Universidade Federal de Alagoas - UFAL
Instituto de Matemática - IM
Programa de Pós-Graduação em Matemática
em associação com a Universidade Federal da Bahia

Darlan Ferreira de Oliveira

Estimativas para o índice de Morse de hipersuperfícies compactas com curvatura média constante

Maceió-Alagoas

Junho de 2018

Darlan Ferreira de Oliveira

Estimativas para o índice de Morse de hipersuperfícies compactas com curvatura média constante

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas em Associação com a Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Petrúcio de A. Cavalcante.

Maceió-Alagoas

25 de junho de 2018

Oliveira, Darlan Ferreira de.

Estimativas para o índice de Morse de hipersuperfícies compactas com curvatura média constante / Darlan Ferreira de Oliveira.– 2018.

83 f.

Orientador: Marcos Petrúcio de Almeida Cavalcante.

Tese (Doutorado em Matemática) – Doutorado Interinstitucional UFBA/UFAL. Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós-graduação em Matemática. Maceió, 2018.

Bibliografia: f. 79-83.

1. Superfícies de curvatura média constante. 2. Superfícies com fronteira livre. 3. Estabilidade. 4. Índice de Morse. 5. Números de Betti. I. Título.

CDU : 514.764.27

"*Estimativas para o índice de Morse de Hipersuperfícies compactas com curvatura média constante*"

Darlan Ferreira de Oliveira

Tese apresentada ao Colegiado do Curso de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Matemática.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Marcos Petrúcio de A. Cavalcante
(Orientador - PGMAT/UFAL)

Prof. Dr. Feliciano Marcílio Aguiar Vitório
(PGMAT/UFAL)

Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva
(PGMAT/UFAL)

Prof. Dr. Abraao Mendes do Rêgo
(PGMAT-UFAL)

Prof. Dr. Ezequiel Rodrigues Barbosa
(UFMG)

Prof. Dr. Fernando Codá Marques
(Universidade de Princeton)

À minha esposa, Ceiça, e aos meus filhos, Stephanie e Enzo.

Agradecimentos

À minha esposa, Ceiça, que exerceu de forma brilhante a árdua tarefa de cuidar do nosso lar na minha ausência, permitindo assim que a minha única e exclusiva preocupação fosse o meu problema de tese. Sem seu apoio isto não seria possível.

À minha mãe, Miralva Ferreira, por ter pavimentado grande parte da estrada que me conduziu até aqui.

Ao meu orientador, Prof. Marcos Petrúcio, pela confiança depositada no meu trabalho e por todo apoio durante estes dois anos em que morei em Maceió. Seus ensinamentos vão muito além da Matemática. Volto à UEFS entendendo melhor o significado das palavras comprometimento, profissionalismo e dedicação.

Aos professores, Diego Catalano e Ézio Costa, pela orientação nos dois primeiros anos de doutorado.

À minha amiga e colega de trabalho na UEFS, Prof. Fabíola, por ter me apresentado o Prof. Marcos Petrúcio e pelos valiosos conselhos.

Aos meus familiares, em especial a cunhada Alexsandra Aragão pela ajuda e cuidado com os meus filhos.

Ao amigo, Luis Alberto, pelas valiosas conversas sobre métodos geométricos em equações diferenciais.

Aos meus colegas da turma de doutorado da UFBA, Felipe, Jacqueline, Mariana e Sara com os quais foram trocadas várias experiências matemáticas nas disciplinas iniciais do doutorado.

Aos meus colegas da turma de doutorado da UFAL, Anderson, Diego, Gilberto, Iury, Manuel, Moreno, Ranilze, Robson, Rodrigo, Sidney e Wagner, por terem me proporcionado um ambiente agradável e descontraído para o estudo da geometria.

Aos professores, Feliciano Vitório e Márcio Batista, por estarem sempre disponíveis em esclarecer as dúvidas sobre Geometria.

Aos professores, Ezequiel Barbosa e Fernando Codá Marques, por terem aceitado o convite para compor a banca e pelas valiosas sugestões sobre o trabalho.

Ao amigo, Prof. Abraão Mendes, pelas várias sugestões e correções feitas nesta tese bem como pelas diversas conversas sobre a Teoria do Poker.

À UEFS pelo apoio financeiro durante estes quatro anos.

À Deus por tornar possível tudo isso.

"Os encantos desta sublime ciência se revelam apenas àqueles que tem coragem de ir a fundo nela."

–Carl Friedrich Gauss

Resumo

Nesta tese obtemos teoremas de comparação espectral e estimativas do índice de Morse para hipersuperfícies compactas de curvatura média constante (CMC) imersas em formas espaciais de curvatura seccional não negativa, denotada por $\bar{M}_c^{n+1}$. O trabalho foi dividido em três partes. Na primeira parte consideramos hipersuperfícies CMC fechadas em $\bar{M}_c^{n+1}$. Inicialmente, provamos um resultado de comparação entre os autovalores do operador de Jacobi e os autovalores do Laplaciano de Hodge, agindo em 1-formas. Em seguida, usamos essa técnica para provar que o índice de Morse de superfícies CMC fechadas em $\bar{M}_c^3$ é limitado inferiormente por uma função linear do gênero da superfície. Na segunda parte estudamos o caso compacto com fronteira livre, onde, sob certas condições de fronteira, obtemos resultados similares aos do caso fechado. Na terceira parte exploramos algumas propriedades inerentes à dimensão quatro e como consequência obtemos um resultado de comparação entre os autovalores do operador de Jacobi e os autovalores do Laplaciano de Hodge agindo em 2-formas sobre uma hipersuperfície CMC fechada imersa em $\bar{M}_c^5$. Além disso, como produto da técnica utilizada, estimamos o índice de Morse de hipersuperfícies mínimas fechadas imersas em $\mathbb{S}^5$ e o índice de Morse de hipersuperfícies CMC fechadas imersas em $\bar{M}_c^5$ pelo segundo número de Betti da hipersuperfície.

Palavras-chave: Superfícies de curvatura média constante. Superfícies com fronteira livre. Estabilidade. Índice de Morse. Números de Betti.

Abstract

In this thesis we obtain spectral comparison theorems and index estimates for compact constant mean curvature (CMC) hypersurfaces immersed in space forms of nonnegative sectional curvature, denoted by $\bar{M}_c^{n+1}$. The work is divided in three parts. In the first part we consider CMC closed hypersurfaces in $\bar{M}_c^{n+1}$. Firstly, we prove a comparison result between the eigenvalues of the Jacobi operator and those of the Hodge Laplacian acting on 1-forms. Next, using the same technique, we prove that the Morse index of a CMC surface immersed in $\bar{M}_c^3$ is bounded from below by a linear function of its genus. In the second part we study the case of free-boundary compact surfaces, where, under some conditions on the boundary, we get results similar to that one for closed surfaces. In the third parte, we explore some properties inherent to the four dimensional case and we obtain a comparison result between the eigenvalues of the Jacobi operator and those of the Laplacian acting on 2-forms of compact CMC hypersurfaces immersed in $\bar{M}_c^5$. Moreover, as a by-product, we obtain Morse index estimates for minimal closed hypersurfaces immersed in $\mathbb{S}^5$ and also for CMC hypersurfaces in $\bar{M}_c^5$ by the second Betti number of hypersurface.

Keywords: Constant mean curvature surfaces. Free boundary surfaces. Stability. Morse index. Betti numbers.

Sumário

Agradecimentos **4**

Resumo **7**

Abstract **8**

Introdução **11**

1 Preliminares **16**

1.1 Terminologia e conceitos básicos 16

1.2 Geometria das hipersuperfícies imersas em espaços de curvatura seccional constante 18

1.3 Operadores definidos sobre formas diferenciais 19

2 Estimativas para o espectro do operador de Jacobi em superfícies CMC fechadas **24**

2.1 Estabilidade de hipersuperfícies fechadas 24

2.2 Funções testes baseadas em coordenadas de 1-formas 30

2.3 Comparação entre os espectros de J e Δ_1 35

2.4 Estimativa do índice de Morse de superfícies CMC fechadas 38

3 Estimativas para o espectro do operador de Jacobi em superfícies CMC compactas com fronteira livre **44**

3.1 Estabilidade de hipersuperfícies compactas com fronteira livre 44

3.2 Considerações sobre p-formas harmônicas em variedades compactas com fronteira não vazia 48

3.3 Comparação entre os espectros de J e Δ_1 com condição absoluta de fronteira 54

3.4 Estimativa do índice de Morse em superfícies CMC compactas com fronteira livre 57

4 Estimativas para o espectro do operador de Jacobi em 4-variedades CMC fechadas 60

4.1 Operadores de curvatura e o operador estrela de Hodge em hipersuperfícies de dimensão quatro 60

4.2 Funções testes baseadas em coordenadas de 2-formas 65

4.3 Comparação entre os espectros de J e Δ_2 73

4.4 Estimativa do índice de Morse de 4-variedades CMC fechadas 76

Introdução

Hipersuperfícies de curvatura média constante constituem um tópico muito estudado na área de geometria diferencial. Em particular, do ponto de vista da Análise Geométrica, cada vez mais procura-se compreender questões geométricas e topológicas através da avaliação do espectro de operadores diferenciais definidos sobre tais hipersuperfícies. Por exemplo, o toro de Clifford, $\mathbb{S}^k(\sqrt{k/n}) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{(n-k)/n})$, foi caracterizado por C. Wu em [57] como a única hipersuperfície mínima na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}$ cujo primeiro autovalor do operador de Jacobi é $\lambda_1 = -2n$. Também, sobre o toro de Clifford, conjectura-se que este seja a única hipersuperfície mínima em $\mathbb{S}^{n+1}$ com índice de Morse igual a $n+3$. Em dimensão dois essa conjectura foi provada por F. Urbano em [53]. A contribuição de F. Urbano acabou sendo crucial na recente e célebre prova dada por F. Marques e A. Neves em [36] da Conjectura de Willmore que perdurava sem solução desde 1965.

A. Savo em [50, Teorema 1.1] comparou os autovalores do operador de Jacobi com os autovalores do Laplaciano de Hodge de hipersuperfícies mínimas da esfera. B. Ma e G. Huang em [35, Teorema 1] obtiveram um resultado similar para hipersuperfícies de curvatura média constante na esfera, porém dependendo da norma da segunda forma fundamental. Também em [50], A. Savo comparou o número de autovalores negativos do operador de Jacobi com invariantes topológicos de hipersuperfícies mínimas da esfera, o gênero no caso de superfícies e o primeiro número de Betti em dimensões maiores. Nesta linha foram obtidos importantes resultados comparando o índice de Morse com o primeiro número de Betti de hipersuperfícies imersas em outras variedades ambientes dentre os quais destacamos os trabalhos de A. Ros [44], L. Ambrozio, A. Carlotto e B. Sharp [5], R. Mendes e M. Radeschi [38] e C. Gorodski, R. Mendes e M. Radeschi [26]. Os trabalhos destes autores são respostas parciais para a seguinte conjectura:

Conjectura(Schoen, Marques-Neves) *Seja $(\bar{M}^{n+1}, g)$ uma variedade Riemanniana fechada com curvatura de Ricci positiva. Existe uma constante positiva C tal que, para toda hipersuperfície mínina fechada mergulhada, M^n, a seguinte desigualdade vale:*

$$\mathrm{Ind}(M) \geq C b_1(M).$$

Nesta tese, obtemos resultados de comparação entre os autovalores do operador de Jacobi e os autovalores do Laplaciano de Hodge bem como estimativas do índice de Morse para hipersuperfícies CMC compactas, com e sem bordo, na mesma linha dos que foram obtidos por A. Savo [50] no caso mínimo fechado e por L. Ambrozio, A. Carlotto e B. Sharp [4] e por P. Sargent [49] no caso mínimo compacto com fronteira livre.

No Capítulo 1 apresentamos alguns pré-requisitos necessários para uma boa compreensão dos capítulos posteriores e introduzimos nossas notações.

No Capítulo 2 abordamos o caso de hipersuperfícies fechadas em formas espaciais $\bar{M}_c^{n+1}$, com $c \geq 0$. Iniciamos o capítulo recordando alguns conceitos sobre a teoria de estabilidade para hipersuperfícies fechadas e, em seguida, fazemos um estudo das funções testes definidas a partir das coordenadas de 1-formas. A seguir apresentamos os principais resultados deste capítulo. Para simplificar os enunciados introduzimos a constante τ que vale 1 quando $c > 0$ e vale 0 quando $c = 0$.

Teorema 0.0.1 (Teorema 2.3.3) *Seja M^2 uma superfície fechada com curvatura média constante não nula H imersa em $\bar{M}_c^3$. Então, para todo inteiro positivo α,*

$$\lambda_\alpha^J \leq -2(c + H^2) + \lambda_{m(\alpha)}^{\Delta_1},$$

onde $m(\alpha) > 2(3 + \tau)(\alpha - 1)$.

Teorema 0.0.2 (Teorema 2.3.4) *Seja M^n uma hipersuperfície fechada com curvatura média constante não nula imersa em $\bar{M}_c^{n+1}$, $n \geq 3$. Assuma que a curvatura de Ricci de M satisfaz* $\mathrm{Ric} \geq -c(n-1)$. *Então, para todo inteiro positivo α,*

$$\lambda_\alpha^J \leq \lambda_{p(\alpha)}^{\Delta_1},$$

onde $p(\alpha) > (n + 1 + \tau)(\alpha - 1)$.

A técnica usada no Teorema 0.0.1 pode ser refinada quando escolhemos 1-formas harmônicas. Isto nos permite obter uma estimativa inferior para o número de autovalores negativos, contados com multiplicidades, da segunda variação da área de uma superfície CMC fechada restrita ao espaço das funções de média nula, o chamado *índice fraco de Morse* e denotado por $\mathrm{Ind_w}(M)$, em termos do gênero da superfície. Mais precisamente temos o seguinte resultado:

Teorema 0.0.3 (Teorema 2.4.3) *Seja M^2 uma superfície fechada com curvatura média*

constante não nula imersa em $\bar{M}_c^3$. *Se* $g \geq 1$ *então,*

$$\mathrm{Ind_w}(M) \geq \frac{g}{3+\tau}.$$

No Capítulo 3 devotamos nossa atenção às hipersuperfícies compactas com fronteira livre. Neste contexto, inspirada pelo trabalho de A. Savo, P. Sargent em [49] comparou os autovalores do operador de Jacobi com os autovalores do operador Laplaciano de Hodge agindo em 1-formas com condição absoluta de fronteira. Em [5], L. Ambrozio, A. Carlotto e B. Sharp mostraram que o índice de Morse de uma superfície mínima com fronteira livre imersa num domínio convexo em média do espaço Euclidiano tridimensional é limitado por baixo por uma função linear do gênero e do número de componentes de fronteira da superfície. Este resultado foi obtido também por P. Sargent em [49] entretando ela considerou a hipótese mais forte de convexidade do domínio.

Seguindo estas ideias, provamos na Seção 3.3 os seguintes resultados de comparação espectral para hipersuperfícies com fronteira livre similares aos Teoremas 2.3.3 e 2.3.4 obtidos no Capítulo 2:

Teorema 0.0.4 (Teorema 3.3.2) *Seja* M^2 *uma superfície compacta com fronteira livre e curvatura média constante não nula* H *imersa num domínio convexo em média* $W^3 \subset \bar{M}_c^3$. *Então, para todo inteiro positivo* α,

$$\lambda_\alpha^J \leq -2(c+H^2) + \lambda_{m(\alpha)}^A,$$

onde $m(\alpha) > 2(3+\tau)(\alpha-1)$.

Teorema 0.0.5 (Teorema 3.3.3) *Seja* M^n *uma hipersuperfície compacta com fronteira livre e curvatura média constante não nula imersa num domínio convexo* $W^{n+1} \subset \bar{M}_c^{n+1}$, $n \geq 3$. *Assuma que a curvatura de Ricci de* M *satisfaz* $\mathrm{Ric} \geq -c(n-1)$. *Então, para todo inteiro positivo* α,

$$\lambda_\alpha^J \leq \lambda_{p(\alpha)}^A,$$

onde $p(\alpha) > (n+1+\tau)(\alpha-1)$.

Concluímos o Capítulo 3 provando a seguinte estimativa para o índice fraco de Morse:

Teorema 0.0.6 (Teorema 3.4.3) *Seja* M^2 *uma superfície CMC compacta com fronteira livre num domínio convexo em média* $W^3 \subset \bar{M}_c^3$. *Então,*

$$\mathrm{Ind_w}(M) \geq \frac{2g+k-4-\tau}{2(3+\tau)}.$$

Como no caso fechado, se aplicamos o nosso resultado no caso Euclidiano para superfícies CMC estáveis, obtemos que $2g + k \leq 4$ e as únicas possibilidades são $g = 0$ e $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ ou $g = 1$ e $k \in \{1, 2\}$ donde reobtemos uma cota para o gênero e o número de componentes de fronteira originalmente obtida por A. Ros em [43, Teorema 9].

Além da conjectura feita com R. Schoen, F. Marques e A. Neves fizeram a seguinte conjectura:

Conjectura(Marques-Neves) *Seja $(\bar{M}^{n+1}, g)$ uma variedade Riemanniana fechada com curvatura de Ricci positiva. Existe uma constante positiva C tal que, para toda hipersuperfície mínina fechada mergulhada, M^n, a seguinte desigualdade vale:*

$$\mathrm{Ind}(M) \geq C\Big(\sum_{i=0}^{n} b_i(M)\Big).$$

Decorre da dualidade de Poincaré-Lefschetz que para ambientes de dimensão 3 ou 4 tal conjectura depende apenas do primeiro número de Betti da hipersuperfície e, portanto, as conjecturas de Schoen, Marques-Neves e Marques-Neves são equivalentes nestas dimensões. Tal equivalência não se sustenta para variedades ambientes de dimensão $n \geq 5$. Este fato nos motiva a estudar estimativas para o índice de Morse, pelo segundo número de Betti, para hipersuperfícies mínimas em $\mathbb{S}^5$. Dito isto, o Capítulo 4 é dedicado às hipersuperfícies CMC fechadas em $\bar{M}_c^5$. Na Seção 4.1 fazemos uma breve exposição sobre o isomorfismo existente entre operadores de curvatura e tensores de curvatura e exploramos algumas propriedades do operador estrela de Hodge em dimensão quatro. Também provamos o Lema 4.1.1 fundamental na obtenção dos resultados deste capítulo. Na Seção 4.2 apresentamos alguns lemas técnicos visando tratar as coordenadas de 2-formas como funções testes. Na Seção 4.3 provamos o Lema 4.3.1 crucial na demonstração do primeiro resultado deste capítulo que enunciamos a seguir:

Teorema 0.0.7 (Teorema 4.3.1) *Seja M^4 uma hipersuperfície CMC fechada imersa em $\bar{M}_c^5$. Então, para todo inteiro positivo α,*

$$\lambda_\alpha^J \leq -6c - 8H^2 + \frac{1}{2}\max_M \|A\|^2 + \lambda_{m(\alpha)}^{\Delta_2}$$

onde $m(\alpha) > 2\binom{5+\tau}{2}(\alpha - 1)$.

Em [50], além dos resultados citados anteriormente, A. Savo mostrou que:

Teorema (Savo) *Seja M^n uma hipersuperfície mínima fechada de $\mathbb{S}^{n+1}$. Assuma que*

$b_1(M) \geq 1$ *e* $n \geq 3$. *Então,*

$$\mathrm{Ind}(M) \geq \frac{b_1(M)}{\binom{n+2}{2}} + n + 2.$$

Neste sentido, provamos estimativas inferiores para o índice de Morse de hipersuperfícies imersas em $\bar{M}_c^5$ em termos do segundo número de Betti da hipersuperfície. Mais precisamente temos os seguintes resultados:

Teorema 0.0.8 (Teorema 4.4.1) *Considere a imersão mínima fechada* $\bar{x} : M^4 \to \mathbb{S}^5$. *Se* M *tem curvatura escalar positiva, então*

$$\mathrm{Ind}(M) \geq \frac{b_2(M)}{30}.$$

Teorema 0.0.9 (Teorema 4.4.2) *Considere a imersão CMC fechada* $\bar{x} : M^4 \to \bar{M}_c^5$. *Se* M *tem curvatura escalar positiva, então*

$$\mathrm{Ind_w}(M) \geq \frac{b_2(M)}{2\binom{5+\tau}{2}}.$$

Combinando o Teorema do Savo em dimensão quatro com o Teorema 0.0.8, segue da dualidade de Poincaré-Lefschetz o seguinte corolário:

Corolário 0.0.1 *Considere a imersão mínima fechada* $\bar{x} : M^4 \to \mathbb{S}^5$. *Se* M *tem curvatura escalar positiva, então*

$$\mathrm{Ind}(M) \geq \frac{1}{150} \sum_{i=0}^{4} b_i(M).$$

Este corolário nos dá uma confirmação parcial da conjectura de Marques-Neves para hipersuperfícies mínmas fechadas de curvatura escalar positiva em $\mathbb{S}^5$.

Capítulo 1

Preliminares

O objetivo deste primeiro capítulo é introduzir algumas definições e notações, além de apresentar a teoria básica necessária em geometria diferencial para uma boa compreensão dos capítulos seguintes.

1.1 Terminologia e conceitos básicos

Ao longo deste texto denotamos por $\mathfrak{X}(M)$ e por $C^\infty(M)$, respectivamente, o espaço dos campos suaves de vetores e o espaço das funções suaves sobre uma variedade diferenciável M. Utilizamos, também, a consagrada notação de Einstein, segundo a qual omite-se o símbolo de somatório ao interpretar índices repetidos num mesmo termo como indicador deste somatório. Por fim, entendemos um (p, q)-tensor como sendo covariante em suas primeiras p entradas e contravariante em suas últimas q entradas.

Dada uma variedade Riemanniana M com conexão de Levi-Civita ∇ definimos o (3,1)-campo tensorial,

$$\mathcal{R} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M),$$

chamado *endomorfismo curvatura* de M, por

$$\mathcal{R}(X, Y)Z = \nabla^2 Z(Y, X) - \nabla^2 Z(X, Y)$$

onde $\nabla^2 Z$ denota a segunda derivada covariante do campo Z e é definida por

$$\nabla^2 Z(X, Y) := \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_{\nabla_X Y} Z,$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Usando a métrica g e o endomorfismo curvatura da variedade Riemanniana M definimos o *(4,0)-tensor curvatura de Riemann*,

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^{\infty}(M),$$

por

$$R(X, Y, Z, W) = g(\mathcal{R}(X, Y)Z, W).$$

O $(4, 0)$-tensor curvatura de Riemann tem as seguintes simetrias

$$R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W) = -R(X, Y, W, Z) \quad \text{e} \quad R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y)$$

além de satisfazer a *primeira identidade de Bianchi*

$$R(X, Y, Z, W) + R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W) = 0.$$

Dados dois vetores X e Y não nulos e linearmente independentes em T_pM definimos a *curvatura seccional* em p em relação ao plano $\pi = span\{X, Y\}$ por

$$K(X, Y) = \frac{R(X, Y, X, Y)}{|X|^2|Y|^2 - g(X, Y)^2}.$$

Tomando os traços do endomorfismo curvatura obtemos várias outras noções de curvatura as quais aparecem naturalmente no contexto da geometria Riemanniana. Uma delas é a do *tensor de Ricci* definido como o traço do endomorfismo curvatura em relação a segunda entrada covariante e sua entrada contravariante. Para os nossos propósitos expressamos o tensor de Ricci em função do *operador de Ricci*

$$\mathcal{R}ic : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M),$$

que é definido por

$$\mathcal{R}ic(X) = \mathcal{R}(e_k, X)e_k, \tag{1.1}$$

onde $\{e_1, \cdots, e_n\}$ é um referencial ortonormal local sobre M. O tensor de Ricci, que denotamos por Ric, é um $(2, 0)$-tensor definido por

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = g(\mathcal{R}ic(X), Y).$$

Ao longo deste texto denotamos a métrica de uma variedade Riemanniana M por

$\langle\,,\rangle_M$ e, sempre que não houver perigo de confusão, simplesmente por $\langle\,,\rangle$.

