UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS INSTITUTO DE
MATEMÁTICA PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
UFAL-UFBA

RAFAEL ALVAREZ BILBAO

MEDIDAS MAXIMIZANTES EM SISTEMAS DINÂMICOS ALEATÓRIOS

Tese de Doutorado

Maceió
2015

Rafael Alvarez Bilbao

MEDIDAS MAXIMIZANTES EM SISTEMAS DINÂMICOS ALEATÓRIOS

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática-UFAL como requerimento para obter o grau de Doutor em Matemática.

Orientador: Krerley Irraciel Martins Oliveira.

Maceió
2015

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Bibliotecário Responsável: Janis Christine Angelina Cavalcante

B595m Bilbao, Rafael Avarez.
Medidas maximizantes em sistemas dinâmicos aleatórios. / Rafael Alvarez Bilbao. – Maceió, 2015
33 f.

Orientador: Krerley Irraciel Martins Oliveira.
Tese (doutorado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática, Programa de Pós Graduação em Matemática. Maceió, 2015.

Bibliografia: f. 31-32
Índice: f. 33.

1. Entropia relativa. 2. Expansão não uniforme. 3.Entropia topológica relativa. 4. Topologicamente exata. 5. Medida maximizante. I. Título.

CDU: 519.722

Medidas maximizantes em sistemas dinâmicos aleatórios

Rafael José Alvarez Bilbao

Tese submetida ao Programa de Post-graduação do Instituto de Matemáticas da Universidade Federal de Alagoas-UFAL como requerimento para obter o grau de Doutor em Matemática, aprovada aos 18 dias do mês de Junho do ano 2015.

Banca Examinadora:

Krerley Olivi

Dr. Krerley Irraciel Martins Oliveira, UFAL (Orientador)

Dr. Alexander Eduardo Arbieto Mendoza, UFRJ (Examinador externo)

Vanessa Ribeiro Ramos

Dra. Vanessa Ribeiro Ramos, UFMA (Examinador externo)

Thiago Bomfim S-L Nes

Dr. Thiago Bomfim São Luiz Nunes, UFBA (Examinador interno)

Dr. Fernando Pereira Micena, UFAL (Examinador interno)

Dedicatória

Meu filho $\alpha\beta$

Agradecimento

Agradeço a Deus pela vida, minha família pelo apoio permanente, minha esposa pela paciência durante esse longo tempo, a todas as pessoas do instituto de matemática em especial ao professor Krerley Oliveira por permitir que fosse seu orientando e à fundação Capes.

Muito obrigado a todos.

Abstract

We prove the existence of relative maximal entropy measures for certain random dynamical systems of the type $F(x, y) = (\theta(x), f_x(y))$, where θ is a invertibe map preserving an ergodic measure $\mathbb{P}$ and f_x is a local diffeomorphism of a compact Riemannian manifold exhibiting some non-uniform expansion. As a consequence of our proofs, we obtain an integral formula for the relative topological entropy as the integral the of logarithm of the topological degree of f_x with respect to $\mathbb{P}$. When F is topologically exact and the supremum of the topological degree of f_x is finite, the maximizing measure is unique and positive on open sets.

Keywords: Relative entropy, non-uniform expansion, relative topological entropy, topologically exact, maximizing measure.

Resumo

Provamos a existência de medidas de entropia máxima relativa para certos sistemas dinâmicos aleatórios do tipo $F(x, y) = (\theta(x), f_x(y))$, onde θ é uma aplicação invertível preservando uma medida ergódica $\mathbb{P}$ e f_x é um difeomorfismo local sob uma variedade Riemanniana compacta exibindo alguma expansão não uniforme. Como consequência da prova, obtemos uma fórmula de integração para entropia topológica relativa como a integral dos logaritmo do grau topológico das f_x com respeito a $\mathbb{P}$. Quando F é topologicamente exata e o supremo dos graus topológicos das f_x é finito, a medida que atinge o máximo é única e positiva sob conjuntos abertos.

Palavras-chave: Entropia relativa, expansão não-uniforme, entropia topológica relativa, topologicamente exata e medida maximizante.

Conteúdo

Introdução

A entropia topológica $h_{top}(f)$ é um número invariante topológico importante do sistema dinâmico f. Para aplicações que expandem distância uniformemente, foi provado [8, Pa64] que este número descreve a taxa exponencial de crescimento de órbitas periódicas e é dado pelo logaritmo do grau topológico da aplicação.

Por outro lado, existe uma importante relação entre entropia topológica e entropia métrica. Pelo princípio variacional [21], a entropia topológica pode ser definida como o supremo das entropias métricas entre todas as medidas invariantes e se existe uma medida que maximize a entropia métrica ela é chamada de *medida de entropia maximal*. Como característica, essa medida descreve a distribuição espacial de orbitas periódicas [8].

Para sistemas dinâmicos aleatórios definidos como skew-product da forma $F(x, y) = (\theta(x), f_x(y))$ onde θ é uma aplicação invertível que preserva uma medida ergódica $\mathbb{P}$ e $(f_x)_{x\in X}$ família aplicações expansoras, foi provado, por Bogenschütz em [7] uma versão *relativa* do principio variacional . Nessa versão a entropia topológica *relativa* é o supremo das entropias métricas entre todas a medidas invariantes com marginal $\mathbb{P}$ e se existe uma medida que maximiza a entropia métrica, ela é chamada de *medida de entropia maximal relativa*. Daremos uma definição mais precisa no capítulo 3. Kifer [10] prova a existência de estado de equilíbrio para sistemas aleatórios uniformemente expansores e Liu [11] estende esse resultado para sistemas uniformemente hiperbólicos.

Estender essas propriedades no caso de expansão uniforme é um problema desafiante. Vários autores têm melhorado tais resultados no caso determinístico. Em [3], menciona-se alguns recentes trabalhos. Em [16], Oliveira e Viana mostram para caso determinístico a existência e unicidade de medida de máxima entropia para um conjunto aberto de aplicações não-uniformemente expansoras. Além disso, para essas aplicações, a entropia topológica coincide com o logaritmo de seu grau.

No ambiente aleatório, Urbanski e Simmons [20] provam a existência de estados Gibbs para potenciais Hölder contínuos e aplicações expansoras aleatórias. Além disso, provam que os estados Gibbs coincidem com estados de equilíbrios desses potenciais. Arbieto, Matheus e Oliveira [5], mostram para uma classe robusta ($C^2 - aberta$) de aplicações aleatórias não uniformemente expansora com certas condições em suas derivadas e sobre uma classe extensa de potenciais, a existência de estado de equilíbrio.

Neste trabalho estenderemos os resultados em [16], o qual consiste dada $f : M^d \to M^d$ difeomorfismo local sob uma variedade Riemannian d-dimensional compacta M e grau topológico $p \geq 1$. Assumindo que f satisfaz a seguinte condição

$$\max_{1\leq k\leq d-1} \log \max_{x\in M} \|\Lambda^k Df(x)\| < \log p$$

se tem, que $h_{top}(f) = \log p$, e qualquer auto-medida μ sobre o operador de transferência $\mathcal{L}$ é uma medida maximizante. Além disso, se f é topologicamente misturador, então a medida maximizante é única e positiva sob conjuntos abertos.

Em nosso ambiente aleatório de classe C^1, assumimos condições sobre as derivadas da família de funções geradoras $(f_x)_{x\in X}$ que envolvem os expoentes de Lyapunov. Mais precisamente, consideremos um sistema dinâmico aleatório $F : X \times Y \to X \times Y$ de classe C^1 definida por $F(x, y) = (\theta(x), f_x(y))$ onde X é um espaço de probabilidade Lebesgue, Y é uma variedade Riemannian compacta, $\theta : X \to X$ é uma aplicação contínua invertível mensuráveis preservando uma medida de probabilidade $\mathbb{P}$ e $(f_x)_{x\in X}$ uma família de difeomorfismos locais $f_x : Y \to Y$, para $x \in X$, com grau topológico $p_x \geq 1$.

Neste contexto temos o resultado principal:

Teorema A. *Assumimos que F satisfaz (1.4), (2.2) e (2.3). Então $h_{top}(F|\theta) = \int_X \log p_x d\mathbb{P}(x)$. Além disso,*

- *Se $\mu \in \mathcal{M}^1_{\mathbb{P}}(F)$ tal que sua desintegração $\mu = (\mu_x)_{x\in X}$ é uma sistema de auto-medidas maximal para o operador de transferência $(\mathcal{L}_x)_{x\in X}$, então μ é uma medida de entropia maximizante.*

- *Se F é topologicamente exata e deg$(F) := \sup_{x\in X} \deg(f_x) < \infty$, a medida maximizante é única e positiva sob conjuntos abertos.*

A estratégia da prova consiste primeiro provar a existência de sistema de auto-medidas, logo assumindo que os expoentes de Lyapunov são maiores que α(constante dada em (1.4)) construímos uma partição geradora, portanto podemos usar fórmula de Rokhlin aleatória Teorema 3.2.3, com isso temos que a entropia relativa coincide com $\int_X \log p_x d\mathbb{P}(x)$. Por último para calcular a entropia topológica relativa usaremos o principio variacional aleatório. A longo da prova fazemos uso do operador de transferência e tempos hiperbólicos para sistema dinâmicos aleatórios.

O trabalho está organizado da seguinte maneira:

No primeiro capítulo damos as definições e resultados importantes. Definimos sistemas dinâmicos aleatórios-RDS(Random Dynamical Systems), operador de transferência relacionado às funções geradoras $f_x : \mathcal{J}_x \to \mathcal{J}_{\theta(x)}$ para todo $x \in X$ e obtemos os operadores duais respectivos. Respondemos à pergunta sobre a existência de auto-medidas. Para terminar esta seção falamos sobre o Teorema ergódico multiplicativo aleatório que é uma extensão do caso determinístico, este dá a existência dos expoentes de Lyapunov.

