\forall x \notin G_*$, $y \in G_*$ e $\alpha \in R$ tal que $\alpha y \in RG^-$, se $xy \neq yx$, então $\alpha(1 - \sigma(x)) = 0$; se $xy = yx$, então $\alpha \in R_2$.*

*(iv) $\forall x, y \in G_*$ e $\alpha, \beta \in R$ tais que $\alpha x, \beta y \in RG^-$. Se $xy \neq yx$, então $\alpha\beta = 0$; se $xy = yx$, então $\alpha\beta \in R_2$.*

*Demonstração.* Suponha que $RG^-$ seja anticomutativo. Se $* = Id$, já mostramos que $G$ é abeliano e, portanto, (i)(a) ocorre.

Se $* \neq Id|_G$, note que o Lema 2.13 garante (i)(b) e, portanto, (i) se verifica.

Para verificar os itens (ii)-(iv), basta aplicar os itens (iii), dos Lemas 2.7, 2.8 e o Lema 2.12, respectivamente.

Reciprocamente, suponha que os itens (i)-(iv) sejam verdadeiros.

Para mostrar que $RG^-$ é anticomutativo, é suficiente verificar que o conjunto de geradores $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ satisfaz essa identidade.

Sejam $x, y \notin G_*$; devemos mostrar que

$$(x - \sigma(x)x^*)(y - \sigma(y)y^*) + (y - \sigma(y)y^*)(x - \sigma(x)x^*) = 0,$$

ou seja

$$xy + yx + \sigma(xy)x^*y^* + \sigma(xy)y^*x^* - \sigma(y)xy^* - \sigma(y)y^*x - \sigma(x)yx^* - \sigma(x)x^*y$$

se anula. Como, por (i), $x^* = sx$ e $y^* = sx$, então $x^*y = xsy = xy^*$ e $y^*x = ysx = yx^*$; além disso $x = (x^*)^* = (sx)^* = x^*s = xs^2$, ou seja, $s^2 = 1$ e, portanto, $xy = x^*y^*$. Dessa forma, a expressão acima se reescreve por

$$(1 + \sigma(xy))(xy + yx) - (\sigma(x) + \sigma(y))(xy^* + y^*x). \tag{2.3}$$

Se $(x, y) = 1$, então $xy^* = xys = ysx = y^*x$ e a expressão se simplifica em

$$2(1 + \sigma(xy))xy - 2(\sigma(x) + \sigma(y))xy^*,$$

e esta deve ser nula pelo item (ii), já que $(1 + \sigma(xy))$ e $(\sigma(x) + \sigma(y)) \in R_2$; se $(x, y) \neq 1$, por (i)(b)(2), temos que $(x, y) = s$, assim $xy = yxs = y^*x$ e $yx = xys = xy^*$, portanto (2.3) pode ser reescrita como

$$(1 + \sigma(xy) - \sigma(x) - \sigma(y))(xy + yx),$$

e esta se anula, já que pelo item (ii) temos $1 + \sigma(xy) = \sigma(x) + \sigma(y)$.

Sejam agora $x \notin G_*$ e $y \in G_*$. Vamos mostrar que se $\alpha \in R$ é tal que $\alpha y \in RG^-$, então $\alpha y$ anticomuta com $(x - \sigma(x)x^*)$, ou seja

$$\begin{aligned} 0 &= (x - \sigma(x)x^*)\alpha y + \alpha y(x - \sigma(x)x^*) \\ &= \alpha(xy + yx - \sigma(x)x^*y - \sigma(x)yx^*). \end{aligned}$$

Se $(x, y) = 1$, de forma análoga ao que fizemos anteriormente, $x^*y = yx^*$ e portanto a expressão acima se torna

$$2\alpha(xy - \sigma(x)x^*y),$$

o que de fato se anula, já que por (iii), $\alpha \in R_2$; se $(x, y) \neq 1$, novamente, podemos mostrar que $xy = yx^*$ e $yx = x^*y$, portanto temos que

$$\alpha(1 - \sigma(x))(xy + yx),$$

novamente se anula por (iii), já que $\alpha(1 - \sigma(x)) = 0$.

Por fim, admitindo que $x, y \in G_*$, devemos verificar que se $\alpha, \beta$ são tais que $\alpha x, \beta y \in RG^-$, então estes últimos elementos anticomutam entre si, ou seja

$$0 = \alpha x \beta y + \beta y \alpha x = \alpha\beta(xy + yx).$$

Se $(x, y) \neq 1$, por (iv) sabemos que $\alpha\beta = 0$ e o resultado é válido; se $(x, y) = 1$, então $\alpha\beta \in R_2$ e novamente temos o resultado. Com isso, concluímos a recíproca. □

O seguinte corolário ressalta algumas propriedades de $R$, $G$ e $*$ que, embora não sejam necessárias para a caracterização da anticomutatividade de $RG^-$, estas são relevantes e merecem destaque.

**Corolário 2.15.** *Se $RG^-$ é anticomutativo, então:*

*(i)* $\sigma(x) \neq -1$, $\forall x \in G_*$;

*(ii) Se $* = Id$, então $exp(G/N) = 2$; se $* \neq Id$, então $charR = 4$ e $exp(G/N) = 2$ ou 4;*

*(iii) Se $* \neq Id$ e $exp(G/N) = 2$, então $s \in N$.*

*(iv) Se $(G_*)' = \{1\}$, então $G$ é abeliano ou um SLC-grupo com involução canônica $*$.*

*Demonstração.* Observe que, (i) é consequência do Lema 2.1, o Lema 2.2 garante a característica de $R$ em (ii), e a Proposição 2.10 implica em (iv).

Para verificar $exp(G/N)$ em (ii) note que, se $* = Id$, então pela compatibilidade da involução com a orientação temos que $x^2 = xx^* \in N$, portanto $exp(G/N) = 2$, já

que $G \neq N$; se $* \neq Id$, tomando $x \notin G_*$, sabemos, pelo Lema 2.2, que $x^2 \in G_*$ e pelo mesmo argumento anterior, verificamos que $x^4 \in N$, ou seja $exp(G/N)$ é um divisor de 4 e diferente de 1, restando como possibilidade 2 ou 4.

Por fim, para verificar (iii), note que se $exp(G/N) = 2$, então $x^2 \in N$, ou seja $\sigma(x) = \sigma(x)^{-1}$. Da compatibilidade da involução com a orientação, temos $\sigma(xx^*) = 1$, assim, se $x \notin G_*$, então $\sigma(s) = \sigma(x^{-1}x^*) = \sigma(x)^{-1}\sigma(x^*) = \sigma(x)\sigma(x^*) = 1$. □

Vale lembrar que no teorema acima, utilizamos apenas a estrutura de $N$ descrita por [GP13a], embora sejam conhecidas propriedades do subgrupo $C \leq G$, com $C = \{x \in G : \sigma(x) = \pm 1\}$, encontradas em [GP13b]. Sendo assim, como a prova deste resultado independe do caso em que a orientação é usual, podemos utilizar esse resultado mais geral e encontrar a mesma descrição contida na literatura.

**Corolário 2.16** (Teorema 2.1, [GP13b]). *Seja $\sigma : G \to \{\pm 1\}$ uma orientação não trivial em $G$, $*$ uma involução compatível com $\sigma$ e $R$ um anel com $charR \neq 2$. $RG^-$ é anticomutativo se, e somente se, $charR = 4$ e ocorre uma das seguintes afirmações:*

*(1) $G$ é abeliano, $*_N = Id|_N$ e existe $s \in N_*$ tal que $x^* = xs$, $\forall x \notin N$.*

*(2) $G$ é um SLC-grupo com $*$ a involução canônica e $x^* = xs$, $\forall x \notin N$.*

*Demonstração.* Suponha que $RG^-$ é anticomutativo. Pelo item (i) do Corolário 2.15, temos que $G_* \backslash N = \emptyset$, portanto $* \neq Id$ e, consequentemente, pelo item (ii), que $charR = 4$. Aplicando o Teorema 2.14, encontramos que $G$ é abeliano ou possui um único comutador não trivial $s$ e $x^* = sx$, $\forall x \notin G_*$. Em particular, como $G_* \backslash N = \emptyset$, temos $x^* = sx$, $\forall x \notin N$.

Pelo Teorema 2.6 (ou o Teorema 2.14 para $\sigma \equiv 1$) temos três possibilidades para $N$,

(A) $* = Id|_N$ e $N$ é abeliano;

(B) $* \neq Id$, $N$ é abeliano e existe $s \in N_* \cap \mathcal{Z}(G)$ tal que $x^* \in \{x, sx\}$, $\forall x \in N$;

(C) $N' = \{1, s\}$ e $x^* \in \{x, sx\}$, $\forall x \in N$.

Suponha que $G$ é abeliano. Nesse caso, sabemos que (C) não ocorre já que este item implica em $N$ possuir um único comutador não trivial. Vamos mostrar que (B) não ocorre e, assim resta como possibilidade (A), e o item (1) está provado.

Se (B) ocorre, então existe $x \in N$ tal que $x^* = sx$. Tomando $y \notin N$, sabemos que $y^* = sy$, além disso, $xy \notin N$, o que implica em $xy \notin G_*$, pois $G_* \backslash N = \emptyset$. Como $x, y, xy \notin G_*$, então, pelo Teorema 2.14, $xy \neq (xy)^* = y^*x^* = yssx = yx$ e, portanto, $G$ é não abeliano. Assim concluímos (1)

Suponha agora que $G$ é não abeliano. Pelo item (iv) do Corolário 2.15 e o fato de $G_* \subset N$, para garantir que (2) é verdadeiro é suficiente mostrar que $\{1\} = (G_*)' = (N_*)'$.

Observe que essa condição é trivialmente satisfeita se $N$ é abeliano, ou seja, se (A) ou (B) ocorre. Suponha então que estamos no caso (C) e sejam $x \in G_* \subset N$ e $y \notin N$, consequentemente $xy \notin N$, e note que, como $G_* \subset N$, então $y^* = sy$ e $(xy)^* = sxy$, assim, $sxy = (xy)^* = y^*x^* = syx$, ou seja $(x, y) = 1$; tomando $n \in N$, temos que $ny \notin N$ e, portanto, $(x, ny) = 1$, o que implica em $(x, n) = 1$, já que $(x, y) = 1$, ou seja, $(G_*, G_*) \subset (G_*, N) = \{1\}$, e assim, $G$ é um SLC-grupo, donde concluímos (2).

Reciprocamente, note que os itens (i) e (ii) do Teorema 2.14 são facilmente verificados. Além disso, tanto (1) como (2) implicam em $G_* \subset \mathcal{Z}(G) \cap N$, logo se $x \in G_*$, para que $\alpha x \in RG^-$, devemos ter $\alpha \cdot 2 = \alpha(1 + \sigma(x)) = 0$, logo os itens (iii) e (iv) também se verificam. □

A seguir, vamos mostrar que se $N$ satisfaz o item (A) do Teorema 2.6 e $G_* \subset N$, então podemos descrever o quociente $G/N$ e exibir com mais detalhes a estrutura de $G$. Note que estas duas condições são equivalentes a $G_* = N$.

**Proposição 2.17.** *Sejam $R$ um anel comutativo, $G$ um grupo com uma involução $*$ e $\sigma : G \to \mathcal{U}(R)$ uma orientação compatível com a involução tal que $exp(G/N) = 2$, com $N = ker\sigma$ e $G_* = N$, então $RG^-$ é anticomutativo se, e somente se, $charR = 4$, e uma das seguintes condições são satisfeitas:*

*(1) $G$ é abeliano, existe $s \in N_* \cap \mathcal{Z}(G)$ tal que $x^* \in \{x, sx\}$ e $\sigma$ é uma orientação clássica.*

*(2) (a) $G$ é um SLC-grupo com $*$ a involução canônica e $G/N \simeq C_2 \times C_2$.*

*(b) $\forall x, y \notin G_*$, se $xy \neq yx$, então $1 + \sigma(xy) = \sigma(x) + \sigma(y)$; se $xy = yx$, então $(1 + \sigma(xy))$ e $(\sigma(x) + \sigma(y)) \in R_2$.*

*(c) $\alpha \in R_2$, $\forall \alpha \in R$ tal $\alpha x \in RG^-$.*

*Demonstração.* Suponha que $RG^-$ seja anticomutativo. Como $G_* = N \neq G$, então o Corolário 2.15 garante que $charR = 4$. Como $G_* = N$, então dados $x, y \in G_*$ temos $xy = x^*y^* = (yx)^* = yx$, já que $yx \in N = G_*$, ou seja $(G_*)' = \{1\}$, o que implica pelo item (iv) do Corolário 2.15 que $G$ é abeliano ou um SLC-grupo com involução canônica $*$.

Suponha que $G$ seja abeliano.

Sejam $x, y \notin G_* = N$. Pelo item (a) do Teorema 2.14 sabemos que se $xy = yx = yssx = y^*x^* = (xy)^*$, ou seja $xy \in G_* = N$, o que implica em $xN = y^{-1}N = yN$, onde a última igualdade segue da hipótese $exp(G/N) = 2$. Como $G$ é abeliano, podemos concluir que, qualquer elemento que não pertença a $N$ está na mesma classe lateral $xN$ para um $x \notin N$ fixo, portanto $N$ possui apenas duas classes laterais em $G$, o que implica que $G/N \simeq C_2$, ou seja $\sigma$ é uma orientação clássica. Assim, pelo Corolário 2.16, (1) ocorre.

Suponha agora que, $G$ não é abeliano, ou seja, $G$ é um SLC-grupo com $*$ a involução canônica. Neste caso, sabemos que $N = G_* = \mathcal{Z}(G)$, logo o Teorema 2.9 garante que $G/N = G/\mathcal{Z}(G) \simeq C_2 \times C_2$, garantindo (a).

Para verificar (b), basta aplicar o item (ii) do Teorema 2.14. Note que se $\alpha x \in RG^-$, com $\alpha \neq 0$, então $x \in G_* \subset \mathcal{Z}(G)$, portanto, aplicando o item (iii) do Teorema 2.14, verificamos (c).

Reciprocamente, suponha que (1) seja satisfeito. Neste caso, o Corolário 2.16 garante $RG^-$ é anticomutativo.

Por fim, suponha que (2) ocorra. Vamos mostrar que os itens (i)-(iv) do Teorema 2.14 são satisfeitos.

O item (i) naturalmente é verificado por SLC-grupos e o item (ii) é exatamente o item (b).

Observe que se $G_* = \mathcal{Z}(G)$, e $\alpha x \in RG^-$, temos $xy = yx$, $\forall y \in G$. Portanto a hipótese (c) garante (iii) e (iv). Logo aplicando o Teorema 2.14, encontramos que $RG^-$ é anticomutativo. $\square$

Com esse último resultado, é possível construir exemplos das estruturas trabalhadas de forma simples.

**Exemplo 2.18.** *Seja $G = Q_8 = \langle x, y \rangle$ e $R = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$. Vimos no Exemplo 1.8 que $Q_8$ é um SLC-grupo, cuja involução canônica é dada por*

$$g^* = \begin{cases} g, & \text{se } g \in \{1, x^2\} \\ x^2 g, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

*Tomando $\sigma : Q_8 \to \mathcal{U}(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4)$, em que $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4) = \{(1,1), (1,3), (3,1), (3,3)\}$, dada por $\sigma(x) = (3,1)$ e $\sigma(y) = (1,3)$, podemos verificar que $gg^* \in N = \mathcal{Z}(G) = G_* = \{1, x^2\}$, portanto $\sigma*$ é uma involução orientada generalizada em $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4)Q_8$.*

*Observe que $G/N = \{N, xN, yN, xyN\}$ já que $x^2 = y^2$, donde $G/N \simeq C_2 \times C_2$. Com essas informações não é difícil mostrar que o item (2) da Proposição 2.17 é satisfeito, logo $((\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4)Q_8)^-_{\sigma*}$ é anticomutativo.*

# Capítulo 3

# Anticomutatividade dos Simétricos

Neste capítulo iremos estudar a anticomutatividade dos elementos simétricos em relação a uma involução orientada generalizada $\sigma*$.

Mostramos no Capítulo 1 que $(RG)_{\sigma*} = RG^+$ é gerado por

$$\mathcal{S}_1 = \{\alpha x : x \in G_* \text{ e } \alpha(1-\sigma(x)) = 0\}$$

$$\mathcal{S}_2 = \{x + \sigma(x)x^* : x \in G \backslash G_*\}.$$

Observe que se $x \in N_*$, então, $rx \in RG^+$, $\forall r \in R$, assim, se $RG^+$ anticomuta, então $r^2x^2 = -r^2x^2$, ou seja, $2r^2x^2 = 0$, o que significa que tomando $r = 1$ (ou alguma unidade qualquer), então $charR = 2$. Como já comentamos anteriormente, se $charR = 2$, então a comutatividade e anticomutatividade são conceitos idênticos, assim como o são os conjuntos $RG^+$ e $RG^-$, e este não é o caso que pretendemos estudar nesta tese. Dessa forma, iremos enfraquecer um pouco a hipótese da anticomutatividade em $RG^+$, para a anticomutatividade em $\mathcal{S} \subset RG^+$, sendo $\mathcal{S}$ o maior subconjunto de $RG^+$ tal que a anticomutatividade não tenha como consequência $charR = 2$.

Como $rx \in RG^+$, $\forall x \in N_*$ e $r \in R$, não é necessário retirarmos completamente os elementos do conjunto $N_*$ dos geradores de $RG^+$, devemos apenas tomar o cuidado escolher cuidadosamente seus coeficientes. Devido ao parágrafo anterior, verificamos que sob nossas hipóteses, $2r^2 = 0$, portanto, substituiremos $\mathcal{S}_1$ por $\overline{\mathcal{S}_1}$, sendo este último dado por

$$\overline{\mathcal{S}_1} = \left\{rx : x \in N_*,\ r \in \sqrt{R_2}\right\} \cup \{\alpha x : x \in G_* \backslash N,\ \alpha(1-\sigma(x)) = 0\},$$

onde $R_2 = \{r \in R : 2r = 0\}$ e $\sqrt{R_2} = \{r \in R : r^2 \in R_2\}$. Assim, temos que $\mathcal{S}$ é gerado por $\overline{\mathcal{S}_1} \cup \mathcal{S}_2$, e sob esse conjunto iremos admitir a anticomutatividade.