1.2 Geometria das hipersuperfícies imersas em espaços de curvatura seccional constante

No que segue $\bar{M}_c^{n+1}$ denota uma forma espacial $(n+1)$-dimensional com curvatura seccional não negativa c, o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ com a métrica usual (quando $c=0$) ou a esfera $\mathbb{S}_c^{n+1}$ (de raio $r=1/\sqrt{c}$) com a métrica induzida pela inclusão de $\mathbb{S}_c^{n+1}$ em $\mathbb{R}^{n+2}$ (quando $c>0$). Seja $\bar{x}: M^n \to \bar{M}_c^{n+1}$ uma imersão de uma variedade diferenciável orientável n-dimensional M^n em $\bar{M}_c^{n+1}$. A imersão $\bar{x}$ induz em M^n a métrica $\langle\,,\rangle_{M^n} = \bar{x}^*(\langle\,,\rangle_{\bar{M}_c^{n+1}})$. Sendo $\overline{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita de $\bar{M}_c^{n+1}$ em relação à métrica $\langle\,,\rangle_{\bar{M}_c^{n+1}}$ segue que a conexão de Levi-Civita ∇ de M^n em relação à métrica $\langle\,,\rangle_{M^n}$ é dada por

$$\nabla_Y X = d\bar{x}^{-1}((\overline{\nabla}_{d\bar{x}(Y)} d\bar{x}(X))^T)$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M^n)$ onde $(\cdot)^T : \mathfrak{X}(\bar{M}_c^{n+1}) \to \mathfrak{X}(\bar{x}(M^n))$ é a projeção ortogonal sobre $\bar{x}(M^n)$. De agora em diante, por simplicidade, identificamos M^n com $\bar{x}(M^n)$ e pensamos em M^n como um subconjunto de $\bar{M}_c^{n+1}$. Desta forma temos que $\langle\,,\rangle_{M^n} = \langle\,,\rangle_{\bar{M}_c^{n+1}}\Big|_{M^n}$ e $\nabla = (\overline{\nabla})^T$. Definimos a *segunda forma fundamental* da imersão $\bar{x}$ como a aplicação

$$B : \mathfrak{X}(M^n) \times \mathfrak{X}(M^n) \to \mathfrak{X}(M^n)^\perp$$

dada por

$$B(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y$$

onde $\overline{X}, \overline{Y}$ são quaisquer duas extensões para $X, Y \in \mathfrak{X}(M^n)$ em $\mathfrak{X}(\bar{M}_c^{n+1})$ e $\mathfrak{X}(M^n)^\perp$ é o complemento ortogonal de $\mathfrak{X}(M^n)$ em $\mathfrak{X}(\bar{M}_c^{n+1})$. À segunda forma fundamental B está associada uma aplicação linear autoadjunta,

$$A : \mathfrak{X}(M^n) \to \mathfrak{X}(M^n),$$

denominada o *operador de forma* da imersão $\bar{x}$ e definida por

$$\langle AX, Y\rangle = \langle B(X,Y), N\rangle,$$

onde N é um campo vetorial normal unitário globalmente definido sobre M. Segue da definição de B que o operador de forma é dado por

$$AX = -\overline{\nabla}_X N \quad \text{para todo} \quad X \in \mathfrak{X}(M^n).$$

As funções curvatura média e quadrado da norma da segunda forma fundamental de M^n são dadas, respectivamente, por

$$H = \frac{1}{n}\operatorname{tr} A \quad \text{e} \quad \|A\|^2 = \operatorname{tr}(A^2)$$

onde $\operatorname{tr} T$ denota o traço do operador T.

Finalizamos esta Seção enunciando as clássicas equações de Gauss e Codazzi para imersões em espaços ambientes de curvatura seccional constante c.

Proposição 1.2.1 *Considere a imersão $M^n \hookrightarrow \bar{M}_c^{n+1}$. Para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M^n)$ valem*

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(X,Y)Z &= c(\langle X,Z\rangle Y - \langle Y,Z\rangle X) + \\ &\quad + \langle AX,Z\rangle AY - \langle AY,Z\rangle AX \quad (\textit{Eq. Gauss}), \qquad (1.2) \\ (\nabla_X A)Y &= (\nabla_Y A)X \quad (\textit{Eq. Codazzi}). \qquad (1.3) \end{aligned}$$

De agora em diante, por simplicidade de notação e sempre que não houver perigo de confusão, omitiremos as dimensões das variedades.

1.3 Operadores definidos sobre formas diferenciais

Nesta seção apresentamos alguns operadores definidos sobre formas diferenciais os quais constituem ferramenta importante na obtenção dos resultados propostos neste trabalho.

No que segue $\Omega^p(M)$ denota o espaço das p-formas diferenciais sobre uma variedade Riemanniana M, ou seja, o espaço das seções de $\Lambda^p(M) := \bigcup_{x\in M} \Lambda^p(T_x^*M)$ onde

$$\Lambda^p(T_x^*M) := \underbrace{T_x^*M \wedge \cdots \wedge T_x^*M}_{p \ vezes}$$

é o produto exterior de p espaços cotangentes à M no ponto x. Desta forma, uma p-forma diferencial é uma soma de termos da forma

$$f(x)dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

onde f é uma função suave e $(x^1, \cdots, x^n)$ são coordenadas locais.

Neste contexto uma função suave sobre M será vista como uma 0-forma diferencial, isto é, $C^\infty(M) = \Omega^0(M)$. Também convém destacar os isomorfismos existentes entre os espaços $\Omega^1(M)$ e $\mathfrak{X}(M)$, induzidos pela métrica da variedade Riemanniana M,

$$\begin{array}{c} \# : \Omega^1(M) \to \mathfrak{X}(M) \\ w \longmapsto w^\# \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{c} \flat : \mathfrak{X}(M) \to \Omega^1(M) \\ X \longmapsto X^\flat \end{array}$$

definidos por

$$\langle w^\#, Y \rangle = w(Y) \quad \text{e} \quad X^\flat(Y) = \langle X, Y \rangle$$

para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Os operadores $\#$ e $\flat$ são conhecidos como *isomorfismos musicais.*

Definição 1.3.1 *Seja $\omega \in \Omega^p(M^n)$. Se a expressão local de ω é*

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} w_{i_1 i_2 \cdots i_p} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p},$$

definimos sua diferencial exterior $d\omega \in \Omega^{p+1}(M)$ por

$$d\omega = \frac{\partial w_I}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_I$$

onde $w_I = w_{i_1 i_2 \cdots i_p}$ e $dx_I = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$.

Definição 1.3.2 *Seja $f \in C^\infty(M)$. O gradiente de f, denotado por $\operatorname{grad} f$, é um campo vetorial sobre M definido num referencial ortonormal local $\{e_1, \cdots, e_n\}$ sobre M por*

$$\operatorname{grad} f = e_k(f) e_k.$$

De forma alternativa o gradiente de f pode ser definido como

$$\operatorname{grad} f = df^\#.$$

Definição 1.3.3 *Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$. O divergente de X, denotado por $\operatorname{div} X$, é uma função suave sobre M definida por*

$$\operatorname{div} X = -\operatorname{tr} \nabla X.$$

Definição 1.3.4 *O Laplaciano de $f \in C^\infty(M)$, denotado por Δf, é uma função suave sobre M definida por*

$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f.$$

Sendo $\{e_i\}_{i=1}^n$ um referencial ortonormal local sobre M o Laplaciano de f se escreve como

$$\Delta f = -e_i e_i(f) + \nabla_{e_i} e_i(f).$$

Definição 1.3.5 *Fixada uma forma de volume dM sobre M definimos o operador estrela de Hodge,*

$$\star : \Omega^p(M) \to \Omega^{n-p}(M)$$

por

$$\alpha \wedge (\star\beta) = \langle \alpha, \beta \rangle dM$$

para todo $\alpha, \beta \in \Omega^p(M)$.

No lema abaixo evidenciamos duas importantes propriedades do operador estrela de Hodge:

Proposição 1.3.1 *O operador estrela de Hodge é uma isometria linear e $\star^2 : \Omega^p(M) \to \Omega^p(M)$ é dado por $\star^2 = (-1)^{p(n-p)} Id$.*

Demonstração. Ver a Seção 3.3 do Capítulo 3 de [28] para a segunda parte da afirmação. Para ver que $\star$ é uma isometria note que para $\alpha, \beta \in \Omega^p(M)$ temos

$$\begin{aligned}
\langle \alpha, \beta \rangle dM &= \alpha \wedge \star\beta \\
&= (-1)^{p(n-p)} \star\beta \wedge \alpha \\
&= \star\beta \wedge \star(\star\alpha) \\
&= \langle \star\alpha, \star\beta \rangle dM.
\end{aligned}$$

□

Usando o operador estrela de Hodge definimos o L^2-produto sobre uma variedade Riemanniana fechada M por

$$(\alpha, \beta) := \int_M \langle \alpha, \beta \rangle dM$$

para todo $\alpha, \beta \in \Omega^p(M)$. Este produto nos permite definir o *adjunto formal*,

$$\delta_p : \Omega^p(M) \to \Omega^{p-1}(M),$$

do operador diferencial exterior,

$$d_{p-1} : \Omega^{p-1}(M) \to \Omega^p(M),$$

por

$$(d_{p-1} w_1, w_2) = (w_1, \delta_p w_2)$$

para todo $w_1 \in \Omega^{p-1}(M)$ e $w_2 \in \Omega^p(M)$.

Definimos a L^2-norma da p-forma α por

$$\|\alpha\|_{L^2} := \sqrt{(\alpha, \alpha)}$$

e o espaço das funções sobre M quadrado integráveis por

$$L^2(M) := \{f : M \to \mathbb{R}; \|f\|_{L^2} < \infty\}.$$

Proposição 1.3.2 *Sobre uma variedade fechada o adjunto formal do operador d é dado por*

$$\delta_p = (-1)^{n(p+1)+1} \star d \star .$$

Demonstração. Ver a Seção 3.3 do Capítulo 3 de [28].

Definição 1.3.6 *Seja $w \in \Omega^p(M)$. O Laplaciano de Hodge de w, denotado por $\Delta_p w$, é uma p-forma diferencial sobre M definida por*

$$\Delta_p w = \delta_{p+1} d_p w + d_{p-1} \delta_p w.$$

De agora em diante, por simplicidade, representaremos os operadores Δ_p, d_p e δ_p apenas por Δ, d e δ, respectivamente.

Proposição 1.3.3 *O operador estrela de Hodge definido sobre uma variedade Riemanniana fechada comuta com o operador Laplaciano de Hodge.*

Demonstração. Segue da Proposição 1.3.2 que

$$\begin{aligned}
\Delta\star &= d\delta\star + \delta d\star \\
&= d\Big((-1)^{n(n-p+1)+1}\star d\star\Big) \star + \Big((-1)^{n(n-p)+1}\star d\star\Big) d\star \\
&= \star\Big((-1)^{n(p+1+1)+1}\star d\star) d + \star d\Big((-1)^{n(p+1)+1}\star d\star\Big) \\
&= \star\delta d + \star d\delta \\
&= \star\Delta.
\end{aligned}$$

□

Definição 1.3.7 *Seja $w \in \Omega^p(M)$. O Laplaciano de Böchner de w, denotado por $\nabla^*\nabla w$, é uma p-forma diferencial sobre M definida por*

$$\nabla^*\nabla w = -\operatorname{tr} \nabla^2 w.$$

Num referencial ortonormal local $\{e_i\}_{i=1}^n$ sobre M o Laplaciano de Böchner de w se escreve como

$$\nabla^*\nabla w = -\nabla_{e_i}\nabla_{e_i} w + \nabla_{\nabla_{e_i} e_i} w.$$

Definição 1.3.8 *O operador de Weitzenböck, $\mathcal{W} : \Omega^p(M) \to \Omega^p(M)$, é definido para uma p-forma diferencial ω por*

$$(\mathcal{W}w)(X_1, \cdots, X_p) = (\mathcal{R}(X_k, e_j)w)(X_1, \cdots, X_{k-1}, e_j, X_{k+1}, \cdots, X_p) \tag{1.4}$$

para todo $X_1, \cdots, X_p \in \mathfrak{X}(M)$.

O operador de Weitzenböck agindo em 1-formas se torna o operador de Ricci. Os operadores Laplaciano de Hodge, Laplaciano de Böchner e Weitzenböck estão relacionados pela fórmula de Böchner

$$\Delta w = \nabla^*\nabla w + \mathcal{W}w. \tag{1.5}$$

Capítulo 2

Estimativas para o espectro do operador de Jacobi em superfícies CMC fechadas

Neste capítulo apresentamos alguns resultados relacionados à comparação espectral e estimativa do índice de Morse. Na Seção 2.1 damos início introduzindo um pouco da teoria sobre estabilidade de hipersuperfícies fechadas e, em seguida, na Seção 2.2, apresentamos as ferramentas técnicas usadas na preparação das nossas funções testes. Na Seção 2.3 damos uma prova do nosso primeiro resultado o qual envolve a comparação entre os espectros do Laplaciano de Hodge e do operador de Jacobi. Finalizamos com a Seção 2.4 mostrando que o índice fraco de Morse de uma superfície CMC fechada imersa em um espaço de curvatura seccional constante não negativa é limitado por baixo por uma função linear do gênero da superfície.

2.1 Estabilidade de hipersuperfícies fechadas

Considere a imersão $\bar{x} : M \to \bar{M}$ de uma variedade diferenciável n-dimensional fechada e orientável M em uma $(n+1)$-dimensional variedade Riemanniana $\bar{M}$. Uma variação admissível de $\bar{x}$ é uma aplicação diferenciável $\psi : (-\epsilon, \epsilon) \times M \to \bar{M}$ tal que $\psi_t : M \to \bar{M}$ definida por $\psi_t(p) = \psi(t, p)$, é uma imersão para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ e $\psi_0 = \bar{x}$. O campo variacional associado à variação ψ é dado por

$$X = \left.\frac{\partial \psi}{\partial t}\right|_{t=0}.$$

Uma variação é dita ser normal quando $X = uN$ para alguma função $u \in C^\infty(M)$. Dada uma função suave $u \in C^\infty(M)$ é sempre possível associar a u uma variação normal ψ com campo variacional uN dada por

$$\psi_t(p) = \exp_{\psi(p)}(tu(p)N(p))$$

onde exp denota a aplicação exponencial em $\bar{M}$. Neste contexto, podemos associar à variação normal ψ o funcional área,

$$\mathcal{A}_u(t) = \int_M dM_t,$$

onde dM_t é o elemento de volume de M na métrica induzida em M pela imersão ψ_t, e o funcional volume,

$$\mathcal{V}_u(t) = \int_{[0,t]\times M} \psi^* d\bar{M},$$

onde $d\bar{M}$ é o elemento de volume de $\bar{M}$. Geometricamente, $\mathcal{V}_u(t)$ representa o volume líquido com sinal compreendido entre as hipersuperfícies $\bar{x}$ e ψ_t. Dizemos que a variação normal ψ preserva volume se $\mathcal{V}_u(t) = \mathcal{V}_u(0) = 0$ para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

O Teorema a seguir nos dá uma fórmula para a primeira variação do volume:

Teorema 2.1.1 *Considere uma variação admissível $\psi : (-\epsilon, \epsilon) \times M^n \to \bar{M}^{n+1}$ para a imersão $\bar{x} : M^n \to \bar{M}^{n+1}$. Então,*

$$\mathcal{V}'(0) = \int_M \langle X, N\rangle dM. \tag{2.1}$$

onde $X = \left.\dfrac{\partial \psi}{\partial t}\right|_{t=0}$.

Demonstração. Ver [9, Lema 2.1],

Para uma variação normal ψ com campo variacional uN segue do Teorema 2.1.1 que a variação ψ preserva volume se, e somente se, $\displaystyle\int_M u dM = 0$.

No que segue precisaremos do seguinte resultado:

Teorema 2.1.2 (Primeira variação da área) *Considere uma variação admissível $\psi : (-\epsilon, \epsilon) \times M^n \to \bar{M}^{n+1}$ para a imersão compacta com fronteira (possivelmente vazia) $\bar{x} : M^n \to \bar{M}^{n+1}$. Se H é o vetor curvatura média da imersão $\bar{x}$, então*

$$\mathcal{A}'(0) = -n \int_M \langle H, X\rangle dM + \int_{\partial M} \langle \eta, X\rangle d\sigma. \tag{2.2}$$

onde $X = \left.\dfrac{\partial \psi}{\partial t}\right|_{t=0}$ *e* η *é o campo vetorial conormal ao longo de* ∂M *apontando para fora.*

Uma demonstração deste resultado pode ser feita de forma similar aquela apresentada em [37] para hipersuperfícies mínimas.

Considerando-se variações normais admissíveis numa hipersuperfície fechada, segue do Teorema 2.1.2 que a fórmula da primeira variação da área é dada por

$$\mathcal{A}'_u(0) = -n \int_M H u dM$$

e com ela concluímos que hipersuperfícies mínimas são caracterizadas como pontos críticos do funcional área restrito a variações normais arbitrárias. Para uma caracterização variacional das hipersuperfícies com curvatura média constante não nula vamos considerar também o funcional *área balanceado*:

$$\mathcal{J}_u(t) := \mathcal{A}_u(t) + nH_0\mathcal{V}_u(t), \quad \text{onde} \quad H_0 := \frac{1}{vol(M)} \int_M H dM.$$

Como consequência das primeiras variações da área e do volume temos a seguinte caracterização:

Proposição 2.1.1 *As seguintes afirmações para a hipersuperfície fechada* M *são equivalentes:*

(i) M *tem curvatura média constante* H_0.

(ii) M *é um ponto crítico do funcional área restrito a variações normais admissíveis que preservam volume.*

(iii) M *é um ponto crítico do funcional área balanceado restrito a variações normais admissíveis (não necessariamente preservando volume).*

Demonstração. Assuma que M tem curvatura média constante H_0. Segue da fórmula da primeira variação da área que $\mathcal{A}'_u(0) = 0$ para todo $u \in C^\infty(M)$ satisfazendo $\int_M u = 0$. Assim, $(i) \Rightarrow (ii)$. Agora, para qualquer $u \in C^\infty(M)$, defina

$$f = u - \frac{1}{vol(M)} \int_M u dM.$$

Como f tem média nula, assumindo que vale (ii) obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= \mathcal{A}'_f(0) + nH_0\mathcal{V}'_f(0) \\
&= -n\int_M HfdM + nH_0\int_M fdM \\
&= -n\int_M HudM + nH_0\int_M udM \\
&= \mathcal{A}'_u(0) + nH_0\mathcal{V}'_u(0) \\
&= \mathcal{L}'_u(0).
\end{aligned}$$

Isso mostra que $(ii) \Rightarrow (iii)$.

Por fim, se vale (iii) então $0 = -n\int_M (H - H_0)udM$ para todo $u \in C^\infty(M)$ o que implica $H \equiv H_0$.

□

A Proposição 2.1.1 afirma que, no que diz respeito à primeira variação, os problemas variacionais descritos em (ii) e (iii) são equivalentes e que os pontos críticos de ambos são hipersuperfícies com a mesma curvatura média constante. No entanto, quando se trata do estudo da segunda variação de tais pontos críticos, a equivalência acima não se sustenta mais. Com uma argumentação semelhante àquela feita em [10], é escolhido o problema (ii) para definir a noção de estabilidade.

Ao longo deste texto denotamos o espaço da funções de média nula por

$$\mathcal{F} = \{u \in C^\infty(M); \int_M u = 0\}.$$

Definição 2.1.1 *Uma hipersuperfície M de curvatura média constante é dita ser estável se $\mathcal{A}''_u(0) \geq 0$ para todo $u \in \mathcal{F}$.*

Considerando-se os pontos críticos dos problemas (ii) e (iii) restritos ao espaço das funções de média nula temos que $\mathcal{A}''_u(0) \geq 0$ se, e somente se, $\mathcal{J}''_u(0) \geq 0$ e, portanto, M é estável se, e somente se, $\mathcal{J}''_u(0) \geq 0$ para todo $u \in \mathcal{F}$.

O teorema a seguir nos dá uma expressão para a segunda variação da área balanceada dependendo somente da função suave u usada para compor o campo variacional normal.

Teorema 2.1.3 (Segunda variação da área) *Seja $\bar{x} : M \to \bar{M}$ uma hipersuperfície fechada com curvatura média constante. Se $\psi : (-\epsilon, \epsilon) \times M \to \bar{M}$ é uma variação normal de $\bar{x}$ com campo variacional normal uN, então $\mathcal{J}''_u(0)$ é dado por*

$$\mathcal{J}''_u(0) = \int_M uJudM$$

onde $J = \Delta - (\|A\|^2 + \overline{\mathrm{Ric}}(N,N))$.

Demonstração. A prova segue as mesmas ideias usadas em [37] no caso mínimo.

A segunda variação da área induz uma forma quadrática $Q : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ definida por

$$Q(v,u) = \int_M vJudM.$$

Definição 2.1.2 *Dizemos que* $u \in C^\infty(M)$ *é uma autofunção de* Q *associada ao autovalor* $\lambda \in \mathbb{R}$ *se* $Q(v,u) = \lambda \int_M vudM$ *para todo* $v \in C^\infty(M)$.

Se $u \in C^\infty(M)$ é autofunção de Q associada ao autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ então,

$$\int_M v(Ju - \lambda u)dM = 0 \quad \text{para todo} \quad v \in C^\infty(M),$$

de onde concluímos que u é autofunção do operador de Jacobi associada ao mesmo autovalor λ.

O operador de Jacobi J, também conhecido como operador de estabilidade, é um operador autoadjunto e elíptico. Ele pertence a uma classe de operadores referidos na literatura como operadores de Schrödinger, isto é, operadores do tipo $\Delta + q$ onde q é uma função suave sobre M. É conhecido que o espectro do operador de Jacobi consiste de uma sequência não decrescente de autovalores divergindo para $+\infty$ e será denotado por

$$\mathrm{Spec}(J) = \{\lambda_1^J < \lambda_2^J \leq \cdots \leq \lambda_\alpha^J \leq \cdots\}.$$

Esses autovalores têm multiplicidades finitas sendo que o primeiro autovalor é simples, ou seja, tem multiplicidade 1.

O teorema a seguir é bem conhecido em Teoria Espectral:

Teorema 2.1.4 *Seja* T *um operador autoadjunto definido sobre um domínio denso em um espaço de Hilbert* H. *Se* T *tem um espectro discreto, então existe uma base ortonormal de autofunções de* T *que geram* H.

Desde que $C^\infty(M)$ é denso em $L^2(M)$, temos que $J : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ é densamente definido. Segue do Teorema 2.1.4 que ao $\mathrm{Spec}(J)$ está associada uma base ortonormal de $L^2(M)$ dada por autofunções $\{\phi_1, \phi_2, \cdots\}$ de J.

Sendo

$$\mathcal{G}_\alpha := \langle \phi_1, \cdots, \phi_\alpha \rangle,$$

temos a seguinte caracterização variacional para o α-ésimo autovalor do operador de Jacobi:

$$\lambda_\alpha^J = \inf_{0 \neq u \in \mathcal{G}_{\alpha-1}^\perp} \frac{Q(u,u)}{\int_M u^2 dM}. \tag{2.3}$$

Quando restringimos a forma quadrática Q ao espaço das funções de média nula obtemos um problema de autovalores associado a um novo operador elíptico, o qual denotamos por L.

Definição 2.1.3 *Dizemos que $u \in \mathcal{F}$ é uma autofunção de $Q|_\mathcal{F}$ associada ao autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ se $Q|_\mathcal{F}(v,u) = \lambda \int_M vudM$ para todo $v \in \mathcal{F}$.*

Agora, se $u \in \mathcal{F}$ é autofunção de $Q|_\mathcal{F}$ associada ao autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ então,

$$\int_M v(Ju - \lambda u)dM = 0 \quad \text{para todo} \quad v \in \mathcal{F},$$

de onde concluímos que $Ju - \lambda u$ deve ser constante. Por integração obtemos que

$$Ju - \lambda u = \frac{1}{vol(M)} \int_M JudM.$$

Seja $\psi : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ o funcional linear dado por

$$\psi(u) = \frac{1}{vol(M)} \int_M JudM$$

e defina o operador linear $L : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ por $L := J - \psi$. Se $u \in \mathcal{F}$ é autofunção de $Q|_\mathcal{F}$ associada ao autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ então $Lu = \lambda u$ onde u é autofunção do operador L associada ao mesmo autovalor λ.

O operador L é um operador autoadjunto e elíptico e seu espectro,

$$\text{Spec}(L) = \{\lambda_1^L \leq \lambda_2^L \leq \cdots \leq \lambda_\alpha^L \leq \cdots\},$$

também consiste de uma sequência não decrescente de autovalores divergindo para $+\infty$ com cada autovalor tendo multiplicidade finita.

Desde que $\mathcal{F}$ é denso em $L_T^2(M) := \{f \in L^2(M); \int_M fdM = 0\}$ temos que L é densamente definido no espaço $L_T^2(M)$. Segue do Teorema 2.1.4 que ao $Spec(L)$ também está associada uma base ortonormal de $L_T^2(M)$ dada por autofunções $\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots\}$ de L.

Sendo

$$\mathcal{G}_\alpha := \langle \varphi_1, \cdots, \varphi_\alpha \rangle,$$

temos a seguinte caracterização variacional para o α-ésimo autovalor do operador L:

$$\lambda_\alpha^L = \inf_{0 \neq u \in \mathcal{G}_{\alpha-1}^\perp} \frac{Q|_{\mathcal{F}}(u,u)}{\int_M u^2 dM}. \tag{2.4}$$

Para mais detalhes sugerimos a leitura de [11].