No capítulo seguinte, falamos de tempos hiperbólicos para RDS, noção que foi introduzida por Alves em [2, 4] no caso determinístico. Enunciamos os diferentes resultados importantes como a existência de um conjunto de medida total tal que todos seus pontos tem infinitos tempos hiperbólicos e além disso, tem densidade hiperbólica positiva. Depois enunciamos o lema onde obtêm-se os ramos inversos contrativos considerando os tempos hiperbólicos. Na parte final provamos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que F^N tem densidade positiva de tempos hiperbólico em $\mu - q.t.p.$

No terceiro capítulo, começamos por definir partição sobre o espaço $\mathcal{J} = X \times Y$ e partição geradora. Damos condições para a existência de uma partição geradora. Depois falamos da entropia métrica relativa e com isso fazemos menção de adaptações aleatórias de teoremas importantes que se têm para caso determinístico como são os Teoremas de Kolmogorov-Sinai, Margullis-Ruelle e Shannon-McMillan-Breiman. Em outra seção, mostramos a fórmula de Rokhlin aleatória que é fundamental para provar o teorema principal. Para terminar definimos a pressão topológica relativa e com isso o principio variacional aleatório.

Na ultima parte deste trabalho, provamos a existência de medidas maximizantes e entre essas medidas estão as auto-medidas maximal. O passo a seguir é mostrar que a entropia métrica relativa com respeito a uma auto-medida vai ser igual $\int_X \log p_x d\mathbb{P}(x)$. Faltaria provar que a entropia topológica relativa é igual a esse valor. Para resolver isso usamos o principio variacional aleatório.
No caso da unicidade adicionamos duas novas hipóteses: F é topologicamente exata e com grau topológico finito. Com essas duas condições provamos que a medida que atingem a entropia topológica é única e além disso deve ser uma auto-medida maximal.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo enunciamos as definições e noções básicas para o desenvolvimento deste trabalho. Para leitores familiarizados com a temática, este capítulo pode ser omitido e retornar sempre que julgar necessário.

1.1 Sistemas dinâmicos aleatórios

Definição 1.1.1. Um sistema dinâmico aleatório (RDS-Random Dynamical Systems) métrico consiste do seguinte:

- Um espaço de probabilidade de Lebesgue $(X, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
- $\theta : X \to X$ uma transformação invertível que preserva a medida ergódica $\mathbb{P}$.
- Um espaço mensurável de Lebesgue $(\mathcal{J}, \mathcal{B})$ da forma

$$\mathcal{J} = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times \mathcal{J}_x$$

  onde $\mathcal{J}_x$ são as fibras do RDS

- Uma transformação mensurável $F : \mathcal{J} \to \mathcal{J}$ da forma

$$F(x, y) = (\theta(x), f_x(y))$$

  onde $f_x : \mathcal{J}_x \to \mathcal{J}_{\theta(x)}$.

A dinâmica está definida como $F^n(x, y) = (\theta^n(x), f_x^n(y))$ onde

$$f_x^n(y) := f_{\theta^{n-1}(x)} \circ ... \circ f_x(y).$$

Assumimos neste trabalho que $\mathcal{J}_x = Y$ para todo $x \in X$, neste caso $\mathcal{J} = X \times Y$ onde Y é uma variedade Riemanniana compacta conexa d-dimensional, as funções $f_x : \mathcal{J}_x \to \mathcal{J}_{\theta(x)}$ são difeomorfismos locais de classe C^1 e grau topológico $p_x \geq 1$ para todo $x \in X$, onde $p_x = \# f_x^{-1}(y)$ para todo $y \in \mathcal{J}_{\theta(x)}$.

Seja $\mathcal{M}^1_{\mathbb{P}}(\mathcal{J})$ conjunto de medidas de probabilidade sobre $(\mathcal{J},\mathcal{B})$ tal que

$$\mu \circ \pi_X^{-1} = \mathbb{P}$$

onde $\pi_X : \mathcal{J} \to X$ é a projeção na primeira coordenada ($\pi(x,y) = x$), e seja

$$\mathcal{M}^1_{\mathbb{P}}(F) = \{\mu \in \mathcal{M}^1_{\mathbb{P}}(\mathcal{J}) : \mu \circ F^{-1} = \mu\}.$$

Denotemos por ε_X a partição de X sobre elementos unitários. A partição $\pi_X^{-1}(\varepsilon_X)$ é mensurável. Portanto, para cada $\mu \in \mathbb{M}^1_{\mathbb{P}}(\mathcal{J})$, pelo Teorema de desintegração de Rokhlin [19], existe um sistema de medidas $(\mu_x)_{x\in X}$ tal que $\mu = \int \mu_x d\mathbb{P}(x)$ chamando-se sistema canônico de medidas condicionais.

Por outro lado, é imediato provar que a medida $\mu \in \mathcal{M}^1_{\mathbb{P}}(\mathcal{J})$ é $F-$ invariante se somente se $\mu_x \circ f_x^{-1} = \mu_{\theta(x)}$ para $\mathbb{P}$-quase todo ponto $x \in X$. Também dizemos que F é de classe C^k se cada f_x é de classe C^k para todo $x \in X$.

Definição 1.1.2. F é *topologicamente exata* se para cada $\xi > 0$ existe uma função mensurável limitada $n_\xi : X \to \mathbb{N}$ tal que para $\mathbb{P}$ quase todo ponto $x \in X$ e para todo $y \in \mathcal{J}_x$ temos

$$f_x^{n_\xi(x)}(B_x(y,\xi)) = \mathcal{J}_{\theta^{n_\xi(x)}(x)}$$

Denotemos por $n^*_\xi := \sup_{x\in X} n_\xi(x)$.

1.2 Operador de transferência

Seja $\mathcal{C}_{\mathbb{P}}(\mathcal{J})$ o espaço de todas as funções mensuráveis $g : \mathcal{J} \to \mathbb{C}$ tais que $\mathbb{P} - q.t.p.\ x \in X,\ g|_{\mathcal{J}_x} := g_x \in C(\mathcal{J}_x)$ conjunto das funções contínuas sobre $\mathcal{J}_x$. Definamos

$$\mathbb{L}^1_{\mathcal{J}}(X,\mathcal{C}(Y)) := \left\{\varphi \in \mathcal{C}_{\mathbb{P}}(\mathcal{J}) : \|\varphi\|_1 = \int_X \|\varphi_x\|_\infty d\mathbb{P}(x) < +\infty\right\} \tag{1.1}$$

Para $x \in X$ fixado $\alpha \in (0,1]$ denotemos por $\mathcal{H}^\alpha(\mathcal{J}_x)$ o espaço das funções Hölder contínuas sobre $\mathcal{J}_x$ com expoente α. Isso é, $\phi_x \in \mathcal{H}^\alpha(\mathcal{J}_x)$ se e somente se $\phi_x \in C(\mathcal{J}_x)$ e $\upsilon_\alpha(\phi_x) < \infty$ onde

$$\upsilon_\alpha(\phi_x) := \sup\left\{\frac{|\phi_x(y) - \phi_x(z)|}{d(y,z)^\alpha} :\ y,z \in \mathcal{J}_x\right\}$$

Uma função $\phi \in \mathbb{L}^1_{\mathcal{J}}(X,\mathcal{C}(Y))$ chama-se Hölder contínua com expoente α mostrando que existe uma função mensurável $K : X \to [1,+\infty)$ tal que

$$\log K \in L^1(\mathbb{P})$$

e

$$\upsilon_\alpha(\phi_x) \le K_x,\ \text{para } \mathbb{P} - q.t.p.\ x \in X$$

denotando $\mathcal{H}^\alpha(\mathcal{J},K)$ como espaço das funções Hölder contínuas fixados α e K, e por $\mathcal{H}^\alpha(\mathcal{J})$ o espaço das funções Hölder contínuas com expoente α.

Para cada $g \in \mathcal{C}_{\mathbb{P}}(\mathcal{J})$, seja

$$S_n(g) := \sum_{j=0}^{n-1} g \circ F^j, \tag{1.2}$$

como $g_x(y) = g(x, y)$ em $\mathbb{P} - q.t.p.$ $x \in X$, então $(S_n g)_x = \sum_{j=0}^{n-1} g_{\theta^j(x)} \circ f_x^j$. Agora, seja $\varphi \in \mathcal{H}^\alpha(\mathcal{J})$, consideremos o *operador de transferência* $\mathcal{L}_x = \mathcal{L}_{\varphi_x}$: $C(\mathcal{J}_x) \to C(\mathcal{J}_{\theta(x)})$ definido por

$$\mathcal{L}_x g_x(w) = \sum_{f_x(z)=w} g_x(z) e^{\varphi_x(z)}, \quad w \in \mathcal{J}_{\theta(x)}$$

este é um operador linear positivo limitado com norma

$$\|\mathcal{L}_x\|_\infty \leq deg(f_x) \exp(\|\varphi_x\|_\infty).$$

Com esta família de operadores obtemos um operador global $\mathcal{L} : C(\mathcal{J}) \to C(\mathcal{J})$ definido como

$$(\mathcal{L}g)_x(w) = \mathcal{L}_{\theta^{-1}(x)} g_{\theta^{-1}(x)}(w)$$

Para cada $n > 1$ e $\mathbb{P} - q.t.p.$ $x \in X$, denotamos

$$\mathcal{L}_x^n := \mathcal{L}_{\theta^{n-1}(x)} \circ \cdots \circ \mathcal{L}_x : C(\mathcal{J}_x) \to C(\mathcal{J}_{\theta^n(x)}).$$