Iremos ver mais adiante que os resultados acerca das involuções não orientadas e orientadas usuais, abordados em [GP13a, GP14], podem ser extendidos para casos um pouco mais gerais.

O seguinte lema é fundamental para alcançarmos essas versões mais gerais e é

válido para qualquer tipo de orientação em $G$.

**Lema 3.1.** *Se $\mathcal{S}$ é anticomutativo, então uma das seguintes condições ocorre:*

*(i)* $\left(\sqrt{R_2}\right)^2 \subset R_2,\ * = Id|_G$ *e* $G$ *é abeliano.*

*(ii)* $charR = 4,\ \sqrt{R_2} = R_2,\ xx^* = x^*x$ *e* $x^2 \in G_*,\ \forall x \in G.$

*Demonstração.* Note que se $x \in G_*,\ \forall x \in G$, então $G$ é abeliano. Sejam $r_1, r_2 \in \sqrt{R_2}$ e $x \in N$, assim $r_1x, r_2x \in \mathcal{S}$, e portanto estes anticomutam entre si, ou seja,

$$r_1xr_2x = -r_2xr_1x,$$

que implica em $2r_1r_2x^2 = 0$, e, consequentemente, $r_1r_2 \in R_2$, já que $RG$ é livremente gerado por $G$. Dessa forma $\left(\sqrt{R_2}\right)^2 \subset R_2$, provando (i).

Para provar (ii), suponha que $* \neq Id_G$ e seja $x \notin G_*$. Por hipótese, $x + \sigma(x)x^*$ anticomuta consigo próprio, ou seja

$$2(x^2 + \sigma(x)xx^* + \sigma(x)x^*x + \sigma(x)^2(x^*)^2) = 0.$$

Como o lado esquerdo da equação é 0 e $2 \neq 0$, então devemos ter que $x^2 \in \{xx^*, x^*x, (x^*)^2\}$. Como $x \neq x^*$, a única possibilidade é $x^2 = (x^*)^2 = (x^2)^*$, e portanto $x^2 \in G_*$. Pelo mesmo motivo, $xx^* = x^*x$ e, para que a equação se mantenha, é necessário que $4\sigma(x)xx^* = 0$, o que implica que $4 = 0$, já que $\sigma(x) \in \mathcal{U}(R)$ e $RG$ é livremente gerado por $G$.

Seja agora $r \in \sqrt{R_2} \setminus \{0\}$ e $y \notin G_*$. Como $1 \in N_*$, então $r = r1_G, y + \sigma(y)y^* \in \mathcal{S}$, logo anticomutam, assim

$$r(y + \sigma(y)y^*) = -(y + \sigma(y)y^*)r,$$

o que implica em $2r(y + \sigma(y)y^*) = 0$; pelo fato de $y \notin G_*$, concluímos que $2ry = 0$, e, portanto, $2r = 0$. Assim $\sqrt{R_2} = R_2$ já que $R_2 \subset \sqrt{R_2}$, logo, o item (ii) segue. □

**Corolário 3.2.** *Se $\mathcal{S}$ é anticomutativo e $* \neq Id|_G$, então, dado $x \in G_*$, sempre existe $\alpha \in R \setminus \{0\}$ tal que $\alpha x \in RG^+$.*

*Demonstração.* Se $\sigma(x) = -1$, então basta tomar $\alpha = 2$, já que $charR = 4$; se $\sigma(x) \neq -11$, então $\alpha = 1 + \sigma(x) \neq 0$ e satisfaz a equação, pois $(1 + \sigma(x))(1 - \sigma(x)) = 1 - \sigma(x)^2$, e como $x \in G_*$, pela compatibilidade da orientação com a involução, temos $\sigma(x)^2 = 1$. □

O seguinte resultado é análogo ao Lema 2.4 e, assim como este, a propriedade de que $xy = yx$ se, e somente se, $xy^* = y^*x$, será usada sem fazer referência à mesma.

**Lema 3.3.** *Suponha que $\mathcal{S}$ é anticomutativo. Dados $x, y \in G$, então, $xy = yx$ se, e somente se, $x^*y = yx^*$. Além disso, se $xy = yx$ e $x, y \notin G_*$, então $xy = yx = x^*y^* = y^*x^*$, $xy^* = y^*x = x^*y = yx^*$ e $(1 + \sigma(xy)), (\sigma(x) + \sigma(y)) \in R_2$.*

*Demonstração.* Para mostrarmos a igualdade entre os elementos de $G$, basta proceder de forma análoga à prova do Lema 2.4, observando apenas que caso $x, y \notin G_*$, então $(x + \sigma(x)x^*)$ anticomuta com $(y + \sigma(y)y^*)$ e, portanto, devemos substituir a equação (2.1), por

$$xy + yx + \sigma(xy)x^*y^* + \sigma(xy)y^*x^* + \sigma(y)xy^* + \sigma(y)y^*x + \sigma(x)yx^* + \sigma(x)x^*y = 0. \quad (3.1)$$

Resta apenas verificar que $(1 + \sigma(xy)), (\sigma(x) + \sigma(y)) \in R_2$ caso $xy = yx$ e $x, y \notin G_*$. Para isso, como $xy = yx = x^*y^* = y^*x^*$ e $xy^* = y^*x = x^*y = yx^*$, substituindo na equação anterior, encontramos

$$2(1 + \sigma(xy))xy + 2(\sigma(x) + \sigma(y))x^*y = 0,$$

e como $x \notin G_*$, facilmente deduzimos o que procuramos. □

Seguindo as ideias apresentadas no Capítulo 2, vamos estudar o produto entre elementos dos conjuntos $G_*$ e $G \backslash G_*$. Veremos que a anticomutatividade dos simétricos é um caso mais complexo que o anterior, visto que no Capítulo 2, se $x \notin G_*$, então $xy \in \{yx, yx^*\}$ para todo $y \in G$, ao passo que agora não conseguiremos uma informação tão precisa, e sim que $xy \in \{yx, yx^*, y^*x, x^*y^*\}$ para $x, y \notin G_*$. Veremos mais adiante que este fato irá culminar numa possibilidade a mais na classificação da anticomutatividade dos simétricos.

**Lema 3.4.** *Suponha que $\mathcal{S}$ é anticomutativo. Se $x, y \notin G_*$ e $\sigma(y) \neq -1$, então, $x^y \in \{x^*, x\}$ ou, $\sigma(xy) = -1$, $xy = x^*y^*$ e $xy^* = x^*y$.*

*Demonstração.* Por hipótese temos $(x + \sigma(x)x^*), (y + \sigma(y)y^*) \in \mathcal{S}$, assim

$$(x + \sigma(x)x^*)(y + \sigma(y)y^*) = -(y + \sigma(y)y^*)(x + \sigma(x)x^*),$$

logo vale a equação (3.1).

Suponha que $x^y \notin \{x, x^*\}$ ou seja, $xy \notin \{yx, yx^*\}$. Como $x, y \notin G_*$, para que a equação acima seja válida, é necessário que $xy \in \{y^*x, y^*x^*, x^*y^*\}$.

Vamos analisar os 3 casos.

**Caso 1:** $xy = y^*x$. Como $\sigma(y) \neq -1$, devemos ter que $xy$ deve ser igual a mais um elemento desse último conjunto. Neste caso, $xy = x^*y^*$, pois, caso contrário, $y^*x = xy = y^*x^*$, o que implicaria em $x \in G_*$, contradição. Assim, tomando $xy = y^*x = x^*y^*$, aplicando a involução em todos os membros, obtemos $y^*x^* = x^*y = yx$, logo, substituindo na equação (3.1), temos

$$(1 + \sigma(xy) + \sigma(y))xy + (1 + \sigma(xy) + \sigma(x))yx + \sigma(y)xy^* + \sigma(x)yx^* = 0,$$

sendo que para a equação fazer sentido, devemos ter $xy^* = yx^*$ e, portanto, $\sigma(x) = -\sigma(y)$; além disso,

$$1 + \sigma(xy) + \sigma(y) = 0 = 1 + \sigma(xy) + \sigma(x) = 1 + \sigma(xy) - \sigma(y),$$

logo, fazendo a diferença do primeiro pelo último membro, obtemos, $2\sigma(y) = 0$, um absurdo, já que $\sigma(y) \in \mathcal{U}(R)$ e $charR \neq 2$.

**Caso 2:** $xy = y^*x^*$. Observe que $xy \neq x^*y^*$, pois caso contrário $y^*x^* = xy = x^*y^*$, implicaria em $xy = yx$, contradição. Dessa forma, pela equação (3.1), temos $\sigma(xy) = -1$ e, portanto, $2xy \in \mathcal{S}$, e consequentemente, $2xy$ anticomuta com $(x + \sigma(x)x^*)$, ou seja

$$2xyx + 2\sigma(x)xyx^* + 2x^2y + 2\sigma(x)xx^*y = 0.$$

Desde que $xy \neq yx$ e $x \notin G_*$, temos que $x^2y = xyx^*$, ou seja, $xy = yx^*$, e portanto uma contradição, já que por hipótese $x^y \notin \{x, x^*\}$.

**Caso 3:** $xy = x^*y^*$.

**Caso 3.a:** $\sigma(xy) \neq -1$. Nestas condições $xy \in \{yx, y^*x^*, x^*y, yx^*, xy^*, y^*x\}$, o que se reduz a uma contradição por hipótese ou a algum dos casos anteriores.

**Caso 3.b:** $\sigma(xy) = -1$. Neste caso, sabemos que $yx = y^*x^*$ e portanto $xy^* \in \{x^*y, yx^*\}$, já que $xy \neq yx$. Suponha, por absurdo, que $xy^* = yx^*$ e, consequentemente, $x^*y = y^*x$. Como $\sigma(xy) = -1$, então $\sigma(x) = -\sigma(y^{-1})$, e já que $\sigma(y) \neq -1$, então $x \notin N$, portanto $\sigma(x^2y) \neq -1$.

Observe que até o momento provamos que se $a, b \notin G_*$ e $\sigma(b) \neq -1$, então $ab \in \{ba, ba^*, a^*b^*\}$, já que os demais casos se reduziram a uma contradição. Mostraremos agora que $x^2y \notin G_*$, assim, como $x \notin G_*$ e, pelo parágrafo anterior, $\sigma(x^2y) \neq -1$, poderemos aplicar tal fato a esse par de elementos, encontrando que $x^{x^2y} \in \{x, x^*\}$ ou $x(x^2y) = x^*(x^2y)^*$.

De fato $x^2y \notin G_*$, pois $(x^2y)^* = y^*x^*x^* = yxx^* = yx^*x = xy^*x = xx^*y \neq x^2y$, assim, pela observação acima, sabemos que $x^{x^2y} \in \{x, x^*\}$ ou $x(x^2y) = x^*(x^2y)^*$. Uma vez que $x^{x^2y} = x^y \notin \{x, x^*\}$, temos que $x(x^2y) = x^*(x^2y)^*$, assim $x^3y = x^*y^*(x^2)^* = xy(x^2)^* = xyx^2$, já que, pelo Lema 3.1, $x^2 \in G_*$; logo $x^2y = yx^2$. Por outro lado, como $x^3y = xyxx = x^*y^*x^*x^* = x^*yxx^* = y^*xxx^* = x^2y^*x^*$, concluímos que $xy = y^*x^* = yx$, um absurdo. Portanto do primeiro parágrafo deste caso, concluímos que $xy^* = x^*y$. $\square$

**Lema 3.5.** *Suponha que $\mathcal{S}$ é anticomutativo. Se $x, y \notin G_*$ e $\sigma(y) \neq -1$, então ocorre um dos seguintes:*

*(i)* $xy = yx = x^*y^* = y^*x^*$ *e* $2(1 + \sigma(xy)) = 0 = 2(\sigma(x) + \sigma(y))$.

*(ii)* $xy = yx^* = y^*x = x^*y^*$ *e* $1 + \sigma(x) + \sigma(y) + \sigma(xy) = 0$.

*(iii)* $xy = x^*y^* \neq yx^* = y^*x$, $\sigma(xy) = -1$ *e* $\sigma(x) = -\sigma(y)$.

*(iv)* $xy = yx^* \neq x^*y^* = y^*x$ *e* $\sigma(x) = -1$.

*Demonstração.* Se $(x, y) = 1$, então pelo Lema 3.3 temos (i).

Suponha que $(x, y) \neq 1$. Assim, pelo lema anterior, $xy = yx^*$ ou $xy = x^*y^*$, $x^*y = xy^*$ e $\sigma(xy) = -1$. Se $xy = yx^* = x^*y^*$, por um argumento similar ao caso $xy = y^*x$ do lema anterior, encontramos que $xy = yx^* = y^*x = x^*y^*$; assim, aplicando a involução e substituindo essas informações na equação (3.1), obtemos (ii).

Se $xy \neq yx^*$, então $\sigma(xy) = -1$, $xy = x^*y^*$ e $xy^* = x^*y$, assim, aplicando a involução, $y^*x^* = yx$ e $yx^* = y^*x$. Dessa forma $xy = x^*y^* \neq yx^* = y^*x$, e $y^*x^* = yx \neq xy^* = x^*y$, portanto, substituindo essas informações na equação (3.1) e observando que $(x, y^*) \neq 1$, podemos concluir que $\sigma(x) = -\sigma(y)$, e (iii) ocorre.

Finalmente suponha que $xy = yx^*$ e $xy \neq x^*y^*$. Aplicando o que provamos acima a $x^*$ e $y$, sabemos que ocorre um dos seguintes:

(a) $x^*y = yx^* = xy^* = y^*x$.

(b) $x^*y = yx = y^*x^* = xy^*$

(c) $x^*y = xy^* \neq yx = y^*x^*$.

(d) $x^*y = yx \neq y^*x^* = xy^*$.

Observe que os itens (a), (c) e (d) são equivalentes aos itens (i), (iii) e (iv), respectivamente, logo não ocorrem, portanto, $x^*y = yx$ e, aplicando a involução, $y^*x = x^*y^*$. Dessa forma, substituindo em (3.1), encontramos $\sigma(x) = -1$. □

**Lema 3.6.** *Suponha que* $\mathcal{S}$ *é anticomutativo. Se* $x, y \notin G_*$, *então são verdadeiras:*

*(i)* $xy \in \{yx, yx^*, y^*x, x^*y^*\}$.

*(ii)* $xy = yx$ *se, e somente se,* $xy \in G_*$.

*(iii)* $xy = yx^*$ *se, e somente se,* $x^*y = yx$.//

*Demonstração.* Para provar (i), suponha que $(x, y) \neq 1$. Se $\sigma(y) \neq -1$, então, pelo Lema 3.4, temos o resultado. Suponha que $\sigma(y) = -1$.

Se $\sigma(x) \neq -1$, como $y \notin G_*$, então, $y^* \notin G_*$, portanto, aplicando o Lema 3.4 a $y^*$ e $x$, obtemos que $y^*x = xy$ ou $(y^*)x^* = (y^*)^*x = yx$ e ambos implicam em (i).

Se $\sigma(x) = -1$, por hipótese, $(x - x^*)$ anticomuta com $(y - y^*)$, logo

$$xy + yx + x^*y^* + y^*x^* - x^*y - yx^* - y^*x - xy^* = 0,$$

assim, $xy \in \{yx, x^*y^*, y^*x^*, x^*y, yx^*, y^*x, xy^*\}$. Por hipótese, $xy \notin \{yx, x^*y, xy^*\}$. Supondo por absurdo que $xy \notin \{x^*y^*, yx^*, y^*x\}$, resta como possibilidade $xy = y^*x^*$, porém,

como $charR = 4$, $2xy$ não se anula na equação e portanto essa não pode ser nula, contradição. Dessa forma, concluimos (i).

Para provar (ii), suponha que $(x, y) \neq 1$, assim, pelo item (i), $xy \in \{yx^*, y^*x, x^*y^*\}$, portanto, se $xy \in G_*$, então $xy = y^*x^*$, o que implica em $y^*x^* = xy = x^*y^*$, já que se $y^*x^* = xy \in \{y^*x, yx^*\}$, então $x$ ou $y \in G_*$, um absurdo; por outro lado, aplicando a involução em $y^*x^* = x^*y^*$, temos $xy = yx$, contradição com a hipótese de $(x, y) \neq 1$, logo $xy \notin G_*$. Reciprocamente, se $xy = yx$, aplicando a involução, obtemos $y^*x^* = x^*y^*$ e, aplicando o Lema 3.3, $xy^* = y^*x$ e $x^*y = yx^*$; como $(x + \sigma(x)x^*)$ anticomuta com $(y + \sigma(y)y^*)$, encontramos a equação

$$2xy + 2\sigma(xy)y^*x^* + 2\sigma(y)xy^* + 2\sigma(x)x^*y = 0,$$

e como $xy^* \neq xy \neq x^*y$, para que essa equação faça sentido, devemos ter $xy = y^*x^* = (xy)^*$.

Para verificar (iii), suponha que $xy = yx^*$ e $x^*y \neq yx$, nesse caso, $(x, y) \neq 1 \neq (x^*, y)$, portanto, podemos aplicar o item (i) a $x^*$ e $y$ e encontrar que $x^*y \in \{y^*x^*, xy^*\}$. Se $x^*y = y^*x^*$, então $y^*x = xy = yx^*$, logo, $x^*y = y^*x^* = xy^*$; se $x^*y = xy^*$, então $y^*x = yx^* = xy$, logo, $x^*y = xy^* = y^*x^*$. Assim, em ambos os casos, temos $x^*y = y^*x^* = xy^* \neq yx$, e aplicando a involução, obtemos $y^*x = xy = yx^* \neq x^*y^*$, portanto, substituindo essas informações em (3.1), encontraremos

$$\sigma(xy) + \sigma(x) + \sigma(y) = 1 + \sigma(x) + \sigma(y) = 1 + \sigma(xy) = 0,$$

o que implica em uma contradição, já que $charR \neq 2$. Para a recíproca, basta aplicar o mesmo resultado a $x^*$ e $y$. □

Assim como no capítulo anterior, a descrição de quando $\mathcal{S}$ é anticomutativo caso $\sigma$ seja uma orientação trivial será fundamental para o desenvolvimento a seguir, porém, ao contrário do que alcançamos neste mesmo capítulo, essa caracterização não será suficiente e precisaremos também da descrição de quando $\mathcal{S}$ é anticomutativo caso $\sigma$ seja uma orientação clássica. Tais resultados se encontram em [GP13a, GP14]. Nestes artigos, os autores implicitamente restringiram o estudo ao caso em que $\sqrt{R_2} = 2R$, deixando de lado o caso mais geral que apresentaremos aqui.