Do mesmo modo o espectro do Laplaciano de Hodge agindo em p-formas consiste de uma sequência não decrescente e não negativa de autovalores

$$\mathrm{Spec}(\Delta_p) = \{\lambda_1^{\Delta_p} \leq \lambda_2^{\Delta_p} \leq \cdots \leq \lambda_\beta^{\Delta_p} \leq \cdots\}$$

divergindo para $+\infty$. Esses autovalores tem multiplicidades finitas e à eles estão associadas p-formas diferenciais $\{\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_\beta, \cdots\}$, com $\Delta_p \theta_j = \lambda_j^{\Delta_p} \theta_j$, as quais constituem um conjunto ortonormal no espaço $\Omega^p(M)$ no L^2-produto.

Definição 2.1.4 *O índice fraco de Morse de uma hipersuperfície fechada M de curvatura média constante não nula, o qual denotamos por* $\mathrm{Ind_w}(M)$, *é a máxima dimensão de um subespaço vetorial de $\mathcal{F}$ restrito ao qual a forma quadrática $Q|_{\mathcal{F}}$ é negativa definida.*

De forma equivalente o índice fraco de Morse pode ser definido como o número de autovalores negativos do operador L.

Vale registrar que, no caso mínimo, o índice de Morse é definido como a máxima dimensão de um subespaço vetorial de $C^\infty(M)$ restrito ao qual a forma quadrática Q é negativa definida. Neste caso ele é denotado por $\mathrm{Ind}(M)$.

Neste sentido as autofunções associadas aos autovalores negativos do operador L são caracterizadas por produzirem variações normais preservando volume nas quais a hipersuperfície M não minimiza localmente a área. De fato, se $\lambda < 0$ é um número real tal que $Lu = \lambda u$ então

$$Q|_{\mathcal{F}}(u,u) = \lambda \int_M u^2 dM < 0.$$

Assim, a hipersuperfície M satisfaz $\mathcal{A}_u(0) > \mathcal{A}_u(t)$, para valores de t suficientemente pequenos.

2.2 Funções testes baseadas em coordenadas de 1-formas

Seja $\bar{x} : M \to \bar{M}_c$ uma imersão de uma hipersuperfície CMC fechada e orientável. Escolhida uma orientação para M seja N o campo vetorial normal unitário globalmente

definido sobre M. No caso esférico, onde $c > 0$ e o raio da esfera é $r = 1/\sqrt{c}$, também considere a aplicação de inclusão $\varphi : \mathbb{S}_c^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+2}$ e o campo vetorial normal unitário $\nu = -c^{1/2}\bar{x}$ globalmente definido sobre $\mathbb{S}^{n+1}$. Sendo $\bar{A}$ o operador de forma da imersão φ, tal escolha de ν implica que,

$$\bar{A}X = -D_X\nu = c^{1/2}D_X\bar{x} = c^{1/2}X,$$

onde D representa a conexão de Levi-Civita do espaço Euclidiano. Segue destas observações que

$$D_YX - \nabla_YX = \langle AX, Y\rangle N + c^{1/2}\langle X, Y\rangle\nu \tag{2.5}$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Ao longo deste texto consideramos a constante

$$\tau = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad c = 0, \\ 1 & \text{se} \quad c > 0. \end{cases}$$

Fixada uma base ortonormal $\mathcal{E} = \{\bar{E}_1, \cdots, \bar{E}_{n+1+\tau}\}$ de campos paralelos sobre $\mathbb{R}^{n+1+\tau}$ denotamos por

$$E_i := \bar{E}_i - \langle \bar{E}_i, N\rangle N - \tau\langle \bar{E}_i, \nu\rangle\nu$$

a projeção ortogonal de $\bar{E}_i$ sobre M.

Para a fixada base $\mathcal{E}$ considere as funções suporte $f_i, g_i \in C^\infty(M)$ dadas por

$$f_i = \langle \bar{x}, \bar{E}_i\rangle \quad \text{e} \quad g_i = \langle N, \bar{E}_i\rangle,$$

para $1 \leq i \leq n + 1 + \tau$.

O próximo lema é bem conhecido na literatura e será usado com freqüência ao longo deste texto.

Lema 2.2.1 *Seja A o operador de forma da imersão $\bar{x} : M^n \to \bar{M}_c^{n+1}$. Para as funções suporte f_i, g_i e os campos da base $\mathcal{E}$ valem as seguintes identidades:*

$$\nabla_XE_i = g_iAX - cf_iX \quad \textit{para todo} \quad X \in \mathfrak{X}(M), \tag{2.6}$$

$$\operatorname{grad} g_i = -AE_i, \quad \operatorname{grad} f_i = E_i, \tag{2.7}$$

$$\Delta g_i = \|A\|^2 g_i - cnHf_i \quad e \quad \Delta f_i = cnf_i - nHg_i. \tag{2.8}$$

Demonstração. Para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ temos

$$\begin{aligned}\langle \nabla_X E_i, Y\rangle &= X\langle E_i, Y\rangle - \langle E_i, \nabla_X Y\rangle \\ &= X\langle \bar{E}_i, Y\rangle - \langle \bar{E}_i, \nabla_X Y\rangle \\ &= \langle \bar{E}_i, D_X Y - \nabla_X Y\rangle.\end{aligned}$$

Segue da decomposição (2.5) que $\langle \nabla_X E_i, Y\rangle = g_i\langle AX, Y\rangle - cf_i\langle X, Y\rangle$, onde obtemos a identidade (2.6).

Para obtermos (2.7), note que para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ valem

$$\langle \operatorname{grad} g_i, X\rangle = X(g_i) = \langle \bar{E}_i, D_X N\rangle = -\langle E_i, AX\rangle = -\langle AE_i, X\rangle$$

e

$$\langle \operatorname{grad} f_i, X\rangle = X(f_i) = \langle \bar{E}_i, D_X \bar{x}\rangle = \langle E_i, X\rangle.$$

Agora, num referencial ortonormal local, $\{e_k\}_{k=1}^n$, geodésico em $p \in M$, segue da definição de Laplaciano que em p,

$$\begin{aligned}\Delta g_i &= \operatorname{div}(-AE_i) \\ &= \langle \nabla_{e_k}(AE_i), e_k\rangle \\ &= \langle (\nabla_{e_k} A)E_i, e_k\rangle + \langle A\nabla_{e_k} E_i, e_k\rangle.\end{aligned}$$

Usando a equação de Codazzi, (1.3), e a identidade (2.6), obtemos

$$\begin{aligned}\Delta g_i &= \langle (\nabla_{E_i} A)e_k, e_k\rangle + \langle A(g_i Ae_k - cf_i e_k), e_k\rangle \\ &= \operatorname{tr}(\nabla_{E_i} A) + g_i \operatorname{tr}(A^2) - cf_i \operatorname{tr}(A) \\ &= \|A\|^2 g_i - cnHf_i.\end{aligned}$$

Por fim,

$$\begin{aligned}\Delta f_i &= \operatorname{div}(E_i) \\ &= -\langle \nabla_{e_k} E_i, e_k\rangle \\ &= -\langle g_i Ae_k - cf_i e_k, e_k\rangle \\ &= -nHg_i + cnf_i,\end{aligned}$$

o que conclui a prova do ítem (2.8).

□

Lema 2.2.2 *Seja A o operador de forma da imersão $\bar{x} : M^n \to \bar{M}_c^{n+1}$. Para todo $Y \in$*

$\mathfrak{X}(M)$ *e qualquer campo paralelo* $\bar{E}_i$ *sobre* $\mathbb{R}^{n+1+\tau}$ *com projeção ortogonal* E_i *sobre* M, *temos*

$$\mathcal{R}ic(Y) = c(n-1)Y + nHAY - A^2Y, \tag{2.9}$$

$$\nabla^*\nabla E_i = A^2E_i + cE_i. \tag{2.10}$$

Demonstração. Segue da definição do operador de Ricci, equação (1.1), e da equação de Gauss, (1.2), que

$$\begin{aligned}\mathcal{R}ic(Y) &= \langle R(e_k, Y)e_k, e_j\rangle e_j \\ &= \langle c(\langle e_k, e_k\rangle Y - \langle Y, e_k\rangle e_k) + \langle Ae_k, e_k\rangle AY - \langle AY, e_k\rangle Ae_k, e_j\rangle e_j \\ &= c(n-1)Y + nHAY - A^2Y.\end{aligned}$$

Usando a definição do Laplaciano de Böchner, dada em 1.3.7, num referencial ortonormal local, $\{e_k\}_{k=1}^n$, geodésico num ponto $p \in M$, temos em p que,

$$\begin{aligned}\nabla^*\nabla E_i &= -\nabla_{e_k}\nabla_{e_k}E_i \\ &= -\nabla_{e_k}(g_iAe_k - cf_ie_k) \\ &= \langle AE_i, e_k\rangle Ae_k - g_i(\nabla_{e_k}A)e_k + c\langle E_i, e_k\rangle e_k \\ &= A^2E_i + cE_i.\end{aligned}$$

□

Definição 2.2.1 *Uma p-forma diferencial* θ *é dita ser harmônica se*

$$\theta \in \mathcal{H}^p(M) := \{\omega \in \Omega^p(M) | \Delta\omega = 0\}.$$

Inspirado pelos trabalhos de Ros [44] e A. Savo [50] usamos como funções testes, para avaliação do sinal da forma quadrática Q coordenadas de 1-formas harmônicas. Entretanto, antes disso, é conveniente uma breve exposição acerca das coordenadas de uma 1-forma qualquer.

Seja $\theta \in \Omega^1(M)$ e denote por $\mathcal{E}^* = \{\bar{E}^1, \cdots, \bar{E}^{n+1+\tau}\}$ a base de 1-formas paralelas sobre $\mathbb{R}^{n+1+\tau}$ dual da base $\mathcal{E}$. As coordenadas de θ na base $\mathcal{E}^*$ são dadas por

$$w_i = \langle \theta, E^i\rangle$$

para todo $1 \leq i \leq n+1+\tau$. De maneira análoga ao caso de campos vetoriais, E^i denotará

a projeção ortogonal da 1-forma $\bar{E}^i$ sobre M. Para efeitos de cálculos será preferível escrever a função w_i como um produto de campos duais, isto é, $w_i = \langle \xi, E_i \rangle$ onde $\xi = \theta^{\#}$. Os Laplacianos de Hodge e Böchner do campo ξ são definidos, respectivamente, por

$$\Delta \xi = (\Delta_1 \theta)^{\#} \quad \text{e} \quad \nabla^* \nabla \xi = (\nabla^* \nabla \theta)^{\#}.$$

Para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ recorde que

$$\Delta \langle X, Y \rangle = \langle \nabla^* \nabla X, Y \rangle + \langle X, \nabla^* \nabla Y \rangle - 2 \langle \nabla X, \nabla Y \rangle. \tag{2.11}$$

De fato, considerando-se um referencial ortonormal local, $\{e_k\}_{k=1}^n$, temos

$$\begin{aligned}
\Delta \langle X, Y \rangle &= -e_k e_k \langle X, Y \rangle + (\nabla_{e_k} e_k) \langle X, Y \rangle \\
&= -\langle \nabla_{e_k} \nabla_{e_k} X, Y \rangle - \langle X, \nabla_{e_k} \nabla_{e_k} Y \rangle - 2 \langle \nabla_{e_k} X, \nabla_{e_k} Y \rangle \\
&\quad + \langle \nabla_{\nabla_{e_k} e_k} X, Y \rangle + \langle X, \nabla_{\nabla_{e_k} e_k} Y \rangle.
\end{aligned}$$

A fórmula segue da definições do Laplaciano de Böchner e do produto interno entre dois $(1,1)$-tensores A, B dado por $\langle A, B \rangle := \langle A e_k, B e_k \rangle$.

Lema 2.2.3 *Seja A o operador de forma da imersão $\bar{x} : M^n \to \bar{M}_c^{n+1}$. Para os campos duais $\xi = \theta^{\#}$ e $\bar{\xi} = (\star\theta)^{\#}$ onde $\theta \in \Omega^1(M)$, defina as funções $w_i = \langle \xi, E_i \rangle$ e $\bar{w}_i = \langle \bar{\xi}, E_i \rangle$. Temos*

$$\begin{aligned}
\Delta w_i &= -c(n-2) w_i - nH \langle A\xi, E_i \rangle + 2 \langle A^2 \xi, E_i \rangle \\
&\quad + \langle \Delta \xi, E_i \rangle - 2 g_i \langle \nabla \xi, A \rangle - 2c f_i \operatorname{div} \xi, \\
\Delta \bar{w}_i &= -c(n-2) \bar{w}_i - nH \langle A\bar{\xi}, E_i \rangle + 2 \langle A^2 \bar{\xi}, E_i \rangle \\
&\quad + \langle \Delta \bar{\xi}, E_i \rangle - 2 g_i \langle \nabla \bar{\xi}, A \rangle - 2c f_i \operatorname{div} \bar{\xi}.
\end{aligned}$$

Demonstração. Basta combinar os Lemas 2.2.1 e 2.2.2 e a fórmula de Böchner, (1.5), na identidade (2.11).

□

Corolário 2.2.1 *Seja A o operador de forma da imersão $\bar{x} : M^2 \to \bar{M}_c^3$. Nas condições*

do Lema anterior temos

$$\begin{aligned}\Delta w_i &= (\|A\|^2 - 4H^2)w_i + 2H\langle A\xi, E_i\rangle + \langle \Delta\xi, E_i\rangle \\ &\quad -2g_i\langle \nabla\xi, A\rangle - 2cf_i \operatorname{div}\xi, \\ \Delta \bar{w}_i &= (\|A\|^2 - 4H^2)\bar{w}_i + 2H\langle A\bar{\xi}, E_i\rangle + \langle \Delta\bar{\xi}, E_i\rangle \\ &\quad -2g_i\langle \nabla\bar{\xi}, A\rangle - 2cf_i \operatorname{div}\bar{\xi}.\end{aligned}$$

Demonstração. Basta considerar o Lema 2.2.3 em dimensão dois e observar que o quadrado do operador de forma, em tal dimensão, se escreve como

$$2A^2 = (\|A\|^2 - 4H^2)I_d + 4HA.$$

De fato, denotando os autovalores de A por λ_i temos

$$\begin{aligned}4H^2 &= \|A\|^2 + 2\lambda_1\lambda_2 \\ &= \|A\|^2 + 2\lambda_i(2H - \lambda_i), \quad i \in \{1, 2\} \\ &= \|A\|^2 + 4H\lambda_i - 2\lambda_i^2.\end{aligned}$$

Assim, $2\lambda_i^2 = \|A\|^2 - 4H^2 + 4H\lambda_i$ e o resultado segue.

□

2.3 Comparação entre os espectros de J e Δ_1

Nesta seção apresentamos nossos primeiros resultados os quais são inspirados em um Teorema obtido por A. Savo em [50]. No citado trabalho A. Savo mostrou que os autovalores do operador de Jacobi são controlados pelos autovalores do Laplaciano de Hodge. Ele provou o seguinte:

Teorema 2.3.1 (A. Savo) *Seja M^n uma hipersuperfície mínima fechada imersa em $\mathbb{S}^{n+1}$. Então, para todo inteiro positivo α, temos*

$$\lambda_\alpha^J \leq -2(n-1) + \lambda_{m(\alpha)}^{\Delta_1},$$

onde $m(\alpha) = \frac{(n+1)(n+2)(\alpha-1)}{2} + 1$.

Lembremos que hipersuperfícies mínimas, diferentemente das hipersuperfícies CMC, são caracterizadas como pontos críticos do funcional área considerando-se todo o espaço

das funções suaves. Equivalentemente, dizemos que uma hipersuperfície M é mínima se, e somente se, M tem curvatura média nula.

Bingqing Ma e Guangyue Huang obtiveram em [35] uma desigualdade similar a do Teorema 2.3.1 para hipersuperfícies CMC imersas em $\mathbb{S}^{n+1}$, porém envolvendo a norma da segunda forma fundamental de M. Eles provaram o seguinte resultado:

Teorema 2.3.2 (Ma-Huang) *Seja M^n uma hipersuperfície CMC fechada imersa em $\mathbb{S}^{n+1}$. Então, para todo inteiro positivo α, temos*

$$\lambda_\alpha^J \leq -2(n-1) + \lambda_{m(\alpha)}^{\Delta_1} + nH \max_M \|A\|,$$

onde $m(\alpha) = \frac{(n+1)(n+2)(\alpha-1)}{2} + 1$.

Neste sentido nossos resultados se enunciam como:

Teorema 2.3.3 *Seja M^2 uma superfície CMC fechada imersa em $\bar{M}_c^3$. Então, para todo inteiro positivo α,*

$$\lambda_\alpha^J \leq -2(c + H^2) + \lambda_{m(\alpha)}^{\Delta_1}$$

onde $m(\alpha) > 2(3+\tau)(\alpha-1)$.

Teorema 2.3.4 *Seja M^n uma hipersuperfície CMC fechada de dimensão $n \geq 3$ imersa em $\bar{M}_c^{n+1}$. Assuma que a curvatura de Ricci de M satisfaz* $\mathrm{Ric} \geq -c(n-1)$. *Então, para todo inteiro positivo α,*

$$\lambda_\alpha^J \leq \lambda_{m(\alpha)}^{\Delta_1}$$

onde $m(\alpha) > (n+1+\tau)(\alpha-1)$.

Demonstração do Teorema 2.3.3. Conforme discussão feita na Seção 2.1 seja $\{\theta_1\}_{i=1}^{+\infty}$ um conjunto ortonormal em $\Omega^1(M)$ constituído por 1-formas que satisfazem $\Delta_1\theta_k = \lambda_k^{\Delta_1}\theta_k$. Seja $\mathcal{L}_m^{\Delta_1}$ o espaço vetorial gerado pelos campos vetoriais $\xi_1, \cdots, \xi_m$ onde $\xi_k = \theta_k^\#$. Fixe em $L^2(M)$ uma base ortonormal $\{\phi_i\}_{i=1}^{+\infty}$ dada pelas autofunções do operador de Jacobi e considere o espaço vetorial $\mathcal{G}_\alpha = \langle \phi_1, \cdots, \phi_\alpha \rangle$. Considere campos vetoriais $\xi \in \mathcal{L}_m^{\Delta_1}$ tais que as funções w_i e $\bar{w}_i$, como definidas no Lema 2.2.3, estão em $\mathcal{G}_{\alpha-1}^\perp$ para algum $\alpha \in \mathbb{N}$ e $i \in \{1, \cdots, 3+\tau\}$. Em outras palavras temos um sistema com $2(3+\tau)(\alpha-1)$ equações lineares homogêneas na variável ξ:

$$\int_M w_i\phi_k = \int_M \bar{w}_i\phi_k = 0, \quad 1 \leq i \leq 3+\tau \quad \text{and} \quad 1 \leq k \leq \alpha - 1. \tag{2.12}$$

Portanto, se $m(\alpha) = \dim \mathcal{L}_m^{\Delta_1} > 2(3+\tau)(\alpha-1)$, o sistema (2.12) terá pelo menos uma solução não trivial $\xi \in \mathcal{L}_m^{\Delta_1}$ tal que $w_i, \bar{w}_i \in \mathcal{G}_{\alpha-1}^{\perp}$ para todo $1 \leq i \leq 3+\tau$. Segue da caracterização variacional dos autovalores de J, dada em (2.3), que

$$\lambda_\alpha^J \leq \frac{\int_M w_i J w_i}{\int_M w_i^2} \quad \text{e} \quad \lambda_\alpha^J \leq \frac{\int_M \bar{w}_i J \bar{w}_i}{\int_M \bar{w}_i^2}.$$

O operador de Jacobi da imersão $M^2 \to \bar{M}_c^3$ é dado por $J = \Delta - \|A\|^2 - 2c$. Assim, segue do Corolário 2.2.1 que

$$\begin{aligned}\lambda_\alpha^J \int_M w_i^2 \leq & -(2c+4H^2)\int_M w_i^2 + 2H\int_M \langle E_i, A\xi\rangle w_i \\ & + \int_M \langle E_i, \Delta\xi\rangle w_i - 2\int_M g_i w_i \langle A, \nabla\xi\rangle - 2c\int_M f_i w_i \operatorname{div}\xi.\end{aligned}$$

Somando em $i = 1, \ldots, 3+\tau$ obtemos

$$\lambda_\alpha^J \int_M \|\xi\|^2 \leq -(2c+4H^2)\int_M \|\xi\|^2 + 2H\int_M \langle A\xi, \xi\rangle + \int_M \langle \Delta\xi, \xi\rangle. \tag{2.13}$$

Analogamente, obtemos com as funções testes $\bar{w}_i$,

$$\lambda_\alpha^J \int_M \|\xi\|^2 \leq -(2c+4H^2)\int_M \|\xi\|^2 + 2H\int_M \langle A\bar{\xi}, \bar{\xi}\rangle + \int_M \langle \Delta\bar{\xi}, \bar{\xi}\rangle. \tag{2.14}$$

Como $\xi \in \mathcal{L}_m^{\Delta_1}$ podemos escrever $\xi = \sum_{i=1}^{m(\alpha)} \alpha_i \xi_i$ onde

$$\int_M \langle \Delta\bar{\xi}, \bar{\xi}\rangle = \int_M \langle \Delta\xi, \xi\rangle = \lambda_i^\Delta \int_M \alpha_i \alpha_k \langle \xi_i, \xi_k\rangle \leq \lambda_{m(\alpha)} \int_M \|\xi\|^2.$$

Além disso note que

$$\langle A\xi, \xi\rangle + \langle A\bar{\xi}, \bar{\xi}\rangle = 2H\|\xi\|^2.$$

Considerando as duas observações acima na soma das desigualdades (2.13) e (2.14) obtemos que

$$\lambda_\alpha^J \leq -2(c+H^2) + \lambda_{m(\alpha)}^{\Delta_1}$$

sempre que $m(\alpha) > 2(3+\tau)(\alpha-1)$.

□

Demonstração do Teorema 2.3.4. Com as mesmas notações usadas na demonstração do Teorema anterior considere campos vetoriais $\xi \in \mathcal{L}_m^{\Delta_1}$ e um número natural α tais que as funções w_i sejam ortogonais ao espaço $\mathcal{G}_{\alpha-1} = \langle \phi_1, \ldots, \phi_{\alpha-1}\rangle$. Temos o sistema,

$$\int_M w_i \phi_k = 0, \quad 1 \leq i \leq n+1+\tau \ \text{ and } \ 1 \leq k \leq \alpha-1, \tag{2.15}$$

com $(n+1+\tau)(\alpha-1)$ equações lineares homogêneas na variável ξ. Portanto, se $\mathcal{L}_m^{\Delta_1}$ tem dimensão $m(\alpha) > (n+1+\tau)(\alpha-1)$, então o sistema (2.15) terá pelo menos uma solução não trivial $\xi \in \mathcal{L}_m^{\Delta_1}$ tal que $w_i \in \mathcal{G}_{\alpha-1}^{\perp}$ para todo $i \in \{1, \cdots, n+1+\tau\}$. Combinando a caracterização variacional com o Lema 2.2.3 obtemos

$$\begin{aligned}\lambda_\alpha^J \int_M w_i^2 \leq & -\int_M (2c(n-1) + \|A\|^2) w_i^2 - nH \int_M w_i \langle E_i, A\xi\rangle + 2\int_M w_i \langle E_i, A^2\xi\rangle \\ & + \int_M w_i \langle E_i, \Delta\xi\rangle - 2\int_M w_i g_i \langle A, \nabla\xi\rangle - 2c\int_M w_i f_i \operatorname{div}\xi.\end{aligned}$$

Somando a desigualdade acima em i, $1 \leq i \leq n+1+\tau$, encontramos

$$\begin{aligned}\lambda_\alpha^J \int_M |\xi|^2 \leq & -\int_M [2c(n-1) + \|A\|^2]\|\xi\|^2 - nH \int_M \langle \xi, A\xi\rangle \\ & + \int_M \langle \xi, \Delta\xi\rangle + 2\int_M \|A\xi\|^2. \\ = & -\int_M [c(n-1)\|\xi\|^2 + nH\langle A\xi, \xi\rangle - \|A\xi\|^2] \\ & -c(n-1)\int_M \|\xi\|^2 + \int_M \langle \xi, \Delta\xi\rangle + \int_M [\|A\xi\|^2 - \|A\|^2|\xi|^2]\end{aligned} \tag{2.16}$$

Segue do Lema 2.2.2 que

$$\begin{aligned}\lambda_\alpha^J \int_M \|\xi\|^2 \leq & -\int_M [c(n-1)\|\xi\|^2 + \operatorname{Ric}(\xi,\xi)] + \lambda_{m(\alpha)}^{\Delta} \int_M \|\xi\|^2 \\ & + \int_M (\|A\xi\|^2 - \|A\|^2\|\xi\|^2).\end{aligned} \tag{2.17}$$

Usando a hipótese sobre a curvatura de Ricci temos que o primeiro termo do lado direito da desigualdade (2.17) é náo positivo. Como $\|A\xi\|^2 \leq \|A\|^2\|\xi\|^2$ concluímos que

$$\lambda_\alpha^J \leq \lambda_{m(\alpha)}^{\Delta_1},$$

onde $m(\alpha) > (n+1+\tau)(\alpha-1)$.