Note que

$$\mathcal{L}_x^n g_x(w) = \sum_{z \in f_x^{-n}(w)} g_x(z) e^{S_n \varphi_x(z)}, \quad w \in \mathcal{J}_{\theta^n(x)},$$

onde $S_n \varphi_x(z)$ é dado em (1.2). Portanto, o operador dual $\mathcal{L}_x^* : C^*(\mathcal{J}_{\theta(x)}) \to C^*(\mathcal{J}_x)$ é definido

$$\mathcal{L}_x^*(\mu_{\theta(x)}) g_x := \mu_{\theta(x)}(\mathcal{L}_x g_x).$$

Por outro lado, chama-se *sistema de auto-medida maximal* $(\mu_x)_{x \in X}$ correspondente a $\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}}^1(F)$ considerando a partição $\pi_X^{-1}(\varepsilon_X)$ se satisfaz

$$\mathcal{L}_x^* \mu_{\theta(x)} = p_x \mu_x, \quad \text{para todo } x \in X.$$

Mostraremos a existência desses sistema de auto-medidas maximais. De fato, para potencial nulo $\varphi \equiv 0$, o operador de transferência $\mathcal{L} : C(\mathcal{J}) \to C(\mathcal{J})$ fica definido

$$(\mathcal{L}g)(x, y) = \sum_{F(\theta^{-1}(x), z) = (x, y)} g(\theta^{-1}(x), z)$$

portanto,

$$(\mathcal{L}g)_x(y) = \mathcal{L}_{\theta^{-1}(x)} g_{\theta^{-1}(x)}(y) = \sum_{f_{\theta^{-1}(x)}(z) = y} g_{\theta^{-1}(x)}(z) = (\mathcal{L}g)(x, y).$$

Agora, seja $g \in C(\mathcal{J})$ e $\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}}^1(F)$. Definindo o seguente operador

$$\hat{\mathcal{L}} : C(\mathcal{J}) \to C(\mathcal{J})$$

como $\hat{\mathcal{L}}(g)(x,y) := \frac{(\mathcal{L}g)(x,y)}{p_{\theta^{-1}(x)}}$. Por conseguinte, integrando

$$\begin{aligned}\int \hat{\mathcal{L}}(g)(x,y)d\mu &= \int \frac{(\mathcal{L}g)(x,y)}{p_{\theta^{-1}(x)}}d\mu = \int_X \int_{\mathcal{J}_x} \frac{(\mathcal{L}g)_x(y)}{p_{\theta^{-1}(x)}}d\mu_x d\mathbb{P} \\ &= \int_X \int_{\mathcal{J}_x} \frac{\mathcal{L}_{\theta^{-1}(x)} g_{\theta^{-1}(x)}(y)}{p_{\theta^{-1}(x)}} d\mu_x d\mathbb{P} \\ &= \int_X \int_{\mathcal{J}_{\theta^{-1}(x)}} g_{\theta^{-1}(x)}(y) d\frac{\mathcal{L}^*_{\theta^{-1}(x)\mu_x}}{p_{\theta^{-1}(x)}} d\mathbb{P} =: \int g d\hat{\mu}\end{aligned}$$

logo, definindo $\hat{\mu}$ dessa forma temos que $\hat{\mu} \in \mathcal{M}^1_{\mathbb{P}}(F)$. De outro lado, o espaço $\mathcal{M}^1_{\mathbb{P}}(F)$ é um conjunto compacto e convexo([14],Teorema 1.5.10). Então, $\hat{\mathcal{L}}^*|_{\mathcal{M}^1_{\mathbb{P}}(F)} : \mathcal{M}^1_{\mathbb{P}}(F) \to \mathcal{M}^1_{\mathbb{P}}(F)$ se define $\hat{\mathcal{L}}^*|_{\mathcal{M}^1_{\mathbb{P}}(F)}(\mu) = \hat{\mu}$. Aplicando o teorema de ponto fixo Schauder-Tychonoff, temos que existe $\mu \in \mathcal{M}^1_{\mathbb{P}}(F)$ tal que $\hat{\mathcal{L}}^*|_{\mathcal{M}^1_{\mathbb{P}}(F)}(\mu) = \hat{\mu} = \mu$, portanto seu desintegração fica

$$\frac{\mathcal{L}^*_{\theta^{-1}(x)}(\mu_x)}{p_{\theta^{-1}(x)}} = \mu_{\theta^{-1}(x)}$$

para todo $x \in X$. Aplicando o Teorema de desintegração de Roklhin's, temos que o sistema canônico de medidas $(\mu_x)_{x\in X}$ do ponto fixo μ é mensurável com respeito ao espaço X,

De outro lado, mostremos que as funções $f_x : \mathcal{J}_x \to \mathcal{J}_{\theta(x)}$ preservam medida do ponto fixo $\hat{\mathcal{L}}^*(\mu) = \mu$ acima. De fato, seja $g_{\theta(x)} \in C(\mathcal{J}_{\theta(x)})$. Usando operador de transferência $\mathcal{L}_x$ considerando o potencial nulo $\varphi \equiv 0$, temos que $\mathcal{L}_x(g_{\theta(x)} \circ f_x)(z) = p_x g_{\theta(x)}(z)$ e

$$\begin{aligned}\int (g_{\theta(x)} \circ f_x) d\mu_x &= \frac{1}{p_x} \int (g_{\theta(x)} \circ f_x) d\mathcal{L}^*_x \mu_{\theta(x)} \\ &= \frac{1}{p_x} \int \mathcal{L}_x (g_{\theta(x)} \circ f_x) d\mu_{\theta(x)} \\ &= \int g_{\theta(x)} d\mu_{\theta(x)}\end{aligned}$$

Para mais detalhe desta parte ver [15].

1.3 Expoente de Lyapunov

Quando o sistema $(F, \mathcal{J}, \mu)$ preserva medida μ, podemos ter a seguinte reformulação do teorema ergódico multiplicativo de Oseledec.

Teorema 1.3.1. *[12] Assumamos que F é de classe C^1 (i. é. $r = 1$) e a seguinte condição de integração*

$$\int \log^+ \|Df_x(y)\| d\mu(x,y) < \infty$$

Então, existe $\Delta \subseteq \mathcal{J}$ tal que $\mu(\Delta) = 1$ e para cada $(x,y) \in \Delta$ os números

$$-\infty \leqslant \lambda^{(1)}(x,y) < \ldots < \lambda^{(r(x,y))}(x,y) < \infty$$

mensuráveis em (x,y) e estão associados a sequências de sub-espaços em $T_y\mathcal{J}_x$

$$\{0\} = V^{(0)}(x,y) \subset V^{(1)}(x,y) \subset ... \subset V^{(r(x,y))}(x,y) = T_y\mathcal{J}_x$$

satisfaz

$$\lim \frac{1}{n} \log \|D_y f_x^n v\| = \lambda^{(i)}(x,y)$$

para $v \in V^{(i)}(x,y) \setminus V^{(i-1)}(x,y)$ para $1 \leqslant i \leqslant r(x,y)$. Dizemos que $\lambda^{(i)}(x,y)$ é expoente de Lyapunov de F em (x,y). Sejam $m^{(i)}(x,y) = dimV^{(i)}(x,y) - dimV^{(i-1)}(x,y)$ sua multiplicidade e

$$\{(\lambda^{(i)}(x,y), m^{(i)}(x,y)) : 1 \leqslant i \leqslant r(x,y)\}$$

espectro de Lyapunov de F em (x,y).

Dado um espaço de vetorial V e um número $k \geq 1$, a k-ésima potência exterior de V é o espaço de vetores de todas as $k-$ formas lineares alternadas definida sobre o espaço dual de V. Tomamos V de dimensão finita, então o produto exterior $\Lambda^k V$ admite uma descrição alternativa, como o espaço gerado pelo o produto $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ de vetores $v_1, v_2, ..., v_k$ in V. Assumindo V com produto exterior, podemos expressar $\Lambda^k V$ com o produto interno tal que $\|v_1 \wedge \cdots \wedge v_k\|$ é justamente o volume do $k-$dimensional paralepípedo determinado pelos vetores $v_1, v_2, ..., v_k$ em V.
Um isomorfismo linear $A : V \to W$ induz outro , $\Lambda^k A : \Lambda^k V \to \Lambda^k W$, através

$$\Lambda^k A(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = Av_1 \wedge \cdots \wedge Av_k,$$

Quando $V = W$, os autovalores de $\Lambda^k A$ são o produto de k distintos autovalores de A(onde um autovalor com multiplicidade m é contado como m "distintos" autovalores). Correspondentemente, existe uma simples relação entre o espectro de Lyapunov $\Lambda^k Df_x$ e Df_x, os expoentes de Lyapunov $\Lambda^k Df_x$ são a soma de k distintos expoentes de Lyapunov de Df_x.

Definamos para $1 \leq k \leq d-1$

$$C_k(x,y) = \limsup \frac{1}{n} \log \|\Lambda^k Df_x^n(y)\|$$

e

$$C_k(x,F) = \max_{y \in \mathcal{J}_x} C_k(x,y)$$

Como primeira hipótese deste trabalho assumimos que:

$$\max_{1 \leqslant k \leq d-1} \int_X C_k(x,F) d\mathbb{P}(x) < \int_X \log p_x d\mathbb{P}(x). \tag{1.3}$$

O qual significa que o integrando da taxa exponencial da derivada do volume $k-$ dimensional não seja demasiado grande, para k menor que a dimensão de Y. Com isso define-se

$$\alpha := \alpha(F) = \int_X \log p_x d\mathbb{P} - \max_{1 \leqslant k \leqslant d-1} \int_X C_k(x,F) d\mathbb{P}(x) > 0 \tag{1.4}$$

Os expoentes de Lyapunov de $\Lambda^k Df_x$ são a soma de k distintos expoentes de Lyapunov de Df_x, com a mesma convenção de multiplicidade de antes. Temos,

$$\lambda_{i_1}(x,y) + \lambda_{i_2}(x,y) + \cdots + \lambda_{i_k}(x,y) \leq C_k(x,y)$$

para qualquer $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq d$, e a hipótese (1.3) implica que o integrando da soma é estritamente menor que $\int_X \log p_x d\mathbb{P}(x)$, para todo $k < d$.