O seguinte teorema descreve a anticomutatividade de $\mathcal{S}$ quando $\sigma \equiv 1$, e este é uma extensão do [Teorema 3.2, GP13a].

**Teorema 3.7.** *Seja $R$ um anel comutativo tal que $charR \neq 2$ e $G$ um grupo com involução $*$. Então $\mathcal{S}$ (com $\sigma$ trivial) é anticomutativo se, e somente se, ocorre uma das seguintes afirmações:*

*(1) $\sqrt{R_2} \subset R_2$, $G$ é um grupo abeliano e $* = Id$.*

*(2)* $charR = 4$, $\sqrt{R_2} = R_2$, $G$ *é abeliano e existe* $s \in G$ *tal que* $s^2 = 1$ *e* $x^* \in \{x, sx\}$, $\forall x \in G$.

*(3)* $charR = 4$, $\sqrt{R_2} = R_2$, $G' = \{1, s\}$ *e* $x^* \in \{x, sx\}$, $\forall x \in G$.

*Demonstração.* Para provar esse resultado, é suficiente seguir a prova do Teorema 3.2 de [GP13a], usando o Lema 3.1 no lugar do Lema 3.1 de [GP13a] e substituindo a equação (3.1) do mesmo artigo, nos casos de $g$ ou $h \in G_*$ pelas seguintes:

$$r_1(gh + gh^* + hg + h^*g) = 0,$$

caso $g \in G_*$ e $h \notin G_*$; e

$$r_1 r_2(gh + hg) = 0,$$

caso $g, h \in G_*$, sendo $r_1, r_2 \in \sqrt{R_2}$. □

Da mesma forma que fizemos no Cápitulo 2, podemos utilizar o teorema acima para descrever a estrutura do subgrupo $N \leq G$, e, a partir disso, extrair informações a respeito de $G$.

Entretanto, como já foi dito, conhecer a estrutura de $N$ não é suficiente para caracterizarmos completamente quando o conjunto $\mathcal{S}$, para $\sigma$ uma orientação generalizada, é anticomutativo. Para completarmos tal tarefa, precisaremos de mais algumas informações acerca do grupo $G$; mais precisamente, necessitaremos conhecer o subgrupo $C = \{x \in G : \sigma(x) = \pm 1\}$.

Para descrever $C$, podemos proceder de maneira semelhante à que fizemos para $N$, estudando agora a anticomutatividade de $\mathcal{S}$ caso $\sigma$ seja a orientação usual. Para isso, podemos, de forma análoga ao teorema anterior, encontrar uma extensão da descrição apresentada em [GP14], aplicando o Teorema 3.7 no lugar do Teorema 3.2 de [GP13a] e ajustando algumas equações da mesma maneira que fizemos anteriormente.

**Teorema 3.8.** *Seja* $R$ *um anel comutativo tal que* $charR \neq 2$ *e* $G$ *um grupo com involução* $*$ *compatível com uma orientação* $\sigma : G \to \{\pm 1\}$. *Então* $\mathcal{S}$ *é anticomutativo se, e somente se, ocorre uma das seguintes afirmações:*

*(1)* $\sqrt{R_2} \subset R_2$, $G$ *é um grupo abeliano e* $* = Id$.

*(2)* $charR = 4$, $\sqrt{R_2} = R_2$, $G$ *é abeliano e* $*|_N = Id_N$.

*(3)* $charR = 4$, $\sqrt{R_2} = R_2$, $G' = \{1, s\}$ *e* $x^* \in \{x, sx\}$, $\forall x \in G$. *Além disso,* $(G_*)' = \{1\}$ *ou* $R_2^2 = \{0\}$.

Note que $G' = \{1, s\}$ e $x^* \in \{x, sx\}$, implicam que $s \in \mathcal{Z}(G) \cap G_*$. De fato, como $s^2 = 1$, se $s \notin G_*$, então $s^* = ss = 1$, donde $s = 1$, contradição; por outro lado

se $(x, s) \neq 1$ para algum $x \in G$, então $x^{-1}s^{-1}xs = s$, o que implica em $x^{-1}sx = 1$, contradição, pois neste caso $s$ possuiria ordem 1.

Conhecendo esses resultados, podemos prosseguir no entendimento das propriedades do grupo $G$.

**Lema 3.9.** *Se $\mathcal{S}$ é anticomutativo, então $(x^2, y) = 1$, $\forall x, y \notin G_*$.*

*Demonstração.* Sejam $x, y \notin G_*$ tais que $(x, y) \neq 1$, consequentemente, pelo item (ii) do Lema 3.6, $xy \notin G_*$. Se $x, y \in C$, pelo item (3) do teorema anterior, $G' = \{1, s\}$, donde $x^{-1}x^{-1}yxx = x^{-1}syx = sx^{-1}yx = ssy = y$ e o resultado é válido.

Se $x \in C$ e $y \notin C$, então, aplicando o Lema 3.5 a $x$ e $y$, temos que (ii) ou (iv) ocorre, já que $xy \notin C$, logo, $xy = yx^*$. Assim $x^2y = xyx^* = y(x^*)^2 = yx^2$. Se $x \notin C$ e $y \in C$, podemos proceder de forma análoga.

Se $x, y \notin C$, aplicando o mesmo lema, temos que se (ii) ocorre, o resultado é válido pelos mesmos argumentos acima; além disso (i) e (iv) não são válidos. Suponha então que (iii) ocorra, ou seja, $xy = x^*y^* \neq yx^* = y^*x$ e $\sigma(xy) = -1$. Aplicando novamente o Lema 3.5 a $xy$ e $x$, temos que (iii) não ocorre, já que $x^2y \notin C$. Se (i) ocorre, então $xyx = xxy$, ou seja, $xy = yx$, absurdo. Se (ii) ou (iv) ocorre, então $x(xy) = (xy)^*x = (yx)x$, ou seja, $(x^2, y) = 1$. $\square$

Antes de avançarmos para o próximo lema, devemos observar que se $* \neq Id|_G$, então para cada $x \in G_*$, existe ao menos um $\alpha \in R \setminus \{0\}$ tal que $\alpha x \in \mathcal{S}$. Para isso, note que se $* \neq Id|_G$, então o Lema 3.1, afirma que $2 \in R_2 = \sqrt{R_2}$, e portanto, se $x \in G_*$ e $\sigma(x) = -1$, tomando $\alpha = 2$, a afirmação é válida, já que $2(1 - \sigma(x)) = 2 \cdot 2 = 0$; se $\sigma(x) \neq -1$, então, tomando $\alpha = 1 + \sigma(x)$, temos que $\alpha \neq 0$ e $\alpha(1 - \sigma(x)) = (1 + \sigma(x))(1 - \sigma(x)) = 1 - \sigma(x)^2 = 0$, já que, pela compatibilidade da involução com a orientação, $x^2 = xx^* \in N$.

O lema a seguir mostra as relações entre elementos de $G_*$ com um elementos de $G \setminus G_*$.

**Lema 3.10.** *Suponha que $\mathcal{S}$ é anticomutativo. Então, para todo $y \in G_*$, $x \notin G_*$ e $\alpha \in R$ tal que $\alpha y \in \mathcal{S}$, são verdadeiras:*

*(i)* $x^y \in \{x, x^*\}$.

*(ii)* $xy \in G_* \Leftrightarrow xy \neq yx$.

*(iii) Se $xy \neq yx$, então $\alpha(1 + \sigma(x)) = 0$. Se $xy = yx$, então $\alpha \in R_2$.*

*(iv)* $(x, y^2) = (x^2, y) = (xx^*, y) = 1$.

*Demonstração.* Os itens (i), (ii) e (iii) são análogos aos mesmos itens do Lema 2.8, sendo suficiente substituir o Corolário 2.3 pelo Corolário 3.2.

Para verificar (iv), note que se $(x, y) \neq 1$, então, pelo item (i),

$$x^2y = xyx^* = y(x^*)^2 = yx^2,$$

$$xy^2 = yx^*y = y^2x \text{ e}$$

$$xx^*y = xyx = yx^*x = yxx^*.$$

□

O próximo lema descreve algumas relações entre dois elementos simétricos e seus coeficientes. Além disso, o item (iv) do lema anterior e o item (ii) do seguinte, garantem que $x^2 \in \mathcal{Z}(G),\ \forall x \in G$.

**Lema 3.11.** *Suponha que $\mathcal{S}$ é anticomutativo. Então, para todo $x, y \in G_*$ e $\alpha, \beta \in R$ tais que $\alpha x, \beta y \in \mathcal{S}$ temos*

*(i) Se $xy \neq yx$, então $\alpha\beta = 0$; se $xy = yx$, então $\alpha\beta \in R_2$.*

*(ii) $(x, y^2) = (x^2, y) = 1$.*

*Demonstração.* O item (i) é análogo ao Lema 2.12.

Para provar (ii), suponha que $(x, y) \neq 1$, equivalentemente, pela Observação 2.11, $xy \notin G_*$. Seja $\alpha$ não nulo tal que $\alpha x \in \mathcal{S}$, assim, $\alpha x$ anticomuta com $xy + \sigma(xy)(xy)^* = xy + \sigma(xy)yx$, ou seja,

$$\alpha x^2y + \alpha\sigma(xy)xyx + \alpha xyx + \alpha\sigma(xy)yx^2 = 0,$$

o que implica em $x^2y = yx^2$, já que $(x, y) \neq 1$. O outro caso é análogo. □

Vamos agora estudar os elementos multiplicadores da involução $c_x = x^{-1}x^*$.

**Lema 3.12.** *Se $\mathcal{S}$ é anticomutativo, então $c_x = x^*x^{-1} \in \mathcal{Z}(G),\ \forall x \in G$.*

*Demonstração.* Se $x \in G_*$, trivialmente temos o resultado. Sejam $x \notin G_*$ e $y \in G$. Vamos mostrar que $(c_x, y) = 1,\ \forall y \in G$.

Se $(x, y) = 1$, então $(x^{-1}, y) = 1 = (x^*, y) = 1$, donde $(x^*x^{-1}, y) = 1$. Podemos admitir então que $(x, y) \neq 1$.

Se $xy = yx^*$ e $x^*y = yx$, então $x^*x^{-1}y = x^*yx^{-*} = yxx^{-*} = yx^*x^{-1}$, já que $x^2 = (x^*)^2$. Assim, se $y \notin G_*$ e $xy = yx^*$ ou $y \in G_*$, pelo item (iii) do Lema 3.6 ou o item (i) do Lema 3.10, respectivamente, temos $(x^*x^{-1}, y) = 1$.

Suponha que $y \notin G_*$ e $xy \neq yx^*$. Pelo item (i) do Lema 3.6, temos $xy \in \{y^*x, x^*y^*\}$. Se $xy = y^*x$, então $y^*x^* = x^*y$ e $x^{-1}y^* = yx^{-1}$, portanto, $x^{-1}x^*y =$

$x^{-1}y^*x^* = yx^{-1}x^*$. Se $xy = x^*y^*$, então $yx = y^*x^*$ e, portanto, $x^*x^{-1}y^* = x^*x^{-*}y = y = yx^{-*}x^* = y^*x^{-1}x^*$, ou seja, $(x^*x^{-1}, y^*) = 1$, o que implica em $(x^*x^{-1}, y) = 1$. Portanto $x^*x^{-1} \in \mathcal{Z}(G)$. □

O lema a seguir exibe, de uma forma geral, qual deve ser a estrutura da involução para que $\mathcal{S}$ seja anticomutativo.

**Lema 3.13.** *Se $\mathcal{S}$ é anticomutativo, então $x^* = c_x x$, $\forall x \in G$, onde $c_x \in G_* \cap \mathcal{Z}(G)$ e $c_x^2 = 1$. Além disso, $c_{xy} = c_x c_y (x, y)$ e se $(x, y) \neq 1$, então $c_{xy} \in \{c_x, c_y, (x, y)\}$.*

*Demonstração.* Primeiro vamos mostrar que $(x, y) \in G_*$, $\forall x, y \in G$.

Sejam $x, y \in G$ tais que $(x, y) \neq 1$. Se $x \notin G_*$ e $y \in G_*$, então, pelo item (i) do Lema 3.10, temos que $(x, y) = x^{-1}x^y = x^{-1}x^* \in G_*$, já que $x^2 \in G_*$; o caso $x \in G_*$ e $y \notin G_*$ é análogo. Se $x, y \notin G_*$ ou $x, y \in G_*$, pelo item (ii) do Lema 3.6 ou a Observação 2.11, respectivamente, temos que $xy, x^{-1}y^{-1} \notin G_*$, assim, pelo item (ii) do Lema 3.6, $(x, y) = (x^{-1}y^{-1})(xy) \in G_*$ se, e somente se, $(xy, x^{-1}y^{-1}) = 1$, portanto, como $(xy, x^{-1}y^{-1}) = y^{-1}x^{-1}yxxyx^{-1}y^{-1} = 1$, já que $x^2, y^2 \in \mathcal{Z}(G)$, temos o resultado.

Vamos mostrar agora que $(x, y)^2 = 1$, $\forall x, y \in G$, ou seja, $xyx^{-1}y^{-1} = yxy^{-1}x^{-1}$.

Sejam $x, y \in G$. Se $(x, y) = 1$, nada temos a provar. Suponha que $(x, y) \neq 1$. Pelos Lemas 3.6 e 3.10, sabemos que se $x$ ou $y \notin G_*$, então $xy \in \{yx^*, y^*x, x^*y^*\}$; além disso, se $x, y \in G_*$, então $xy = x^*y^*$, portanto, vamos analisar estas três possibilidades.

Se $xy = yx^*$, então, pelos itens (iii) e (i) dos Lemas 3.6 e 3.10, respectivamente, temos $yx = x^*y$, portanto

$$\begin{aligned} xyx^{-1}y^{-1} &= xx^{-*}yy^{-1} \\ &= xx^{-*} \\ &= x^*x^{-1} \qquad (x^2 = (x^*)^2) \\ &= x^*yy^{-1}x^{-1} \\ &= yxy^{-1}x^{-1}. \end{aligned}$$

O caso $xy = y^*x$ é análogo.

Se $xy = x^*y^*$, como $(x, y) \in G_*$, então

$$\begin{aligned} xyx^{-1}y^{-1} &= y^{-*}x^{-*}y^*x^* \\ &= y^{-1}x^{-1}yx \\ &= (yy^{-1})y^{-1}(xx^{-1})x^{-1}yx \\ &= yy^{-2}xx^{-2}yx \\ &= yxy^{-1}x^{-1}, \end{aligned}$$

já que $x^2, y^2 \in \mathcal{Z}(G)$.

Vamos agora à prova do lema.

Dado $x \in G$, tome $c_x = x^*x^{-1}$ e note que $c_x^{-1} = xx^{-*} = x^*x^{-1} = c_x$, já que $x^2 \in G_*$, portanto $c_x^2 = 1$ e $c_x \in G_*$. Tome $y \in G$, assim $(xy)^* = c_{xy}xy$ e, por outro lado, pelo Lema 3.12, $(xy)^* = y^*x^* = c_y y c_x x = c_x c_y yx$, ou seja, $c_{xy} = c_x c_y(y,x) = c_x c_y(x,y)$.

Observe que os Lemas 3.6 e 3.10 nos afirmam que se $(x,y) \neq 1$, então vale um dos seguintes itens:

(a) $x^* = y^{-1}xy = yxy^{-1}$;

(b) $y^* = x^{-1}yx = xyx^{-1}$;

(c) $xy = x^*y^*$ e $xy^* = x^*y$.

Assim se (a) ocorre, então $c_x = x^{-1}x^* = x^{-1}y^{-1}xy = (x,y)$ e $c_{xy} = (x,y)c_y(x,y) = c_y$; analogamente, se (b) ocorre, então $c_y = (x,y)$ e $c_x = c_{xy}$; por fim, se (c) ocorre, então $c_x = x^*x^{-1} = y^*y^{-1} = c_y$ e $c_{xy} = (x,y)$. □

**Lema 3.14.** *Suponha que $\mathcal{S}$ é anticomutativo. Se $x, y \notin G_*$, então:*

*(i) Se $(x,y) = 1$, então $c_x = c_y$ e $2(1+\sigma(xy)) = 0 = 2(\sigma(x)+\sigma(y))$;*

*(ii) Se $(x,y) \neq 1$, então:*

*(a) $(x,y) = c_x = c_y = c_{xy}$ e $(1+\sigma(x)+\sigma(y)+\sigma(xy)) = 0$, ou;*

*(b) $(x,y) = c_x \neq c_y = c_{xy}$ e $\sigma(x) = -1$, ou;*

*(c) $(x,y) = c_y \neq c_x = c_{xy}$ e $\sigma(y) = -1$, ou;*

*(d) $(x,y) = c_{xy} \neq c_x = c_y$ e $\sigma(xy) = -1$ e $\sigma(x) = -\sigma(y)$.*

*Demonstração.* Para mostrar (i), note que se $(x,y) = 1$ e $x, y \notin G_*$, então, pelo Lema 3.13, $c_{xy} = c_x c_y$. Pelo item (ii) do Lema 3.6, $xy \in G_*$, portanto, $c_x c_y = 1$, logo $c_x = c_y$, já que $c_x^2 = c_y^2 = 1$. O Lema 3.5 completa a prova.

Para verificar (ii), vamos considerar alguns casos. Se $x, y \in C$, pelo Teorema 3.8, e a equação (3.1), facilmente verificamos (a). Se $y \notin C$, então o Lema 3.5 garante que (a), (b) ou (d) ocorrem. Se $x \notin C$, utilizando o Lema 3.5, temos que (a), (c) ou (d) ocorrem. □

Temos, neste momento, ferramentas suficientes para estender um pouco mais o Teorema 2.2 de [GP14], o que será útil em breve. No teorema original, caso $G$ fosse abeliano e $* \neq Id$, pouco podíamos concluir acerca da involução em $G$, exceto pelo fato de que $N = N_*$. Mostraremos agora que a involução nos elementos não simétricos é dada precisamente pela multiplicação por um certo elemento $s \in G$ fixo.