□

2.4 Estimativa do índice de Morse de superfícies CMC fechadas

Os exemplos mais simples de hipersuperfícies CMC fechadas em espaços Euclidianos são as esferas geodésicas, as quais por [10] são as únicas estáveis. Em 1986, H. Wente [56] construiu os primeiros exemplos de toros CMC em $\mathbb{R}^3$ resolvendo uma questão proposta por H. Hopf em [27]. Depois que todos os toros CMC em espaços de curvatura seccional constante foram classificados numa série de trabalhos (ver [1], [12], [42] e [52]) e seus

índices de Morse foram estimados por L. Lima, V. Sousa Neto e W. Rossman em [20] e por W. Rossman em [47], podemos resumir estes resultados como segue:

O índice de Morse de um toro CMC em $\mathbb{R}^3$ *é de pelo menos* 8 *e existe um toro CMC com índice de Morse arbitrariamente grande.*

Vários exemplos de superfícies CMC fechadas com gênero $g \geq 2$ foram construídos por N. Kapouleas em [29], [30] e [31] usando o método de colagem.

Quando o ambiente é a esfera $\mathbb{S}^{n+1}$ vários exemplos de hipersuperfícies CMC fechadas são conhecidos. Novamente, como pode ser visto em [9], as esferas geodésicas são os únicos exemplos de hipersuperfícies CMC estáveis. A próxima família importante é dada pelos toros de Clifford CMC, incluindo o caso $H = 0$. De fato, foi provado por S. Brendle em [13] que os toros de Clifford são as únicas superfícies mínimas mergulhadas em $\mathbb{S}^3$, confirmando uma conjectura de H. Lawson. Foi provado por B. Andrews e H. Li em [6] que todos os toros CMC mergulhados em $\mathbb{S}^3$ são superfícies de rotação, confirmando uma conjectura de Pinkall e Sterling. Também notamos que Andrews e Li em [6] deram uma completa classificação de todos os toros CMC mergulhados em $\mathbb{S}^3$.

Segue do trabalho de J. Simons [51] que qualquer hipersuperfície mínima fechada não totalmente geodésica em $\mathbb{S}^{n+1}$ satisfaz $\mathrm{Ind}(M) \geq n+3$ e é bem conhecido que o toro de Clifford mínimo tem índice de Morse $n+3$. Um problema natural em aberto é classificar as hipersuperfícies mínimas $M \subset \mathbb{S}^{n+1}$ com $\mathrm{Ind}(M) = n+3$. Este problema foi resolvido por F. Urbano [53] quando $n = 2$ mostrando que o toro de Clifford mínimo é a única superfície mínima em $\mathbb{S}^3$ com índice de Morse 5. Este problema ainda não foi resolvido para dimensões maiores.

No caso de curvatura média constante não nula, Perdomo e Brasil em [41] provaram que se $M \subset \mathbb{S}^{n+1}$ é uma hipersuperfície CMC fechada não totalmente umbílica, então $\mathrm{Ind}_{\mathrm{w}}(M) \geq n+1$.

Recentimente, L. Alías e P. Piccione em [3] mostraram a existência de uma sequência infinita de toros CMC isometricamente mergulhados em esferas Euclideanas que não são isometricamente congruentes aos toros de Clifford CMC e que se acumulam em algum toro de Clifford CMC. No mesmo espírito como acima, o índice de Morse de um toro CMC de revolução em $\mathbb{S}^3$ foram estimados por W. Rossman e N. Sultana em [48] e por A. Cañete em [17]. Por outro lado, superfícies CMC de gênero alto em $\mathbb{S}^3$ foram construídas por A. Butscher e F. Pacard em [16] (ver também [14], [15] para exemplos de altas dimensões) porém nenhuma estimativa de índice é conhecida.

Para hipersuperfícies mínimas fechadas imersas em $\mathbb{S}^{n+1}$, A. Savo em [50] mostrou que o índice de Morse é limitado por baixo por uma função linear do primeiro número de Betti

da hipersuperfície. Ele provou os seguintes resultados:

Teorema 2.4.1 (A. Savo) *Seja M^n uma hipersuperfície mínima fechada em $\mathbb{S}^{n+1}$. Assuma que $b_1(M) \geq 1$ e $n \geq 3$. Então,*

$$\mathrm{Ind}(M) \geq \frac{b_1(M)}{\binom{n+2}{2}} + n + 2.$$

Teorema 2.4.2 (A. Savo) *Seja M^2 uma superfície mínima fechada em $\mathbb{S}^3$ com gênero $g \geq 1$. Então,*

$$\mathrm{Ind}(M) \geq \frac{g}{2} + 4.$$

Estes resultados foram generalizados recentemente por Ambrosio, Carlotto e Sharp em [5] e Mendes e Radeschi em [38] para uma grande classe de variedades ambientes com curvatura seccional positiva. Estes trabalhos fornecem uma resposta parcial para a conjectura de Schoen, Marques e Neves (ver [19] e [39]).

Conjectura 2.4.1 (Schoen, Marques-Neves) *Seja $(\bar{M}^{n+1}, g)$ uma variedade Riemanniana fechada com curvatura de Ricci positiva. Existe uma constante positiva C tal que, para toda hipersuperfície mínina fechada mergulhada, M^n, a seguinte desigualdade vale*

$$\mathrm{Ind}(M) \geq C b_1(M).$$

Na direção do Teorema 2.4.2, obtivemos a seguinte estimativa para o índice de Morse de superfícies CMC fechadas:

Teorema 2.4.3 *Seja M^2 uma superfície fechada imersa em $\bar{M}^3_c$ com curvatura média constante não nula H. Se $g \geq 1$ então,*

$$\mathrm{Ind_w}(M) \geq \frac{g}{3+\tau}.$$

Para a prova deste resultado é conveniente fazermos algumas considerações sobre cohomologia de De Rham e formas harmônicas.

Uma p-forma α é dita ser fechada se $d\alpha = 0$ e exata se existe uma $(p-1)$-forma β tal que $d\beta = \alpha$. Duas p-formas α e β são ditas cohomólogas se $\alpha - \beta$ é exata. A propriedade de ser cohomóloga determina uma relação de equivalência no espaço das p-formas fechadas e o conjunto das classes de equivalência é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, chamado p-ésimo

grupo de cohomologia de De Rham, o qual denotamos por $H^p_{dR}(M)$. Quando M é fechada os grupos de cohomologia de De Rham têm dimensão finita denotada por

$$b_p(M) := \dim H^p_{dR}(M),$$

onde o número $b_p(M)$ é chamado o p-ésimo número de Betti de M. Os números de Betti gozam da propriedade $b_k(M) = b_{n-k}(M)$ e também são usados para definir a característica de Euler de uma variedade fechada:

$$\mathcal{X}(M) := \sum_{i=0}^{n}(-1)^i b_i(M).$$

Como toda função harmônica sobre superfícies fechadas é constante, $b_0(M) = 1$. Além disso a característica de Euler de tais superfícies é dada por $\mathcal{X}(M) = 2 - 2g$ onde g é o gênero da superfície. Segue destas observacões que,

$$2 - 2g = b_0(M) - b_1(M) + b_2(M) = 2 - b_1(M),$$

onde $b_1(M) = 2g$ no caso particular de superfícies fechadas.

Os grupos de cohomologia de De Rham constituem uma importante ferramenta no estudo das propriedades topológicas de uma variedade fechada. Neste contexto as formas harmônicas surgem naturalmente no conteúdo do teorema de Hodge:

Teorema 2.4.4 (Hodge) *Seja M uma variedade Riemanniana fechada. Então toda classe de cohomologia no p-ésimo grupo de cohomologia de De Rham possui exatamente uma p-forma harmônica, isto é,*

$$H^p_{dR}(M) \simeq \mathcal{H}^p(M).$$

Sendo $\mathcal{H}^p(M)$ o espaço das p-formas harmônicas sobre M, segue do teorema de Hodge que

$$b_p(M) = \dim \mathcal{H}^p(M).$$

O Lema a seguir mostra que as funções testes w_i e $\bar{w}_i$ definidas no Lema 2.2.3 produzem variações que preservam o volume e, portanto, podem ser usadas na avaliação da forma quadrática Q no caso CMC.

Lema 2.4.1 *Seja M uma variedade fechada e $\theta \in \mathcal{H}^1(M)$. Se $\xi = \theta^\#$ e $\bar{\xi} = (\star\theta)^\#$, então*

$$\int_M \langle \xi, E_i \rangle dM = 0 \quad e \quad \int_M \langle \bar{\xi}, E_i \rangle dM = 0$$

Demonstração. Uma vez que θ é harmônica, $\delta\theta = 0$. Segue do Lema 2.2.1 que

$$\begin{aligned}\int_M \langle \xi, E_i\rangle dM &= \int_M \langle \xi, \operatorname{grad} f_i\rangle dM \\ &= \int_M \langle \theta, df_i\rangle dM \\ &= \int_M \langle \delta\theta, f_i\rangle dM \\ &= 0.\end{aligned}$$

Para provar a segunda integral é nula basta notar que $\star\theta$ é também harmônica, onde temos $\delta(\star\theta) = 0$.

□

Demonstração do Teorema 2.4.3. Conforme discussão feita na Seção 2.1 considere o espaço $\mathcal{G}_{\alpha-1}$ gerado pelas primeiras $\alpha - 1$ autofunções do operador L. Considere campos vetoriais $\xi = \theta^{\#}$, onde $\theta \in \mathcal{H}^1(M)$, tais que as funções $w_i = \langle \xi, E_i\rangle$ e $\bar{w}_i = \langle \bar{\xi}, E_i\rangle$ satisfazem o sistema

$$\int_M w_i\varphi_k = \int_M \bar{w}_i\varphi_k = 0, \quad 1 \le i \le 3+\tau \quad \text{and} \quad 1 \le k \le \alpha - 1, \tag{2.18}$$

com $2(3+\tau)(\alpha-1)$ equações lineares homogêneas na variável ξ. Portanto, se α é o maior natural tal que $\dim \mathcal{H}^1(M) > 2(3+\tau)(\alpha-1)$, o sistema (2.18) terá pelo menos uma solução não trivial $\xi \in \mathcal{H}^1(M)$. Segue da caracterização variacional dos autovalores de L, dada em (2.4), que

$$\lambda_\alpha^L \le \frac{\int_M w_i J w_i}{\int_M w_i^2} \quad \text{e} \quad \lambda_\alpha^L \le \frac{\int_M \bar{w}_i J \bar{w}_i}{\int_M \bar{w}_i^2}.$$

Pelo Corolário 2.2.1 aplicado a campos harmônicos temos

$$\lambda_\alpha^L \int_M w_i^2 \le -(2c+4H^2)\int_M w_i^2 + 2H\int_M \langle E_i, A\xi\rangle w_i - 2\int_M g_i w_i \langle A, \nabla\xi\rangle.$$

Somando em $i = 1, \ldots, 3+\tau$ encontramos

$$\lambda_\alpha^L \int_M \|\xi\|^2 \le -(2c+4H^2)\int_M \|\xi\|^2 + 2H\int_M \langle A\xi, \xi\rangle.$$

Analogamente, obtemos para a função teste $\bar{w}_i$,

$$\lambda_\alpha^L \int_M \|\xi\|^2 \le -(2c+4H^2)\int_M \|\xi\|^2 + 2H\int_M \langle A\bar{\xi}, \bar{\xi}\rangle.$$

Somando estas duas últimas desigualdades obtemos

$$\lambda_\alpha^L \int_M \|\xi\|^2 \le -2(c+H^2)\int_M \|\xi\|^2$$

o que mostra que o α-ésimo autovalor do operador L é negativo e isto implica que $\mathrm{Ind}_{\mathrm{w}}(M) \geq \alpha$. Como α é o maior natural tal que

$$2g > 2(3+\tau)(\alpha - 1)$$

obtemos que

$$\alpha \geq \frac{g}{3+\tau}$$

e isso conclui a demonstração.

$\square$

Quando M é uma hipersuperfície mínima fechada em $\mathbb{S}^{n+1}$ então $-n$ é um autovalor do operador de Jacobi associado às coordenadas do campo normal unitário N em $\mathbb{R}^{n+2}$. De fato, segue do Lema 2.2.1 que

$$Jg_i = \Delta g_i - (\|A\|^2 + n)g_i = -ng_i,$$

para todo $i \in \{1, \cdots, n+2\}$. Quando M não é totalmente geodésica, o espaço gerado pelas funções g_i tem dimensão $n+2$ onde $-n$ é autovalor de J com multiplicidade de pelo menos $n+2$ (ver [21], [50], [53]). Em particular, o índice de Morse de M é de pelo menos $n+3$ visto que o primeiro autovalor do operador de Jacobi é simples. A. Savo em [50] usou este fato para melhorar sua estimativa do índice de Morse de hipersuperfícies mínimas na esfera.

Como foi dito anteriormente, Perdomo e Brasil, em [41], provaram que se M é uma hipersuperfície CMC fechada em $\mathbb{S}^{n+1}$ que não é totalmente umbílica, então

$$\mathrm{Ind}_{\mathrm{w}}(M) \geq n+1.$$

Entretanto, diferentemente do caso mínimo, as autofunções não são explícitas e assim não foi possível usar este fato para melhorar nossa estimativa.

Capítulo 3

Estimativas para o espectro do operador de Jacobi em superfícies CMC compactas com fronteira livre

Apresentamos neste capítulo alguns resultados relacionados à comparação espectral e estimativa do o índice de Morse para superfícies CMC compactas com fronteira livre similares àqueles obtidas no Capítulo 2 para superfícies fechadas. Na Seção 3.1 introduzimos um pouco da teoria sobre estabilidade de hipersuperfícies compactas com fronteira livre e, em seguida, na Seção 3.2, fazemos algumas considerações sobre p-formas harmônicas em variedades compactas com fronteira não vazia. Na Seção 3.3 damos a prova de um resultado envolvendo a comparação entre os espectros do operador de Jacobi e do operador Laplaciano de Hodge agindo em 1-formas com condição absoluta de fronteira. Finalizamos com a Seção 3.4 mostrando que o índice fraco de Morse de uma superfície CMC compacta com fronteira livre imersa num domínio convexo em média é limitado por baixo por uma função linear do gênero e número de componentes de fronteira da superfície.

3.1 Estabilidade de hipersuperfícies compactas com fronteira livre

Seja W^{n+1} uma $(n+1)$-dimensional variedade Riemanniana em $\bar{M}_c^{n+1}$ com fronteira não vazia. Seja $M^n \subset W$ uma hipersuperfície CMC compacta tal que $\partial M \subset \partial W$ e M intercepta a ∂W sob um ângulo reto. Tais hipersuperfícies são conhecidas por serem pontos críticos do funcional área restrito a variações de M que preservam o volume e mantêm o fronteira de M variando livremente na fronteira de W. Estas hipersuperfícies surgem

naturalmente em muitos problemas geométricos e físicos e são referidas na literatura como hipersuperfícies CMC compactas com fronteira livre. Elas foram estudadas desde o século XIX e ainda hoje constituem um tópico muito explorado em geometria diferencial. Sugerimos ao leitor os livros de Finn [22] e López [33], bem como as referências neles contidas, para uma boa introdução ao assunto.

Um problema importante sobre as hipersuperfícies CMC compactas com fronteira livre é classificar aquelas que são estáveis. Por exemplo, no caso de W ser uma bola geodésica em uma espaço de curvatura seccional constante, uma conjectura bem conhecida afirmou que calotas esféricas são as únicas soluções. Essa conjectura foi confirmada pelos trabalhos de Ros-Vergasta [46] e Nunes [40] em dimensão dois e, mais recentemente, por Wang e Xia [55] em qualquer dimensão. Outros resultados acerca de hipersuperfícies CMC com fronteira livre e estáveis podem ser encontrados, por exemplo, em [2], [7], [8], [18], [32], [34], [43] e [45].

Quando M é uma superfície CMC compacta com fronteira livre estável imersa em uma região convexa em média $W \subset \mathbb{R}^3$, Ros mostrou em [43, Teorema 9], que existem apenas algumas possibilidades para o gênero e o número de componentes de fronteira de M (ver Teorema 3.4.4 deste texto).

Como no caso fechado, uma variação admissível de $\bar{x} : M \to W$ é uma aplicação diferenciável $\psi : (-\epsilon, \epsilon) \times M \to W$ tal que $\psi_t : M \to W$ é uma imersão satisfazendo $\psi_t(\mathrm{int}(M)) \subset \mathrm{int}(W)$ e $\psi_t(\partial M) \subset \partial W$ para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ e $\psi_0 = \bar{x}$. Assim como foi dito na Seção 2.1, para o caso fechado, aqui também é suficiente considerar variações normais ψ cujo fluxo é gerado pelo campo variacional normal uN onde $u \in C^\infty(M)$. A fórmula da primeira variação da área e da área balanceada são dadas por,

$$\mathcal{A}'_u(0) = -n \int_M HudM + \int_{\partial M} \langle X, \eta \rangle d\sigma$$

e

$$\mathcal{J}'_u(0) = -n \int_M (H - H_0)udM + \int_{\partial M} \langle X, \eta \rangle d\sigma.$$

Segue da fórmula da primeira variação da área que hipersuperfícies mínimas compactas com fronteira livre são caracterizadas como pontos críticos do funcional área restrito à variações normais. Uma caracterização das hipersuperfícies CMC compactas com fronteira livre é dada na proposição a seguir:

Proposição 3.1.1 *As seguintes afirmações para a hipersuperfície compacta com fronteira livre M são equivalentes:*

(i) M tem curvatura média constante H_0.

(ii) M é um ponto crítico do funcional área restrito à variações normais admissíveis que preservam volume.

(iii) M é um ponto crítico do funcional área balanceado restrito à variações normais admissíveis (não necessariamente preservando volume).

A prova é análoga à prova da Proposição 2.1.1

Seja $\bar{x} : M \to W$ uma hipersuperfície CMC compacta com fronteira livre. Então para qualquer variação normal admissível com campo variacional normal $X = uN$ a fórmula da segunda variação da área balanceada é dada por

$$\mathcal{J}_u''(0) = \int_M \Big(\|\nabla u\|^2 - (\|A\|^2 + \overline{\mathrm{Ric}}(N,N)u^2\Big)dM + \int_{\partial M} II^{\partial W}(N,N)u^2 d\sigma,$$

onde $II^{\partial W}$ é a segunda forma fundamental da ∂W com respeito ao campo vetorial normal unitário ν apontando para fora. Para uma demonstração basta adaptar a prova do Teorema 2.1.3 para o caso compacto com fronteira livre. Para mais detalhes sugerimos [37].

Destacamos abaixo o teorema de integração por partes que tem grande utilidade no decorrer do nosso trabalho.

Proposição 3.1.2 *Sejam, M uma variedade compacta com fronteira ∂M, $\alpha \in \Omega^p(M)$ e $\beta \in \Omega^{p+1}(M)$. Então, vale a seguinte fórmula de integração por partes,*

$$\int_M \langle d\alpha, \beta\rangle dM - \int_M \langle \alpha, \delta\beta\rangle dM = \int_{\partial M} i^*(\alpha \wedge \star\beta),$$

onde $i : \partial M \to M$ é a aplicação de inclusão.

Fazendo $\alpha = u$ e $\beta = du$ na fórmula de integração por partes obtemos

$$\begin{aligned}\int_M \|\nabla u\|^2 dM &= \int_M u\delta du dM + \int_{\partial M} u\langle du, \eta\rangle \star\eta \\ &= \int_M u\Delta u dM + \int_{\partial M} u\frac{\partial u}{\partial \eta} d\sigma.\end{aligned}$$

Portanto, a fórmula da segunda variação da área balanceada se reescreve da seguinte maneira:

$$\mathcal{J}_u''(0) = \int_M uJu dM + \int_{\partial M} (u\frac{\partial u}{\partial \eta} + II^{\partial B}(N,N)u^2)d\sigma,$$

onde

$$J = \Delta - (\|A\|^2 + \overline{\mathrm{Ric}}(N,N)).$$

Assim como no caso fechado, associamos à segunda variação da área a forma quadrática $Q : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to \mathbb{R}$, definida por

$$Q(v,u) = \int_M vJudM + \int_{\partial M} v(\frac{\partial u}{\partial \eta} + II^{\partial B}(N,N)u)d\sigma$$

Definição 3.1.1 *Dizemos que $u \in C^\infty(M)$ é uma autofunção de Q associada ao autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ se $Q(u,v) = \lambda \int_M uvdM$ para todo $v \in C^\infty(M)$. Isto é equivalente a dizer que u é solução do problema de fronteira do tipo Robin*

$$\begin{cases} Ju = \lambda u \quad sobre \quad M, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = -II^{\partial W}(N,N)u \quad sobre \quad \partial M. \end{cases} \tag{3.1}$$

A condição $\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = -II^{\partial W}(N,N)u$ é uma condição elíptica de fronteira para o operador elíptico e autoadjunto J. Portanto, existe uma sequência não decrescente, $\lambda_1^J \leq \lambda_2^J \leq \cdots \leq \lambda_k^J \leq \cdots$, de autovalores divergindo para $+\infty$ associados à uma base ortonormal $\{\phi_1, \cdots, \phi_k, \cdots\}$ de $L^2(M)$ de soluções do problema (3.1).

Sendo

$$\mathcal{G}_\alpha := \langle \phi_1, \cdots, \phi_\alpha \rangle,$$

temos a seguinte caracterização variacional para o α-ésimo autovalor do problema (3.1):

$$\lambda_\alpha^J = \inf_{0 \neq u \in \mathcal{G}_{\alpha-1}^\perp} \frac{Q(u,u)}{\int_M u^2 dM}. \tag{3.2}$$

O ínfimo é atingido precisamente por autofunções de J associadas a λ_α^J e satisfazendo a condição de fronteira $\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = -II^{\partial W}(N,N)u$.

Quando restringimos a forma quadrática Q ao espaço das funções de média nula obtemos, como no caso fechado, um problema de autovalores associado a um novo operador autoadjunto e elíptico, o qual denotamos por L.

Definição 3.1.2 *Dizemos que $u \in \mathcal{F}$ é uma autofunção de $Q|_{\mathcal{F}}$ associada ao autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ se $Q|_{\mathcal{F}}(u,v) = \lambda \int_M uvdM$ para todo $v \in \mathcal{F}$.*

Como antes, podemos mostrar que esta definição é equivalente a dizer que u é solução do

problema de fronteira do tipo Robin

$$\begin{cases} Lu = \lambda u \ \text{ sobre } \ M, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = -II^{\partial W}(N,N)u \ \text{ sobre } \ \partial M. \end{cases} \tag{3.3}$$

Da mesma forma, existe uma sequência não decrescente $\lambda_1^L \leq \lambda_2^L \leq \cdots \leq \lambda_k^L \leq \cdots$ de autovalores divergindo para $+\infty$ associados à uma base ortonormal $\{\varphi_1, \cdots, \varphi_k, \cdots\}$ de $L_T^2(M)$ de soluções do problema (3.3).

Sendo

$$\mathcal{G}_\alpha := \langle \varphi_1, \cdots, \varphi_\alpha \rangle,$$

temos a seguinte caracterização variacional para o α-ésimo autovalor do problema (3.3):

$$\lambda_\alpha^L = \inf_{0 \neq u \in \mathcal{G}_{\alpha-1}^\perp} \frac{Q|_{\mathcal{F}}(u,u)}{\int_M u^2 dM}. \tag{3.4}$$

Definição 3.1.3 *O índice fraco de Morse de uma hipersuperfície compacta com fronteira livre M de curvatura média constante não nula, o qual denotamos por* $\mathrm{Ind_w}(M)$, *é a máxima dimensão de um subespaço vetorial de $\mathcal{F}$ restrito ao qual a forma quadrática $Q|_{\mathcal{F}}$ é negativa definida.*

De forma equivalente o índice fraco de Morse pode ser definido como o número de autovalores negativos do operador L.