Muitos resultados interessantes sobre os expoentes de Lyapunov em sistemas dinâmicos aleatórios podem ser encontrados em [**?**], [13].

Capítulo 2

Tempos hiperbólicos

Esta noção foi introduzida por Alves em [2, 4] para caso determinístico e é usada para sistemas dinâmicos aleatórios em [5]. Dada uma medida em $\mathcal{M}^1_{\mathbb{P}}(F)$ cujos expoentes de Lyapunov são maiores que 8α, vamos a encontrar no Lema 2.0.4 que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que F^N tem um conjunto de medida total em $X \times Y$, cujos pontos tem densidade positiva de tempos hiperbólicos, esto nos vai a permitir no capítulo posterior no Lema 3.1.1 ter uma partição $F-$ geradora com respeito à medida μ. Para isso, vamos assumir como hipóteses a longo deste trabalho uma condição de distorção (2.2) e condições de derivada (2.3) sobre as funções geradoras, que nos ajudá obter estes resultados.
Neste capítulo $F : \mathcal{J} \to \mathcal{J}$ é um sistema dinâmico aleatório de classe C^1 e $\mu \in \mathcal{M}^1_{\mathbb{P}}(F)$.

Definição 2.0.1. Dizemos que $\nu \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}}(\mathcal{J})$ é expansora com expoente $c > 0$ se para ν-q.t.p. $(x, y) \in \mathcal{J}$ temos

$$\lambda(x,y) = \limsup \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log \|Df_{\theta^j(x)}(f_x^j(y))^{-1}\| \leqslant -2c < 0$$

Definição 2.0.2. Fixado $c > 0$, dizemos que $n \in \mathbb{N}$ é um c- tempo hiperbólico para (x, y) se para cada $1 \leqslant k \leqslant n$ tem-se:

$$\prod_{j=n-k}^{n-1} \|Df_{\theta^j(x)}(f_x^j(y))^{-1}\| \leqslant \exp(-ck)$$

Por outra lado, F tem tempos hiperbólicos com **densidade positiva** para (x, y), se o conjunto $H_{(x,y)}$ de inteiros que são tempos hiperbólicos de F para (x, y) satisfaz

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \#(H_{(x,y)} \cap [1, n]) > 0$$

O objetivo é mostrar condições para que um sistema dinâmico aleatório contenha um conjunto de tempos hiperbólicos com densidade positiva. O seguinte Lema devido a Pliss, é fundamental para conseguir esse resultado.

Lema 2.0.1 (Pliss). *Dado $0 < c_1 < c_2 < A$ e $\zeta = \frac{c_2 - c_1}{A - c_1}$. Dados os números reais $a_1, ..., a_{N_0}$ satisfazendo $a_j \leq A$ para cada $1 \leq j \leq N_0$ e*

$$\sum_{j=1}^{N_0} a_j \geq c_2 N_0,$$

existe $l > \zeta N_0$ e $1 < n_1 < \cdots < n_l \leq N_0$ tal que

$$\sum_{j=n+1}^{n_i} a_j \geq c_1(n_i - n)$$

para cada $0 \leq n < n_i$ e $i = 1, ..., l$.

A prova deste fato pode ser encontrada [1](Lema 2.11).

No lema posterior conseguímos um conjunto de medida total onde todos seus pontos tem infinitos tempos hiperbólicos com densidade positiva, para sua demonstração é fundamental o Lema de Pliss acima. Antes de enunciar o lema vamos assumir que:

$$\inf_{(x,y)\in\mathcal{J}} \|Df_x(y)^{-1}\| > 0, \tag{2.1}$$

o qual é necessário para sua prova.

Lema 2.0.2. *Para cada medida invariante ν expansora com expoente c, existe um conjunto $H \subset \mathcal{J}$ de ν-medida total, tal que para cada $(x, y) \in H$ tem infinitos c-tempos hiperbólico $n_i = n_i(x, y)$. Além disso, a densidade de tempos hiperbólicos é maior que $\lambda = \lambda(c) > 0$:*

- $\prod_{j=n_i-k}^{n_i-1} \|Df_{\theta^j(x)}(f_x^j(y))^{-1}\| \leq \exp(-ck)$ *para cada* $1 \leq k \leq n_i$
- $\liminf_{n\to\infty} \frac{\#\{0 \leq n_i \leq n\}}{n} \geq \lambda > 0$

Uma consequência do lema anterior é ter ramos inversos contrativos nos tempos hiperbólicos, resultado que vamos a enunciar no lema de abaixo, mas usamos como hipótese deste trabalho a seguinte condição de distorção sobre as funções geradora. Para $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $z \in \mathcal{J}_x$ e $y \in B_\delta(z) \subset \mathcal{J}_x$, temos

$$\frac{\|Df_x(z)^{-1}\|}{\|Df_x(y)^{-1}\|} \leq \exp(\varepsilon/2). \tag{2.2}$$

para $\mathbb{P} - q.t.p.\ x \in X$.

Lema 2.0.3. *Existe $\delta_0 > 0$ tal que para $\mathbb{P}$-q.t.p. $x \in X$, se n_i é c-tempo hiperbólico de (x, y) e $z_{n_i} \in B_{\delta_0}(f_x^{n_i}(y))$, então existe $z \in B_{\delta_0}(y) \subset \mathcal{J}_x$ tal que $f_x^{n_i}(z) = z_{n_i}$ e*

$$d(f_x^{n_i-k}(z), f_x^{n_i-k}(y)) \leq \exp(-ck/2) d(f_x^{n_i}(z), f_x^{n_i}(y)),$$

para todo $1 \leq k \leq n_i$.

As provas dos Lemas 2.0.2 e 2.0.3 acima encontram-se em [5](Lemas 5.4 e 5.5).

O próximo lema envolve a constante α dada em (1.4) por

$$\alpha := \alpha(F) = \int_X \log p_x d\mathbb{P} - \max_{1\leqslant k\leqslant d-1} \int_X C_k(x,F)d\mathbb{P}(x) > 0,$$

os expoentes de Lyapunov e conforme à condição

$$\int \log^+ \|Df_x(y)\|\, d\mu < +\infty \quad e \quad \int \log^+ \|Df_x(y)^{-1}\|\, d\mu < +\infty, \tag{2.3}$$

conseguimos uma medida expansora $\nu \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}}(\mathcal{J})$ com expoente α para algum F^N sendo $N \in \mathbb{N}$. Logo, usando o Lema 2.0.2 temos um conjunto cujos pontos tem densidade positiva de tempos hiperbólicos.

Lema 2.0.4. *Seja μ medida ergódica invariante cujos expoentes de Lyapunov são maiores que $\alpha+\kappa$ onde $\kappa > 0$ uma constante pequena. Então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que F^N tem tempos hiperbólicos com densidade positiva para μ-q.t.p.*

Demonstração. Como os expoentes de Lyapunov de μ são maiores que $\alpha+\kappa$, para quase todo $(x,y) \in \mathcal{J}$, então para $\varepsilon > 0$ com $\varepsilon < \kappa$ existe $n_0(x,y) \geq 1$ tal que

$$\|Df_x^n(y)v\| \geq \exp((\alpha+\varepsilon)n)\|v\|, \quad v \in T_y\mathcal{J}_x, \quad n \geq n_0(x,y)$$

em outras palavras,

$$\|Df_x^n(y)^{-1}\| \leq \exp(-(\alpha+\varepsilon)n), \quad n \geq n_0(x,y)$$

Seja $A_n = \{(x,y) : n_0(x,y) > n\}$, portanto

$$\int_{\mathcal{J}} \log \|Df_x^n(y)^{-1}\| d\mu \leq -(\alpha+\varepsilon)n + \int_{A_n} \log\|Df_x^n(y)^{-1}\| d\mu$$

multiplicando por $\frac{1}{n}$

$$\frac{1}{n}\int_{\mathcal{J}} \log \|Df_x^n(y)^{-1}\| d\mu \leq -(\alpha+\varepsilon) + \int_{A_n} \frac{1}{n}\log\|Df_x^n(y)^{-1}\| d\mu,$$

fazendo $\varphi_n(x,y) = \log\|Df_x^n(y)^{-1}\|$, usando a hipótese (2.3) $\int \log^+\|Df_x(y)^{-1}\|d\mu < +\infty$ e o Teorema Ergódico Subaditivo de Kingman(ver [17], Teorema 3.3.3), concluímos que existe uma função $\varphi^+ \in L^1(\mu)$ tal que $\frac{1}{n}\varphi_n(x,y) \to \varphi(x,y), \mu-$ *q.t.p.*. Logo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\int_{\mathcal{J}} \log \|Df_x^n(y)^{-1}\| d\mu &\leq -(\alpha+\varepsilon) + \int_{A_n} \Big(\frac{1}{n}\varphi_n(x,y) - \varphi(x,y)\Big) d\mu + \int_{A_n} \varphi(x,y) d\mu \\
&\leq -(\alpha+\varepsilon) + \int_{A_n} \Big|\frac{1}{n}\varphi_n(x,y) - \varphi(x,y)\Big| d\mu + \int_{A_n} \varphi^+ d\mu \\
&\leq -(\alpha+\varepsilon) + \Big\|\frac{1}{n}\varphi_n - \varphi\Big\|_{L^1} + \int_{A_n} \varphi^+ d\mu
\end{aligned}$$

quando $n \to \infty$ implica $\mu(A_n) \to 0$. Então, podemos escolher N suficientemente grande tal que para $\varepsilon' > 0$ com $\varepsilon' < \varepsilon$

$$\int_{\mathcal{J}} \frac{1}{N} \log \|Df_x^N(y)^{-1}\| d\mu(x,y) < -(\alpha + \varepsilon') < 0$$

agora μ ser ergódica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{N} \log \|Df^N_{\theta^{Ni}(x)}(f_x^{Ni}(y))^{-1}\| = \int_{\mathcal{J}} \frac{1}{N} \log \|Df_x^N(y)^{-1}\| d\mu(x,y) < -(\alpha+\varepsilon')$$

portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log \|Df^N_{\theta^{Ni}(x)}(f_x^{Ni}(y))^{-1}\| < -N(\alpha + \varepsilon') < -4\alpha$$

Isso significa que aplicando Lema 2.0.2 temos a conclusão. □

O seguinte resultado é um Lema técnico que usaremos mais pra frente.