**Teorema 3.15** (Extensão Teorema 2.2, [GP14]). *Seja $R$ um anel comutativo tal que $\mathrm{char} R \neq 2$ e $G$ um grupo com involução $*$ compatível com uma orientação $\sigma : G \to \{\pm 1\}$. Então $\mathcal{S}$ é anticomutativo se, e somente se, ocorre uma das seguintes afirmações:*

*(1)* $\sqrt{R_2} \subset R_2$, *$G$ é um grupo abeliano e* $* = Id$.

*(2)* $charR = 4$, $\sqrt{R_2} = R_2$, *$G$ é abeliano,* $*|_N = Id_N$ *e existe* $s \in G_*$ *tal que* $x^* \in \{x, sx\}$.

*(3)* $charR = 4$, $\sqrt{R_2} = R_2$, $G' = \{1, s\}$ *e* $x^* \in \{x, sx\}$, $\forall x \in G$. *Além disso,* $(G_*)' = \{1\}$ *ou* $R_2^2 = \{0\}$.

*Demonstração.* Assumindo que $* \neq Id$, fixe $x \notin G_*$ e denote $c_x = s$. Dado $y \notin G_*$, como $G$ é abeliano, temos, pelo item (i) do Lema 3.14, que $c_x = c_y$, portanto $c_y = s$ e $y^* = ys$, $\forall y \notin G_*$, concluindo (2).

Os demais casos e a recíproca seguem inalterados. □

Como já fizemos anteriormente, sabemos que este resultado exprime a estrutura da involução em $C$. Este teorema será utilizado, eventualmente, sem qualquer referência quando tomarmos $c_x = s$, $\forall x \in C \backslash G_*$.

A seguinte proposição é essencialmente um refinamento da estrutura da involução apresentada no Lema 3.13, afirmando que o conjunto dos $c_x$, $\forall x \in G$, possui no máximo 3 elementos. Além disso, mostraremos que os elementos $c_x$ são constantes nos conjuntos $G_*$, $C \backslash G_*$ e $G \backslash (G_* \cap C)$ e que qualquer comutador em $G$ resulta em um destes elementos.

Este resultado exibirá precisamente a forma da involução $*$ para que $\mathcal{S}$ seja anticomutativo.

**Proposição 3.16.** *Se $\mathcal{S}$ é anticomutativo, então vale uma das seguintes:*

*(i)* *$G$ é abeliano e* $* = Id$.

*(ii)* *$G$ é abeliano e existe* $s \in G_* \cap \mathcal{Z}(G)$ *tal que* $x^* = \{x, xs\}$, $\forall x \in G$.

*(iii)* $G' = \{1, s\} \subset G_* \cap \mathcal{Z}(G)$, $s^2 = 1$ *e* $x^* = \{x, xs\}$, $\forall x \in G$.

*(iv)* $*|_C \neq Id$, $*|_N = Id$, *existem elementos* $s, t \in G_* \cap \mathcal{Z}(G)$ *tais que* $x^* \in \{x, xs\}$, $\forall x \in C$ *e* $x^* \in \{x, xt\}$, $\forall x \notin C$. *Além disso,* $(x, y) \in \{1, s, t\}$, $\forall x, y \in G$, $C' \subset \{1, s\}$, $(C \backslash G_*, G) \subset \{1, s\}$ *e* $(C \backslash G_*, G \backslash (C \cup G_*)) = \{s\}$.

*Além disso, se (iv) ocorre, então* $G' = \{1, s\}$, *$C$ é abeliano,* $C_* \subset \mathcal{Z}(G)$, $(G \backslash (C \cup G_*), G_*) = \{1\}$ *e* $(G \backslash C, C \backslash G_*) = \{s\}$.

*Demonstração.* Suponha que $G$ seja abeliano. Se $* = Id$, então o item (i) ocorre. Se $* \neq Id$, basta proceder de forma análoga à prova do Teorema 3.15 e concluir (ii).

Podemos admitir que $G$ é não abeliano.

Suponha que $*|_C = Id$, portanto $C$ abeliano. Fixe $z \notin G_*$, consequentemente, $z \notin C$, e sejam $s = c_z$ e $x \notin G_*$. Aplicando o Lema 3.14, temos $(z, x) = 1$ e $c_x = s$, ou, $(z, x) = s = c_x = c_{zx}$, pois caso contrário, $*|_C \neq Id$; assim, $x^* \in \{x, sx\}$ $\forall x \in G$, e $(x, y) \in \{1, s\}$, $\forall x, y \notin G_*$. Observe que pela equação $c_{xy} = c_x c_y (x, y)$, concluímos que

$(x,y) = c_{xy}c_xc_y \in \{1,s\}$, já que $c_x \in \{1,s\}$, $\forall x \in G$, ou seja $G' = \{1,s\} \subset G_* \cap \mathcal{Z}(G)$. Dessa forma, $G$ possui a estrutura apresentada em (iii).

Suponha agora que $*|_C \neq Id$. Seja $x \in C\backslash G_*$ e tome $s = c_x$ dado pelo Teorema 3.8. Seja $y \in G$ tal que $(x,y) \neq 1$. Suponha que $y \notin G_*$; se $y \in C$, pelo Teorema 3.8, $(x,y) = s$; se $y \notin C$, pelo Lema 3.14, temos que (a) ou (b) ocorrem, já que $x \in C$ e $y \notin C$, portanto, em ambos os casos $(x,y) = c_x = s$. Por outro lado, se $y \in G_*$, pelo Lema 3.10, temos $xy \in G_*$, assim, pelo Lema 3.13, $c_{xy} = c_xc_y(x,y)$, ou seja, $1 = c_x(x,y)$, o que implica em $(x,y) = s$, já que $s^2 = 1$. Portanto $(C\backslash G_*, G) \subset \{1,s\}$, já que $c_y = s$ $\forall y \in C\backslash G_*$.

Sejam $x,y \in G\backslash(G_* \cup C)$ e $c_x = t$. Pelo Lema 3.14, se $(x,y) = 1$, então $t = c_x = c_y$; se $(x,y) \neq 1$, então $t = c_x = c_y = (x,y)$, ou, $t = c_x = c_y$, $\sigma(xy) = -1$, $s = c_{xy} = (x,y)$. Portanto a involução em $G\backslash C$ é dada por $x^* \in \{x, xt = tx\}$, $\forall x \notin C$. Tome novamente $x \in G\backslash(G_* \cup C)$ e seja $y \in G_*$ tal que $(x,y) \neq 1$; nesse caso, pelos Lemas 3.10 e 3.13, temos $xy \in G_*$ e $c_{xy} = c_xc_y(x,y)$, ou seja, $1 = c_x(x,y)$, portanto $(x,y) = t$, assim $(G\backslash G_*, G) \subset \{1,s,t\}$. Por fim, tomando $x,y \in G_*$, tais que $(x,y) \neq 1$, sabemos, pela Observação 2.11, que $xy \notin G_*$ e novamente pelo Lema 3.13, temos $c_{xy} = c_xc_y(x,y)$, logo, $(x,y) = c_{xy} = s$ ou $t$; assim concluímos que $G$ possui no máximo dois comutadores não triviais $s$ e $t$; além disso $x^* = \{x, xs\}$, $\forall x \in C$ e $x^* = \{x, xt\}$ $\forall x \notin C$.

Se $s = t$, então facilmente podemos verificar que (iii) ocorre. Suponha que $s \neq t$ e note que, neste caso, $G\backslash(C \cup G_*) \neq \emptyset$. Se $*|_N \neq Id$, então tomando $y \in N\backslash G_*$ e $x \in G\backslash(C \cup G_*)$, pelo Lema 3.14, temos que $s = c_y = c_x = t$, contradição, já que $s \neq t$, portanto $*|_N = Id$, ou seja, $N_* = N$. Note também que, se $x \in C\backslash G_*$ e $y \in G\backslash(C \cup G_*)$ verificam $(x,y) = 1$, então, pelo Lema 3.14, $s = c_x = c_y = t$, contradição, portanto $(x,y) = s$, já que $(C\backslash G_*, G) \subset \{1,s\}$, logo, $(C\backslash G_*, G\backslash(C \cup G_*)) = \{s\}$. Assim concluímos (iv).

Vamos mostrar agora que se (iv) é verificado, então $G$ possui exatamente um único comutador não trivial $s$, $C$ é abeliano, $C_* \subset \mathcal{Z}(G)$, $(G\backslash(C \cup G_*), G_*) = \{1\}$ e $(G\backslash C, C\backslash G_*) = \{s\}$.

Primeiramente mostraremos que $(x,y) \neq t$, $\forall x,y \in G$.

Para isso, suponha que existam $x,y \in G$ tais que $(x,y) = t$. Se $x \in G\backslash(C \cup G_*)$, então tomando $c \in C\backslash G_*$, temos que $(x, yc) = (x,y)(x,c) = ts$, já que $(C\backslash G_*, G\backslash(C \cup G_*)) = \{s\}$, contradição, visto que $G$ possui no máximo dois comutadores não triviais $s$ e $t$, que naturalmente são distintos de $st$; analogamente encontraríamos um absurdo caso $y \in G\backslash(C \cup G_*)$. Portanto, se $(x,y) = t$, então $x,y \notin G\backslash(C \cup G_*)$, ou seja, $x,y \in C \cup G_*$; além disso, como $t \notin C'$, podemos assumir que $x$ ou $y \in G_*\backslash C$. Dessa maneira, suponha, sem perda de generalidade que $x \in G_*\backslash C$ e, consequentemente, $y \in G_*$, pois caso contrário $y \in C\backslash G_*$ e, de $(C\backslash G_*, G) \subset \{1,s\}$, concluiríamos que $(x,y) \neq t$, contrariando a hipótese. Note que, pela Observação 2.11, $xy \notin G_*$, o que implica em $xy \in C$, pois caso contrário estaríamos na primeira situação, o que é impossível. Assim $xy \in C\backslash G_*$, o que gera uma outra contradição, visto que $t = (x,y) = (xy, x) \in (C\backslash G_*, G) \subset \{1,s\}$. Dessa forma

concluímos que $G$ possui um único comutador não trivial $s$.

Observe que no parágrafo em que garantimos que $G$ possui no máximo dois comutadores não triviais, implicitamente mostramos também que para $x, y \in G$ tais que $(x, y) \neq 1$, valem:

(a) Se $x \in G \backslash (C \cup G_*)$ e $y \in G_*$, então $(x, y) = t$.

(b) Se $x, y \in G_*$, então $(x, y) = c_{xy}$.

Para finalizar a prova, resta verificar que se (iv) ocorre, então na verdade $C$ é abeliano, $C_* \subset \mathcal{Z}(G)$, $(G \backslash (C \cup G_*), G_*) = \{1\}$ e $(G \backslash C, C \backslash G_*) = \{s\}$.

Pelo item (a), podemos concluir que $(G \backslash (C \cup G_*), G_*) = \{1\}$, já que $G$ possui um único comutador não trivial $s$ e este é diferente de $t$. Se $x \in G_* \backslash C$ e $y \in C_*$, então $(x, y) = 1$, pois, caso contrário, pelo item (b), teríamos que $xy \in C$, contradição. Dessa forma, concluímos que $(C_*, G \backslash C) = 1$. Note que se $c \in C_*$ e $x \in C$, tomando $y \notin C$, temos que $xy \notin C$ e, portanto, $(c, y) = 1 = (c, xy)$, o que implica em $C_* \subset \mathcal{Z}(G)$. Além disso, como $N = N_*$, se $x, y \in C \backslash G_*$, então $x, y \notin N$ e portanto $xy \in N = N_* \subset C_* \subset \mathcal{Z}(G)$, assim $(x, y) = (x, xy) = 1$, logo $C$ é abeliano.

Para finalizar, sejam $x \in G_* \backslash C$ e $y \in C \backslash G_*$. Caso $(x, y) = 1$, pelo Lema 3.10, temos que $xy \in G \backslash (C \cup G_*)$ e $(xy, y) = 1$, contradição, já que $(C \backslash G_*, G \backslash (C \cup G_*)) = \{s\}$, portanto $(G_* \backslash C, C \backslash G_*) = \{s\}$. Disso concluímos também que $(C \backslash G_*, G \backslash C) = \{s\}$. $\square$

Finalmente vamos ao principal resultado desse capítulo.

**Teorema 3.17.** *Seja $R$ um anel tal que $char R \neq 2$ e $G$ um grupo com uma involução $*$ compatível com uma orientação $\sigma$. $\mathcal{S}$ é anticomutativo se, e somente se, valem os seguintes:*

*(i) (a) $* = Id$ e $G$ é abeliano; ou*

*(b) $* \neq Id$ e $G$ satisfaz alguma das seguintes condições:*

*(1) $G$ é abeliano e existe $s \in G_* \cap \mathcal{Z}(G)$ tal que $x^* = \{x, xs\}$, $\forall x \in G$.*

*(2) $G' = \{1, s\} \subset G_* \cap \mathcal{Z}(G)$, $s^2 = 1$ e $x^* = \{x, xs\}$, $\forall x \in G$.*

*(3) $*|_C \neq Id$, $*|_N = Id$, existem elementos $s, t \in G_* \cap \mathcal{Z}(G)$ tais que $x^* \in \{x, xs\}$, $\forall x \in C$ e $x^* \in \{x, xt\}$, $\forall x \notin C$. Além disso, $(x, y) \in \{1, s, t\}$, $\forall x, y \in G$, $C' \subset \{1, s\}$, $(C \backslash G_*, G) \subset \{1, s\}$ e $(C \backslash G_*, G \backslash (C \cup G_*)) = \{s\}$.*

*(ii) Se $x, y \notin G_*$, então $xy = yx$ e $(1 + \sigma(xy)), (\sigma(x) + \sigma(y)) \in R_2$, ou $xy \neq yx$ e $(1 + \sigma(x) + \sigma(y) + \sigma(xy)) = 0$.*

*(iii) Se $x \notin G_*$, $y \in G_*$ e $\alpha \in R$ é tal que $\alpha y \in \mathcal{S}$, então $xy \neq yx$ e $\alpha(1 + \sigma(x)) = 0$, ou $xy = yx$ e $\alpha \in R_2$.*

*(iv) Se $x, y \in G_*$ e $\alpha, \beta \in R$ são tais que $\alpha x, \beta y \in \mathcal{S}$, então, $xy \neq yx$ e $\alpha\beta = 0$, ou $xy = yx$ e $\alpha\beta \in R_2$.*

*Demonstração.* Suponha que $\mathcal{S}$ é anticomutativo. Facilmente podemos verificar que $Id$ define uma involução somente quando $G$ é abeliano, portanto (i)(a) ocorre.

Se $* \neq Id$, a Proposição 3.16 garante (i)(b), portanto vale (i).

O item (ii) é garantido pelo Lema 3.13 e os itens (iii) e (iv) seguem dos Lemas 3.10 e 3.11, respectivamente.

Para a recíproca, denote $c_a = a^* a^{-1}$, $\forall a \in G$ e note que, por (i), $c_a \in \mathcal{Z}(G)$.

Sejam $x, y \notin G_*$; devemos mostrar que

$$(x + \sigma(x)x^*)(y + \sigma(y)y^*) + (y + \sigma(y)y^*)(x + \sigma(x)x^*) = 0,$$

ou seja,

$$xy + yx + \sigma(xy)xyc_xc_y + \sigma(xy)yxc_xc_y + \sigma(y)xyc_y + \sigma(y)yxc_y + \sigma(x)yxc_x + \sigma(x)xyc_x, \quad (3.2)$$

se anula.

Se $(x, y) = 1$, então, por (i), $c_x = c_y$ e, por (ii), $2(1+\sigma(xy)) = 0 = 2(\sigma(x)+\sigma(y))$, portanto (3.2) se reescreve como

$$xy + xy + \sigma(xy)xy + \sigma(xy)xy + \sigma(y)xyc_x + \sigma(y)xyc_x + \sigma(x)xyc_x + \sigma(x)xyc_x,$$

ou seja,

$$2(1 + \sigma(xy))xy + 2(\sigma(x) + \sigma(y))xyc_x = 0.$$

Suponha que $(x, y) \neq 1$. Se $\sigma(x) = -1$, então, por (i), $c_x = s = (x, y)$, assim (3.2), se reescreve por

$$\begin{gathered} xy + xys + \sigma(xy)xysc_y + \sigma(xy)xys^2c_y + \sigma(y)xyc_y + \sigma(y)xysc_y + \sigma(x)xys^2 + \sigma(x)xys \\ = \\ (1 + \sigma(x))(xy + xys) + (\sigma(y) + \sigma(xy))(xyc_y + xysc_y) \\ = \\ 0; \end{gathered}$$

se $\sigma(y) = -1$, podemos provar de forma análoga; se $\sigma(x) \neq -1 \neq \sigma(y)$, por (b), $c_x = c_y$ e podemos considerar duas possibilidades: $(x, y) = c_x$, ou $(x, y) \neq c_x$. Se a primeira ocorre,

temos

$$\begin{gathered} xy + xyc_x + \sigma(xy)xyc_x^2 + \sigma(xy)xyc_x^3 + \sigma(y)xyc_x + \sigma(y)xyc_x^2 + \sigma(x)xyc_x^2 + \sigma(x)xyc_x \\ = \\ (1 + \sigma(x) + \sigma(y) + \sigma(xy))(xy + xyc_x) \\ = \\ 0, \end{gathered}$$

onde a última igualdade segue de (ii); se $c_x = c_y \neq (x, y)$, note que estamos no caso (3) e além disso, $x, y \notin C$, já que $*|_N = Id$, portanto $c_x = c_y = t$ e $yx = yttx = y^*x^* = (xy)^* = xyc_{xy}$, ou seja $c_{xy} = (y, x) = (x, y) \neq t$, assim $c_{xy} = s$ e, com isso, $\sigma(xy) = -1$, já que $N \subset G_*$. Dessa forma 3.2 se reescreve como

$$\begin{gathered} xy + xys + \sigma(xy)xy + \sigma(xy)xys + \sigma(y)xyt + \sigma(y)xyst + \sigma(x)xyst + \sigma(x)xyt \\ = \\ (1 + \sigma(xy))(xy + xys) + (\sigma(y) + \sigma(x))(xyt + xyts) \\ = \\ 0, \end{gathered}$$

já que $\sigma(xy) = -1$ e, por (ii), $1 + \sigma(x) + \sigma(y) + \sigma(xy) = 0$.