3.2 Considerações sobre p-formas harmônicas em variedades compactas com fronteira não vazia

Na Seção 2.2 uma p-forma harmônica sobre uma variedade fechada foi definida como uma p-forma cujo Laplaciano de Hodge é nulo e esse espaço foi denotado por $\mathcal{H}^p(M)$. No caso de variedades fechadas podemos provar que ω é harmônica se, e somente se, $d\omega = \delta\omega = 0$. Quando a variedade M tem fronteira não vazia não é mais verdade que uma p-forma harmônica deve ser fechada e cofechada. Neste caso, precisamos impor uma condição de fronteira para que uma p-forma harmônica seja fechada e cofechada. Para tal, considere a aplicação de inclusão $i : \partial M \to M$. Dizemos que uma p-forma ω é normal na fronteira quando $i^*\omega = 0$ ou, de forma equivalente, quando $\eta \wedge \omega = 0$ sobre ∂M. Dizemos que ω é tangencial na fronteira quando $i^*(\star\omega) = 0$ ou, equivalentemente, quando $\iota_\eta \omega = 0$ sobre ∂M.

Definimos o espaço das p-formas fechadas e cofechadas que são normais na fronteira

por

$$\mathcal{H}_N^p(M) := \{w \in \Omega^p(M) |\ d\omega = \delta\omega = 0 \text{ e } \eta \wedge \omega = 0 \text{ sobre } \partial M\}$$

e o espaço das p-formas fechadas e cofechadas que são tangenciais na fronteira por

$$\mathcal{H}_T^p(M) := \{w \in \Omega^p(M) |\ d\omega = \delta\omega = 0 \text{ e } \iota_\eta\omega = 0 \text{ sobre } \partial M\}.$$

Uma p-forma ω satisfaz a *condição relativa de fronteira* se ambas ω e $\delta\omega$ são normais na fronteira . Se w e $d\omega$ são tangenciais na fronteira dizemos que ω satisfaz a *condição absoluta de fronteira.*

A proposição a seguir nos diz em que condições uma p-forma harmônica é fechada e cofechada.

Proposição 3.2.1 *Seja M uma variedade Riemanniana compacta com fronteira não vazia. Então,*

$$\mathcal{H}_N^p(M) := \{w \in \Omega^p(M) |\ \Delta\omega = 0 \quad e \quad \omega \quad \textit{satisfaz a condição relativa de fronteira}\}$$

e

$$\mathcal{H}_T^p(M) := \{w \in \Omega^p(M) |\ \Delta\omega = 0 \quad e \quad \omega \quad \textit{satisfaz a condição absoluta de fronteira}\}.$$

Antes de provarmos a proposição 3.2.1 mostraremos que o termo de bordo na fórmula de integração por partes pode ser reescrito usando-se a identidade $\star_\partial \iota_\eta \omega = \star\omega$ onde $\star_\partial$ e $\star$ são os operadores estrela de Hodge de M e ∂M, respectivamente. De fato, seja $\{\eta, e_1, \cdots, e_{n-1}\}$ um referencial ortonormal ao longo da ∂M. Para $\omega \in \Omega^k(M)$ podemos escrever $\omega|_{\partial M} = \omega^T + \omega^\perp$ onde, sem perda de generalidade, $\omega^\perp = \eta \wedge e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_{k-1}}$. Considerando-se $dM = \eta \wedge e^1 \wedge \cdots \wedge e^{n-1}$ temos ao longo da ∂M que

$$\begin{aligned}
\star_\partial \iota_\eta \omega &= \star_\partial \iota_\eta \omega^\perp \\
&= \star_\partial (e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_{k-1}}) \\
&= e^{i_k} \wedge \cdots \wedge e^{i_{n-1}} \\
&= \star(\eta \wedge e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_{k-1}}) \\
&= \star\omega.
\end{aligned}$$

Portanto, se $\theta \in \Omega^{k+1}(M)$ segue da definição do operador estrela que

$$\langle \omega, \iota_\eta \theta \rangle d\sigma = i^*(\omega \wedge \star_\partial \iota_\eta \theta) = i^*(\omega \wedge \star\theta)$$

e a fórmula de integração por partes se reescreve como

$$\int_M \langle d\alpha, \beta\rangle dM - \int_M \langle \alpha, \delta\beta\rangle dM = \int_{\partial M} \langle \alpha, \iota_\eta \beta\rangle d\sigma. \tag{3.5}$$

Demonstração da Proposição 3.2.1. Pela fórmula 3.5 se ω é uma p-forma harmônica então

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M \langle \Delta\omega, \omega\rangle dM \\ &= \int_M \langle \delta d\omega, \omega\rangle dM + \int_M \langle d\delta\omega, \omega\rangle dM \\ &= \int_M \|d\omega\|^2 dM - \int_{\partial M} \langle \omega, \iota_\eta d\omega) d\sigma + \int_M \|\delta\omega\|^2 dM + \int_{\partial M} \langle \delta\omega, \iota_\eta \omega\rangle d\sigma. \end{aligned}$$

Por fim, se ω satisfaz uma das condições de fronteira, relativa ou absoluta, temos que $d\omega = \delta\omega = 0$.

A recíproca, é imediata.

□

Na Seção 2.4 definimos o p-ésimo número de Betti de uma variedade fechada M como sendo a dimensão do p-esimo grupo de cohomologia de De Rham que, pelo Teorema de Hodge, 2.4.4, é equivalente a definir como a dimensão do espaço das p-formas harmônicas. Quando M tem fronteira não vazia, o espaço das formas harmônicas,

$$\mathcal{H}^p(M) = \{\omega \in \Omega^p(M) |\ \Delta\omega = 0\},$$

é infinito dimensional. Neste caso existem duas diferentes noções para o p-ésimo grupo de cohomologia de De Rham: o *p-ésimo grupo de cohomologia absoluto de De Rham*, $H^p_{dR}(M)$, e o *p-ésimo grupo de cohomologia relativo de De Rham*, $H^p_{dR}(M, \partial M)$. Como no caso de variedades fechadas, $H^p_{dR}(M)$ é definido como o quociente das p-formas fechadas pelas p-formas exatas. Para a noção relativa consideramos o espaço das p-formas fechadas que são normais na fronteira,

$$\mathcal{C}^p(M, \partial M) := \{\omega \in \Omega^p(M) |\ \eta \wedge \omega = 0 \text{ e } d\omega = 0\}$$

e o espaço das p-formas exatas que são normais na fronteira,

$$\mathcal{E}^p(M, \partial M) := \{\omega \in \Omega^p(M) |\ \eta \wedge \omega = 0 \text{ e } \omega = d\theta \text{ para alguma } \theta \in \Omega^{p-1}(M)\}.$$

Então, definimos o p-ésimo grupo de cohomologia relativo de De Rham por

$$H^p_{dR}(M, \partial M) := \frac{\mathcal{C}^p(M, \partial M)}{\mathcal{E}^p(M, \partial M)}.$$

Neste contexto temos a seguinte versão do Teorema de Hodge:

Teorema 3.2.1 (Hodge-Morrey-Friedrichs) *Seja M uma variedade Riemanniana compacta com fronteira não vazia. Então,*

$$H^p_{dR}(M) \simeq \mathcal{H}^p_T(M) \text{ e } H^p_{dR}(M, \partial M) \simeq \mathcal{H}^p_N(M).$$

Por fim, definimos o *p-ésimo absoluto número de Betti* de uma variedade compacta com fronteira não vazia M por

$$b^A_p(M) := \dim \mathcal{H}^p_T(M)$$

e *p-ésimo relativo número de Betti* de M por

$$b^R_p(M) := \dim \mathcal{H}^p_N(M).$$

Pela dualidade de Poincaré-Lefschetz esses números se relacionam por

$$b^A_p(M) = b^R_{n-p}(M).$$

O lema abaixo é bem conhecido e mostra que o primeiro número de Betti está intimamente relacionado com a topologia de uma superfície compacta com fronteira não vazia (ver [4] ou [49]).

Lema 3.2.1 *Seja M^2 uma superfície compacta orientável com fronteira não vazia. Se M tem gênero g e k componentes de fronteira, então*

$$\dim \mathcal{H}^1_T(M) = \dim \mathcal{H}^1_N(M) = 2g + k - 1.$$

O próximo lema mostra que quando uma 1-forma cofechada é tangencial na fronteira suas coordenadas são funções admissíveis no cálculo do índice de Morse de superfícies CMC compactas. Mais precisamente temos:

Lema 3.2.2 *Seja M uma variedade compacta com $\partial M \neq \emptyset$ e $\theta \in \mathcal{H}^1_T(M)$. Se $\xi = \theta^\#$, então a função $w_i = \langle \xi, E_i \rangle$ tem média nula.*

Demonstração. Pelo Lema 2.2.1 temos que $E_i = \operatorname{grad} f_i$. Segue da Proposição 3.1.2 que

$$\begin{aligned}\int_M w_i dM &= \int_M \langle \xi, \operatorname{grad} f_i \rangle dM \\ &= \int_M \langle \theta, df_i \rangle dM \\ &= \int_M \langle f_i, \delta\theta \rangle dM + \int_{\partial M} \langle f_i, \iota_\eta \theta \rangle d\sigma.\end{aligned}$$

Como $\delta\theta = 0$ e $\iota_\eta \theta = 0$ concluímos que w_i tem média nula.

□

Observação 3.2.1 *Em geral para campos harmônicos com condição relativa de fronteira as funções w_i não tem média nula, entretanto para $\dim \mathcal{H}^1_N(M)$ suficientemente grande ξ pode ser escolhido de modo que $\int_M w_i dM = 0$.*

Vamos calcular agora o termo de fronteira produzido pela segunda variação da área avaliado nas funções testes w_i e $\bar{w}_i$:

Lema 3.2.3 *Considere a imersão CMC compacta com fronteira livre, $\bar{x} : M^2 \to W \subset \bar{M}^3_c$. Seja θ uma 1-forma satisfazendo a condição absoluta de fronteira e defina os campos vetoriais duais $\xi = \theta^\#$ e $\bar{\xi} = (\star\theta)^\#$. Para as funções $w_i = \langle \xi, E_i \rangle$ e $\bar{w}_i = \langle \bar{\xi}, E_i \rangle$ temos*

$$\int_{\partial M} (w_i \eta(w_i) + II^{\partial W}(N,N) w_i^2) d\sigma = 2 \int_{\partial M} H^{\partial W} \|\xi\|^2 d\sigma \tag{3.6}$$

e

$$\int_{\partial M} (\bar{w}_i \eta(\bar{w}_i) + II^{\partial W}(N,N) \bar{w}_i^2) d\sigma = 2 \int_{\partial M} H^{\partial W} \|\xi\|^2 d\sigma \tag{3.7}$$

onde $H^{\partial W}$ é a curvatura média da fronteira de W.

Demonstração. Segue do Lema 2.2.1 que $\nabla_\eta E_i = g_i A\eta - c f_i \eta$ onde obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\partial M} w_i \eta(w_i) d\sigma &= \int_{\partial M} w_i (\langle \nabla_\eta \xi, E_i \rangle + \langle \xi, g_i A\eta - c f_i \eta \rangle) d\sigma \\ &= \int_{\partial M} \langle \nabla_\eta \xi, \xi \rangle d\sigma + \int_{\partial M} \langle N, \xi \rangle \langle \xi, A\eta \rangle d\sigma - c \int_{\partial M} \langle \bar{x}, \xi \rangle \langle \xi, \eta \rangle d\sigma \\ &= \int_{\partial M} \langle \nabla_\eta \xi, \xi \rangle d\sigma\end{aligned}$$

pelo fato de serem $g_i w_i = \langle N, \xi \rangle$ e $\langle \xi, \eta \rangle$ ambos nulos. A condição $\iota_\eta d\theta = 0$ nos fornece

$$0 = d\theta(\eta, \xi) = (\nabla_\eta \theta)\xi - (\nabla_\xi \theta)\eta = \langle \nabla_\eta \xi, \xi \rangle - \langle \nabla_\xi \xi, \eta \rangle$$

e a condição de fronteira livre nos diz que $\nu|_{\partial M} = \eta$ onde ν é o campo vetorial normal

unitário sobre ∂W. Disto segue que

$$\begin{aligned}\int_{\partial M} w_i\eta(w_i)d\sigma &= \int_{\partial M}\langle\nabla_\xi\xi,\eta\rangle d\sigma\\ &= -\int_{\partial M}\langle\xi,\nabla_\xi\eta\rangle d\sigma\\ &= \int_{\partial M} II^{\partial W}(\xi,\xi)d\sigma.\end{aligned}$$

Desde que ξ e N formam uma base ortogonal do espaço tangente à ∂W ao longo de ∂M concluímos a prova da primeira parte do Lema observando que

$$II^{\partial W}(\xi,\xi) + II^{\partial W}(N,N)\|\xi\|^2 = 2H^{\partial W}\|\xi\|^2.$$

Para provar a segunda parte do Lema primeiro observe que

$$\langle\nabla_\eta\xi,\xi\rangle = \langle\nabla_\eta\theta,\theta\rangle = \langle\star\nabla_\eta\theta,\star\theta\rangle = \langle\nabla_\eta\star\theta,\star\theta\rangle = \langle\nabla_\eta\bar{\xi},\bar{\xi}\rangle$$

onde

$$\int_{\partial M}\bar{w}_i\eta(\bar{w}_i)d\sigma = \int_{\partial M}\langle\nabla_\eta\xi,\xi\rangle d\sigma + \int_{\partial M}\langle N,\bar{\xi}\rangle\langle\bar{\xi},A\eta\rangle d\sigma - c\int_{\partial M}\langle\bar{x},\bar{\xi}\rangle\langle\bar{\xi},\eta\rangle d\sigma.$$

Desde que $\langle N,\bar{\xi}\rangle = 0$ e o termo $c\int_{\partial M}\langle\bar{x},\bar{\xi}\rangle\langle\bar{\xi},\eta\rangle d\sigma$ é nulo, pois $c = 0$ no caso Euclidiano e $\langle\bar{x},\bar{\xi}\rangle = 0$ no caso esférico, obtemos que

$$\int_{\partial M}\bar{w}_i\eta(\bar{w}_i)d\sigma = \int_{\partial M} II^{\partial W}(\xi,\xi)d\sigma$$

e o resultado segue de modo análogo.

□

Na próxima seção consideramos o seguinte problema de autovalor para o Laplaciano de Hodge:

$$\begin{cases}\Delta_1\theta = \lambda^A\theta \ \text{ sobre } \ M,\\ \iota_\eta\theta = 0 \text{ e } \iota_\eta d\theta = 0 \text{ sobre } \ \partial M.\end{cases} \tag{3.8}$$

3.3 Comparação entre os espectros de J e Δ_1 com condição absoluta de fronteira

No que segue assumimos, por simplicidade, que o domínio $W^{n+1} \subset \bar{M}_c^{n+1}$ tem fronteira suave e que ν é um campo vetorial normal unitário ao longo de ∂W. A segunda forma fundamental e a curvatura média de ∂W são definidas por

$$II^{\partial W}(X,Y) = \langle -D_X\nu, Y\rangle, \qquad \text{para todo } X, Y \in \mathfrak{X}(\partial W),$$

e

$$H^{\partial W} = \frac{1}{2}\mathrm{tr} II^{\partial W},$$

onde D é a conexão de Levi-Civita de $\bar{M}_c^{n+1}$. Se podemos escolher um vetor normal ν ao longo de ∂W apontando para fora de W tal que $II^{\partial W} \leq 0$ (< 0) dizemos que W é convexo (estritamente convexo). Se podemos escolher ν de modo que $H^{\partial W} \leq 0$ (< 0) dizemos que W é convexo em média (estritamente convexo em média).

P. Sargent obteve em [49] uma comparação entre os autovalores do operador de Jacobi e os autovalores do problema (3.8) para hipersuperfícies compactas com fronteira livre num domínio estritamente convexo $W^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Ela provou o seguinte resultado:

Teorema 3.3.1 (Sargent) *Seja M^n uma hipersuperfície mínima com fronteira livre, compacta e orientável num domínio estritamente convexo W^{n+1}. Então, para todo natural α,*

$$\lambda_\alpha^J \leq \lambda_{m(\alpha)}^A,$$

onde $m(\alpha) = \binom{n+1}{2}(\alpha-1)+1$ e $\lambda_{m(\alpha)}^A$ é o $m(\alpha)$-ésimo autovalor do problema de autovalor do Laplaciano de Hodge com condição absoluta de fronteira.

Neste sentido, obtemos uma comparação entre os autovalores do operador de Jacobi e os autovalores do problema (3.8), como feita no Teorema 2.3.3 para o caso fechado, para superfícies CMC compactas com fronteira livre:

Teorema 3.3.2 *Seja M^2 uma superfície compacta com fronteira livre e curvatura média constante não nula H, imersa num domínio convexo em média $W^3 \subset \bar{M}_c^3$. Então, para todo inteiro positivo α,*

$$\lambda_\alpha^J \leq -2(c+H^2) + \lambda_{m(\alpha)}^A,$$

onde $m(\alpha) > 2(3+\tau)(\alpha-1)$ e $\lambda_{m(\alpha)}^A$ é o α-esimo autovalor do problema de autovalor do Laplaciano com absoluta condição de fronteira dado em (3.8).

Assumindo uma condição extra sobre a curvatura de Ricci obtemos um resultado similar para dimensões altas:

Teorema 3.3.3 *Seja M^n uma hipersuperfície CMC com fronteira livre de dimensão $n \geq 3$ imersa num domínio convexo $W^{n+1} \subset \bar{M}_c^{n+1}$. Assuma que a curvatura de Ricci de M satisfaça* $\mathrm{Ric} \geq -c(n-1)$. *Então, para todo inteiro positivo α,*

$$\lambda_\alpha^J \leq \lambda_{p(\alpha)}^A$$

onde $p(\alpha) > (n+1+\tau)(\alpha-1)$.

Demonstração do Teorema 3.3.2. A prova segue de perto as idéias usadas na prova do teorema 2.3.3. Seja $\mathcal{L}_m^A$ o espaço vetorial m-dimensional gerado pelos campos vetoriais $\xi_1, \cdots, \xi_m$ onde $\theta_k = \xi_k^\flat$ satisfaz a condição absoluta de fronteira e $\Delta_1 \theta_k = \lambda_k^A \theta_k$. Fixe em $L^2(M)$ uma base ortonormal $\{\phi_i\}_{i=1}^{+\infty}$ dada pelas autofunções do operador de Jacobi e seja o espaço vetorial $\mathcal{G}_\alpha := \langle \phi_1, \cdots, \phi_\alpha \rangle$. Considere campos vetoriais $\xi \in \mathcal{L}_m^A$ tais que as funções w_i e $\bar{w}_i$, como definidas no Lema 2.2.3, estão em $\mathcal{G}_{\alpha-1}^\perp$ para algum $\alpha \in \mathbb{N}$ e $i \in \{1, \cdots, 3+\tau\}$. Temos o sistema

$$\int_M w_i \phi_k = \int_M \bar{w}_i \phi_k = 0, \quad 1 \leq i \leq 3+\tau \quad \text{and} \quad 1 \leq k \leq \alpha - 1 \tag{3.9}$$

com $2(3+\tau)(\alpha-1)$ equações lineares homogêneas na variável ξ.

Portanto, se $m = m(\alpha) = \dim \mathcal{L}_m^A > 2(3+\tau)(\alpha-1)$, o sistema 3.9 terá pelo menos uma solução não trivial para todo $1 \leq i \leq 3+\tau$. Segue da caracterização variacional dos autovalores do problema (3.1) dada em (3.2,) que

$$\lambda_\alpha^J \leq \frac{Q(w_i, w_i)}{\int_M w_i^2} \quad \text{and} \quad \lambda_\alpha^J \leq \frac{Q(\bar{w}_i, \bar{w}_i)}{\int_M \bar{w}_i^2}.$$

Agora, usando o Corolário 2.2.1 obtemos

$$\begin{aligned}
\lambda_\alpha^J \int_M w_i^2 \, dM \leq & -(2c + 4H^2) \int_M w_i^2 \, dM + 2H \int_M \langle E_i, A\xi \rangle w_i \, dM \\
& + \int_M \langle E_i, \Delta \xi \rangle w_i \, dM - 2 \int_M g_i \langle A, \nabla \xi \rangle w_i \, dM \\
& -2c \int_M f_i w_i \operatorname{div} \xi dM + \int_{\partial M} (w_i \eta(w_i) + II^{\partial W(N,N)} w_i^2) \, ds.
\end{aligned}$$

Somando em i, $1 \leq i \leq 3+\tau$, e usando o Lema 3.2.3 encontramos

$$\begin{aligned}
\lambda_\alpha^J \int_M \|\xi\|^2 \, dM \leq & -(2c + 4H^2) \int_M \|\xi\|^2 \, dM + 2H \int_M \langle A\xi, \xi \rangle \, dM \\
& + \int_M \langle \Delta \xi, \xi \rangle \, dM + 2 \int_{\partial M} H^{\partial W} \|\xi\|^2 ds.
\end{aligned}$$

Aplicando o mesmo argumento para as funções testes $\bar{w}_i$ encontramos

$$\lambda_\alpha^J \int_M \|\xi\|^2\, dM \leq -(2c+4H^2)\int_M \|\xi\|^2\, dM + 2H\int_M \langle A\bar{\xi},\bar{\xi}\rangle\, dM \\ + \int_M \langle \Delta\bar{\xi},\bar{\xi}\rangle\, dM + 2\int_{\partial M} H^{\partial W}\|\xi\|^2 ds.$$

Somando estas duas últimas desigualdades e observando que

$$\langle A\xi,\xi\rangle + \langle A\bar{\xi},\bar{\xi}\rangle = 2H\|\xi\|^2 \quad \text{e} \quad \int_M \langle \Delta\xi,\xi\rangle dM \leq \lambda_{m(\alpha)}^A \int_M \|\xi\|^2 dM$$

concluímos que

$$\lambda_\alpha^J \int_M \|\xi\|^2 dM \leq 2\int_{\partial M} H^{\partial W}\|\xi\|^2 dM - 2(c+H^2)\int_M \|\xi\|^2 dM + \lambda_{m(\alpha)}^A \int_M \|\xi\|^2 dM.$$

Usando o fato que $H^{\partial W} \leq 0$ obtemos

$$\lambda_\alpha^J \leq -2(c+H^2) + \lambda_{m(\alpha)}^A,$$

onde $m(\alpha) > 2(3+\tau)(\alpha-1)$.

□

Demonstração do Teorema 3.3.3. A prova consiste em adaptar a prova do Teorema 2.3.4 para o caso com fronteira livre. Considere campos vetoriais $\xi \in \mathcal{L}_m^A$ tais que as funções w_i estão em $\mathcal{G}_{\alpha-1}^\perp$ para algum $\alpha \in \mathbb{N}$ e $i \in \{1,\cdots,n+1+\tau\}$. Temos um sistema

$$\int_M w_i\phi_k = 0, \quad 1 \leq i \leq n+1+\tau \quad \text{and} \quad 1 \leq k \leq \alpha-1. \tag{3.10}$$

com $(n+1+\tau)(\alpha-1)$ equações lineares homogêneas na variável ξ. Portanto, se $m(\alpha) = \dim \mathcal{L}_m^A > (n+1+\tau)(\alpha-1)$, o sistema (3.10) terá pelo menos uma solução não trivial $\xi \in \mathcal{L}_m^A$ tal que as funções $w_i \in \mathcal{G}_{\alpha-1}^\perp$ para todo $1 \leq i \leq n+1+\tau$. Segue da caracterização variacional dos autovalores do problema (3.1) dada em (3.2), que

$$\lambda_\alpha^J \leq \frac{Q(w_i,w_i)}{\int_M w_i^2}, \quad 1 \leq i \leq n+1+\tau.$$

Pelo Lema 2.2.3 temos

$$\lambda_\alpha^J \int_M w_i^2 \leq -\int_M (2c(n-1)+\|A\|^2)w_i^2 - nH\int_M w_i\langle E_i, A\xi\rangle + 2\int_M w_i\langle E_i, A^2\xi\rangle \\ + \int_M w_i\,\langle E_i,\Delta\xi\rangle - 2\int_M w_i g_i\,\langle A,\nabla\xi\rangle - 2c\int_M w_i f_i \operatorname{div}\xi \\ + \int_{\partial M}(w_i\eta(w_i) + II^{\partial W}(N,N)w_i^2)d\sigma.$$

Somando a desigualdade acima em i, $1 \leq i \leq n+1+\tau$, e usando a convexidade do domínio W obtemos

$$\begin{aligned}
\lambda_\alpha^J \int_M |\xi|^2 \leq & -\int_M [2c(n-1) + \|A\|^2]\|\xi\|^2 - nH\int_M \langle \xi, A\xi\rangle + 2\int_M \|A\xi\|^2 \\
& + \int_M \langle \xi, \Delta\xi\rangle - 2c\int_M \langle \bar{x}, \xi\rangle \operatorname{div}\xi + \int_{\partial M} (II^{\partial W}(\xi,\xi) + II^{\partial W}(N,N)\|\xi\|^2). \\
\leq & -\int_M [c(n-1)\|\xi\|^2 + nH\langle A\xi, \xi\rangle - \|A\xi\|^2] \\
& -c(n-1)\int_M \|\xi\|^2 + \int_M \langle \xi, \Delta\xi\rangle + \int_M [\|A\xi\|^2 - \|A\|^2|\xi|^2]
\end{aligned}$$

Com o Lema 2.2.2 a desigualdade acima se reescreve como

$$\begin{aligned}
\lambda_\alpha^J \int_M \|\xi\|^2 \leq & -\int_M [c(n-1)\|\xi\|^2 + \operatorname{Ric}(\xi,\xi)] + \lambda_{m(\alpha)}^\Delta \int_M \|\xi\|^2 \\
& + \int_M (\|A\xi\|^2 - \|A\|^2\|\xi\|^2). \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

Segue da hipótese sobre o Ricci que o primeiro termo do lado direito da desigualdade (3.11) é náo positivo. Como $\|A\xi\|^2 \leq \|A\|^2\|\xi\|^2$ concluímos que

$$\lambda_\alpha^J \leq \lambda_{m(\alpha)}^A.$$

onde $m(\alpha) > (n+1+\tau)(\alpha-1)$.