Lema 2.0.5. *Seja $A \subset \Omega$, $\beta > 0$ e $g : \Omega \to \Omega$ um difeomorfismo local tal que g tem densidade $> 2\beta$ de tempos hiperbólicos para cada $x \in A$. Então, dado qualquer medida de probabilidade ν sobre A e qualquer $m \geq 1$, existe $n > m$ tal que*

$$\nu\big(\{x \in A : n \text{ é tempo hiperbólico de } g \text{ para } x\}\big) > \beta$$

A prova deste lema pode ser encontrada em [16](Lema 4.4).

Capítulo 3

Entropia

Em 1958 Kolmogorov introduziu o conceito de Entropia para o caso determinístico, nesta secção vamos tratar da definição de entropia em RDS, tomando como referência as definições de Simmons D. e Urbanski M. em [20].

3.1 Partição

Dada uma partição $\mathcal{P}$ de $\mathcal{J}$ define-se

$$\mathcal{P}^n = \bigvee_{j=0}^{n-1} F^{-j}(\mathcal{P}), \quad n \geq 1$$

como a partição que se obtêm pela interseção das imagens inversas de F a partir de 0 até $n-1$ da partição $\mathcal{P}$.

Sendo $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_i\}_{i \in I}$, logo a partição induzida por $\mathcal{P}$ sob cada fibra $\mathcal{J}_x$ esta dada por $\mathcal{P}_x = \{A_{x,i}\}_{i \in I_x \subset I}$ onde $A_{x,i} = \mathcal{J}_x \cap \mathcal{P}_i$. Portanto

$$\mathcal{P}_x^n = \bigvee_{j=0}^{n-1} (f_x^j)^{-1}(\mathcal{P}_{\theta^j(x)}) = \mathcal{P}^n \cap \mathcal{J}_x$$

Consequentemente, $\widetilde{\mathcal{P}} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{P}_x$ é uma partição sob $\mathcal{J}$ induzida por $\mathcal{P}$ e além disso $\widetilde{\mathcal{P}}$ é mais fina que $\pi_X^{-1}(\varepsilon_X)$. Denotemos $\mathcal{A}_\mu(F|\theta)$ a coleção de todas as partições mensuráveis $\mathcal{P}$ de $\mathcal{J}$ mais fina que $\pi_X^{-1}(\varepsilon_X)$ e tendo entropia relativa finita a $\pi_X^{-1}(\varepsilon_X)(H_\mu(\mathcal{P}|\pi_X^{-1}(\varepsilon_X)) < +\infty)$ tal que $f_x|_{P_x}$ é injetora para $\mathbb{P}$-q.t.p. $x \in X$ e cada $P_x \in \mathcal{P}_x$.

Definição 3.1.1. Uma partição $\mathcal{P} \in \mathcal{A}_\mu(F|\theta)$ é geradora por F relativa a θ se somente se

$$\mathcal{P}^\infty := \bigvee_{j=0}^{\infty} F^{-j}(\mathcal{P}) \equiv_\mu \varepsilon_{\mathcal{J}}$$

onde $\varepsilon_{\mathcal{J}}$ é a partição sob $\mathcal{J} = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times \mathcal{J}_x$ sobre elementos unitários.

A relação $\equiv_\mu$ significa que dado duas partições $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ de $\mathcal{J}$, então $\mathcal{P}_1 \equiv_\mu \mathcal{P}_2$ se existe um conjunto mensurável $W \subseteq \mathcal{J}$ com $\mu(\mathcal{J} \setminus W) = 0$ tal que $\mathcal{P}_1|_W = \mathcal{P}_2|_W$.

Podemos obter uma partição geradora usando (1.4). Com efeito,

Lema 3.1.1. *Se μ é uma medida invariante tal que os expoente de Lyapunov são maiores que α(a constante α dada em (1.4)), $\mathcal{P} \in \mathcal{A}_\mu(F|\theta)$ uma partição com diâmetro menor que $\delta_0 > 0$ como no Lema 2.0.3. Para $\mu - q.t.p.$ $(x, y) \in \mathcal{J}$, então o diâmetro de $\mathcal{P}^n(x, y)$ tende a zero, quando n vai para infinito. Em particular, $\mathcal{P}$ é uma partição F-geradora com respeito a μ.*

Demonstração. Por Lema 2.0.4 existe $N \geq 1$ tal que F^N têm densidade positiva de tempos hiperbólicos para $\mu-$q. t. p.. Defina

$$\mathcal{S}_k = \bigvee_{j=0}^{k-1} F^{-jN}(\mathcal{P}), \quad \text{para cada } k \geq 1$$

Por Lema 2.0.3, se k é um tempo hiperbólico de F^N para (x, y) então $diam\mathcal{S}_k(x, y) \leq e^{-ck/2}$. Em particular, os conjuntos $\mathcal{S}_k(x, y)$ são não-crescente com k, o diâmetro de $\mathcal{S}_k(x, y)$ vai para zero quando $k \to +\infty$. Desde que $\mathcal{P}^{kN}(x, y) \subset \mathcal{S}_k(x, y)$ e a sequência $diam\mathcal{P}^n(x, y)$ é não-crescente, temos que o diâmetro de $\mathcal{P}^n(x, y)$ vai para zero quando n tende a infinito, para μ-quase todo $(x, y) \in \mathcal{J}$.

Para provar que $\mathcal{P}$ é uma partição geradora para F com respeito a μ, é suficiente mostrar que, dado qualquer conjunto mensurável E e $\varepsilon > 0$, existe $n \geq 1$ e elementos A_n^i, $i = 1, ..., m(n)$ de $\mathcal{P}^n$ tal que

$$\mu\big(\bigcup_{i=1}^{m} A_n^i \Delta E\big) < \varepsilon$$

Considerar os conjuntos compactos $K_1 \subset E$ e $K_2 \subset E^c$ tal que $\mu(K_1 \Delta E)$ e $\mu(K_2 \Delta E^c)$ são ambos menores que $\varepsilon/4$. Fixado $n \geq 1$ suficientemente grande tal que $diam\mathcal{P}^n(x, y)$ é menor que a distancia de K_1 a K_2 para (x, y) fora de um conjunto F_ε com medida menor que $\varepsilon/4$. Seja A_n^i, $i = 1, ..., m(n)$ os conjuntos $\mathcal{P}^n(x, y)$ que intersectam K_1, para $(x, y) \notin F_\varepsilon$. Então eles são disjuntos de K_2, e assim $\mu\big(\bigcup_i A_n^i \Delta E\big)$ é limitada por acima

$$\mu\big(E \setminus \bigcup_i A_n^i\big) + \mu\big(\bigcup_i A_n^i \setminus E\big) \leq \mu(E \setminus K_1) + \mu(E^c \setminus K_2) \leq \varepsilon.$$

Isso completa a prova. □

3.2 Entropia

3.2.1 Entropia relativa

Definição 3.2.1. Seja $\mu \in \mathcal{M}^1_{\mathbb{P}}(F)$, e $\mathcal{P}$ uma partição mensurável de $\mathcal{J}$ mais fina que $\pi_X^{-1}(\varepsilon_X)$, a entropia relativa com respeito a $\mathcal{P}$

$$h_\mu(F|\theta; \mathcal{P}) := \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} H_\mu(\mathcal{P}^n | \pi_X^{-1} \varepsilon_X).$$

onde entropia relativa é dada por,

$$H_\mu(\mathcal{P}|\pi_X^{-1}(\varepsilon_X) := \int_X H_{\mu_x}(\mathcal{P}_x) d\mathbb{P}(x) < +\infty$$

e $\mathcal{P}_x = \{\mathcal{P} \cap \mathcal{J}_x : P \in \mathcal{P}\}$

Por outro lado, seja

$$h_\mu(F|\theta) := \sup\{h_\mu(F|\theta; \mathcal{P})\},$$

o supremo é tomado sobre todas as partições mensuráveis $\mathcal{P}$ de $\mathcal{J}$ mais fina que $\pi_X^{-1}(\varepsilon_X)$. *O número $h_\mu(F|\theta)$ chama-se entropia de F relativa a θ com respeito à medida μ.*

Existem muitos resultados no caso determinístico que se adaptam à dinâmica aleatórios, como por exemplo os Teoremas Shannon-McMillan-Breiman, Margulis-Ruelle entre outros. Mencionemos aqui esses dois teoremas que envolvem a entropia relativa.

Teorema 3.2.1 (Shannon-McMillan-Breiman)**.** *Sejam $F : \mathcal{J} \to \mathcal{J}$ um RDS, $\mu \in \mathcal{M}^1_{\mathbb{P},e}(F)$(subconjunto das medidas ergódicas em $\mathcal{M}^1_{\mathbb{P}}(F)$) e $\mathcal{P} \in \mathcal{A}_\mu(F|\theta)$, então para $\mu - q.t.p.$ $(x, y) \in \mathcal{J}$*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n} \log \mu_x(\mathcal{P}^n_x(y)) = h_\mu(F|\theta; \mathcal{P})$$

Teorema 3.2.2 (Margulis-Ruelle)**.** *Seja F de classe C^1 um RDS sobre uma variedade M^d sem bordo e μ uma probabilidade F-invariante sobre $X \times M$. Suponha que*

$$\int_X \log^+ \sup_{y\in M} \|Df_x(y)\| d\mathbb{P}(x) < \infty$$

Então,

$$h_\mu(F|\theta) \leqslant \int_{X\times M} \sum_{i=1}^{d} \lambda_i^+(x, y) d\mu(x, y)$$

onde $\lambda_i^+(x, y) := \max\{\lambda^{(i)}(x, y), 0\}$.