Sejam $x \notin G_*$ e $y \in G_*$. Devemos mostrar que $(x + \sigma(x)x^*)$ anticomuta com $\alpha y$, com $\alpha \in R$ tal que $\alpha y \in \mathcal{S}$.

Suponha que $(x, y) \neq 1$. Se $(x, y) \neq c_x$, então estamos no caso (3) e podemos observar que $x \notin C$, ou seja, $c_x = t$. Se $xy \in G_*$, nesse caso $xy = (xy)^* = y^*x^* = yxt$ e portanto $(x, y) = t$, contradição; se $xy \notin G_*$, então $c_{xy} \neq 1$ e $xyc_{xy} = (xy)^* = y^*x^* = yxt$, implicando em $(x, y) = tc_{xy} \in \{t^2 = 1, ts\}$, o que é uma contradição, já que $(x, y) \neq 1$ e $G$ possui apenas dois comutadores não triviais. Portanto, $(x, y) = c_x$, e assim

$$\begin{aligned} (x + \sigma(x)x^*)\alpha y + \alpha y(x + \sigma(x)x^*) &= \alpha xy + \alpha\sigma(x)x^*y + \alpha yx + \alpha\sigma(x)yx^* \\ &= \alpha xy + \alpha\sigma(x)xyc_x + \alpha yx + \alpha\sigma(x)yxc_x \\ &= \alpha xy + \alpha\sigma(x)yx + \alpha yx + \alpha\sigma(x)xy \\ &= \alpha(1 + \sigma(x))(xy + yx) \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue de (iii). Se $(x, y) = 1$, então $xy = yx$ e aplicando a involução, temos que $(x^*, y) = 1$, portanto, $(x + \sigma(x)x^*)y = y(x + \sigma(x)x^*)$, logo, por (iii),

$$(x + \sigma(x)x^*)\alpha y + \alpha y(x + \sigma(x)x^*) = 2\alpha(x + \sigma(x)x^*)y = 0,$$

já que $\alpha \in R_2$.

Sejam $x, y \in G_*$ e $\alpha, \beta \in R$ tais que $\alpha x, \beta y \in \mathcal{S}$. Pelo item (iv), segue que $\alpha x$

anticomuta com $\beta y$. Dessa forma, concluimos que $\mathcal{S}$ é anticomutativo. $\square$

Vale ressaltar que o teorema acima apresenta como grupo solução uma classe distinta das já encontradas para identidades tratadas até o momento, permitindo que o grupo possua até dois comutadores não triviais e que a involução nos elementos não simétricos possa ser dada pela multiplicação por dois elementos distintos $s$ e $t$. Por outro lado, o seguinte corolário irá mostrar que na classe descrita acima, o grupo possui na verdade um único comutador não trivial, sendo assim, o fato que o distingue dos demais é a involução ser dada pela multiplicação de mais de um elemento no caso dos não simétricos.

Além de dar mais precisão a estrutura de $G$, o resultado a seguir nos fornece mais informações acerca de $R$, de $G/N$, mostra algumas condições para que $s \in N$, além mostrar com precisão a tábua de comutadores de $G$.

**Corolário 3.18.** *Nas condições do teorema anterior, temos:*

*(I) Se $* = Id$, então $(\sqrt{R_2})^2 \subset R_2$ e $exp(G/N) = 2$;*

*(II) Se $* \neq Id$, então $charR = 4$, $\sqrt{R_2} = R_2$ e $exp(G/N) = 2$ ou $4$.*

*(III) Se $* \neq Id$ e, adicionalmente, $C \backslash G_* \neq \emptyset$, $exp(G/N) = 2$ ou $G$ é não abeliano, então $s \in N$.*

*(IV) Se (3) ocorre, os comutadores de $G$ são descritos pela seguinte tabela, cujas entradas são dadas pelos possíveis comutadores de elementos das respectivas linhas e colunas:*

| | $C_*$ | $C\backslash G_*$ | $G_*\backslash C$ | $G\backslash(C \cup G_*)$ |
|---|---|---|---|---|
| $C_*$ | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $C\backslash G_*$ | 1 | 1 | s | s |
| $G_*\backslash C$ | 1 | s | 1,s | 1 |
| $G\backslash(C \cup G_*)$ | 1 | s | 1 | 1,s |

*Além disso, não é possível melhorar as possibilidades em $(G_*\backslash C, G_*\backslash C)$ e em $(G\backslash(C \cup G_*), G\backslash(C \cup G_*))$.*

*Demonstração.* Observe que o Lema 3.1 garante que se $\mathcal{S}$ é anticomutativo, então $(\sqrt{R_2})^2 \subset R_2$, caso $* = Id$; $charR = 4$ e $\sqrt{R_2} = R_2$, caso $* \neq Id$.

Os resultados acerca de $exp(G/N)$ seguem de forma análoga ao item (II) do Teorema 2.14.

Para verificar o item (III), note que, se $C\backslash G_* \neq \emptyset$, tomando $x \in C\backslash G_*$, então $s = x^{-1}x^*$ e, portanto $\sigma(s) = \sigma(x^{-1}x^*) = \sigma(xx^*) = 1$, onde a última igualdade segue da compatibilidade de $\sigma$ com $*$ e a penúltima pelo fato de que $\sigma(x)^2 = 1$, já que $x \in C$; se $exp(G/N) = 2$, tomando $x \in G\backslash G_*$ qualquer, podemos proceder de forma análoga

ao caso anterior; se $G$ é não abeliano, então existem $x, y \in G$ tais que $s = (x, y)$, assim $\sigma(s) = \sigma((x, y)) = \sigma(x^{-1})\sigma(y^{-1})\sigma(x)\sigma(y) = 1$ devido à comutatividade de $R$.

Vamos mostrar (IV). Para isso, denotaremos por $a_{ij}$ as entradas da $i$-ésima linha da $j$-ésima coluna da tabela, obviamente desconsiderando as linhas e colunas que determinam os conjuntos a se colocar nos comutadores. Além disso, como essa tabela é simétrica em relação à diagonal principal, é suficiente determinar os $a_{ij}$ com $i \leq j$.

Note que, pela Proposição 3.16, estamos na condição (iv) e, portanto, de $C_* \subset \mathcal{Z}(G)$ e $C$ abeliano, já temos descrito os elementos $a_{1j}$ e $a_{22}$; de $(G\backslash C, C\backslash G_*) = \{s\}$, temos $a_{23}$ e $a_{24}$; de $(G\backslash(C \cup G_*), G_*) = \{1\}$ temos $a_{34}$. Resta então verificar que $a_{33}$ e $a_{44}$ não podem ser melhoradas no sentido de que tanto 1 quanto $s$ são resultados de comutadores nestes conjuntos.

De fato, em ambas é possível encontrar um comutador resultando em 1 já que nesses casos estamos tratando do comutador de um subconjunto consigo próprio; por outro lado, note que tomando $x \in G_*\backslash C$ e $y \in C\backslash G_*$, temos que $(x, y) = s$, logo, pelo Lema 3.10, $xy \in G_*\backslash C$ e além disso $(x, xy) = (x, y) = s$, donde concluímos que $(G_*\backslash C, G_*\backslash C) \cap \{s\} \neq \emptyset$, ou seja, existem as duas possibilidades em $a_{33}$; de forma análoga, tomando agora $x \in G\backslash(G_* \cup C)$ e utilizando o Lema 3.6, concluímos o mesmo para $a_{44}$. $\square$

Por fim, a seguir temos um exemplo de grupo que verifica a nova classe citada anteriormente e que se encaixa nas condições do teorema principal deste capítulo.

**Exemplo 3.19.** *Sejam*

$$G = \left\langle x, y, g : x^4 = y^4 = g^2 = (x, y) = (g, y) = 1,\ (x, g) = x^2 \right\rangle,$$

*ou seja*

$$G = (\langle x \rangle \times \langle y \rangle) \rtimes \langle g \rangle \simeq (C_4 \times C_4) \rtimes C_2$$

*e $R = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$. Defina uma involução $*$ em $G$ tomando a extensão ao produto a partir de $x^* = xx^2 = xs$, $y^* = y$ e $g^* = gy^2 = gt$, e uma orientação generalizada $\sigma$ a partir de $\sigma(x) = (3, 3)$, $\sigma(y) = (1, 1)$ e $\sigma(g) = (1, 3)$. Não é difícil ver que essa orientação é compatível com a involução $*$, portanto $\sigma*$ define uma involução orientada generalizada em $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4)G$.*

*Facilmente podemos verificar que $C$ é abeliano, $G$ possui um único comutador não trivial $s$, e $x^* \in \{x, sx\}$, $\forall x \in C$. Além disso, $N = \langle x^2, y \rangle = N_* = C_* = G_* = \mathcal{Z}(G)$, e $*|_C \neq Id$, já que $x^* = x^3$. Note que $C\backslash G_* = \{xy^i, x^3y^i\} = \{xy^i, xy^is\}$ e $G\backslash C = gC$, portanto*

$$s = (x, g) = (x, gc) = (xs, gc) = (xs, g),$$

*$\forall c \in C$, já que $(c, x) = 1$ e $s \in \mathcal{Z}(G)$, além disso os comutadores anteriores não sofrem alteração quando suas entradas são multiplicadas por $y^i \in \mathcal{Z}(G)$, portanto $(C\backslash G_*, G\backslash C) = \{s\}$ e, desde que $G' = \{1, s\}$, então $(C\backslash G_*, G) \subset \{1, s\}$.*

*Como* $\mathcal{Z}(G) = C_* = \langle x^2, y\rangle$ *e* $C\backslash G_* = xC_*$, *se* $c \in C_*$, *então*

$$(cg)^* = g^*c^* = gtc = cgt, \text{ e}$$

$$(xcg)^* = (cg)^*x^* = cgtxs = gxcts = xgscts = xcgt,$$

*ou seja, a involução em* $G\backslash C$ *é dada por* $a^* \in \{a, at\}$ , $\forall a \in G\backslash C$. *Dessa forma concluímos que* $G$ *verifica as condições do item (i)(b)(3) do teorema anterior.*

*Para verificar (ii), note que os polinômios, nas variáveis* $u$ *e* $v$, $2(1+uv), 2(u+v)$ *e* $(1+u+v+uv)$ *são identicamente nulos em* $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4)$, *assim, o item (ii) é trivialmente verificado.*

*Como* $G_* = \mathcal{Z}(G)$, *para verificar os itens (iii) e (iv) é suficiente verificar que* $\alpha \in R_2$, $\forall \alpha \in R$ *tal que* $\alpha a \in \mathcal{S}$ *com* $a \in G_*$. *Note que essa condição também é facilmente verificada, visto que* $G_* = N_*$ *e se* $\alpha a \in \mathcal{S}$ *com* $a \in N_*$, *então* $\alpha \in \sqrt{R_2} = R_2$, *pois essa é exatamente a condição para que* $\alpha a \in \overline{\mathcal{S}_1}$.

*Dessa forma, aplicando o Teorema 3.17, garantimos que* $\mathcal{S}$ *é anticomutativo.*

# Capítulo 4

# Comutatividade dos Antissimétricos

Como já exibimos no Capítulo 1, o estudo da comutatividade e anticomutatividade de $RG^+$ e $RG^-$ está, no sentido abordado nesta tese, concluído para as involuções não orientadas e quase completo no caso de uma involução orientada usual, restando apenas caracterizar o que ocorre quando $RG^-$ é comutativo e $*$ é uma involução qualquer em $G$.

Dentre as identidades assumidas para os conjuntos dos simétricos, podemos perceber que a anticomutatividade apresenta como soluções grupos com involuções de estruturas muito similares, aparecendo sempre como soluções grupos com no máximo um comutador não trivial e involuções dadas, nos elementos não simétricos, pela multiplicação por um elemento fixo, exceto em um dos casos do capítulo anterior que apresentam dois elementos, sendo que estes elementos multiplicadores possuem uma forte relação com o subgrupo derivado, caso este seja não trivial. Já no estudo da comutatividade, para $RG^+$, embora o caso não orientado seja muito bem comportado, exibindo como soluções grupos SLCs, ao introduzirmos uma orientação (usual), as possibilidades vão além desses casos; por outro lado, a dificuldade em tratar a comutatividade de $RG^-$ se apresenta desde o estudo de involuções não orientadas, visto que foi necessário um esforço maior para concluir a caracterização desse caso, vide [JR05, BJPR09], e além disso, os grupos soluções não são tão simples de se tratar como nas situações anteriores.

O seguinte teorema caracteriza a comutatividade de $RG^-$ e torna evidente a distinção deste caso para os demais.

**Teorema 4.1** (Teorema 2.5, [BJPR09]). *Sejam $R$ um anel comutativo tal que $char R \neq 2$ e $*$ uma involução em $G$. O conjunto $RG^-$ é comutativo se, e somente se uma das seguintes condições ocorre:*

*(1) $G$ é abeliano.*

*(2) $K = \langle x \in G : x \notin G_* \rangle$ é abeliano (consequentemente $G = K \cup Ky$, onde $y \in G_*$ e $k^* = y^{-1}ky$ para todo $k \in K$), e $R_2^2 = \{0\}$.*

*(3)* $charR = 4$, $G' = \{1, s\} \subset \mathcal{Z}(G)$, $s^2 = 1$ *e* $x^* = \{x, xs\}$ , $\forall x \in G$. *Além disso,* $G_*$ *é comutativo caso* $R_2^2 \neq \{0\}$.

*(4)* $R_2 = \{0\}$ *e* $G$ *contém um subgrupo abeliano de índice* 2 *que está contido em* $G_*$.

*(5)* $charR = 3$, $G' = \{1, s, t\}$, $G/G' = (G/G')_*$ *e* $x^3 \in G_*$ $\forall x \in G$.

Assim como nos casos anteriores, esse teorema nos assegura a estrutura do subgrupo $N \leq G$. Visto a grande variedade de possibilidades para $N$ e a dificuldade em tratar alguns deles, exibiremos uma caracterização parcial da comutatividade de $RG^- = RG^-_{\sigma *}$, sendo $\sigma : G \to \{\pm 1\}$.

Durante todo o capítulo, trataremos de uma orientação usual não trivial, ou seja, $\sigma : G \to \{\pm 1\}$.

## 4.1 $R_2 \neq \{0\}$ ou $(G_* \cap \mathcal{Z}(G))\backslash N \neq \emptyset$

Trataremos a partir de agora o que ocorre caso uma das seguintes hipóteses ocorram, $R_2 \neq \{0\}$ ou $(G_* \cap \mathcal{Z}(G))\backslash N \neq \emptyset$.

Pela descrição dos geradores de $RG^-$ apresentada no Capítulo 1, temos que este é gerado por

$$\{x - \sigma(x)x^* : x \notin G_*\} \cup \{rx : x \in N_* \text{ e } r \in R_2\} \cup G_*\backslash N.$$

A vantagem em se tomar tais restrições, se encontra no fato de que de uma forma direta, no caso de $R_2 \neq \{0\}$, ou indireta, $(G_* \cap \mathcal{Z}(G))\backslash N \neq \emptyset$, conseguimos colocar elementos de $G_*$ em comutadores. O lema a seguir evidenciará como podemos fazer isso no caso $(G_* \cap \mathcal{Z}(G))\backslash N \neq \emptyset$.

**Lema 4.2.** *Suponha que* $RG^-$ *é comutativo. Se* $(\mathcal{Z}(G) \cap G_*)\backslash N \neq \emptyset$, *então* $[G_*, RG^-] = 0$.

*Demonstração.* Se $x \in G_*\backslash N$, então $x \in RG^-$, portanto por hipótese $[x, RG^-] = 0$.

Se $x \in N_*$, seja $z \in (G_* \cap \mathcal{Z}(G))\backslash N$ e note que $zx \in G_*\backslash N$, portanto $zx \in RG^-$, assim dado $m \in RG^-$, temos $z[x, m] = [zx, m] = 0$, ou seja $[x, m] = 0$. □

**Lema 4.3.** *Suponha que* $RG^-$ *é comutativo e* $\sigma : G \to \{\pm 1\}$ *é não trivial. Se* $R_2 \neq \{0\}$ *ou* $(\mathcal{Z}(G) \cap G_*)\backslash N \neq \emptyset$, *então* $G_* \subset \mathcal{Z}(G)$. *Em particular* $xx^* = x^*x$, $\forall x \in G$.

*Demonstração.* **Caso 1:** $R_2 \neq \{0\}$.

Sejam $x \in G_*\backslash N$, logo $x \in RG^-$, e $y \in G$. Se $y \in G_*$, $ry \in RG^-$, com $r \in R_2\backslash \{0\}$, e portanto $r[x, y] = [x, ry] = 0$, implicando em $(x, y) = 1$. Se $y \notin G_*$, então

$$[x, y - \sigma(y)y^*] = 0,$$

ou seja,

$$xy + \sigma(y)y^*x = yx + \sigma(y)xy^*,$$

portanto, como $y \notin G_*$ e $charR \neq 2$, $xy = yx$ ou $xy = y^*x$ e $y \notin N$, assim, se a segunda opção ocorrer, $xy = y^*x = (xy)^*$, portanto $xy \in G_*$, dessa forma, pelo caso primeiro caso, sabemos que $(x, y) = (x, xy) = 1$. Assim, $G_*\backslash N \subset \mathcal{Z}(G)$.

Vamos mostrar agora que $(N_*, G\backslash N) = 1$. Para isso, seja $n \in N_*$ e suponha que exista $x \notin N$ tal que $(n, x) \neq 1$. Pelo provado acima, sabemos que $x \notin G_*$, portanto, tomando $r \in R_2\backslash \{0\}$, sabemos que

$$[rn, x + x^*] = 0,$$

ou seja,

$$r(nx + nx^* - xn - x^*n) = 0,$$

portanto, como $x \notin G_*$, sabemos que $nx = xn$ ou $nx = x^*n$, além disso $nx \notin N$. Logo se o segundo caso ocorre $nx \in G_*\backslash N \subset \mathcal{Z}(G)$, e portanto $(n, x) = (n, nx) = 1$, contradição, logo, $(N_*, G\backslash N) = 1$.