□

3.4 Estimativa do índice de Morse em superfícies CMC compactas com fronteira livre

O caso das superfícies mínimas com fronteira livre é de especial interesse e os trabalhos de Fraser e Schoen [[23], [24], [25]] motivaram muitas pesquisas nesta área. Para tais hipersuperfícies todas as variações que mantêm a ∂M livremente na ∂W são permitidas, não restringindo o problema à variações que preservam o volume. Neste contexto, recentemente, Ambrozio, Carlotto e Sharp em [4] e P. Sargent em [49], provaram independentemente o seguinte resultado:

Teorema 3.4.1 (Ambrozio, Carlotto e Sharp-Sargent) *Seja M^2 uma superfície mínima com fronteira livre, compacta e orientável num domínio estritamente convexo*

$W^3 \subset \mathbb{R}^3$. *Se M tem gênero g e k componentes de fronteira, então*

$$\mathrm{Ind}(M) \geq \frac{2g+k-1}{3}.$$

Entretanto, no resultado de Ambrosio, Carlotto e Sharp os autores consideraram a hipótese mais fraca de W^3 ser um domínio do $\mathbb{R}^3$ estritamente convexo em média. Na verdade, os resultados de Ambrozio, Carlotto e Sharp aplicam-se mais geralmente à domínios em variedades Riemannianas com fronteira satisfazendo adequadas condições de curvatura. Em altas dimensões, eles também obtiveram limites inferiores para o índice de Morse em termos da dimensão do primeiro grupo de homologia relativo com coeficientes reais. A técnica apresentada nestes resultados usa as coordenadas de formas harmônicas como funções testes e é inspirada em trabalhos anteriores sobre estimativas de autovalores e estimativas de índices para hipersuperfícies mínimas compactas sem fronteira (ver [4], [44] e [50]).

Em dimensões maiores P. Sargent obteve a seguinte estimativa do índice de Morse:

Teorema 3.4.2 (Sargent) *Seja M^n uma hipersuperfície mínima com fronteira livre, compacta e orientável num domínio estritamente convexo $W^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Então,*

$$\mathrm{Ind}(M) \geq \frac{b_1^A(M)}{\binom{n+1}{2}}.$$

Nesse contexto obtivemos a seguinte estimativa para o índice de Morse:

Teorema 3.4.3 *Seja M^2 uma superfície CMC com fronteira livre, compacta e orientável num domínio convexo em média $W^3 \subset \bar{M}_c^3$. Então,*

$$\mathrm{Ind_w}(M) \geq \frac{2g+k-4-\tau}{2(3+\tau)}.$$

Como consequência deste Teorema, no caso Euclidiano, se a superfície é estável devemos ter $2g+k-4 \leq 0$. Dessa desigualdade segue um resultado obtido por Ros em [[43], Teorema 9]:

Teorema 3.4.4 (Ros) *Nas condições do Teorema 3.4.3, se M é estável, então as únicas possibilidades para g e k são*

(a) $g = 0$ *e* $k = 1, 2, 3$ *ou* 4;

(b) $g = 1$ *e* $k = 1$ *ou* 2.

Demonstração do Teorema 3.4.3. Seja $\mathcal{G}_{\alpha-1}$ o subespaço de $\mathcal{F}$ gerado pelas primeiras $\alpha-1$ autofunções associadas ao espectro do problema (3.3). Pelo Lema (3.2.2) as funções w_i tem média nula. Considere campos vetoriais $\xi \in \mathcal{H}^1_T(M)$ tais que as funções w_i e $\bar{w}_i$ satisfazem o sistema,

$$\int_M \bar{w}_i dM = \int_M w_i \phi_k dM = \int_M \bar{w}_i \phi_k dM = 0, \tag{3.12}$$

com $2(3+\tau)(\alpha-1)+3+\tau$ equações lineares homogêneas na variável ξ. Portanto, se α é o maior natural tal que $\dim \mathcal{H}^1_T(M) > 2(3+\tau)(\alpha-1)+3+\tau$, o sistema (3.12) terá pelo menos uma solução não trivial $\xi \in \mathcal{H}^1_T(M)$. Pelo Lema 3.2.1 temos

$$2g+k-1 > 2(3+\tau)(\alpha-1)+3+\tau$$

o que equivale a dizer que

$$\alpha \geq \frac{2g+k-4-\tau}{2(3+\tau)}.$$

Para ver que $\mathrm{Ind}_w(M) \geq \alpha$ usamos as funções de média nula $w_i, \bar{w}_i$ agora pertencentes ao espaço $\mathcal{G}^{\perp}_{\alpha-1}$ para estimar o α-ésimo autovalor do problema (3.3). Segue da caracterização variacional dos autovalores do problema (3.3) dada em (3.4) que

$$\lambda^L_\alpha \leq \frac{\int_M w_i J w_i + \int_{\partial M}(w_i \eta(w_i) + II^{\partial W}(N,N) w_i^2)}{\int_M w_i^2}$$

e

$$\lambda^L_\alpha \leq \frac{\int_M \bar{w}_i J \bar{w}_i + \int_{\partial M}(\bar{w}_i \eta(\bar{w}_i) + II^{\partial W}(N,N) \bar{w}_i^2)}{\int_M \bar{w}_i^2}.$$

Somando em i, $1 \leq i \leq 3+\tau$, e usando o Lema 3.2.3 encontramos

$$\lambda^L_\alpha \int_M \|\xi\|^2 \, dM \leq -(2c+4H^2)\int_M \|\xi\|^2 \, dM + 2H\int_M \langle A\xi, \xi\rangle \, dM + 2\int_{\partial M} H^{\partial W}\|\xi\|^2 d\sigma.$$

Aplicando o mesmo argumento para as funções testes $\bar{w}_i$ encontramos

$$\lambda^L_\alpha \int_M \|\xi\|^2 \, dM \leq -(2c+4H^2)\int_M \|\xi\|^2 \, dM + 2H\int_M \langle A\bar{\xi}, \bar{\xi}\rangle \, dM + 2\int_{\partial M} H^{\partial W}\|\xi\|^2 d\sigma.$$

Com o mesmo argumento usado no final da prova do Teorema 2.4.3 mais a hipótese de convexidade média do domínio W obtemos que

$$\lambda_\alpha < -2(c+H^2).$$

Assim, $\mathrm{Ind_w}(M) \geq \alpha$ e isso conclui a demonstração.

□

Capítulo 4

Estimativas para o espectro do operador de Jacobi em 4-variedades CMC fechadas

Neste capítulo fazemos uso de algumas propriedades inerentes à dimensão quatro a fim de conseguir resultados de comparação entre o espectro do Laplaciano de Hodge agindo em 2-formas e o espectro do operador de Jacobi além de obter estimativas para o índice de Morse em função do segundo número de Betti para 4-variedades fechadas com curvatura média constante imersas em espaços de curvatura seccional constante não negativa, seguindo as ideias que desenvolvemos nos capítulos anteriores.

4.1 Operadores de curvatura e o operador estrela de Hodge em hipersuperfícies de dimensão quatro

Nesta seção recordamos de alguns fatos referentes aos tensores que tem as mesmas simetrias do tensor de curvatura de Riemann para variedades de dimensão quatro. Para isso, começamos recordando a definição de aplicação de simetrização de Bianchi. Denotemos por $S^2(\Omega^2(M))$ o espaço dos $(4,0)$-tensores T com as seguintes simetrias:

$$T(X,Y,Z,W) = -T(Y,X,Z,W) = -T(X,Y,W,Z)$$
$$T(X,Y,Z,W) = T(Z,W,X,Y).$$

A aplicação de simetrização de Bianchi é então definida por

$$\mathfrak{B} : S^2(\Omega^2(M)) \to S^2(\Omega^2(M)),$$

$$\mathfrak{B}(T)(X,Y,Z,W) = \frac{1}{3}(T(X,Y,Z,W) + T(Y,Z,X,W) + T(Z,X,Y,W)).$$

Notemos que um tensor T pertence ao $\ker \mathfrak{B}$ se, além das simetrias acima, ele também satisfaz a primeira identidade de Bianchi. O $(4,0)$-tensor de curvatura de Riemann está no $\ker(\mathfrak{B})$ uma das razões pela qual o espaço $\ker(\mathfrak{B})$ é chamado o espaço dos tensores de tipo curvatura.

A proposição a seguir mostra uma decomposição do espaço $S^2(\Omega^2(M))$ e a sua demonstração pode ser encontrada em [54, Claim 7.2].

Proposição 4.1.1 *Temos a seguinte decomposição em soma direta ortogonal:*

$$S^2(\Omega^2(M)) = \ker(\mathfrak{B}) \oplus \Omega^4(M).$$

Conforme discussão feita em [54, Seção 8.2], existe um isomorfismo natural,

$$\Gamma : S^2(\Omega^2(M)) \to End(\Omega^2(M)), \tag{4.1}$$

onde $End(\Omega^2(M))$ representa o espaço das aplicações lineares simétricas sobre o espaço das 2-formas. Se $T \in S^2(\Omega^2(M))$ e $\mathcal{T} = \Gamma(T) \in End(\Omega^2(M))$ temos para a 2-forma $\omega = \frac{1}{2}w_{ij}e^i \wedge e^j$ que

$$\mathcal{T}\omega := \frac{1}{4}T_{ijpq}w_{pq}e^i \wedge e^j$$

e, reciprocamente,

$$T_{pqrs} := \langle \mathcal{T}(e^p \wedge e^q), e^r \wedge e^s \rangle$$

onde $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ é um referencial ortonormal local sobre M.

Para os nossos propósitos o produto de Kulkarni-Nomizu se torna ferramenta indispensável, o mesmo associa a um par P, Q de $(2,0)$-tensores simétricos um $(4,0)$-tensor $P \owedge Q$ dado por

$$(P \owedge Q)_{ijkl} = P_{ik}Q_{jl} + P_{jl}Q_{ik} - P_{il}Q_{jk} - P_{jk}Q_{il}.$$

Além disso, vale a seguinte proposição:

Proposição 4.1.2 $P \owedge Q \in \ker \mathfrak{B}$

Demonstração. Desde que P, Q são $(2,0)$-tensores simétricos temos

$$\begin{aligned}
(P \owedge Q)_{ijkl} &= P_{ki}Q_{lj} + P_{lj}Q_{ki} - P_{li}Q_{kj} - P_{kj}Q_{li} \\
&= (P \owedge Q)_{klij}. \\
(P \owedge Q)_{ijkl} &= -(P_{il}Q_{jk} + P_{jk}Q_{il} - P_{ik}Q_{jl} - P_{jl}Q_{ik}) \\
&= -(P \owedge Q)_{ijlk}. \\
(P \owedge Q)_{ijkl} &= -(P_{jk}Q_{il} + P_{il}Q_{jk} - P_{jl}Q_{ik} - P_{ik}Q_{jl}) \\
&= -(P \owedge Q)_{jikl}.
\end{aligned}$$

Isto mostra as simetrias. Para ver que vale a identidade de Bianchi calculamos:

$$\begin{aligned}
(P \owedge Q)_{ijkl} + (P \owedge Q)_{kijl} + (P \owedge Q)_{jkil} &= P_{ik}Q_{jl} + P_{jl}Q_{ik} - P_{il}Q_{jk} - P_{jk}Q_{il} \\
&\quad + P_{kj}Q_{il} + P_{il}Q_{kj} - P_{kl}Q_{ij} - P_{ij}Q_{kl} \\
&\quad + P_{ji}Q_{kl} + P_{kl}Q_{ji} - P_{jl}Q_{ki} - P_{ki}Q_{jl} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

No que segue $\Lambda^2(T_p^*M)$ representa o espaço vetorial real de dimensão $\binom{4}{2} = 6$ formado pelas aplicações bilineares antisimétricas sobre o espaço tangente T_pM.

Lembremos que operador estrela de Hodge $\star : \Lambda^2(T_p^*M) \to \Lambda^2(T_p^*M)$ tem a seguinte propriedade

$$\star^2 = (-1)^{k(n-k)} Id.$$

Portanto, em dimensão quatro e agindo sobre o espaço $\Lambda^2(T_p^*M)$ temos que $\star^2 = Id$. Assim, o operador estrela de Hodge possui os autovalores ± 1, ambos com multiplicidade três. Desse modo o espaço $\Lambda^2(T_p^*M)$ decompõe-se como

$$\Lambda^2(T_p^*M) = \Lambda^2_+(T_p^*M) \oplus \Lambda^2_-(T_p^*M)$$

onde $\Lambda^2_\pm(T_p^*M)$ são os autoespaços associados aos autovalores ± 1, respectivamente. Os elementos de $\Lambda^2_+(T_p^*M)$ e $\Lambda^2_-(T_p^*M)$ são chamados de autoduais e antiautoduais, respec-

tivamente. Considere agora as 2-formas

$$\alpha_1^{\pm} := \frac{1}{\sqrt{2}}(e^1 \wedge e^2 \pm e^3 \wedge e^4),$$
$$\alpha_2^{\pm} := \frac{1}{\sqrt{2}}(e^1 \wedge e^3 \pm e^4 \wedge e^2),$$
$$\alpha_3^{\pm} := \frac{1}{\sqrt{2}}(e^1 \wedge e^4 \pm e^2 \wedge e^3).$$

É facil ver que $p \in M$, $\{\alpha_1^+, \alpha_2^+, \alpha_3^+\}$ é uma base ortonormal para $\Lambda_+^2(T_p^*M)$ e $\{\alpha_1^-, \alpha_2^-, \alpha_3^-\}$ é uma base ortonormal para $\Lambda_-^2(T_p^*M)$. Desde que o operador estrela de Hodge é definido numa base $\{e^i \wedge e^j | 1 \leq i < j \leq 4\}$ de $\Lambda^2(T_p^*M)$ por

$$\star(e^1 \wedge e^2) = e^3 \wedge e^4,$$
$$\star(e^1 \wedge e^3) = e^4 \wedge e^2,$$
$$\star(e^1 \wedge e^4) = e^2 \wedge e^3,$$

sua matriz na base $\beta = \{\alpha_1^+, \alpha_2^+, \alpha_3^+, \alpha_1^-, \alpha_2^-, \alpha_3^-\}$ de $\Lambda^2(T_p^*M)$ é dada por

$$\star = \begin{pmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & -I_3 \end{pmatrix}.$$

Agora, dada uma imersão isométrica $\bar{x} : M^4 \to \bar{M}_c^5$ vamos considerar a sua segunda forma fundamental A como um $(2,0)$-tensor simétrico. Se g denota a métrica Riemanniana de M, então podemos produzir os seguintes tensores do tipo curvatura, $A \owedge g$ e $A^2 \owedge g$. Portanto, usando o isomorfismo Γ dado em (4.1), temos dois operadores naturais associados a estes tensores, a saber $\mathcal{A} = \Gamma(A \owedge g)$ e $\mathcal{B} = \Gamma(A^2 \owedge g)$.

O lema a seguir mostra duas identidades interessantes relacionando estes operadores com a geometria extrínseca de M^4.

Lema 4.1.1 *Com as notações acima valem as seguintes identidades:*

$$\mathcal{A} + \star\mathcal{A}\star = 4HId, \tag{4.2}$$
$$\mathcal{B} + \star\mathcal{B}\star = \|A\|^2 Id, \tag{4.3}$$

onde H é a curvatura média de $\bar{x}$.

Demonstração. Considere a base β construida acima num referencial ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ o qual diagonaliza A, isto é, $Ae_k = \lambda_k e_k$. Para provar (4.2) basta notar que a matriz do

operador $\mathcal{A}$ na base β é dada por

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2H & 0 & 0 & L_2 & 0 & 0 \\ 0 & 2H & 0 & 0 & L_3 & 0 \\ 0 & 0 & 2H & 0 & 0 & L_4 \\ L_2 & 0 & 0 & 2H & 0 & 0 \\ 0 & L_3 & 0 & 0 & 2H & 0 \\ 0 & 0 & L_4 & 0 & 0 & 2H \end{pmatrix},$$

onde $L_i = \lambda_1 + \lambda_i - 2H$, para cada $2 \leq i \leq 4$.

Afirmamos que os elementos da diagonal são iguais a $2H$. De fato, o primeiro elemento da diagonal de $\mathcal{A}$ é

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{11} &= \langle \mathcal{A}\alpha_1^+, \alpha_1^+ \rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle \mathcal{A}(e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4), e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4 \rangle \\ &= \frac{1}{2}(A \owedge g)_{1212} + (A \owedge g)_{1234} + \frac{1}{2}(A \owedge g)_{3434} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (A \owedge g)_{1212} &= (A_{11}g_{22} + A_{22}g_{11} - A_{12}g_{21} - A_{21}g_{12}) \\ &= \lambda_1 + \lambda_2, \\ (A \owedge g)_{1234} &= 0, \\ (A \owedge g)_{3434} &= (A_{33}g_{44} + A_{44}g_{33} - A_{34}g_{43} - A_{43}g_{34}) \\ &= \lambda_3 + \lambda_4 \end{aligned}$$

de onde concluímos que $\mathcal{A}_{11} = 2H$. De forma similar mostramos que $\mathcal{A}_{kk} = 2H$ para $2 \leq k \leq 6$.

Agora, observe que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{14} &= \langle \mathcal{A}\alpha_1^+, \alpha_1^- \rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle \mathcal{A}(e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4), e^1 \wedge e^2 - e^3 \wedge e^4 \rangle \\ &= \frac{1}{2}(A \owedge g)_{1212} - \frac{1}{2}(A \owedge g)_{3434} \\ &= \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4) \\ &= \lambda_1 + \lambda_2 - 2H. \end{aligned}$$

Analogamente, mostramos que $\mathcal{A}_{25} = \lambda_1 + \lambda_3 - 2H$ e $\mathcal{A}_{36} = \lambda_1 + \lambda_4 - 2H$. Os termos

$\mathcal{A}_{pq}$ com $p \neq q$ e $q \neq p+3$ são todos nulos, por exemplo

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{12} &= \langle \mathcal{A}\alpha_1^+, \alpha_2^+ \rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle \mathcal{A}(e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4), e^1 \wedge e^3 + e^4 \wedge e^2 \rangle \\
&= \frac{1}{2}(A \owedge g)_{1213} + \frac{1}{2}(A \owedge g)_{1242} + \frac{1}{2}(A \owedge g)_{3413} + \frac{1}{2}(A \owedge g)_{3442} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Para obter a identidade (4.2) basta efetuar o produto $\star\mathcal{A}\star$. A identidade (4.3) se prova de forma análoga observando que ao invés dos λ_i aparecem agora nas contas acima os autovalores de A^2 em decorrência do operador de curvatura $\mathcal{B}$ estar associado ao tensor $A^2 \owedge g$. Por fim, usamos a relação $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2 = \|A\|^2$.

□

4.2 Funções testes baseadas em coordenadas de 2-formas

Nesta seção acrescentamos à teoria feita na Seção 2.2 alguns lemas específicos da dimensão quatro a fim de trabalhar as coordenadas de 2-formas como funções testes admissíveis na avaliação da forma quadrática $\mathcal{J}_u''(0)$ para o cálculo do índice de Morse.

Seja a imersão $\bar{x} : M^4 \to \bar{M}_c^5$. Como antes $\mathcal{E} = \{\bar{E}_1, \cdots, \bar{E}_{5+\tau}\}$ representa uma base ortonormal de campos paralelos em $\mathbb{R}^{5+\tau}$, $\mathcal{E}^* = \{\bar{E}^1, \cdots, \bar{E}^{5+\tau}\}$ sua base dual, $E_i = \bar{E}_i - \langle \bar{E}_i, N\rangle N - \tau\langle \bar{E}_i, \nu\rangle \nu$ a projeção ortogonal de $\bar{E}_i$ sobre M e $E^i = E_i^\flat$ a 1-forma dual do campo vetorial E_i. Considere a base ortonormal $\mathcal{D} = \{\bar{E}^i \wedge \bar{E}^j | 1 \leq i < j \leq 5+\tau\}$ de formas bilineares antisimétricas paralelas sobre $\mathbb{R}^{5+\tau}$.

Dada $\omega \in \Omega^2(M)$ vamos usar as coordenadas de ω na base $\mathcal{D}$, ou seja, a funções

$$w_{ij} := \langle \omega, \bar{E}^i \wedge \bar{E}^j \rangle, \tag{4.4}$$

como funções testes. Observe que também podemos escrever as funções testes w_{ij} como

$$w_{ij} := \omega(E_i, E_j).$$

A seguir apresentamos alguns lemas técnicos com o objetivo de calcular a forma quadrática da segunda variação da área para estas funções.

Iniciamos deduzindo uma expressão para o operador de Weitzenböck agindo em 2-

formas. Para isso lembramos que a definição da curvatura de um tensor qualquer T é dada por

$$\mathcal{R}(X,Y)T = \nabla^2 T(Y,X) - \nabla^2 T(X,Y).$$

Neste sentido temos a seguinte identidade de Ricci para 2-formas:

Lema 4.2.1 *Para qualquer $\omega \in \Omega^2(M)$ vale*

$$(\mathcal{R}(X,Y)\omega)(Z,W) = \omega(\mathcal{R}(X,Y)W,Z) - \omega(\mathcal{R}(X,Y)Z,W). \tag{4.5}$$

Demonstração. Temos que

$$\mathcal{R}(X,Y)\omega = \nabla^2\omega(Y,X) - \nabla^2\omega(X,Y) = \nabla_Y(\nabla_X\omega) - \nabla_X(\nabla_Y\omega) - \nabla_{[Y,X]}\omega$$

onde

$$\begin{aligned}
(\mathcal{R}(X,Y)\omega)(Z,W) &= (\nabla_Y(\nabla_X\omega))(Z,W) - (\nabla_X(\nabla_Y\omega))(Z,W) - (\nabla_{[Y,X]}\omega)(Z,W)\\
&= Y(\nabla_X\omega(Z,W)) - (\nabla_X\omega)(\nabla_Y Z,W) - (\nabla_X\omega)(Z,\nabla_Y W)\\
&\quad -X(\nabla_Y\omega(Z,W)) + (\nabla_Y\omega)(\nabla_X Z,W) + (\nabla_Y\omega)(Z,\nabla_X W)\\
&\quad -[Y,X](\omega(Z,W)) + \omega(\nabla_{[Y,X]}Z,W) + \omega(Z,\nabla_{[Y,X]}W)\\
&= YX(\omega(Z,W)) - Y(\omega(\nabla_X Z,W)) - Y(\omega(Z,\nabla_X W))\\
&\quad -XY(\omega(Z,W)) + X(\omega(\nabla_Y Z,W)) + X(\omega(Z,\nabla_Y W))\\
&\quad -(\nabla_X\omega)(\nabla_Y Z,W) - (\nabla_X\omega)(Z,\nabla_Y W)\\
&\quad +(\nabla_Y\omega)(\nabla_X Z,W) + (\nabla_Y\omega)(Z,\nabla_X W)\\
&\quad -[Y,X](\omega(Z,W)) + \omega(\nabla_{[Y,X]}Z,W) + \omega(Z,\nabla_{[Y,X]}W)\\
&= -(\nabla_Y\omega)(\nabla_X Z,W) - \omega(\nabla_Y(\nabla_X Z),W) - \omega(\nabla_X Z,\nabla_Y W)\\
&\quad -(\nabla_Y\omega)(Z,\nabla_X W) - \omega(\nabla_Y Z,\nabla_X W) - \omega(Z,\nabla_Y(\nabla_X W))\\
&\quad + (\nabla_X\omega)(\nabla_Y Z,W) + \omega(\nabla_X(\nabla_Y Z),W) + \omega(\nabla_Y Z,\nabla_X W)\\
&\quad +(\nabla_X\omega)(Z,\nabla_Y W) + \omega(\nabla_X Z,\nabla_Y W) + \omega(Z,\nabla_X(\nabla_Y W))\\
&\quad -(\nabla_X\omega)(\nabla_Y Z,W) - (\nabla_X\omega)(Z,\nabla_Y W) + (\nabla_Y\omega)(\nabla_X Z,W)\\
&\quad +(\nabla_Y\omega)(Z,\nabla_X W) + \omega(\nabla_{[Y,X]}Z,W) + \omega(Z,\nabla_{[Y,X]}W)\\
&= -\omega(\nabla_Y(\nabla_X Z),W) - \omega(\nabla_X Z,\nabla_Y W) - \omega(\nabla_Y Z,\nabla_X W)\\
&\quad -\omega(Z,\nabla_Y(\nabla_X W)) + \omega(\nabla_X(\nabla_Y Z),W) + \omega(\nabla_Y Z,\nabla_X W)\\
&\quad +\omega(\nabla_X Z,\nabla_Y W) + \omega(Z,\nabla_X(\nabla_Y W)) + \omega(\nabla_{[Y,X]}Z,W) + \omega(Z,\nabla_{[Y,X]}W)\\
&= -\omega(\mathcal{R}(X,Y)Z,W) - \omega(Z,\mathcal{R}(X,Y)W).
\end{aligned}$$

$\square$

Usando a definição do operador de Weitzenböck dada na equação (1.4) e o Lema 4.2.1 obtemos a seguinte identidade

$$\begin{aligned}(\mathcal{W}\omega)(X,Y) = &\omega(\mathcal{R}(X,e_j)Y,e_j) - \omega(\mathcal{R}(Y,e_j)X,e_j)\\ &+\omega(\mathcal{R}ic\ X,Y) - \omega(\mathcal{R}ic\ Y,X),\end{aligned} \tag{4.6}$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

Agora vamos aplicar as identidades acima para 2-formas em hipersurperfícies.