As provas destes importantes resultados encontrar-se em [7] e [13](Teorema 2.4 e Teorema 2.1 (apêndice)) respectivamente. Uma aplicação do Teorema de Margulis-Ruelle está na prova do lema a seguir onde assumimos como hipótese (1.4), expressada como

$$\alpha := \alpha(F) = \int_X \log p_x d\mathbb{P} - \max_{1\leqslant k\leqslant d-1} \int_X C_k(x, F) d\mathbb{P}(x) > 0$$

Lema 3.2.1. *Se μ é uma probabilidade invariante com um expoente menor que $\alpha(F)$, então*

$$h_\mu(F|\theta) < \int_X \log p_x d\mathbb{P}(x)$$

Demonstração. Denotemos por $\lambda_1(x,y) \leq \cdots \leq \lambda_d(x,y)$ os expoentes de Lyapunov de F em (x,y). Portanto, usando a desigualdade de Margulis-Ruelle temos

$$\begin{aligned}
h_\mu(F|\theta) &\leq \int_{\mathcal{J}} \sum_{i=1}^{d} \lambda_i^+(x,y)d\mu(x,y) \\
&= \int_{\mathcal{J}} \lambda_1^+(x,y)d\mu(x,y) + \int_{\mathcal{J}} \sum_{i\in\{2,\ldots,d\}} \lambda_i^+(x,y)d\mu(x,y) \\
&< \alpha(F) + \int_{\mathcal{J}} C_k(x,y)d\mu(x,y) \leq \alpha(F) + \max_{1\leq k\leq d-1} \int_X C_k(x,F)d\mathbb{P}(x) \\
&\leq \int_X \log p_x d\mathbb{P}(x).
\end{aligned}$$

□

3.2.2 Fórmula de Rokhlin's em RDS

Seja $g : (Z,\mathcal{A},\nu) \to (W,\mathcal{B},\rho)$ transformação preservando medida entre os espaços de probabilidade $(Z,\mathcal{A},\nu)$ e $(W,\mathcal{B},\rho)$. Suponha que existe uma partição mensurável e contável $\mathcal{G} = \{A_i\}$ de $Z(\nu - \mod 0)$ tal que para cada A_i a aplicação $g_i := g|_{A_i} : A_i \to W$ é absolutamente contínua, isto é,

1. g_i é injetora.
2. $g_i(A)$ é mensurável se A é um conjunto mensurável de A_i.
3. $\rho(g_i(A)) = 0$ se $A \subset A_i$ é mensurável e $\nu(A) = 0$.

Por 1. e 2. definimos a medida ν_{g_i} sobre cada A_i por $\nu_{g_i}(A) = \rho(g_i(A))$ para cada $A \subset A_i$. Por 3. ν_{g_i} é absolutamente contínua com respeito a $\nu_i := v|_{A_i}$. Agora, seja a função mensurável $J_\nu(g) : Z \to \mathbb{R}^+$ dada por

$$J_\nu(g)(x) = \frac{d\nu_{g_i}}{d\nu_i}(x) \quad se \quad x \in A_i$$

Aplicando o acima para $F : \mathcal{J} \to \mathcal{J}$ um RDS, μ uma probabilidade invariante. Temos uma função não-negativa $J_\mu(F)$ e existe um conjunto $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$ de medida zero tal que para cada mensurável $A \subset \mathcal{J} \setminus \mathcal{I}$ para qual F é injetora, então

$$\mu(F(A)) = \int_A J_\mu(F)d\mu.$$

Agora, restringindo $J_\mu(F)$ a $\mathcal{J}_x$ e usando o conjunto de medida zero $\mathcal{I}$, consideramos a função $J_{\mu_x}(f_x) = J_\mu(F)|_{\mathcal{J}_x}$ sob a fibra $\mathcal{J}_x$ for $\mathbb{P} - q.t.p\ x \in X$. Pela definição de acima é claro que:

$$\mu_{\theta(x)}(f_x(A_x)) = \int_{A_x} J_{\mu_x}(f_x)d\mu_x.$$

Para qualquer $A_x \subset \mathcal{J}_x \setminus \mathcal{I}_x$ mensurável tal que $f_x|_{A_x}$ é injetora. Em particular, J_{μ_x} é o jacobiano de f_x relativa a μ_x.

Em nosso contexto e usando Lema 3.1.1, temos uma partição $\mathcal{P}$ F-geradora, então F é essencialmente contável, isso é: Dada a partição mensurável $\mathcal{A} := F^{-1}(\varepsilon_{\mathcal{J}})$ o sistema canônico de medidas condicionais correspondente $(\mu_A)_{A\in\mathcal{A}}$ são puramente atômicos(mod0 com respeito a μ_A) para todo $A \in \mathcal{A}$. Portanto por Proposição 1.9.5 de [18] o jacobiano e a medida μ sempre existem.

Com isso, obtemos uma formula que relaciona o jacobiano e a entropia de uma medida. Sugerimos [16], Proposição 6.1 ou [18], Teorema 1.9.7 para a prova.

Teorema 3.2.3 (Fórmula de Rokhlin's aleatória)**.** *Se μ é medida ergódica invariante que admite uma partição $\mathcal{P}$ $F-$ geradora com respeito a μ, então*

$$h_\mu(F|\theta) = \int \log J_\mu(F)d\mu = \int_X \left(\int_{\mathcal{J}_x} \log J_{\mu_x} f_x(y) d\mu_x(y) \right) d\mathbb{P}(x)$$

onde $J_{\mu_x} f_x$ denota o jacobiano de f_x relativa a μ_x para $\mathbb{P}-q.t.p.\quad x \in X$.

3.2.3 Pressão topológica relativa

Um sistema dinâmico aleatório métrico $F : \mathcal{J} \to \mathcal{J}$ é *topológico* se para cada $x \in X$, as fibras $\mathcal{J}_x$ são um espaço métrico compacto, com métrica d_x, cuja $\sigma-$álgebra de Borel é $\mathcal{B}_x = \mathcal{B} \cap \mathcal{J}_x$, e $\sup_{x\in X} diam(\mathcal{J}_x) < +\infty$.

Definição 3.2.2. Diz que um sistema dinâmico aleatório topológico $F : \mathcal{J} \to \mathcal{J}$ é *tipo global* se existe um espaço métrico compacto (Y, d) tal que

- Para cada $x \in X$, $\mathcal{J}_x \subseteq Y$, e $d_x = d|_{\mathcal{J}_x}$.
- $\mathcal{B} = (\mathcal{F} \bigotimes \mathcal{B}_Y)|_{\mathcal{J}}$, onde $\mathcal{B}_Y$ é a $\sigma-$álgebra de subconjuntos de Borel de Y.

Se $\mathcal{J}_x = Y$ para todo $x \in X$, então F chama-se *tipo global fortemente*. Neste caso Y é dito *espaço vertical* do sistema dinâmico aleatório topológico $F : \mathcal{J} \to \mathcal{J}$.

Dado $x \in X$, $\varepsilon > 0$, um inteiro $n \geq 0$, é $E \subseteq \mathcal{J}_x$ um conjunto $(x, n, \varepsilon)-$separável se para cada dois pontos distintos $y, z \in E$ existe $j \in \{0, 1, ..., n-1\}$ tal que $d_{\theta^j(x)}(f_x^j(y), f_x^j(z)) > \varepsilon$. Se $F : \mathcal{J} \to \mathcal{J}$ é de tipo global fortemente e $\varphi \in \mathbb{L}^1_{\mathcal{J}}(X, \mathcal{C}(Y))$(dado em (1.1)) chamam-se *potencial*, definimos a *pressão topológica relativa*

$$P_t(\varphi, F|\theta) := \lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_X \log \sup_{E\subseteq\mathcal{J}_x} \left(\sum_{y\in E} \exp(S_n\varphi(x, y)) \right) d\mathbb{P}(x),$$

onde sup é tomado sobre todos $(x, n, \varepsilon)-$separável subconjunto $E \subseteq \mathcal{J}_x$. No caso particular do potencial nulo $\varphi \equiv 0$ a equação acima chama-se *entropia topológica relativa*, denotando-se $h_t(F|\theta) := P_t(0, F|\theta)$

Bogenschütz prova em [6] o principio variacional para sistemas dinâmicos aleatórios, o qual é:

Teorema 3.2.4. *Seja $F : \mathcal{J} \to \mathcal{J}$ um sistema dinâmico aleatório topológico de tipo global fortemente e $\varphi \in \mathbb{L}^1_{\mathcal{J}}(X, \mathcal{C}(Y))$ um potencial, então*

$$P_t(\varphi, F|\theta) = \sup_{\mu\in\mathcal{M}^1_{\mathbb{P}}(F)} \left(h_\mu(F|\theta) + \int_{\mathcal{J}} \varphi d\mu \right). \tag{3.1}$$

Por outro lado, em alguns situações existem medidas $\mu \in \mathcal{M}^1_{\mathbb{P}}(F)$ que atingem (3.1), essas medidas chamam-se *estado de equilíbrio relativo* para o potencial $\varphi \in \mathbb{L}^1_{\mathcal{J}}(X, \mathcal{C}(Y))$. Para potencial nulo o estado de equilíbrio relativo chama-se *medida maximizante relativa*.