Resta verificar que $(N_*, N) = 1$. Se $n \in N_*$ e $x \in N$, tomando $y \notin N$, sabemos que $xy \notin N$, assim, pelo caso anterior, $(n, y) = 1 = (n, xy)$, o que implica em $(n, x) = 1$.

**Caso 2:** $(\mathcal{Z}(G) \cap G_*)\backslash N \neq \emptyset$.

Sejam $x \in G_*$, $y \in G$ e $z \in (\mathcal{Z}(G) \cap G_*)\backslash N$.

Suponha que $y \in G_*$, e note que $y$ ou $zy \notin N$, portanto, pelo Lema 4.2, temos que $[x, y] = 0$ ou $z[x, y] = [x, zy] = 0$, assim $(x, y) = 1$.

Se $y \notin G_*$, novamente pelo Lema 4.2, $[x, y - \sigma(y)y^*] = 0$, ou seja

$$xy + \sigma(y)y^*x = yx + \sigma(y)xy^*,$$

portanto como $y \notin G_*$, $xy = yx$ ou $xy = y^*x$. Se $xy = y^*x = (xy)^*$, então $xy \in G_*$ e, pelo parágrafo anterior, $(x, y) = (x, xy) = 1$, concluindo o Caso 2.

Para mostrar que $(x, x^*) = 1$ é suficiente verificar que $xx^* \in G_*$, pois $(x, x^*) = (x, xx^*) = 1$. □

A partir de agora, as hipóteses $R_2 \neq \{0\}$ ou $(G_* \cap \mathcal{Z}(G))\backslash N \neq \emptyset$ serão assumidas até o final do capítulo e, portanto, as mesmas serão omitidas dos enunciados dos resultados.

**Lema 4.4.** *Suponha que $RG^-$ seja comutativo. Dados $x, y \in G$, então $xy = yx$ se, e somente se, $x^*y = yx^*$.*

*Demonstração.* A prova é análoga ao Lema 2.4, visto que para a prova dessa última é necessário apenas a propriedade $xx^* = x^*x$, $\forall x \in G$, garantida pelo lema anterior. □

Assim como nos capítulos anteriores, utilizaremos essa propriedade sem fazer referência ao lema.

**Lema 4.5.** *Suponha que $RG^-$ é comutativo e sejam $x \notin N$ e $y \in N$. Se $(x, y) \neq 1$, então, vale um dos seguintes:*

*(i)* $y^2 \in G_*$, $xy = yx^*$ *e* $yx = x^*y$.

*(ii)* $x^2, y^2 \in G_*$, $xy = x^*y^*$ *e* $xy^* = x^*y$.

*Demonstração.* Como $(x, y) \neq 1$, pelo Lema 4.3, sabemos que $x, y, xy \notin G_*$, logo, por hipótese

$$\begin{aligned} 0 &= [x + x^*, y - y^*] \\ &= xy + x^*y + y^*x + y^*x^* - xy^* - x^*y^* - yx - yx^*, \end{aligned}$$

ou seja

$$xy + x^*y + y^*x + y^*x^* = xy^* + x^*y^* + yx + yx^*.$$

Como $charR \neq 2$ e $xy \notin \{x^*y, y^*x^*\}$, temos que o membro esquerdo dessa última equação não se anula, portanto $xy \in \{x^*y^*, yx^*\}$, já que $y \notin G_*$ e $(x, y) \neq 1$.

Se $xy = x^*y^*$, então $y^*x^* = yx$, portanto a equação se reescreve por

$$x^*y + y^*x = xy^* + yx^*,$$

e como $charR \neq 2$ e $x^*y \neq yx^*$, pois caso contrário $(x, y) = 1$, resta como possibilidade $x^*y = xy^*$.

Note que se $xy = x^*y^*$, então $xy^2 = x^*y^*y = x^*yy^* = x(y^2)^*$, ou seja $y^2 \in G_*$. Analogamente, podemos mostrar que $x^2 \in G_*$ e, portanto, (ii) ocorre.

Se $xy = yx^*$, então $y^*x^* = xy^*$ e a equação acima se reescreve por

$$x^*y + y^*x = yx + x^*y^*,$$

portanto, desde que $charR \neq 2$ e $y \notin G_*$, temos $yx = x^*y$.

Como $(xy, y) \neq 1$, e $xy \notin N$, aplicando o que provamos anteriormente a $xy$ e $y$, temos que $(xy)y = y(xy)^*$ ou $(xy)y = (xy)^*y^*$. Se o primeiro caso ocorre, então $xy^2 = y^*yx^* = y^*xy$ o que implica em $xy = y^*x$, e desde que $yx = x^*y$, aplicando a involução, $x^*y^* = y^*x = xy$, assim, (ii) ocorre e, portanto, $y^2 \in G_*$. Se $(xy)y = (xy)^*y^*$, então $xy^2 = y^*x^*y^* = x(y^2)^*$, ou seja, $y^2 \in G_*$, logo temos (i). $\square$

Como consequência desse lema, podemos reduzir as possibilidades para o subgrupo $N$, restando apenas como possibilidade a estrutura usual de que $N$ possui um subgrupo derivado de ordem no máximo 2.

**Corolário 4.6.** *Se $RG^-$ é comutativo, então $N$ satisfaz o item (1) ou (3) do Teorema 4.1.*

*Demonstração.* Note que se $N$ satisfaz o item (2) do teorema, então o Lema 4.3 implica que $G$ é abeliano.

Por outro lado, se o item (4) ou (5) ocorre, estamos no caso $(\mathcal{Z}(G) \cap G_*)\backslash N \neq \emptyset$, já que $R_2 = \{0\}$ caso $charR = 3$.

Se (4) ocorre, sejam $x, y \in N$ e $A$ um subgrupo abeliano de índice 2 em $N$ tal que $A \subset G_*$. Se $x$ ou $y \in A$, então $(x, y) = 1$ já que $A \subset G_* \subset \mathcal{Z}(G)$; se $x, y \notin A$, então, como $[N : A] = 2$, $xy \in A \subset \mathcal{Z}(G)$, e portanto $(x, y) = (x, xy) = 1$, assim $N$ é abeliano e satisfaz (1).

Se (5) ocorre, $n^3 \in G_*$ $\forall n \in N$, portanto o Lema 4.5 garante que $(N, G\backslash N) = 1$, pois se existir $n \in N$ tal que $(n, G\backslash N) \neq \{1\}$, então, pelo Lema 4.5, $n^2 \in G_*$, ou seja, $n^3 = n^*(n^*)^2 = n^*n^2$, implicando em $n \in G_* \subset \mathcal{Z}(G)$, uma contradição. Dessa forma, tomando $x, y \notin N$, então $xy \in N$ e portanto $(x, y) = (x, xy) = 1$, assim $(G\backslash N, G\backslash N) = 1$; por fim se $x, y \in N$, tomando $z \in \mathcal{Z}(G)\backslash N$, temos que $zx, zy \notin N$ e portanto $(x, y) = (zx, zy) = 1$ e assim, $G$ é abeliano e, consequentemente, vale (1). □

**Lema 4.7.** *Suponha que $RG^-$ é comutativo e sejam $x, y \notin N$. Se $(x, y) \neq 1$, então, vale um dos seguintes:*

*(i) $y^2 \in G_*$, $xy = yx^*$ e $yx = x^*y$. Além disso, se $x^2 \notin G_*$, então $N$ satisfaz (3) e $y^* = sy$, com $s$ sendo o único comutador não trivial de $N$.*

*(ii) $x^2 \in G_*$, $xy = y^*x$ e $yx = xy^*$. Além disso, se $y^2 \notin G_*$, então $N$ satisfaz (3) e $x^* = sx$, com $s$ sendo o único comutador não trivial de $N$.*

*Demonstração.* Como $(x, y) \neq 1$, pelo Lema 4.3, temos que $x, y \notin G_*$. Por hipótese temos

$$\begin{aligned} 0 &= [x + x^*, y + y^*] \\ &= xy + xy^* + x^*y + x^*y^* - yx - yx^* - y^*x - y^*x^*, \end{aligned}$$

ou seja

$$xy + xy^* + x^*y + x^*y^* = yx + yx^* + y^*x + y^*x^*. \tag{4.1}$$

Como $charR \neq 2$ e $x, y \notin G_*$, então $xy \in \{yx^*, y^*x, y^*x^*\}$. Além do mais, se $xy = y^*x^*$, então $xy \in G_*$, assim, pelo Lema 4.3, $(x, xy) = 1$, o que implica em $(x, y) = 1$, um absurdo, logo $xy \in \{yx^*, y^*x\}$.

Se $xy = yx^*$, então $y^*x^* = xy^*$ e (4.1) se reescreve por

$$x^*y + x^*y^* = yx + y^*x,$$

e pelo mesmo argumento anterior, podemos verificar que $yx = x^*y$. Analogamente, se $xy = y^*x$, então $yx = xy^*$.

Suponha que $xy = yx^*$, $yx = x^*y$. Como $(yx, y) \neq 1$ e $yx \in N$, podemos aplicar o Lema 4.5 e assim se o item (ii) desse lema ocorrer, temos que $y^2 \in G_*$; se o item (i) ocorrer, então $y(yx) = (yx)y^*$, ou seja $yx = xy^*$, assim, aplicando a involução, $x^*y^* = yx^*$, portanto, podemos concluir que $xy = yx^* = x^*y^* = y^*x$, logo $xy^2 = x^*y^*y = x^*yy^* = x(y^2)^*$, e com isso, $y^2 \in G_*$.

Note que de $xy = yx^*$, concluímos que $x^2y = y(x^2)^*$, ou seja, $x^2 \in G_*$ se, e somente se, $(x^2, y) = 1$, portanto, se $x^2 \notin G_*$, $(x^2, y) \neq 1$, logo $(x^2, xy) \neq 1$, ou seja, $N$ é não abeliano, e portanto, pelo Corolário 4.6, temos que $N$ satisfaz o item (3) do Teorema 4.1.

Dessa forma $(x^2)^* = sx^2$, com $s$ sendo o único comutador não trivial de $N$, logo $x^2y = y(x^2)^* = yx^2s$, ou seja $ys = x^2yx^{-2}$. Por outro lado, como $(x^2, y) \neq 1$, aplicando o Lema 4.5 a $y$ e $x^2$, obtemos que $x^2y = y^*x^2$ ou $x^2y = (x^2)^*y^* = x^2sy^*$. Se $x^2y = y^*x^2$, então $y^* = x^2yx^{-2} = sy$; se $x^2y = x^2sy^*$, então $sy = s^{-1}y = y^*$. Portanto se $x^2 \notin G_*$, então $N$ satisfaz (3) e $y^* = sy$, com $s$ o único comutador não trivial de $N$.

De forma análoga, podemos provar o item (ii). □

Observe que nos casos tratados nos Capítulos 2 e 3, pudemos concluir que $x^2 \in G_*$, $\forall x \in G$, entretanto não possuímos ferramentas suficientes para garantir esta propriedade sob a hipótese de comutatividade dos antissimétricos. Desta forma, iremos dividir nosso estudo admitindo a possibilidade de $*$ possuir ou não essa característica.

### 4.1.1 $G^2 \not\subset G_*$

Nesta seção iremos admitir que existe ao menos um elemento $x \in G$ tal que $x^2 \notin G_*$. O seguinte resultado afirma que, nestas condições, se $G$ é não abeliano então $N$ satisfaz o item (3) do Teorema 4.1.

**Lema 4.8.** *Se $RG^-$ é comutativo, $N$ é abeliano e $G$ é não abeliano, então $x^2 \in G_*$ $\forall x \in G$.*

*Demonstração.* Seja $x \notin G_*$.

Suponha que $x \notin \mathcal{Z}(G)$. Se $x \in N$, como $N$ é abeliano, existe $y \notin N$ tal que $(x, y) \neq 1$, portanto o Lema 4.5 garante que $x^2 \in G_*$. Suponha que $x \notin N$. Nesse caso, seja $y \in G$ tal que $(x, y) \neq 1$ e note que $y \notin G_* \subset \mathcal{Z}(G)$. Se $y \notin N$, como $N$ é abeliano, o Lema 4.7 afirma que $x^2 \in G_*$; se $y \in N$, então $xy \notin N$, além disso, desde que $(x, y) \neq 1$, então $(x, xy) \neq 1$, portanto, pelo Lema 4.3, sabemos que $xy \notin G_*$, assim, aplicando novamente o Lema 4.7 a $x$ e $xy$, encontramos que $x^2 \in G_*$.

Suponha agora que $x \in \mathcal{Z}(G)$. Como $G$ é não abeliano, tome $y \notin \mathcal{Z}(G)$, logo $y \notin G_*$ e $xy \notin \mathcal{Z}(G)$, portanto pelo provado acima, $(xy)^2, y^2 \in G_*$, assim $x^2y^2 = (xy)^2 = ((xy)^2)^* = (x^2)^*(y^2)^* = (x^2)^*y^2$, já que $x \in \mathcal{Z}(G)$, ou seja $x^2 \in G_*$. □

**Corolário 4.9.** *Se $RG^-$ é comutativo, $G$ é não abeliano e existe $x \in G$ tal que $x^2 \notin G_*$, então $N$ verifica o item (3) do Teorema 4.1.*

**Proposição 4.10.** *Se $RG^-$ é comutativo, $R_2 \neq \{0\}$ ou $(G_* \cap \mathcal{Z}(G))\backslash N \neq \emptyset$, $G$ é não abeliano e existe $x \in G$ tal que $x^2 \notin G_*$, então $A = \langle x \in G : x^2 \notin G_* \rangle$ é um subgrupo abeliano de índice 2 em $G$ tal que $G_* \subset A$ e $x^* = x^y$, $\forall x \in A$ e $y \notin A$.*

*Demonstração.* Sejam $x, y \in G_*$ tais que $x^2, y^2 \notin G_*$. Naturalmente, $x, y \notin G_*$. Como $N$ verifica o item (3) do Teorema 4.1, temos que $x, y \notin N$, assim, o Lema 4.7 garante que $(x, y) = 1$, portanto $A$ é abeliano.

Seja $x \in G$ tal que $x^2 \notin G_*$ e $y \in G_* \subset \mathcal{Z}(G)$. Note que $(xy)^2 \notin G_*$, pois caso contrário, $x^2y^2 = (xy)^2 = ((xy)^2)^* = (x^2)^*(y^2)^* = (x^2)^*y^2$, o que implicaria em $x^2 \in G_*$, um absurdo, logo $xy \in A$ e, assim $y \in A$, já que $x \in A$, portanto $G_* \subset A$.

Para vericar que $x^* = x^y$, $\forall x \in A$ e $y \notin A$, é suficiente mostrar que $x^* = x^y$, $\forall x \in A$ tal que $x^2 \notin G_*$. Como $x \notin N$, os Lemas 4.5 e 4.7 garantem que $xy \in \{yx, yx^*\}$. Se $xy = yx$, como $x \in A$ e $y \notin A$, então $xy \notin A$, logo, $(xy)^2 \in G_*$, assim $x^2y^2 = (xy)^2 = ((xy)^2)^* = (x^2)^*(y^2)^* = (x^2)^*y^2$, o que implica em $x^2 \in G_*$, um absurdo, portanto $xy = yx^*$, ou seja, $x^* = x^y$.

Por fim, vamos mostrar que $(G : A) = 2$. Para isso, é suficiente mostrar que $xy \in A$, $\forall x, y \notin A$. Sejam $a \in A$ e $x, y \notin A$ e suponha que $xy \notin A$. Pelo provado acima e o fato de $a^* \in A$, temos que $a^* = a^{xy} = (a^x)^y = (a^*)^y = (a^*)^* = a$, um absurdo, já que $a \notin G_*$, logo $(G : A) = 2$. □

Vamos ao principal resultado dessa seção.

**Teorema 4.11.** *Suponha que $G$ é não abeliano e $R_2 \neq \{0\}$ ou $(G_* \cap \mathcal{Z}(G))\backslash N \neq \emptyset$. Se existe $x \in G$ tal que $x^2 \notin G_*$, então $RG^-$ é comutativo se, e somente se, $char R = 4$ e as seguintes condições são verdadeiras:*

*(i)* $A = \langle x \in G : x^2 \notin G_* \rangle$ *é abeliano e* $(G : A) = 2$.

*(ii)* $G_* \subset \mathcal{Z}(G)$, $N' = \{1, s\}$ *e* $n^* \in \{n, sn\}$, $\forall n \in N$.

*(iii) A involução $*$ é da forma*

$$x^* = \begin{cases} sx & , \text{ se } x \notin A \\ y^{-1}xy & , \text{ se } x \in A, \end{cases}$$

*para qualquer $y \notin A$.*

*(iv)* $(x, y) \in \{1, s\}$, $\forall x, y \notin A \cup N$.

*Em particular $\mathcal{Z}(G) \subset A$.*

*Demonstração.* Suponha que $RG^-$ é comutativo.

A proposição anterior garante (i). Do Lema 4.3 e o Corolário 4.9, concluímos que $charR = 4$, $G_* \subset \mathcal{Z}(G)$ e $N$ verifica as condições do item (ii).

Vamos mostrar que (iii) ocorre.

Primeiro vamos mostrar que $N \backslash (G_* \cup A) \neq \emptyset$. Como $(G : A) = 2 = (G : N)$, então $N \not\subset A$ ou $N = A$, porém o segundo caso não ocorre devido ao fato de que $n^2 \in G_*$. Por outro lado, $(N \backslash A) \not\subset G_*$, pois se $n \in N_* \backslash A$, tomando $x \in A$ tal que $x^2 \notin G_*$, sabemos que, por (ii), $x \notin N$ e além disso $x^2 \in N$, dessa forma, $nx^2 \in N$, porém $(nx^2)^* = (x^2)^* n^* = (x^2)^* n = n(x^2)^* \neq nx^2$, já que $x^2 \notin G_*$, portanto $nx^2 \in N \backslash (G_* \cup A)$.

Seja $x \in N \backslash (G_* \cup A)$ e $y \in G \backslash A$. Desde que $(G : A) = 2$, podemos tomar $y = ax$ com $a \in A$. Note que, pela Proposição 4.10, $a^* = x^{-1}ax$, assim $y^* = x^*(a)^* = (sx)(x^{-1}ax) = sax = sy$. Esse fato e a Proposição 4.9 garantem que a involução possui a forma apresentada por (iii).