Lema 4.2.2 *Seja A o operador de forma da imersão $\bar{x} : M^4 \to \bar{M}^5_c$. Para qualquer $\omega \in \Omega^2(M)$ temos*

$$\begin{aligned}(\mathcal{W}\omega)(E_i,E_j) = &4c\omega(E_i,E_j) + 4H\omega(AE_i,E_j) + 4H\omega(E_i,AE_j)\\ &-\omega(A^2E_i,E_j) - \omega(E_i,A^2E_j) - 2\omega(AE_i,AE_j),\end{aligned} \tag{4.7}$$

onde H é a curvatura média de M.

Demonstração. Segue da identidade (4.6) que

$$\begin{aligned}(\mathcal{W}\omega)(E_i,E_j) = &\omega(\mathcal{R}(E_i,e_k)E_j,e_k) - \omega(\mathcal{R}(E_j,e_k)E_i,e_k)\\ &+\omega(\mathcal{R}ic\ E_i,E_j) - \omega(\mathcal{R}ic\ E_j,E_i).\end{aligned}$$

Escrevendo

$$\omega = \frac{1}{2}\omega_{pq}e^p \wedge e^q$$

num referencial ortonormal local $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ numa vizinhança de $p \in M$ e usando a equação de Gauss, (1.2) obtemos

$$\begin{aligned}\omega(\mathcal{R}(E_i,e_k)E_j,e_k) &= \frac{1}{2}\omega_{pq}e^p \wedge e^q(\mathcal{R}(E_i,e_k)E_j,e_k)\\ &= \frac{1}{2}\omega_{pq}\{\langle e_p,\mathcal{R}(E_i,e_k)E_j\rangle\langle e_q,e_k\rangle\\ &\quad -\langle e_q,\mathcal{R}(E_i,e_k)E_j\rangle\langle e_p,e_k\rangle\}\\ &= \frac{1}{2}\omega_{pq}\{\langle\mathcal{R}(E_i,e_q)E_j,e_p\rangle - \langle\mathcal{R}(E_i,e_p)E_j,e_q\rangle\}\\ &= \frac{1}{2}\omega_{pq}\{c\langle E_i,e_q\rangle\langle e_p,E_j\rangle - c\langle E_i,e_p\rangle\langle e_q,E_j\rangle\\ &\quad -\langle AE_i,e_p\rangle\langle AE_j,e_q\rangle + \langle AE_i,e_q\rangle\langle AE_j,e_p\rangle\}\\ &= -c\omega(E_i,E_j) - \omega(AE_i,AE_j).\end{aligned}$$

Pela antisimetria da 2-forma ω temos que $\omega(\mathcal{R}(E_j, e_k)E_i, e_k) = -\omega(\mathcal{R}(E_i, e_k)E_j, e_k)$. Pelo Lema 2.2.2 o operador de Ricci se escreve, em dimensão quatro, como $\mathcal{R}ic(X) = 3cX + 4HAX - A^2X$ para qualquer $X \in \mathfrak{X}(M)$. Assim,

$$\begin{aligned}(\mathcal{W}\omega)(E_i, E_j) &= -2c\omega(E_i, E_j) - 2\omega(AE_i, AE_j) + \omega(3cE_i + 4HAE_i - A^2E_i, E_j)\\ &\quad -\omega(3cE_j + 4HAE_j - A^2E_j, E_i)\\ &= 4c\omega(E_i, E_j) + 4H\omega(AE_i, E_j) + 4H\omega(E_i, AE_j)\\ &\quad -\omega(A^2E_i, E_j) - \omega(E_i, A^2E_j) - 2\omega(AE_i, AE_j).\end{aligned}$$

□

Lema 4.2.3 *Seja A o operador de forma da imersão $\bar{x} : M^4 \to \bar{M}^5_c$. Para os campos da base $\mathcal{E}$ vale a seguinte identidade:*

$$\nabla^*\nabla(E^i \wedge E^j) = (A^2E_i)^\flat \wedge E^j + E^i \wedge (A^2E_j)^\flat + 2cE^i \wedge E^j. \tag{4.8}$$

Demonstração. Fixe um ponto $p \in M$ e considere um sistema local de coordenadas $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ geodésico em p. Usando os Lemas 2.2.1 e 2.2.2 obtemos

$$\begin{aligned}\nabla^*\nabla(E^i \wedge E^j) &= -\nabla_{e_k}\nabla_{e_k}(E^i \wedge E^j)\\ &= -\nabla_{e_k}(\nabla_{e_k}E^i \wedge E^j + E^i \wedge \nabla_{e_k}E^j)\\ &= \nabla^*\nabla E^i \wedge E^j - 2\nabla_{e_k}E^i \wedge \nabla_{e_k}E^j + E^i \wedge \nabla^*\nabla E^j\\ &= ((A^2E_i)^\flat + cE^i) \wedge E^j + E^i \wedge ((A^2E_j)^\flat + cE^j)\\ &\quad -2(g_i(Ae_k)^\flat - cf_ie^k) \wedge (g_j(Ae_k)^\flat - cf_je^k).\end{aligned}$$

Como $(Ae_k)^\flat \wedge (Ae_k)^\flat = e^k \wedge e^k = 0$ e

$$\begin{aligned}(Ae_k)^\flat \wedge e^k(X, Y) &= \langle Ae_k, X\rangle\langle e_k, Y\rangle - \langle Ae_k, Y\rangle\langle e_k, X\rangle\\ &= \langle AX, Y\rangle - \langle AY, X\rangle\\ &= 0\end{aligned}$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ o resultado segue.

Lema 4.2.4 *Com as notações acima temos que para qualquer $\omega \in \Omega^2(M)$ as funções*

testes $w_{ij} = \omega(E_i, E_j)$ *satisfazem*

$$\begin{aligned}\Delta w_{ij} = & -2cw_{ij} - 4H\omega(AE_i, E_j) - 4H\omega(E_i, AE_j) + 2\omega(A^2E_i, E_j) + 2\omega(E_i, A^2E_j) \\ & +\Delta_2\omega(E_i, E_j) - 2(\nabla_{e_p}\omega)(Ae_p, X_{ij}) + 2\omega(AE_i, AE_j) + 2c\delta\omega(Y_{ij}).\end{aligned}$$

Demonstração. Primeiro escrevemos $w_{ij} = \langle \omega, E^i \wedge E^j \rangle$ e então usamos as fórmulas (2.11), (1.5) e o Lema 4.2.3 para obter

$$\begin{aligned}\Delta w_{ij} &= \langle \nabla^*\nabla\omega, E^i \wedge E^j \rangle + \langle \omega, \nabla^*\nabla(E^i \wedge E^j) \rangle - 2\langle \nabla\omega, \nabla(E^i \wedge E^j) \rangle \\ &= \Delta_2\omega(E_i, E_j) - (\mathcal{W}\omega)(E_i, E_j) + \omega(A^2E_i, E^j) \\ &\quad +\omega(E^i, A^2E_j) + 2c\omega(E_i, E_j) - 2\langle \nabla\omega, \nabla(E^i \wedge E^j) \rangle. \qquad (4.9)\end{aligned}$$

Agora observe que

$$\begin{aligned}\langle \nabla\omega, \nabla(E^i \wedge E^j) \rangle &= \langle \nabla_{e_k}\omega, \nabla_{e_k}(E^i \wedge E^j) \rangle \\ &= \langle \nabla_{e_k}\omega, \nabla_{e_k}E^i \wedge E^j + E^i \wedge \nabla_{e_k}E^j \rangle \\ &= \langle \nabla_{e_k}\omega, g_i(Ae_k)^\flat \wedge E^j - cf_ie^k \wedge E^j \rangle \\ &\quad +\langle \nabla_{e_k}\omega, g_jE^i \wedge (Ae_k)^\flat - cf_jE^i \wedge e^k \rangle \\ &= \langle \nabla_{e_k}\omega, (Ae_k)^\flat \wedge X^{ij} - ce^k \wedge Y^{ij} \rangle \\ &= (\nabla_{e_k}\omega)(Ae_k, X_{ij}) + c\delta\omega(Y_{ij})\end{aligned}$$

onde X^{ij} e Y^{ij} são as 1-formas duais dos campos vetoriais $X_{ij} = g_iE_j - g_jE_i$ e $Y_{ij} = f_iE_j - f_jE_i$, respectivamente. Combinando esta última igualdade e o Lema 4.2.2 na equação (4.9) obtemos o resultado.

□

O próximo lema diz que quando tomamos 2-formas harmônicas, as suas funções coordenadas são de fato funções admissíveis para serem usadas como testes na avaliação do índice fraco de Morse no caso de hipersuperfícies de curvatura média constante.

Lema 4.2.5 *Considere a imersão* $\bar{x} : M^4 \to \bar{M}^5_c$. *Para qualquer* $\omega \in \mathcal{H}^2(M)$ *defina as funções* $w_{ij} = \omega(E_i, E_j)$ *e* $\bar{w}_{ij} = \star\omega(E_i, E_j)$. *Se* M *é fechada, então*

$$\int_M \bar{w}_{ij}dM = \int_M w_{ij}dM = 0.$$

Demonstração. Fixe um ponto $p \in M$, e considere um referencial ortonormal local em

$p \in M$, $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, o qual é geodésico em p. Primeiro note que

$$\begin{aligned}
\delta(\iota_{E_i}\omega) &= -(\nabla_{e_p}(\iota_{E_i}\omega))e_p \\
&= -e_p((\iota_{E_i}\omega)e_p) \\
&= -e_p(\omega(E_i, e_p)) \\
&= e_p(\omega(e_p, E_i)) \\
&= (\nabla_{e_p}\omega)(e_p, E_i) + \omega(e_p, \nabla_{e_p}E_i) \\
&= -\delta(\omega)(E_i) + g_i\omega(e_p, Ae_p) - cf_i\omega(e_p, e_p)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\omega(e_p, Ae_p) &= \frac{1}{2}w_{ij}(e^i \wedge e^j)(e_p, Ae_p) \\
&= \frac{1}{2}w_{ij}(\langle Ae_j, e_i\rangle - \langle Ae_i, e_j\rangle) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Como $\delta(\omega)$ e $\omega(e_p, e_p)$ são nulos obtemos $\delta(\iota_{E_i}\omega) = 0$. Pelo Lema 2.2.1 $E^j = df_j$ onde obtemos

$$\begin{aligned}
\int_M w_{ij}dM &= \int_M \langle \iota_{E_i}\omega, E^j\rangle dM \\
&= \int_M \langle \iota_{E_i}\omega, df_j\rangle dM \\
&= \int_M \langle \delta(\iota_{E_i}\omega), f_i\rangle dM \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Como, pelo Lema 1.3.3, o Laplaciano de Hodge comuta com o operador estrela, segue que $\star\omega$ é harmônica e portanto concluímos que as funções $\bar{w}_{ij}$ também têm média nula.

□

Lema 4.2.6 *Seja A o operador de forma da imersão $\bar{x} : M^4 \to \bar{M}_c^5$ e considere os operadores de curvatura $\mathcal{A} = \Gamma(A \owedge g)$, $\mathcal{B} = \Gamma(A^2 \owedge g)$ e $\mathcal{R} = \Gamma(R)$ onde R é o tensor de curvatura de Riemann. Para qualquer $\omega \in \Omega^2(M)$ e funções $w_{ij} = \omega(E_i, E_j)$ valem*

$$w_{ij}^2 = 2\|\omega\|^2; \tag{4.10}$$

$$[\omega(AE_i, E_j) + \omega(E_i, AE_j)]w_{ij} = 2\langle \mathcal{A}\omega, \omega\rangle; \tag{4.11}$$

$$[\omega(A^2E_i, E_j) + \omega(E_i, A^2E_j)]w_{ij} = 2\langle \mathcal{B}\omega, \omega\rangle; \tag{4.12}$$

$$\omega(AE_i, AE_j)w_{ij} = 2\langle \mathcal{R}\omega, \omega\rangle - 2c\|\omega\|^2; \tag{4.13}$$

$$(\nabla_{e_p}\omega)(Ae_p, X_{ij})w_{ij} = 0; \tag{4.14}$$

$$c\delta\omega(Y_{ij})w_{ij} = 0. \tag{4.15}$$

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned} w_{ij}^2 &= \langle \omega, E^i \wedge E^j \rangle^2 \\ &= 2\langle \omega, \frac{1}{2}\langle \omega, \bar{E}^i \wedge \bar{E}^j \rangle \bar{E}^i \wedge \bar{E}^j \rangle \\ &= 2\|\omega\|^2. \end{aligned}$$

onde vale (4.10). Para provar (4.11) calculamos

$$\begin{aligned} [\omega(AE_i, E_j) + \omega(E_i, AE_j)]w_{ij} &= \frac{1}{2}\omega_{pq}[(e^p \wedge e^q)(AE_i, E_j) + (e^p \wedge e^q)(E_i, AE_j)]w_{ij} \\ &= \frac{1}{2}\omega_{pq}w_{ij}[\langle e_p, AE_i\rangle\langle e_q, E_j\rangle - \langle e_p, E_j\rangle\langle e_q, AE_i\rangle] \\ &\quad + \frac{1}{2}\omega_{pq}w_{ij}[\langle e_p, E_i\rangle\langle e_q, AE_j\rangle - \langle e_p, AE_j\rangle\langle e_q, E_i\rangle] \\ &= \frac{1}{2}\omega_{pq}w_{ij}(A \owedge g)(E_i, E_j, e_p, e_q) \\ &= \frac{1}{2}\omega_{pq}w_{ij}\langle \mathcal{A}(E^i \wedge E^j), e^p \wedge e^q \rangle \\ &= \langle \omega, E^i \wedge E^j \rangle \langle \mathcal{A}(E^i \wedge E^j), \omega \rangle \\ &= \langle \omega, \bar{E}^i \wedge \bar{E}^j \rangle \langle \bar{E}^i \wedge \bar{E}^j, \mathcal{A}\omega \rangle \\ &= 2\langle \omega, \mathcal{A}\omega \rangle. \end{aligned}$$

A prova de (4.12) é análoga à prova de (4.11). Para a prova de (4.13) usamos a equação de Gauss, (1.2), para obter

$$\begin{aligned} \omega(AE_i, AE_j)w_{ij} &= \frac{1}{2}\omega_{pq}(e^p \wedge e^q)(AE_i, AE_j)w_{ij} \\ &= \frac{1}{2}\omega_{pq}w_{ij}[\langle e_p, AE_i\rangle\langle e_q, AE_j\rangle - \langle e_p, AE_j\rangle\langle e_q, AE_i\rangle] \\ &= \frac{1}{2}\omega_{pq}w_{ij}[R(E_i, E_j, e_p, e_q) - \overline{R}(E_i, E_j, e_p, e_q)] \\ &= \frac{1}{2}\omega_{pq}w_{ij}\langle \mathcal{R}(E^i \wedge E^j), e^p \wedge e^q \rangle \\ &\quad - \frac{c}{2}\omega_{pq}w_{ij}[\langle E_i, e_p\rangle\langle E_j, e_q\rangle - \langle E_i, e_q\rangle\langle E_j, e_p\rangle] \\ &= \langle \omega, \bar{E}^i \wedge \bar{E}^j \rangle \langle \bar{E}^i \wedge \bar{E}^j, \mathcal{R}\omega \rangle \\ &\quad - \frac{c}{2}\omega_{pq}\langle \omega, \bar{E}^i \wedge \bar{E}^j \rangle [\langle \bar{E}^i, e^p\rangle\langle \bar{E}^j, e^q\rangle - \langle \bar{E}^i, e^q\rangle\langle \bar{E}^j, e^p\rangle] \\ &= 2\langle \omega, \mathcal{R}\omega \rangle - \frac{c}{2}\omega_{pq}\langle \omega, e^p \wedge e^q \rangle + \frac{c}{2}\omega_{pq}\langle \omega, e^q \wedge e^p \rangle \\ &= 2\langle \omega, \mathcal{R}\omega \rangle - 2c\|\omega\|^2. \end{aligned}$$

Agora, note que

$$
\begin{aligned}
(\nabla_{e_p}\omega)(Ae_p, X_{ij})w_{ij} &= g_i(\nabla_{e_p}\omega)(Ae_p, E_j)\langle \omega, E^i \wedge E^j\rangle \\
&\quad - g_j(\nabla_{e_p}\omega)(Ae_p, E_i)\langle \omega, E^i \wedge E^j\rangle \\
&= -g_i(\nabla_{e_p}\omega)(Ae_p, E_j)\langle \iota_{E_j}\omega, E^i\rangle \\
&\quad - g_j(\nabla_{e_p}\omega)(Ae_p, E_i)\langle \iota_{E_i}\omega, E^j\rangle
\end{aligned}
$$

onde a identidade (4.14) segue do fato que $g_j\langle \iota_{E_i}\omega, E^j\rangle \ = \langle N, (\iota_{E_i}\omega)^{\#}\rangle = 0$. Por fim,

$$
\begin{aligned}
c\delta\omega(Y_{ij})w_{ij} &= cf_i\langle (\delta\omega)^{\#}, E_j\rangle\langle \omega, E^i \wedge E^j\rangle - cf_j\langle (\delta\omega)^{\#}, E_i\rangle\langle \omega, E^i \wedge E^j\rangle \\
&= -cf_i\langle (\delta\omega)^{\#}, E_j\rangle\langle \iota_{E_j}\omega, E^i\rangle - cf_j\langle (\delta\omega)^{\#}, E_i\rangle\langle \iota_{E_i}\omega, E^j\rangle \\
&= -c\langle (\delta\omega)^{\#}, E_j\rangle\langle \bar{x}, (\iota_{E_j}\omega)^{\#}\rangle - c\langle (\delta\omega)^{\#}, E_i\rangle\langle \bar{x}, (\iota_{E_i}\omega)^{\#}\rangle.
\end{aligned}
$$

No caso Euclidiano, $c = 0$, o resultado é evidente. No caso esférico, $c > 0$, $\bar{x}$ é ortogonal à M donde $\langle \bar{x}, (\iota_Z\omega)^{\#}\rangle = 0$, para todo $Z \in \mathfrak{X}(M)$, e o resultado segue.

□

Lema 4.2.7 *Seja $\bar{x} : M^4 \to \bar{M}^5_c$ imersão de curvatura média constante H. Para qualquer $\omega \in \Omega^2(M)$ considere as funções $w_{ij} = \omega(E_i, E_j)$ e $\bar{w}_{ij} = \star\omega(E_i, E_j)$. Se M é fechada, então*

$$
\begin{aligned}
\int_M w_{ij}Jw_{ij} &= -16c\int_M \|\omega\|^2 - 8H\int_M \langle \mathcal{A}\omega, \omega\rangle - 2\int_M \|A\|^2\|\omega\|^2 \\
&\quad +4\int_M \langle \mathcal{B}\omega, \omega\rangle + 4\int_M \langle \mathcal{R}\omega, \omega\rangle + 2\int_M \langle \Delta_2\omega, \omega\rangle,
\end{aligned} \tag{4.16}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_M \bar{w}_{ij}J\bar{w}_{ij} &= -16c\int_M \|\omega\|^2 - 8H\int_M \langle \star\mathcal{A}\star\omega, \omega\rangle - 2\int_M \|A\|^2\|\omega\|^2 \\
&\quad +4\int_M \langle \star\mathcal{B}\star\omega, \omega\rangle + 4\int_M \langle \star\mathcal{R}\star\omega, \omega\rangle + 2\int_M \langle \Delta_2\omega, \omega\rangle.
\end{aligned} \tag{4.17}
$$

Demonstração. Segue dos Lemas 4.2.4 e 4.2.6 que

$$\begin{aligned}
w_{ij}\Delta w_{ij} = & -2cw_{ij}^2 \\
& -4H[\omega(AE_i, E_j) + \omega(E_i, AE_j)]w_{ij} \\
& +2[\omega(A^2E_i, E_j) + \omega(E_i, A^2E_j)]w_{ij} \\
& +2\omega(AE_i, AE_j)w_{ij} \\
& -2(\nabla_{e_p}\omega)(Ae_p, X_{ij})w_{ij} \\
& +2c\delta\omega(Y_{ij})w_{ij} \\
& +\Delta_2\omega(E_i, E_j)w_{ij} \\
= & -8c\|\omega\|^2 - 8H\langle\mathcal{A}\omega, \omega\rangle + 4\langle\mathcal{B}\omega, \omega\rangle \\
& +4\langle\mathcal{R}\omega, \omega\rangle + 2\langle\Delta_2\omega, \omega\rangle.
\end{aligned}$$

Como o operador de Jacobi da imersão $\bar{x}$ é dado por $J = \Delta - (\|A\|^2 + 4c)$ segue que

$$\begin{aligned}
\int_M w_{ij}Jw_{ij} = & \int_M w_{ij}\Delta w_{ij} - \int_M (\|A\|^2 + 4c)w_{ij}^2 \\
= & -16c\int_M \|\omega\|^2 - 8H\int_M \langle\mathcal{A}\omega, \omega\rangle + 4\int_M \langle\mathcal{B}\omega, \omega\rangle \\
& +4\int_M \langle\mathcal{R}\omega, \omega\rangle + 2\int_M \langle\Delta_2\omega, \omega\rangle - 2\int_M \|A\|^2\|\omega\|^2,
\end{aligned}$$

onde obtemos (4.16). A igualdade (4.17) se prova de forma análoga.