Por outra parte, consideremos o seguinte exemplo que satisfaz as hipóteses de nosso resultado. Dados dois difeomorfismos locais $f_0, f_1 : Y \to Y$ de classe C^1, tal que $\log\|\Lambda^k Df_1\| < \log p_1$ para $1 \leq k < d$. Seja $\mathbb{P}_\alpha$ uma medida de Bernoulli sob espaço de sequências $X = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ tal que $\mathbb{P}_\alpha([1]) = \alpha$, definida como abaixo. Consideremos

$$A^n_{\widetilde{\alpha}} = \{x = (i_j) \in X : \frac{\sharp\{i_j = 1; 0 \leq j \leq n-1\}}{n} \geq \widetilde{\alpha}\}.$$

dado $\widetilde{\alpha} < \alpha$, existe ε_n tal que $\varepsilon_n \to 0$ e $1 - \varepsilon_n \leq \mathbb{P}_\alpha(A^n_{\widetilde{\alpha}}) \leq 1 + \varepsilon_n$. Defina-se

$$L = \max_{1 \leq k \leq d} \max\{\log\|\Lambda^k Df_0\|, \log\|\Lambda^k Df_1\|\}.$$

Temos que,

$$\begin{aligned}
\int \log\|\Lambda^k Df^n_x\| d\mathbb{P}_\alpha(x) &\leq \int_{A^n_{\widetilde{\alpha}}} \log \Pi_{j=0}^{n-1} \|\Lambda^k Df_{i_j}\| d\mathbb{P}_\alpha \\
&\quad + \int_{(A^n_{\widetilde{\alpha}})^c} \log \Pi_{j=0}^{n-1} \|\Lambda^k Df_{i_j}\| d\mathbb{P}_\alpha \\
&\leq (1+\varepsilon_n)(\widetilde{\alpha} n \log\|\Lambda^k Df_1\| + (1-\widetilde{\alpha}) n \log L) \\
&\quad + \int_{(A^n_{\widetilde{\alpha}})^c} \log \Pi_{j=0}^{n-1} \|\Lambda^k Df_{i_j}\| d\mathbb{P}_\alpha
\end{aligned}$$

Agora, multiplicando por $1/n$ e aplicando o Teorema Ergódico Subaditivo de Kingman,

$$\begin{aligned}
\int \lim \frac{1}{n} \log\|\Lambda^k Df^n_x\| d\mathbb{P}_\alpha(x) &\leq \widetilde{\alpha} \log\|\Lambda^k Df_1\| + (1-\widetilde{\alpha}) \log L \\
&\quad + \lim \frac{1}{n} \int_{(A^n_{\widetilde{\alpha}})^c} \log \Pi_{j=0}^{n-1} \|\Lambda^k Df_{i_j}\| d\mathbb{P}_\alpha \\
&= \widetilde{\alpha} \log\|\Lambda^k Df_1\| + (1-\widetilde{\alpha}) \log L.
\end{aligned}$$

Usando que $\log\|\Lambda^k Df_1\| < \log p_1$ para $1 \leq k < d$, se escolhemos α perto de 1, devemos tomar $\widetilde{\alpha}$ perto de α tal que para cada $1 \leq k < d$,

$$\widetilde{\alpha} \log\|\Lambda^k Df_1\| + (1-\widetilde{\alpha}) \log L < \alpha \log p_1 + (1-\alpha) \log p_0 = \int \log p_x d\mathbb{P}_\alpha(x).$$

Portanto, obtemos a principal hipótese da tese(1.4). Com respeito a demais hipóteses (2.2), (2.3) segue-se diretamente do fato que as funções f_0, f_1 são de classe C^1 e Y é compacto.

Capítulo 4

Existência e unicidade

No conjunto $\mathcal{M}^1_{\mathbb{P}}(F)$ das medidas μ probabilidade invariantes, provaremos que todas as auto medidas maximal μ com desintegração respectiva $(\mu_x)_{x\in X}$ correspondente à partição mensurável $\pi_X^{-1}(\varepsilon_X)$, atingem o principio variacional aleatório Teorema 3.2.4.

4.0.4 Existência

Para mostrar que cada sistema de auto-medidas maximal $\mu = (\mu_x)_{x\in X}$ é uma medida maximizante, vamos assumir a hipóteses dada em (2.3) o qual é:

$$\int \log^+ \|Df_x(y)\|\, d\mu < +\infty. \tag{4.1}$$

para cada $\mu \in \mathcal{M}^1_{\mathbb{P}}(F)$. Enunciemos o teorema da existência

Teorema A1 (Existência)**.** *Seja $F : \mathcal{J} \to \mathcal{J}$ um RDS que satisfazendo (1.4), (2.2) e (2.3). Então $h_{top}(F|\theta) = \int_X \log p_x d\mathbb{P}(x)$. Além disso, se $\mu \in \mathcal{M}^1_{\mathbb{P}}(F)$ tal que sua desintegração $\mu = (\mu_x)_{x\in X}$ é uma sistema de auto-medidas maximal para o operador de transferência $(\mathcal{L}_x)_{x\in X}$, então μ é uma medida de entropia maximizante.*

A estratégia da prova consiste em usar o operador de transferência para um sistema de auto-medidas maximal, logo aplicando a fórmula de Rokhlin's aleatória Teorema 3.2.3, temos que entropia métrica vai ser igual a $\int_X \log p_x d\mathbb{P}(x)$. Depois, utilizamos o principio variacional aleatório 3.2.4 para estimar a entropia topológica.

Lema 4.0.2. *Seja $\mu \in \mathcal{M}^1_{\mathbb{P}}(F)$ tal que $\mathcal{L}^*_x \mu_{\theta(x)} = p_x \mu_x$ para todo $x \in X$ então $J_{\mu_x} f_x = p_x$ em $\mu_x - q.t.p.$*

Demonstração. Seja A um conjunto mensurável tal que $f_x|_A$ é injetiva. Tomando a sequência $\{g_n\} \in C(\mathcal{J}_x)$ tal que $g_n \to \chi_A$ em μ_x- q. t. p. e $\sup|g_n| \le 2$ para todo n. Por definição,

$$\mathcal{L}_x g_n(z) = \sum_{f_x(y)=z} g_n(y).$$

A última expressão converge a $\chi_{f_x(A)}(z)$ em $\mu_{\theta(x)} - q.t.p.$. Portanto, pelo teorema da convergência dominada

$$\int p_x g_n d\mu_x = \int g_n d(\mathcal{L}^*_{\theta(x)}\mu_{\theta(x)}) = \int \mathcal{L}_x g_n d\mu_{\theta(x)} \to \mu_{\theta(x)}(f_x(A))$$

O lado direito também converge a $p_x\mu_x(A)$, concluindo que

$$\mu_{\theta(x)}(f_x(A)) = p_x\mu_x(A).$$

o que prova o lema. $\square$

Lema 4.0.3. *Seja $\mu \in \mathcal{M}^1_{\mathbb{P}}(F)$ tal que $\mathcal{L}^*_x\mu_{\theta(x)} = p_x\mu_x$ para todo $x \in X$, então $h_\mu(F|\theta) \geq \int \log p_x d\mathbb{P}(x)$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{P} \in \mathcal{A}_\mu(F|\theta)$, por Lema 4.0.2, temos que $\mu - q.t.p.$ (x, y):

$$\mu_{\theta^n(x)}(f^n_x(\mathcal{P}^n_x(y))) = p_{\theta^{n-1}(x)}p_{\theta^{n-2}(x)}\cdots p_{\theta(x)}p_x\mu_x(\mathcal{P}^n_x(y)).$$

Como $1 \geq \mu_{\theta^n(x)}(f^n_x(\mathcal{P}^n_x(y)))$, temos que

$$\frac{-1}{n}\log(p_{\theta^{n-1}(x)}p_{\theta^{n-2}(x)}\cdots p_{\theta(x)}p_x)^{-1} \leq \frac{-1}{n}\log\mu_x(\mathcal{P}^n_x(y))$$

Usando o Teorema de Shannon-McMillan-Breiman em 3.2.1,

$$\lim\frac{1}{n}\log(p_{\theta^{n-1}(x)}p_{\theta^{n-2}(x)}\cdots p_{\theta(x)}p_x) = \lim\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\log p_{\theta^j(x)} \leq h_\mu(F|\theta;\mathcal{P})$$

Por outro lado, se m é a medida de Lebesgue, então

$$p_x = \int_{\mathcal{J}_x}|detDf_x(y)|dm(y) \leq \|Df_x\|^d m(\mathcal{J}_x)$$

no qual, $\log p_{(\cdot)} \in L^1(X, \mathbb{P})$. De fato, usando a hipótese (4.1)

$$\int_X \log p_x d\mathbb{P}(x) \leq d\int_X \log^+ \sup_{y\in\mathcal{J}_x}\|Df_x(y)\|d\mathbb{P}(x) + \log m(Y) < +\infty.$$

Portanto, como $\mathbb{P}$ é uma medida ergódica sobre X, pelo Teorema Ergódico de Birkhoff:

$$\int_X \log p_x d\mathbb{P}(x) = \lim\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\log p_{\theta^j(x)} \leq h_\mu(F|\theta;\mathcal{P}) \leq h_\mu(F|\theta)$$

assim o lema está provado. $\square$

Corolário 4.0.1. *Seja $\mu \in \mathcal{M}^1_{\mathbb{P}}(F)$ tal que $\mathcal{L}^*_x\mu_{\theta(x)} = p_x\mu_x$ para cada $x \in X$, então*

$$h_\mu(F|\theta) = \int_X \log p_x d\mathbb{P}(x)$$

Demonstração. Usando Lema 4.0.3, a entropia é $h_\mu(F|\theta) \geq \int_X \log p_x d\mathbb{P}(x)$. Agora, por Lema 3.2.1, temos que todos os expoentes de Lyapunov de μ são maiores que α e por Lema 3.1.1 existe uma partição $\mathcal{P}$ que é F-geradora com respeito a μ. Usando o Teorema 3.2.3 concluímos que,

$$h_\mu(F|\theta) = \int_X \int_{\mathcal{J}_x} \log J_{\mu_x} f_x d\mu_x d\mathbb{P}(x)$$

e pelo Lema 4.0.2 temos que $J_{\mu_x} f_x = p_x$. Provando que $h_\mu(F|\theta) = \int_X \log p_x d\mathbb{P}(x)$. $\square$