Para verificar (iv), note que o Lema 4.7 afirma que se $x, y \notin N$ são tais que $(x, y) \neq 1$, então $xy \in \{yx^*, y^*x\}$, e por (iii), isso equivale a $xy = syx$, já que $s \subset \mathcal{Z}(G)$.

Para a recíproca, suponha que $charR = 4$ e os itens (i)-(iv) sejam verificados.

Da mesma forma que nos capítulos anteriores, para verificar que $RG^-$ é comutativo, é suficiente verificar que os geradores de $RG^-$ comutam entre si. Devido a estrutura dos geradores e o fato de $G_* \subset \mathcal{Z}(G)$, é suficiente verificar que $(x - \sigma(x))$ comuta com $(y - \sigma(y))$ com $x, y \notin G_*$ tais que $(x, y) \neq 1$. Como $A$ é abeliano, devemos analisar apenas quando $x$ ou $y \notin A$, além disso, se $x, y \in N$, o item (iii) do Teorema 4.1 garante o resultado. Resta, portanto, verificar quando $x$ ou $y \notin N$.

Suponha que $x \in A \backslash N$ e $y \notin A$, assim $x^* = x^y$ e $y^* = sy = ys$, portanto, como $y^2, s \in G_* \subset \mathcal{Z}(G)$, temos

$$\begin{aligned}
(x + x^*)(y - \sigma(y)y^*) &= (x + x^y)(y - \sigma(y)ys) \\
&= xy + x^y y - \sigma(y)xys - \sigma(y)x^y ys \\
&= yx^y + y^{-1}xy^2 - \sigma(y)yx^y s - \sigma(y)y^{-1}xy^2 s \\
&= yx^y + yx - \sigma(y)ysx^y - \sigma(y)ysx \\
&= (y - \sigma(y)ys)(x + x^y) \\
&= (y - \sigma(y)y^*)(x + x^*).
\end{aligned}$$

De forma análoga, podemos provar que $(x - \sigma(x)x^*)$ comuta com $(y - \sigma(y)y^*)$ se $x \notin A$ e $y \in A \backslash N$.

Suponha que $x \notin N \cup A$ e $y \in N$, assim $x^* = sx$ e $y^* = sy$, portanto, como

$s \in \mathcal{Z}(G)$ e $s^2 = 1$, temos

$$\begin{aligned}
(x + x^*)(y - y^*) &= (x + xs)(y - ys) \\
&= xy + xsy - xys - xsys \\
&= 0 \\
&= yx + yxs - ysx - ysxs \\
&= (y - ys)(x + xs) \\
&= (y - y^*)(x + x^*).
\end{aligned}$$

De forma análoga, podemos verificar a comutatividade de $(x - \sigma(x)x^*)$ com $(y - \sigma(x)y^*)$, caso $x \in N$ e $y \notin N \cup A$.

Por fim resta verificar a comutatividade caso $x, y \notin N \cup A$. Nesse caso, por (iv), temos que $(x, y) = s = x^*x^{-1} = y^*y^{-1}$, portanto $xy = yx(x, y) = yxs$, logo

$$\begin{aligned}
(x + x^*)(y + y^*) &= (x + xs)(y + ys) \\
&= xy + xsy + xys + xsys \\
&= yxs + yxs^2 + yxs^2 + ysx \\
&= yxs + yx + ysxs + ysx \\
&= (y + ys)(x + xs) \\
&= (y + y^*)(x + x^*),
\end{aligned}$$

concluindo a recíproca.

Para verificar que $\mathcal{Z}(G) \subset A$, basta notar que se existir $y \in \mathcal{Z}(G) \backslash A$, então, para qualquer $x \in A$, $x^* = x^y = x$ e portanto $x^2 \in G_* \ \forall x \in A$, contradição. □

### 4.1.2 $G^2 \subset G_*$

Nesta seção iremos completar nosso particular estudo da comutatividade dos antissimétricos, admitindo agora que todo elemento de $G$ elevado a segunda potência é simétrico.

**Proposição 4.12.** *Suponha $RG^-$ é comutativo. Se $x^2 \in G_* \ \forall x \in G$, então $x^* = c_x x$, $\forall x \in G$, onde $c_x \in G_*$ e $c_x^2 = 1$. Além disso, $G'$ é um 2-grupo abeliano elementar, $c_{xy} = c_x c_y (x, y)$ e se $(x, y) \neq 1$, então $c_{xy} \in \{c_x, c_y, (x, y)\}$.*

*Demonstração.* **Afirmação:** $(x, y) \in G_* \ \forall x, y \in G$.

Sejam $x, y \in G$ tais que $(x, y) \neq 1$, pois, caso contrário, nada temos a provar. Note que, pelo Lema 4.3, $x, y, xy \notin G_*$.

Se $x, y \in N$, segue do Corolário 4.6 que $(x, y) \in G_*$.

Observe que se $xy = yx^*$, então $(x, y) = x^{-1}y^{-1}xy = x^{-1}x^* \in G_*$, já que $x^2 \in G_*$, implica em $x^{-1}x^* \in G_*$. De maneira análoga, se $yx = xy^*$, podemos provar que $(x, y) \in G_*$. Portanto, se $x, y \notin N$, aplicando o Lema 4.7, a afirmação vale. Suponha que

$x \notin N$ e $y \in N$. Aplicando o Lema 4.5, caso o item (i) ocorra, podemos utilizar o mesmo argumento acima, portanto, suponha que $xy = x^*y^*$ e $xy^* = x^*y$.

Como $x^2 \in G_* \subset \mathcal{Z}(G)$, $x^2y = yx^2$, portanto $x^{-1}y^{-1}x = xy^{-1}x^{-1} = x^*y^{-*}x^{-1} = x^*y^{-1}x^{-*}$, ou seja $x^{-1}y^{-1}x \in N \backslash G_*$. Se $(x^{-1}y^{-1}x, y) = 1$, temos que

$$\begin{aligned}
(x,y) &= x^{-1}y^{-1}xy \\
&= yx^{-1}y^{-1}x \\
&= yxy^{-1}x^{-1} \\
&= y^*x^*y^{-*}x^{-*} \\
&= (x,y)^*.
\end{aligned}$$

Se $(x^{-1}y^{-1}x, y) \neq 1$, então $N$ satisfaz (3) do Teorema 4.1, já que $x^{-1}y^{-1}x, y \in N \backslash G_*$. Nesse caso, tomando $s$ como o único comutador não trivial de $N$, temos

$$\begin{aligned}
(x,y) &= x^{-1}y^{-1}xy \\
&= yx^{-1}y^{-1}xs \\
&= yxy^{-1}x^{-1}s,
\end{aligned}$$

ou seja, $s = (x^{-1}y^{-1}xy)(yxx^{-1}y^{-1}) = x^{-1}y^{-1}(xy)^2x^{-1}y^{-1} = x^{-1}y^{-1}x^{-1}(xy)^2y^{-1} = 1$, já que, $(xy)^2 \in G_* \subset \mathcal{Z}(G)$, portanto $s = 1$, um absurdo. Concluindo a afirmação.

**Afirmação:** $G'$ é um 2-grupo abeliano elementar.

Para provar essa afirmação, é suficiente verificar que $(x^{-1}, y^{-1})^2 = 1$, $\forall x, y \in G$, ou seja $xyx^{-1}y^{-1} = yxy^{-1}x^{-1}$.

Sejam $x, y \in G$. Se $(x,y) = 1$, nada temos a provar. Suponha que $(x,y) \neq 1$. Pelo Corolário 4.6, sabemos $N$ verifica (1) ou (3) do Teorema 4.1, donde concluímos que se $x, y \in N$, o fato a ser provado ocorre; por outro lado, se $x$ ou $y \notin N$, aplicando os Lemas 4.5 e 4.7, sabemos que $xy \in \{yx^*, y^*x, x^*y^*\}$.

Se $xy = yx^*$, pelos mesmos resultados citados acima, temos $yx = x^*y$, portanto

$$\begin{aligned}
xyx^{-1}y^{-1} &= xx^{-*}yy^{-1} \\
&= xx^{-*} \\
&= x^*x^{-1} \qquad (x^2 = (x^*)^2) \\
&= x^*yy^{-1}x^{-1} \\
&= yxy^{-1}x^{-1}.
\end{aligned}$$

O caso $xy = y^*x$ é análogo.

Se $xy = x^*y^*$, como $(x^{-1}, y^{-1}) \in G_*$, então

$$\begin{aligned} xyx^{-1}y^{-1} &= y^{-*}x^{-*}y^*x^* \\ &= y^{-1}x^{-1}yx \\ &= (yy^{-1})y^{-1}(xx^{-1})x^{-1}yx \\ &= yy^{-2}xx^{-2}yx \\ &= yxy^{-1}x^{-1}, \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue de $x^2, y^2 \in \mathcal{Z}(G)$. Isso conclui a afirmação.

Vamos agora à prova da Proposição.

Definindo $c_x = x^*x^{-1}$, de forma análoga ao Lema 3.12, podemos mostrar que $c_x \in \mathcal{Z}(G)$ $\forall x \in G$.

Dado $x \in G$, tome $c_x = x^*x^{-1}$ e note que $c_x^{-1} = xx^{-*} = x^*x^{-1} = c_x$, já que $x^2 \in G_*$, portanto $c_x^2 = 1$ e $c_x \in G_*$. Tome $y \in G$, assim $(xy)^* = c_{xy}xy$ e, por outro lado, pelo Lema 3.12, $(xy)^* = y^*x^* = c_yyc_xx = c_xc_yyx$, ou seja, $c_{xy} = c_xc_y(y^{-1}, x^{-1}) = c_xc_y(x, y)$.

Por fim, se $(x, y) \neq 1$, os Lemas 4.5 e 4.7 e o Corolário 4.6, garantem que vale um dos seguintes:

(a) $x^* = y^{-1}xy = yxy^{-1}$;

(b) $y^* = x^{-1}yx = xyx^{-1}$;

(c) $xy = x^*y^*$ e $xy^* = x^*y$.

Assim se (a) ocorre, então $c_x = x^{-1}x^* = x^{-1}y^{-1}xy = (x, y)$ e $c_{xy} = (x, y)c_y(x, y) = c_y$; analogamente, se (b) ocorre, então $c_y = (x, y)$ e $c_x = c_{xy}$; por fim, se (c) ocorre, então $c_x = x^*x^{-1} = y^*y^{-1} = c_y$ e $c_{xy} = (x, y)$, concluindo o lema. □

A seguinte proposição nos fornece uma estrutura bastante precisa de $G'$ e exibe uma forte relação entre esse subgrupo e a involução $*$.

**Proposição 4.13.** *Suponha que $RG^-$ é comutativo. Se $x^2 \in G_*$, $\forall x \in G$ e $N$ é não abeliano, então $(x, y) = 1$, $\forall x, y$ tais que $c_x, c_y \neq s$ e ocorre um dos seguintes:*

*(i) $G$ é um SLC-grupo com involução canônica $*$.*

*(ii) $G' = \{1, s, t, u\} \simeq C_2 \times C_2$, e existem $x, y \in G$ tais que $c_x = t$ e $c_y = u$.*

*(iii) $G' = \{1, s, t, u\} \simeq C_2 \times C_2$, $N$ é um SLC-grupo, $G_* \subset N$, $c_x \in \{1, s, t\}$, $\forall x \in G$ e existe $y \in G$ tal que $c_y = t$.*

*Demonstração.* Como $N$ é não abeliano, pelo Corolário 4.6, sabemos que $N$ satisfaz o item (3) do Teorema 4.1; dessa forma, $c_n \in \{1, s\}$, $\forall n \in N$.

**Afirmação:** Se $c_x \notin \{1, s\}$ para algum $x \notin N$, então existe $t \in G$ tal que $c_x \in \{1, s, t, st = u\}$, $\forall x \in G$. Além disso, $G' \simeq C_2 \times C_2$.

Fixe $x \in G \backslash G_*$ tal que $c_x \neq s$. Sem perda de generalidade, podemos tomar $x \notin \mathcal{Z}(G)$, pois se $z \in \mathcal{Z}(G)$ é tal que $c_z \notin \{1, s\}$, então, como $N$ é não abeliano, tomando $n \notin \mathcal{Z}(G)$, temos que $c_n = s$, assim $c_{zn} = c_z c_n(z, n) = c_z s$, o que implica em $c_{zn} \notin \{1, s\}$ e $zn \notin \mathcal{Z}(G) \cup N$. Denote dessa forma, $c_x = t$.

Seja $y \notin G_* \cup N$. Se $(x, y) \neq 1$, então pela Proposição 4.12 e o Lema 4.7, temos que $c_{xy} \in \{c_x, c_y\}$, ademais, $xy \in N \backslash G_*$, logo $c_{xy} = s$, assim, $c_y = s$, já que $c_x = t$; observe que a mesma proposição garante que $(x, y) = t$. Se $(x, y) = 1$, então $c_{xy} = c_x c_y(x, y) = t c_y$, o que implica em $c_y \in \{t, st\}$, já que $c_{xy} \in \{1, s\}$. Da fórmula $c_{xy} = c_x c_y(x, y)$ e o fato de que $G'$ é um 2-grupo abeliano elementar, concluímos que $G' \subset \{1, s, t, u\}$.

Para mostrar que $G' = \{1, s, t, u\} \simeq C_2 \times C_2$, basta notar que $(x, G \backslash N) \neq \{1\}$, pois caso contrário, tomando $n \in N$, então $xn \notin N$, logo $(x, n) = (x, xn) = 1$ e neste caso $x \in \mathcal{Z}(G)$, contradição. Portanto existe $y \notin G_* \cup N$ tal que $(x, y) \neq 1$, e neste caso, já mostramos, pelo primeiro caso do parágrafo anterior, que $(x, y) = t$. Isso conclui a afirmação.

Vamos analisar quatro casos e verificar que (i), (ii) ou (iii) ocorre.

**Caso 1:** $\emptyset \neq \mathcal{Z}(G) \backslash N \subset G_*$.

Como $\mathcal{Z}(G) \not\subset N$, fixe $x \in \mathcal{Z}(G) \backslash N$. Se $n \in \mathcal{Z}(G) \cap N$, pelo Lema 4.12, temos que $c_{xn} = c_x c_n(x, n)$, e por hipótese, $c_{xn}, c_x$ e $(x, n) = 1$, o que implica em $c_n = 1$, ou seja, $\mathcal{Z}(G) = G_*$, já que pelo Lema 4.3 temos $G_* \subset \mathcal{Z}(G)$; se $y \notin G_* \cup N$, como $G_* = \mathcal{Z}(G)$, então $xy \in N \backslash \mathcal{Z}(G) = N \backslash G_*$, ou seja, $s = c_{xy} = c_x c_y(x, y) = c_y$, concluindo que $G$ é um SLC-grupo com involução canônica $*$, ou seja, vale (i).

**Caso 2:** $\emptyset \neq \mathcal{Z}(G) \backslash N \not\subset G_*$.

Por hipótese podemos tomar $x \in \mathcal{Z}(G) \backslash N$ tal que $c_x \neq 1$. Como $N$ é não abeliano, tome $n \in N$ tal que $n \notin \mathcal{Z}(G) \subset G_*$. Pela afirmação, $c_{xn} \in \{1, s, t, u\}$. Como $xn \notin \mathcal{Z}(G)$, temos $c_{xn} \neq 1$, por outro lado, $c_{xn} = c_x c_n(x, n) = c_x s$; note que $c_x \neq s$, pois caso contrário $c_{xn} = 1$, portanto, podemos admitir sem perda de generalidade que $c_x = t$, implicando em $c_{xn} = ts = u$, logo, temos (ii).

**Caso 3:** $\mathcal{Z}(G) \backslash N = \emptyset$ e $G' = \{1, s\}$.

Note que pela afirmação, $c_x \in G'$, $\forall x \in G$. Suponha por absurdo que existe $y \in \mathcal{Z}(G) \subset N$ tal que $c_y = s$ e seja $x \notin N$; consequentemente $x \notin G_*$. Sabemos que $c_{xy} = c_x c_y(x, y) = s^2 = 1$, o que implica em $xy \in G_* \subset \mathcal{Z}(G)$, contradição com $\mathcal{Z}(G) \backslash N = \emptyset$. Portanto, nesse caso, $G_* = \mathcal{Z}(G)$ e $x^* = \{x, sx\}$, o que implica que $G$ é um SLC-grupo com involução canônica $*$, ou seja, (i) ocorre.

**Caso 4:** $\mathcal{Z}(G) \backslash N = \emptyset$ e $G' = \{1, s, t, u\}$.

Desde que $G' = \{1, s, t, u\}$, então existe $x \notin N$ tal que $c_x \notin \{1, s\}$, pois, caso contrário, a equação $c_{wy} = c_w c_y(w, y)$ implicaria em $(w, y) = c_{wy} c_w c_y \in \{1, s\}$, $\forall w, y \in G$ e portanto $G' = \{1, s\}$, uma contradição. Assim, podemos assumir sem perda de

generalidade que $c_x = t$. Se existir $y \in G$ tal que $c_y = u$, então (ii) ocorre; se $c_y \neq u$, $\forall y \in G$, então $\mathcal{Z}(G) \subset G_*$, pois, caso contrário, como $\mathcal{Z}(G) \subset N$, então existe $n \in \mathcal{Z}(G) \cap N$ tal que $c_n = s$, assim, $c_{nx} = c_n c_x(n,x) = st = u$, uma contradição, logo, como $G_* \subset \mathcal{Z}(G)$, então $G_* = \mathcal{Z}(G) \subset N$ e (iii) ocorre.