□

4.3 Comparação entre os espectros de J e Δ_2

Nesta seção aplicamos as técnicas obtidas nos capítulos anteriores para as funções testes w_{ij} e $\bar{w}_{ij}$ para provar um resultado de comparação entre os autovalores do operador de Jacobi e os autovalores do operador Laplaciano de Hodge agindo em 2-formas. Antes disso provamos o seguinte lema, o qual mostra que um termo de curvatura que aparece na aplicação da técnica tem uma limitação dada pela geometria extrínseca:

Lema 4.3.1 *Considere a imersão $\bar{x} : M^4 \to \bar{M}_c^5$. Para qualquer $\omega \in \Omega^2(M)$ temos*

$$\langle\mathcal{R}\omega, \omega\rangle + \langle\mathcal{R}\star\omega, \star\omega\rangle \leq (2c + \frac{\|A\|^2}{2})\|\omega\|^2. \tag{4.18}$$

Demonstração. Seja $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ um referencial ortonormal local que diagonaliza A, isto é, $Ae_k = \lambda_k e_k$. Considere em p a base $\{e^i \wedge e^j; 1 \leq i < j \leq 4\}$ de $\Lambda^2(T_p^*M)$. Temos

que

$$\langle \mathcal{R}e^i \wedge e^j, e^r \wedge e^s \rangle = \begin{cases} c + \lambda_i \lambda_j & \text{se} \quad (i,j) = (r,s) \\ 0 & \text{se} \quad (i,j) \neq (r,s). \end{cases}$$

Assim, para

$$\omega = w_{12} e^1 \wedge e^2 + w_{13} e^1 \wedge e^3 + w_{14} e^1 \wedge e^4 + w_{23} e^2 \wedge e^3 + w_{24} e^2 \wedge e^4 + w_{34} e^3 \wedge e^4$$

e

$$\star\omega = w_{34} e^1 \wedge e^2 - w_{24} e^1 \wedge e^3 + w_{23} e^1 \wedge e^4 + w_{14} e^2 \wedge e^3 - w_{13} e^2 \wedge e^4 + w_{12} e^3 \wedge e^4$$

obtemos

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}\omega, \omega \rangle &= w_{12}^2 \langle \mathcal{R}e^1 \wedge e^2, e^1 \wedge e^2 \rangle + w_{13}^2 \langle \mathcal{R}e^1 \wedge e^3, e^1 \wedge e^3 \rangle + w_{14}^2 \langle \mathcal{R}e^1 \wedge e^4, e^1 \wedge e^4 \rangle \\ &\quad + w_{23}^2 \langle \mathcal{R}e^2 \wedge e^3, e^2 \wedge e^3 \rangle + w_{24}^2 \langle \mathcal{R}e^2 \wedge e^4, e^2 \wedge e^4 \rangle + w_{34}^2 \langle \mathcal{R}e^3 \wedge e^4, e^3 \wedge e^4 \rangle \\ &= w_{12}^2 (c + \lambda_1 \lambda_2) + w_{13}^2 (c + \lambda_1 \lambda_3) + w_{14}^2 (c + \lambda_1 \lambda_4) \\ &\quad + w_{23}^2 (c + \lambda_2 \lambda_3) + w_{24}^2 (c + \lambda_2 \lambda_4) + w_{34}^2 (c + \lambda_3 \lambda_4) \\ &= c\|\omega\|^2 + w_{12}^2 \lambda_1 \lambda_2 + w_{13}^2 \lambda_1 \lambda_3 + w_{14}^2 \lambda_1 \lambda_4 + w_{23}^2 \lambda_2 \lambda_3 + w_{24}^2 \lambda_2 \lambda_4 + w_{34}^2 \lambda_3 \lambda_4 \end{aligned}$$

e, de forma análoga,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}\star\omega, \star\omega \rangle &= w_{12}^2 (c + \lambda_3 \lambda_4) + w_{13}^2 (c + \lambda_2 \lambda_4) + w_{14}^2 (c + \lambda_2 \lambda_3) \\ &\quad + w_{23}^2 (c + \lambda_1 \lambda_4) + w_{24}^2 (c + \lambda_1 \lambda_3) + w_{34}^2 (c + \lambda_1 \lambda_2) \\ &= c\|\omega\|^2 + w_{12}^2 \lambda_3 \lambda_4 + w_{13}^2 \lambda_2 \lambda_4 + w_{14}^2 \lambda_2 \lambda_3 + w_{23}^2 \lambda_1 \lambda_4 + w_{24}^2 \lambda_1 \lambda_3 + w_{34}^2 \lambda_1 \lambda_2. \end{aligned}$$

Desta forma, temos em cada ponto de M

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}\omega, \omega \rangle + \langle \mathcal{R}\star\omega, \star\omega \rangle &= 2c\|\omega\|^2 + (w_{12}^2 + w_{34}^2)(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_3 \lambda_4) \\ &\quad + (w_{13}^2 + w_{24}^2)(\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_4) + (w_{14}^2 + w_{23}^2)(\lambda_1 \lambda_4 + \lambda_2 \lambda_3) \\ &\leq 2c\|\omega\|^2 + \frac{(w_{12}^2 + w_{34}^2)(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2)}{2} \\ &\quad + \frac{(w_{13}^2 + w_{24}^2)(\lambda_1^2 + \lambda_3^2 + \lambda_2^2 + \lambda_4^2)}{2} \\ &\quad + \frac{(w_{14}^2 + w_{23}^2)(\lambda_1^2 + \lambda_4^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)}{2} \\ &= (2c + \frac{\|A\|^2}{2})\|\omega\|^2. \end{aligned}$$

□

Agora estamos prontos para provar o teorema principal deste capítulo. A saber:

Teorema 4.3.1 *Seja M^4 uma hipersuperfície CMC fechada imersa em $\bar{M}_c^5$. Então, para todo inteiro positivo α,*

$$\lambda_\alpha^J \leq -6c - 8H^2 + \frac{1}{2}\max_M \|A\|^2 + \lambda_{m(\alpha)}^{\Delta_2}$$

onde $m(\alpha) > 2\binom{5+\tau}{2}(\alpha - 1)$.

Demonstração. Considere $\{\omega_i\}_{i=1}^{+\infty}$ um conjunto L^2-ortonormal emt $\Omega^2(M)$ constituído por 2-formas que satisfazem $\Delta_2\omega_k = \lambda_k^{\Delta_2}\omega_k$. Seja $\mathcal{L}_m^{\Delta_2}$ o espaço vetorial gerado pelas primeiras m auto 2-formas de Δ_2. Fixe em $L^2(M)$ uma base ortonormal $\{\phi_i\}_{i=1}^{+\infty}$ dada pelas autofunções do operador de Jacobi e considere 2-formas $\omega \in \mathcal{L}_m^{\Delta_2}$ tais que as funções $w_{ij} = \omega(E_i, E_j)$ e $\bar{w}_{ij} = \star\omega(E_i, E_j)$ estão em $\mathcal{G}_{\alpha-1}^\perp$ para algum $\alpha \in \mathbb{N}$ e $1 \leq i < j \leq 5 + \tau$. Assim, estamos considerando um sistema

$$\int_M w_{ij}\phi_k = \int_M \bar{w}_{ij}\phi_k = 0, \quad 1 \leq i < j \leq 5 + \tau \quad \text{and} \quad 1 \leq k \leq \alpha - 1 \tag{4.19}$$

com $2\binom{5+\tau}{2}(\alpha - 1)$ equações lineares homogêneas na variável ω. Portanto, se $m(\alpha) = \dim \mathcal{L}_m^{\Delta_2} > 2\binom{5+\tau}{2}(\alpha-1)$ então o sistema (4.19) possui pelo menos uma solução não trivial $\omega \in \mathcal{L}_m^{\Delta_2}$ tal que $w_{ij}, \bar{w}_{ij} \in \mathcal{G}_{\alpha-1}^\perp$ para todo $1 \leq i < j \leq 5 + \tau$. Segue da caracterização variacional dos autovalores de J, dada em (2.3), que

$$\lambda_\alpha^J \leq \frac{\int_M w_{ij} J w_{ij}}{\int_M w_{ij}^2} \quad \text{e} \quad \lambda_\alpha^J \leq \frac{\int_M \bar{w}_{ij} J \bar{w}_{ij}}{\int_M \bar{w}_{ij}^2}.$$

Pelo Lema 4.2.7 obtemos

$$\begin{aligned} 2\lambda_\alpha^J \int_M \|\omega\|^2 \leq & -16c \int_M \|\omega\|^2 - 8H \int_M \langle \mathcal{A}\omega, \omega\rangle - 2\int_M \|A\|^2\|\omega\|^2 \\ & +4\int_M \langle \mathcal{B}\omega, \omega\rangle + 4\int_M \langle \mathcal{R}\omega, \omega\rangle + 2\int_M \langle \Delta_2\omega, \omega\rangle \end{aligned} \tag{4.20}$$

e

$$\begin{aligned} 2\lambda_\alpha^J \int_M \|\omega\|^2 \leq & -16c \int_M \|\omega\|^2 - 8H \int_M \langle \star\mathcal{A}\star\omega, \omega\rangle - 2\int_M \|A\|^2\|\omega\|^2 \\ & +4\int_M \langle \star\mathcal{B}\star\omega, \omega\rangle + 4\int_M \langle \star\mathcal{R}\star\omega, \omega\rangle + 2\int_M \langle \Delta_2\omega, \omega\rangle. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Aplicando os Lemas 4.1.1 e 4.3.1 à soma das desigualdades (4.20) e (4.21) obtemos

$$\begin{aligned}\lambda_\alpha^J \int_M \|\omega\|^2 &\leq -8(c+H^2)\int_M \|\omega\|^2 + \int_M (\langle \mathcal{R}\omega, \omega\rangle + \langle \mathcal{R}\star\omega, \star\omega\rangle) + \lambda_{m(\alpha)}^{\Delta_2}\int_M \|\omega\|^2 \\ &\leq -8(c+H^2)\int_M \|\omega\|^2 + \int_M (2c + \frac{\|A\|^2}{2})\|\omega\|^2 + \lambda_{m(\alpha)}^{\Delta_2}\int_M \|\omega\|^2 \\ &= \int_M (\frac{\|A\|^2}{2} - 6c - 8H^2)\|\omega\|^2 + \lambda_{m(\alpha)}^{\Delta_2}\int_M \|\omega\|^2\end{aligned}$$

e concluímos que

$$\lambda_\alpha^J \leq -6c - 8H^2 + \frac{1}{2}\max_M \|A\|^2 + \lambda_{m(\alpha)}^{\Delta_2} \tag{4.22}$$

sempre que $m(\alpha) > 2\binom{5+\tau}{2}(\alpha - 1)$.

□

Fazendo hipóteses adicionais sobre o quadrado da norma da segunda forma fundamental a desigualdade (4.22) nos permite obter estimativas para o índice de Morse e o índice fraco de Morse de hipersuperfícies CMC fechadas imersas em $\bar{M}_c^5$. Este é o conteúdo dos resultados que apresentamos na seção a seguir.

4.4 Estimativa do índice de Morse de 4-variedades CMC fechadas

Nesta Seção fazemos uso de 2-formas harmônicas na composição das funções testes

$$w_{ij} = \omega(E_i, E_j) \quad \text{e} \quad \bar{w}_{ij} = \star\omega(E_i, E_j)$$

a fim de provar os seguintes resultados:

Teorema 4.4.1 *Seja $\bar{x} : M^4 \to \mathbb{S}^5$ uma imersão mínima fechada com curvatura escalar positiva. Então,*

$$\mathrm{Ind}(M) \geq \frac{b_2(M)}{30}.$$

Teorema 4.4.2 *Seja $\bar{x} : M^4 \to \bar{M}_c^5$ a imersão CMC fechada com curvatura escalar positiva. Então,*

$$\mathrm{Ind_w}(M) \geq \frac{b_2(M)}{2\binom{5+\tau}{2}}.$$

Para a prova dos Teoremas 4.4.1 e 4.4.2 usaremos uma equação que envolve a curvatura escalar, S, obtida da seguinte forma: se $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ é um referencial local ortonormal

sobre M segue da equação (2.9) que

$$\langle \mathcal{R}ic(e_i), e_i\rangle = 3c\langle e_i, e_i\rangle + 4H\langle Ae_i, e_i\rangle - \langle A^2 e_i, e_i\rangle,$$

onde somando em i obtemos

$$S = 12c + 16H^2 - \|A\|^2.$$

Demonstração do Teorema 4.4.1. Considere na prova do Teorema 4.3.1 uma 2-forma harmônica ω e $H = 0$. A hipótese sobre a curvatura escalar nos dá $\|A\|^2 < 12$. Como ω é harmônica temos $\lambda_{m(\alpha)} = 0$ se $m(\alpha) = b_2(M)$. Segue da desigualdade (4.22) que $\lambda_\alpha^J < 0$ onde α é o maior natural tal que

$$b_2(M) > 30(\alpha - 1).$$

Logo, existem α autovalores negativos de J donde $\mathrm{Ind}(M) \geq \alpha$. O resultado segue da desigualdade $\alpha \geq \dfrac{b_2(M)}{30}$.

□

Demonstração do Teorema 4.4.2. Assim como foi feito na demonstração do Teorema 2.4.3 considere o espaço $\mathcal{G}_{\alpha-1}$ gerado pelas primeiras $\alpha - 1$ autofunções do operador L. Considere 2-formas $\omega \in \mathcal{H}^2(M)$ tais que as funções $w_{ij} = \omega(E_i, E_j)$ e $\bar{w}_{ij} = \star\omega(E_i, E_j)$ satisfazem o sistema

$$\int_M w_{ij}\phi_k = \int_M \bar{w}_{ij}\phi_k = 0, \quad 1 \leq i \leq 5 + \tau \quad \text{e} \quad 1 \leq k \leq \alpha - 1, \tag{4.23}$$

com $2\binom{5+\tau}{2}(\alpha - 1)$ equações lineares homogêneas na variável ω.

Portanto, se α é o maior natural tal que $\dim \mathcal{H}^2(M) > 2\binom{5+\tau}{2}(\alpha - 1)$, o sistema (4.23) terá pelo menos uma solução não trivial $\omega \in \mathcal{H}^2(M)$. Segue da caracterização variacional dos autovalores de L, dada em (2.4), que

$$\lambda_\alpha^L \int_M w_{ij}^2 \leq \int_M w_{ij} J w_{ij} \quad \text{e} \quad \lambda_\alpha^L \int_M \bar{w}_{ij}^2 \leq \int_M \bar{w}_{ij} J \bar{w}_{ij}.$$

Segue do Lema 4.2.7 que

$$\begin{aligned}\lambda_\alpha^L \int_M \|\omega\|^2 \leq & -16c \int_M \|\omega\|^2 - 8H \int_M \langle \mathcal{A}\omega, \omega\rangle - 2\int_M \|A\|^2 \|\omega\|^2 \\ & +4\int_M \langle \mathcal{B}\omega, \omega\rangle + 4\int_M \langle \mathcal{R}\omega, \omega\rangle\end{aligned}$$

e

$$\lambda_\alpha^L \int_M \|\omega\|^2 \leq -16c \int_M \|\omega\|^2 - 8H \int_M \langle \star\mathcal{A}\star\omega, \omega\rangle - 2\int_M \|A\|^2\|\omega\|^2$$
$$+4\int_M \langle \star\mathcal{B}\star\omega, \omega\rangle + 4\int_M \langle \star\mathcal{R}\star\omega, \omega\rangle.$$

Usando os Lemas 4.1.1 e 4.3.1 na soma destas duas últimas desigualdades obtemos

$$\lambda_\alpha^L \int_M \|\xi\|^2 \leq (-6c - 8H^2)\int_M \|\xi\|^2 + \frac{1}{2}\int_M \|A\|^2\|\xi\|^2.$$

Agora, a hipótese sobre a curvatura escalar nos dá $\|A\|^2 < 12c + 16H^2$ de onde obtemos que o α-ésimo autovalor do operador L é negativo e isto implica $\mathrm{Ind}_{\mathrm{w}}(M) \geq \alpha$. Como α é o maior natural tal que

$$b_2(M) > 2\binom{5+\tau}{2}(\alpha - 1)$$

obtemos que

$$\alpha \geq \frac{b_2(M)}{2\binom{5+\tau}{2}}$$

e isso conclui a demonstração.

□

Referências Bibliográficas

[1] U. Abresch, *Constant mean curvature tori in terms of elliptic functions*, J. Reine Angew. Math. **374** (1987), 169–192. MR 876223

[2] Abdelhamid Ainouz and Rabah Souam, *Stable capillary hypersurfaces in a half-space or a slab*, Indiana Univ. Math. J. **65** (2016), no. 3, 813–831. MR 3528820

[3] Luis J. Alías and Paolo Piccione, *Bifurcation of constant mean curvature tori in Euclidean spheres*, J. Geom. Anal. **23** (2013), no. 2, 677–708. MR 3023855

[4] Lucas Ambrozio, Alessandro Carlotto, and Ben Sharp, *Index estimates for free boundary minimal hypersurfaces*, to appear in Math. Ann. (2017).

[5] ———, *Comparing the Morse index and the first Betti number of minimal hypersurfaces*, J. Differential Geom. **108** (2018), no. 3, 379–410. MR 3770846

[6] Ben Andrews and Haizhong Li, *Embedded constant mean curvature tori in the three-sphere*, J. Differential Geom. **99** (2015), no. 2, 169–189. MR 3302037

[7] Maria Athanassenas, *A variational problem for constant mean curvature surfaces with free boundary*, J. Reine Angew. Math. **377** (1987), 97–107. MR 887402

[8] Ezequiel Barbosa, *On cmc free-boundary stable hypersurfaces in a euclidean ball*, arXiv:1607.00038 [math.DG], to appear in Math. Ann (2016).

[9] J. Lucas Barbosa, Manfredo do Carmo, and Jost Eschenburg, *Stability of hypersurfaces of constant mean curvature in Riemannian manifolds*, Math. Z. **197** (1988), no. 1, 123–138. MR 917854

[10] João Lucas Barbosa and Manfredo do Carmo, *Stability of hypersurfaces with constant mean curvature*, Math. Z. **185** (1984), no. 3, 339–353. MR 731682

[11] Lucas Barbosa and Pierre Bérard, *Eigenvalue and "twisted" eigenvalue problems, applications to CMC surfaces*, J. Math. Pures Appl. (9) **79** (2000), no. 5, 427–450. MR 1759435

[12] A. I. Bobenko, *All constant mean curvature tori in* $\mathbf{R}^3$, S^3, H^3 *in terms of theta-functions*, Math. Ann. **290** (1991), no. 2, 209–245. MR 1109632

[13] Simon Brendle, *Embedded minimal tori in* S^3 *and the Lawson conjecture*, Acta Math. **211** (2013), no. 2, 177–190. MR 3143888

[14] Adrian Butscher, *Constant mean curvature hypersurfaces in* $\mathbb{S}^{n+1}$ *by gluing spherical building blocks*, Math. Z. **263** (2009), no. 1, 1–25. MR 2529485

[15] ———, *Gluing constructions amongst constant mean curvature hypersurfaces in* $\mathbb{S}^{n+1}$, Ann. Global Anal. Geom. **36** (2009), no. 3, 221–274. MR 2544302

[16] Adrian Butscher and Frank Pacard, *Generalized doubling constructions for constant mean curvature hypersurfaces in* S^{n+1}, Ann. Global Anal. Geom. **32** (2007), no. 2, 103–123. MR 2336180

[17] Antonio Cañete, *A new bound on the Morse index of constant mean curvature tori of revolution in* $\mathbb{S}^3$, Calc. Var. Partial Differential Equations **45** (2012), no. 3-4, 467–479. MR 2984142

[18] Jaigyoung Choe and Miyuki Koiso, *Stable capillary hypersurfaces in a wedge*, Pacific J. Math. **280** (2016), no. 1, 1–15. MR 3441213

[19] Fernando Codá Marques, *Minimal surfaces: variational theory and applications*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Seoul 2014. Vol. 1, Kyung Moon Sa, Seoul, 2014, pp. 283–310. MR 3728473

[20] Levi Lopes de Lima, Vicente Francisco de Sousa Neto, and Wayne Rossman, *Lower bounds for index of Wente tori*, Hiroshima Math. J. **31** (2001), no. 2, 183–199. MR 1849188

[21] Ahmad El Soufi, *Applications harmoniques, immersions minimales et transformations conformes de la sphère*, Compositio Math. **85** (1993), no. 3, 281–298. MR 1214448

[22] Robert Finn, *Equilibrium capillary surfaces*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 284, Springer-Verlag, New York, 1986. MR 816345

[23] Ailana Fraser and Richard Schoen, *The first Steklov eigenvalue, conformal geometry, and minimal surfaces*, Adv. Math. **226** (2011), no. 5, 4011–4030. MR 2770439

[24] ———, *Minimal surfaces and eigenvalue problems*, Geometric analysis, mathematical relativity, and nonlinear partial differential equations, Contemp. Math., vol. 599, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013, pp. 105–121. MR 3202476

[25] ———, *Sharp eigenvalue bounds and minimal surfaces in the ball*, Invent. Math. **203** (2016), no. 3, 823–890. MR 3461367

[26] Claudio Gorodski, Ricardo Mendes, and Marco Radeschi, *Robust index bounds for minimal hypersurfaces of isoparametric submanifolds and symmetric spaces*, arXiv:1803.08735 [math.DG] (2018).

[27] Heinz Hopf, *Differential geometry in the large*, second ed., Lecture Notes in Mathematics, vol. 1000, Springer-Verlag, Berlin, 1989, Notes taken by Peter Lax and John W. Gray, With a preface by S. S. Chern, With a preface by K. Voss. MR 1013786

[28] Jürgen Jost, *Riemannian geometry and geometric analysis.*

[29] Nicolaos Kapouleas, *Complete constant mean curvature surfaces in Euclidean three-space*, Ann. of Math. (2) **131** (1990), no. 2, 239–330. MR 1043269

[30] ———, *Compact constant mean curvature surfaces in Euclidean three-space*, J. Differential Geom. **33** (1991), no. 3, 683–715. MR 1100207

[31] ———, *Constant mean curvature surfaces constructed by fusing Wente tori*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **89** (1992), no. 12, 5695–5698. MR 1165926

[32] Haizhong Li and Changwei Xiong, *Stability of capillary hypersurfaces with planar boundaries*, J. Geom. Anal. **27** (2017), no. 1, 79–94. MR 3606545

[33] Rafael López, *Constant mean curvature surfaces with boundary*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Heidelberg, 2013. MR 3098467

[34] ———, *Capillary surfaces with free boundary in a wedge*, Adv. Math. **262** (2014), 476–483. MR 3228434

[35] Bingqing Ma and Guangyue Huang, *Eigenvalue relationships between Laplacians of constant mean curvature hypersurfaces in* $\mathbb{S}^{n+1}$, Commun. Math. **21** (2013), no. 1, 31–38. MR 3067120

[36] Fernando Marques and André Neves, *Min-max theory and the willmore conjecture*, Ann. of Math. () **179** (2014), no. 2, 683–782.

[37] Fernando C. Marques, *Surfaces minimales: Théorie variationnelle et applications*, Lecture notes by Rafael Montezuma.

[38] Ricardo Mendes and Marco Radeschi, *Generalized immersions and minimal hypersurfaces in compact symmetric spaces*, arXiv:1708.05881 [math.DG] (2017).

[39] André Neves, *New applications of min-max theory*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Seoul 2014. Vol. II, Kyung Moon Sa, Seoul, 2014, pp. 939–957. MR 3728646

[40] Ivaldo Nunes, *On stable constant mean curvature surfaces with free boundary*, Math. Z. **287** (2017), no. 1-2, 473–479. MR 3694683

[41] Oscar Perdomo and Aldir Brasil, Jr., *Stability index jump for constant mean curvature hypersurfaces of spheres*, Arch. Math. (Basel) **99** (2012), no. 5, 493–500. MR 3000429

[42] U. Pinkall and I. Sterling, *On the classification of constant mean curvature tori*, Ann. of Math. (2) **130** (1989), no. 2, 407–451. MR 1014929

[43] A. Ros, *Stability of minimal and constant mean curvature surfaces with free boundary*, Mat. Contemp. **35** (2008), 221–240. MR 2584186

[44] Antonio Ros, *One-sided complete stable minimal surfaces*, J. Differential Geom. **74** (2006), no. 1, 69–92. MR 2260928

[45] Antonio Ros and Rabah Souam, *On stability of capillary surfaces in a ball*, Pacific J. Math. **178** (1997), no. 2, 345–361. MR 1447419

[46] Antonio Ros and Enaldo Vergasta, *Stability for hypersurfaces of constant mean curvature with free boundary*, Geom. Dedicata **56** (1995), no. 1, 19–33. MR 1338315

[47] Wayne Rossman, *Lower bounds for Morse index of constant mean curvature tori*, Bull. London Math. Soc. **34** (2002), no. 5, 599–609. MR 1912882

[48] Wayne Rossman and Nahid Sultana, *Morse index of constant mean curvature tori of revolution in the 3-sphere*, Illinois J. Math. **51** (2007), no. 4, 1329–1340. MR 2417430

[49] Pam Sargent, *Index bounds for free boundary minimal surfaces of convex bodies*, Proc. Amer. Math. Soc. **145** (2017), no. 6, 2467–2480. MR 3626504

[50] Alessandro Savo, *Index bounds for minimal hypersurfaces of the sphere*, Indiana Univ. Math. J. **59** (2010), no. 3, 823–837. MR 2779062

[51] James Simons, *Minimal varieties in riemannian manifolds*, Ann. of Math. (2) **88** (1968), 62–105. MR 0233295

[52] Masaaki Umehara and Kotaro Yamada, *A deformation of tori with constant mean curvature in* $\mathbf{R}^3$ *to those in other space forms*, Trans. Amer. Math. Soc. **330** (1992), no. 2, 845–857. MR 1050088

[53] Francisco Urbano, *Minimal surfaces with low index in the three-dimensional sphere*, Proc. Amer. Math. Soc. **108** (1990), no. 4, 989–992. MR 1007516

[54] Jeff A. Viaclovsky, *Topics in riemannian geometry*, 2011, Lecture notes by Jeff A. Viaclovsky in Fall 2011,.

[55] Guofang Wang and Chao Xia, *Uniqueness of stable capillary hypersurfaces in a ball*, arXiv:1708.06861 [math.DG] (2017).

[56] Henry C. Wente, *Counterexample to a conjecture of H. Hopf*, Pacific J. Math. **121** (1986), no. 1, 193–243. MR 815044

[57] Chuan Xi Wu, *New characterizations of the Clifford tori and the Veronese surface*, Arch. Math. (Basel) **61** (1993), no. 3, 277–284. MR 1231163