Finalmente, para verificar que $(x,y) = 1$, $\forall x, y$ tais que $c_x, c_y \neq s$, suponha por absurdo que $(x,y) \neq 1$, sendo $c_x, c_y \neq s$. Neste caso, como $x, y \notin \mathcal{Z}(G)$, então $c_x \neq 1 \neq c_y$, e consequentemente, $x, y \notin N$, implicando em $c_{xy} = s$, já que $xy \in N \backslash \mathcal{Z}(G)$. Pela proposição anterior, $s = c_{xy} \in \{c_x, c_y, (x,y)\}$ e, por outro lado, o Lema 4.7, afirma que $c_x$ ou $c_y = (x,y)$, contrariando a hipótese. $\square$

**Teorema 4.14.** *Seja $R$ um anel comutativo tal que $charR \neq 2$, $G$ um grupo não abeliano com involução $*$ compatível com uma orientação $\sigma : G \to \{\pm 1\}$ e tal que $x^2 \in G_*$, $\forall x \in G$. Se $R_2 \neq \{0\}$ ou $(G_* \cap \mathcal{Z}(G)) \backslash N \neq \emptyset$, então $RG^-$ é comutativo se, e somente se, $G_* \subset \mathcal{Z}(G)$ e as seguintes condições ocorrem:*

*(i) $x^* = c_x x$, $\forall x \in G$, onde $c_x \in G_* \cap \mathcal{Z}(G)$ e $c_x^2 = 1$. Além disso, $G'$ é um 2-grupo abeliano elementar, $c_{xy} = c_x c_y (x,y)$ e se $(x,y) \neq 1$, então $c_{xy} \in \{c_x, c_y, (x,y)\}$.*

*(ii) $N$ é abeliano, ou $charR = 4$ e $c_n \in N' = \{1, s\}$, $\forall n \in N$.*

*(iii) Se $n \in N$ e $x \notin N$ são tais que $(n,x) \neq 1$, então $c_x \in \{c_n, (n,x)\}$.*

*(iv) Se $x, y \notin N$ são tais que $(x,y) \neq 1$, então $(x,y) \in \{c_x, c_y\}$.*

*Além disso, se $N$ é não abeliano, então $(x,y) = 1$, $\forall x, y$ tais que $c_x, c_y \neq s$ e ocorre um dos seguintes:*

*(a) $G$ é um SLC-grupo com involução canônica $*$.*

*(b) $G' = \{1, s, t, u\} \simeq C_2 \times C_2$, e existem $x, y \in G$ tais que $c_x = t$ e $c_y = u$.*

*(c) $G' = \{1, s, t, u\} \simeq C_2 \times C_2$, $N$ é um SLC-grupo, $G_* \subset N$, $c_x \in \{1, s, t\}$, $\forall x \in G$ e existe $y \in G$ tal que $c_y = t$.*

*Demonstração.* Suponha que $RG^-$ seja comutativo. A Proprosição 4.12 garante que a involução possui a forma descrita em (i). Além disso, o item (ii) segue do Corolário 4.6; os itens (iii) e (iv) seguem dos Lemas 4.5 e 4.7, respectivamente.

Para verificar que a recíproca, é suficiente mostrar que $(x - \sigma(x) x c_x)$ comuta com $(y - \sigma(y) y c_y)$, com $x, y \notin G_*$, já que $G_* \subset \mathcal{Z}(G)$. Note que se $(x,y) = 1$, a verificação é imediata, assim, podemos admitir que $(x,y) \neq 1$.

Suponha que $x, y \in N$, nesse caso, $N$ é não abeliano, portanto o item (ii) e o item (3) do Teorema 4.1 garantem o resultado.

Sejam $x \notin N$ e $y \in N$. Pelo item (iii), $c_x = c_y$ ou $c_x = (x, y)$. Suponha que $c_x = c_y$, assim

$$\begin{aligned}(x + xc_x)(y - yc_x) &= xy + xyc_x - xyc_x - xy \\ &= 0 \\ &= yx + yxc_x - yxc_x - yx \\ &= (y - yc_x)(x + xc_x).\end{aligned}$$

Suponha agora que $c_x = (x, y)$, logo $c_y = c_{xy}$, assim

$$\begin{aligned}(x + xc_x)(y - yc_y) &= xy + xyc_x - xyc_y - xyc_xc_y \\ &= yx(x, y) + yxc_x(x, y) - yxc_y(x, y) - yxc_xc_y(x, y) \\ &= yxc_x + yx - yxc_yc_x - yxc_y \\ &= (y - yc_y)(x + xc_x).\end{aligned}$$

Sejam agora $x, y \notin N$. Pelo item (iii), $(x, y) \in \{c_x, c_y\}$. Suponha que $(x, y) = c_x$, assim,

$$\begin{aligned}(x + xc_x)(y + yc_y) &= xy + xyc_x + xyc_y + xyc_xc_y \\ &= yx(x, y) + yxc_x(x, y) + yxc_y(x, y) + yxc_xc_y(x, y) \\ &= yxc_x + yx + yxc_yc_x + yxc_y \\ &= (y + yc_y)(x + xc_x).\end{aligned}$$

Se $(x, y) = c_y$, podemos proceder de forma análoga. Dessa forma encontramos que $RG^-$ é comutativo.

As propriedades resultantes do caso $N$ não abeliano seguem da Proposição 4.13. $\square$

**Exemplo 4.15.** *Seja $N = H$ dado no Exemplo 1.14 e defina $J = N \rtimes C_2$, com $C_2 = \langle y \rangle$ e $(y, x_1) = (y, x_2) = x_1^2x_2^2 = t$.*

*A partir da propriedade $(a, bc) = (a, c)(a, b)^c$, podemos concluir que, para $i, j \in \{1, 2\}$,*

$$(y, x_ix_j) = (y, x_j)(y, x_i)^{x_j} = tt^{x_j} = t^2 = 1,$$

*já que $t \in \mathcal{Z}(J)$ e $t^2 = 1$. Por outro lado, como $N$ é um SLC-grupo, $N/\mathcal{Z}(N) \simeq C_2 \times C_2$ e $\tau = \{1, x_1, x_2, x_1x_2\}$ é um transversal de $\mathcal{Z}(N)$ em $N$, ou seja, se $n \in \mathcal{Z}(N)$, então $n$ é uma palavra no alfabeto $\{x_1, x_2\}$ com uma quantidade par de letras. Dessa forma, $(\mathcal{Z}(N), y) = \{1\}$ e, assim, $\mathcal{Z}(N) = \mathcal{Z}(J)$, já que $(J : N) = 2$.*

*Como $N$ é um SLC-grupo, podemos muni-lo com a involução canônica $*$ e estender essa involução a $J$ a partir de $y^* = yt$. Além disso, facilmente verificamos que a aplicação $\sigma$, sendo $\sigma(n) = 1$, se $n \in N$ e $\sigma(y) = -1$, pode ser estendida a uma orientação de $J$ cujo núcleo é precisamente $N$ e esta é compatível com $*$.*

*Note que essa involução em $J$ verifica o item (i) do teorema anterior e $N$ por ser*

*um SLC-grupo verifica o item (ii).*

*Vamos mostrar que o item (c) é satisfeito, ou seja* $c_a \in \{c_n, (a,n)\}$*, para* $a \notin N$*,* $n \in N$ *com* $(n,a) \neq 1$*. Como* $(J : N) = 2$*, temos que* $a = ym$*, com* $m \in N$*; ademais, como elementos centrais são simétricos, a propriedade* $c_{xy} = c_x c_y (x,y)$ *garante que* $c_{xz} = c_x$*, e* $(xz,t) = (x,t)$ $\forall x,t \in J$ *e* $z \in \mathcal{Z}(J)$*, portanto podemos considerar que* $m,n \in \tau = \{1, x_1, x_2, x_1x_2\}$ *e* $n \neq 1$*, pois caso contrário* $(a,n) = 1$*, contrariando a hipótese; logo* $c_n = s$*. Sabemos que*

$$c_a = c_{ym} = c_y c_m (y,m) = t c_m (y,m) \ \ e$$

$$(a,n) = (ym,n) = (y,n)(m,n),$$

*Analisando todas as possibilidades para* $m$ *e* $n$ *restantes e que não impliquem em* $(a,n) = 1$*, sempre encontraremos que* $c_a \in \{s, (a,n)\} = \{c_n, (a,n)\}$*.*

*Para verificar (d), suponha que* $a, b \notin N$ *não comutam. De maneira análoga ao caso anterior, podemos assumir que* $a = ym$ *e* $b = yn$ *com* $n, m \in \tau$*. Note que* $\{n,m\} \cap \{x_1, x_2\} \neq \emptyset$*, pois caso contrário* $(a,b) = 1$*. Sem perda de generalidade podemos assumir que* $n = x_1$*. Note que*

$$(a,b) = (ym, yx_1) = (x_1,m)(y,m)(y,x_1) = (x_1,m)(y,m)t,$$

$$c_a = c_{yx_1} = c_y c_{x_1}(y,x_1) = tst = s, \ \ e$$

$$c_b = c_{ym} = c_y c_m (y,m) = t c_m (y,m).$$

*Analisando as possibilidades restantes, podemos concluir que o item (d) se verifica.*

*Dessa forma tomando* $R$ *um anel tal que* $\mathrm{char} R = 4$*, aplicando o Teorema 4.14, temos que* $RJ^-_{\sigma *}$ *é comutativo.*

*Neste caso, vale observar que* $J$ *e* $*$ *verificam a condição (c) do teorema anterior.*

# Capítulo 5

# Conclusões

## 5.1 Considerações Finais

O propósito da presente tese consiste em estender o conhecimento acerca da relação entre as estruturas base de um anel de grupo $RG$ e certas identidades polinomiais, a saber comutatividade e anticomutatividade, verificadas no conjunto dos elementos simétricos e antissimétricos de uma involução orientada generalizada neste anel de grupo.

Neste sentido, alcançamos no Capítulo 2 condições necessárias e suficientes para que o conjunto $RG^-$ seja anticomutativo, Teorema 2.14. Além disso, verificamos que para tal caracterização foi necessário apenas o conhecimento prévio do análogo para as involuções não orientadas, donde poderíamos ter classificado o caso com a orientação clássica, Corolário 2.16, como uma consequência do Teorema 2.14. No mesmo capítulo, com algumas condições adicionais, pudemos extrair informações importantes acerca da característica do anel $R$ e do expoente do grupo quociente $G/N$, Corolário 2.15, ou até descrever completamente a orientação $\sigma$, Proposição 2.17.

No Capítulo 3 alcançamos um resultado semelhante ao do Capítulo 2 para que os simétricos sejam anticomutativos, Teorema 3.17. Entretanto, na presente situação, claramente percebe-se a necessidade do conhecimento do análogo para as involuções orientadas usuais. Encontramos também propriedades de destaque acerca de $R$ e $G/N$ caso algumas hipóteses adicionais sejam admitidas, vide Corolário 3.18. Um fato de destaque no teorema principal deste capítulo é o fato de que a classe de grupos soluções para o caso análogo com involuções não orientadas é o mesmo para as involuções com orientação usual, entretanto, no caso mais geral tratado na tese, uma nova classe surge dentro destas soluções.

Devido a ausência na literatura de um estudo da comutatividade dos antissimétricos sob involuções orientadas usuais e a dificuldade em tratar esse tema, antes de passar para as orientações generalizadas, é praticamentente imprescindível caracterizar esse caso. Dessa forma, no Capítulo 4 iniciamos esse estudo para uma orientação usual, alcançando

um resultado parcial ao admitir que $R$ possui um elemento de torsão 2 ou existe um elemento em $G\backslash N$ que seja simétrico e central.

Após os resultados apresentados acima, o estado da arte do estudo da comutatividade e anticomutatividade dos simétricos e antissimétricos sob involuções orientadas generalizadas pode ser resumido na seguinte tabela:

| | Comutatividade | Anticomutatividade | Propriedades de Lie |
|---|---|---|---|
| $RG_{\sigma*}$ | - | Capítulo 3 | [V13] |
| $RG^{-}_{\sigma*}$ | - | Capítulo 2 | |

Tabela 5.1: Identidades para involuções orientadas generalizadas

Além disso, a Tabela 1.3, que ilustra as identidades para involuções orientadas usuais, passa a ter a configuração a seguir:

| | Comutatividade | Anticomutatividade | Propriedades de Lie |
|---|---|---|---|
| $RG_{\sigma*}$ | [BP06, GP13b] | [GP14] | [CP12, V13] |
| $RG^{-}_{\sigma*}$ | [BJR07], Capítulo 4 | [GP13b] | |

Tabela 5.2: Identidades para involuções orientadas

## 5.2 Trabalhos Futuros

Devido aos resultados citados acima, podemos concluir que no caminho abordado por estes trabalhos, pouco tem-se a acrescentar no estudo da anticomutatividade dos elementos simétricos e antissimétricos, visto que o caso mais geral de involução orientada foi alcançado.

Observando as lacunas da Tabela 5.1, imediatamente concluímos que um dos possíveis temas a ser tratado futuramente consiste em estudar a comutatividade de $RG_{\sigma*}$ e $RG^{-}_{\sigma*}$. Além disso, alguns casos já estudados e exibidos nas duas tabelas acima, merecem ainda atenção, visto as seguintes observações:

1. O estudo das propriedades de Lie realizadas em [V13], apontadas pela Tabela 5.1, foi baseado na busca de condições para que o levantamento da identidade possa ser garantido, deixando em aberto o problema de saber quais as condições sobre $R$ e $G$ para que $RG_{\sigma*}$ e $RG^{-}_{\sigma*}$ satisfaçam tais propriedades. Além do mais, neste trabalho a involução $*$ foi tomada como a involução clássica, donde concluímos que a busca de condições para o levantamento ser garantido, no caso de uma involução orientada generalizada qualquer, merece atenção.

2. Os resultados apresentados em [BJR07] caracterizam completamente o seu tema proposto, todavia tal caracterização é também realizada assumindo que $*$ é a involução

clássica. Complementando seu estudo, no Capítulo 4, temos a abordagem deste caso para $*$ sendo uma involução qualquer, porém estes dois resultados ainda deixam em aberto algumas questões, visto que neste último algumas hipóteses adicionais são assumidas.

3. Novamente podemos observar que em [CP12] os autores completam a caracterização do seu respectivo caso quando $*$ é a involução clássica. Em [V13], algumas respostas para o caso mais geral são dadas, porém estas não extinguem todas as possibilidades do problema em questão.

# Referências


[A69] AMITSUR, S. A. *Identities in rings with involutions.* Israel J. Math. v. 7, p.63-68, 1969.

[BJPR09] BROCHE CRISTO, O.; JESPERS, E.; POLCINO MILIES, C.; RUIZ, M. Antisymmetric elements in group rings II, *Journal of Algebra and Its Applications*, v. 8, n. 1, p. 115-127, 2009.

[BJR07] BROCHE CRISTO, O.; JESPERS, E.; RUIZ MARÍN, M. Antisymmetric elements in group rings with an orientation morphism. arXiv:0705.3106 [math.KT].

[BP06] BROCHE CRISTO, O.; POLCINO MILIES, C. Symmetric elements under orientated involutions in group rings, *Communications in Algebra*, v. 34, n. 9, p. 3347-3356, 2006.

[CP12] CASTILLO GÓMEZ, J. H.; POLCINO MILIES, C. Lie Properties of Symmetric Elements Under Oriented Involutions, *Communications in Algebra*, v. 40, n. 12, p. 4404-4419, 2012.

[GJP96] GOODAIRE, E. G.; JESPERS, E.; POLCINO MILIES, C. *Alternative Loop Rings*, Elsevier, 1996.

[GP13a] GOODAIRE, E. G.; POLCINO MILIES, C. Involutions and Anticommutativity in Group Rings. Em: *Canadian Mathematical Bulletin*, v. 52, n. 2, p. 344-353, 2013.

[GP13b] GOODAIRE, E. G.; POLCINO MILIES, C. Oriented Involutions and Skew-symmetric Elements in Group Rings. *Journal of Algebra and Its Applications*, v. 12, n. 1, 2013.

[GP14] GOODAIRE, E. G.; POLCINO MILIES, C. Oriented Group Involutions and Anticommutativity in Group Rings. *Communications in Algebra*, v. 42, n. 4, p. 1657-1667, 2014.

[GPS09] GIAMBRUNO, A.; POLCINO MILIES, C.; SEHGAL, S. K. Lie properties of symmetric elements in group rings, *Journal of Algebra*, v. 321, n. 3, p. 890-902, 2009.

[GS89] GIAMBRUNO, A.; SEHGAL, S. K. A Lie propertie in group rings, *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 105, n. 2, p. 287-292, 1989

[GS93] GIAMBRUNO, A.; SEHGAL, S. K. Lie Nilpotence of Group Rings, *Communications in Algebra*, v. 21, n. 11, p. 4253-4261, 1993.

[H76] HERSTEIN, I. N. *Rings with involutions*, Chicago: University of Chicago Press, 1976. (Chicago lectures in mathematics)

[JR05] JESPERS, E.; Ruiz, M. Antisymmetric elements in group rings, *Journal of Algebra and Its Applications*, v. 4, n. 4, p. 341-353, 2005.

[JR06] JESPERS, E.; RUIZ MARÍN, M. On symmetric elements and symmetric units in group rings, *Communications in Algebra*, v. 34, n. 2, p. 727-736, 2006.

[K98] KNUS, M-A et al. *The Book of Involutions*, AMS Colloquium Publications, Vol. 44, 1998.

[L99] LEE, G. T. Group Rings Whose Symmetric Elements are Lie Nilpotent, *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 127, n. 11, p. 3153-3159, 1999.

[L00] LEE, G. T. The Lie $n$-Engel Property in Group Rings, *Communications in Algebra*, v. 28, n. 2, p. 867-881, 2000.

[L10] LEE, G. T. *Group Identities on Units and Symmetric Units of Group Rings*, New York: Springer, 2010.

[LSS09] LEE, G. T.; SEHGAL, S. K.; SPINELLI, E. Lie properties of symmetric elements in group rings II, *Journal of Pure and Applied Algebra*, v. 213, n. 6, p. 1173-1178, 2009.

[N70] NOVIKOV, S. P. Algebraic construction and properties of hermitian analogues of K-theory over rings with involution from viewpoint of Hamiltonian formalism, Applications to differential topology and the theory of characteristic classes II, *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, v. 4, n. 2, p. 257-292, 1970.

[PPS73] PASSI, I. B. S.; PASSMAN, D. S.; SEHGAL, S. K. Lie solvable group rings, *Canadian Mathematical Society*, v. 25, p. 748-757, 1973.

[V13] HOLGUÍN VILLA, A. *Involuções de grupo orientadas em álgebras de grupo*. 2013. 76f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.