Para a prova do Lema 4.0.5 necessitamos a seguinte desigualdade de Jensen:

Lema 4.0.4 (Desigualdade de Jensen). *Seja a_i, b_i com $i = 1, 2, ..., n$ números reais positivos tal que $\sum_{i=1}^n a_i = 1$, então $\sum_{i=1}^n a_i \log b_i \leq \log\big(\sum_{i=1}^n a_i b_i\big)$. Acontece a igualdade se, somente se b_i todos são iguais.*

Lema 4.0.5. *A entropia topológica $h_{top}(F|\theta) = \int_X \log p_x d\mathbb{P}(x)$. Além disso, se $\nu \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}}^1(F|\theta)$ é qualquer medida maximizante ergódica, então $J_{\nu_x} f_x = p_x$ for $\mathbb{P} - q.t.p.$ $x \in X$, onde $(\nu_x)_{x \in X}$ representa a desintegração de ν com respeito à partição mensurável $\pi_X^{-1}(\varepsilon_X)$.*

Demonstração. Seja $\nu \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}}^1(F|\theta)$ uma medida ergódica, tal que $h_\nu(F|\theta) \geq \int_X \log p_x d\mathbb{P}(x)$, caso contrário não existe nada a provar.

Pelo Lema 3.2.1, todos os expoentes de Lyapunov de ν são maiores que $\alpha > 0$, portanto pelo Teorema (3.2.3)

$$\begin{aligned} h_\nu(F|\theta) &= \int_X \left(\int_{\mathcal{J}_x} \log J_{\nu_x} f_x(y) d\nu_x(y) \right) d\mathbb{P}(x) \\ &= \int_{\mathcal{J}} \log J_{\nu_x} f_x(y) d\nu(x, y) \end{aligned}$$

Definamos, $g_{\nu_x} = \dfrac{1}{J_{\nu_x} f_x}$. Por ser $(f_x)_* \nu_x = \nu_{\theta(x)}$ para todo $x \in X$ tem-se que

$$\sum_{f_x(y)=z} g_{\nu_x}(y) = 1, \quad \text{para } \nu_{\theta(x)} - q.t.p. \quad z \in \mathcal{J}_{\theta(x)}.$$

Com efeito. Seja $A \subset \mathcal{J}_{\theta(x)}$ mensurável com $f_x^{-1}(A) = \bigsqcup_{j=1}^{p_x} A_j$ tais que $f_x|_{A_j}$ é injetiva para $1 \leq j \leq p_x$, então

$$\begin{aligned} \nu_{\theta(x)}(A) &= \int_A 1 d\nu_{\theta(x)} = \nu_x(f_x^{-1}(A)) \\ &= \sum_{j=1}^{p_x} \nu_x(A_j) = \sum_{j=1}^{p_x} \nu_x((f_x|_{A_j})^{-1}(A)) \\ &= \sum_{j=1}^{p_x} \int_A J_{\nu_{\theta(x)}} (f_x|_{A_j})^{-1}(z) d\nu_{\theta(x)}(z) \\ &= \sum_{j=1}^{p_x} \int_A \frac{1}{J_{\nu_x} f_x(f_x|_{A_j}^{-1}(z))} d\nu_{\theta(x)}(z) \end{aligned}$$

fazendo $diam(A) \to 0$, então

$$1 = \sum_{j=1}^{p_x} \frac{1}{J_{\nu_x} f_x(y_j)}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 0 \le h_\nu(F|\theta) - \int_{\mathcal{J}} \log p_x d\nu &= \int_{\mathcal{J}} \log J_{\nu_x} f_x(y) d\nu - \int_{\mathcal{J}} \log p_x d\nu \qquad (4.2) \\ = \int_{\mathcal{J}} \log \frac{p_x^{-1}}{g_{\nu_x}} d\nu &= \int_{\mathcal{J}} \sum_{f_x(y)=z} g_{\nu_x}(y) \log \frac{p_x^{-1}}{g_{\nu_x}(y)} d\nu \end{aligned}$$

onde na segunda parte usamos o fato $g_{\nu_x} = \dfrac{1}{J_{\nu_x} f_x}$. Agora, usamos a desigualdade Jensen 4.0.4 considerando $a_i = g_{\nu_x}(y)$ e $b_i = p_x^{-1}/g_{\nu_x}(y)$ obtemos

$$\sum_{f_x(y)=z} g_{\nu_x}(y) \log \frac{p_x^{-1}}{g_{\nu_x}(y)} \le \log\Big(\sum_{f_x(y)=z} g_{\nu_x}(y) \frac{p_x^{-1}}{g_{\nu_x}(y)} \Big) = \log\Big(\sum_{f_x(y)=z} p_x^{-1} \Big) = 0$$

em $\nu_x - q.t.p.\ z \in \mathcal{J}_{\theta(x)}$. Como o integrando é não negativo segundo (4.2), a igualdade acontece ν_x- q.p.t., e

$$h_\nu(F|\theta) = \int_{\mathcal{J}} \log p_x d\nu = \int_X \int_{\mathcal{J}_x} \log p_x d\nu_x d\mathbb{P}(x) = \int_X \log p_x d\mathbb{P}(x)$$

Por ser a medida ν arbitrária, isso prova que

$$h_{top}(F|\theta) = \int_{\mathcal{J}} \log p_x d\nu = \int_{\mathcal{J}} \log J_{\nu_x} f_x(y) d\nu(x, y)$$

Para finalizar a prova do Lema 4.0.5, usamos novamente desigualdade de Jensen. Para esta segunda parte, os valores $p_x^{-1}/g_{\nu_x}(y)$ são os mesmos para todo $y \in f_x^{-1}(z)$ num conjunto de medida total com respeito a $\nu_{\theta(x)}$. Em outras palavras, para $\nu_{\theta(x)} - q.t.p.\ z \in \mathcal{J}_{\theta(x)}$ existe $c_x(z)$ tal que $\dfrac{p_x^{-1}}{g_{\nu_x}(y)} = c_x(z)$ para todo $y \in f_x^{-1}(z)$. Então

$$\frac{1}{c_x(z)} = \sum_{y \in f_x^{-1}(z)} \frac{p_x^{-1}}{c_x(z)} = \sum_{y \in f_x^{-1}(z)} g_{\nu_x}(y) = 1, \quad \nu_{\theta(x)} - q.t.p..$$

Concluindo,

$$J_{\nu_x} f_x(y) = p_x, \quad \nu_x - q.t.p.$$

para cada y na pré-imagem de um conjunto $\nu_{\theta(x)}$-com medida total. $\square$

4.0.5 Unicidade

Nesta seção vamos obter a unicidade de medidas de máxima entropia e provaremos que elas estão suportada num conjunto de medida total. Para conseguir esse resultado, adicionalmente às hipóteses anteriores assumiremos que F seja topologicamente exata(ver definição 1.1.2) e $deg(F) := \sup_{x \in X} deg(f_x) < +\infty$.

Teorema A2 (Unicidade). *Seja $F : \mathcal{J} \to \mathcal{J}$ um RDS que satisfazendo (1.4), (2.2) e (2.3). Além disso, assumamos que F é topologicamente exata e $deg(F) := \sup_{x \in X} \deg(f_x) < \infty$. Então a medida maximizante é única e positiva sob conjuntos abertos.*

A prova da unicidade decorrera dos Lemas 4.0.6, 4.0.7 e 4.0.8. O seguinte Lema utilizamos a hipótese de topologicamente exata, para mostrar que a medida esta suportada sob conjuntos abertos.

Lema 4.0.6. *Seja ν qualquer medida maximizante, então ν_x está suportada em $\mathcal{J}_x$, para $\mathbb{P}$ quase todo ponto $x \in X$.*

Demonstração. Vamos supor que $\nu_x(U_x) = 0$, onde $U_x \neq \phi$ é um aberto em $\mathcal{J}_x$. Usando a hipóteses de topologicamente exata, existe $N_x \in \mathbb{N}$ tal que $f_x^{N_x}(U_x) = \mathcal{J}_{\theta^{N_x}(x)}$. Particionando U_x em subconjuntos $U_{x,1}, ..., U_{x,k}$ tal que $f_x^{N_x}|_{U_{x,j}}$ é injetiva para todo $j = 1, ..., k$. temos

$$\nu_{\theta^{N_x}(x)}\big(f_x^{N_x}(U_{x,j})\big) = \int_{U_{x,j}} J_{\nu_x} f_x^{N_x} d\nu_x = 0$$

da aqui,

$$\nu_{\theta^{N_x}(x)}(J_{\theta^{N_x}(x)}) \leq \sum_{j=1}^{k} \nu_{\theta^{N_x}(x)}\big(f_x^{N_x}(U_{x,j})\big) = 0$$

o qual é uma contradição. □

Como consequência do lema anterior temos:

Lema 4.0.7. *Seja ν qualquer medida maximizante, dado $\delta > 0$ e f_x topologicamente exata, então*

$$\nu_x(B_x(y,\delta)) \geq (p_x p_{\theta(x)} \cdots p_{\theta^{n_\delta(x)-1}(x)})^{-1} \tag{4.3}$$

para todo $y \in \mathcal{J}_x$, onde $n_\delta(x)$ é definido como na Definição 1.1.2.

Demonstração. Seja $y \in \mathcal{J}_x$ e $B_x(y,\delta) \subset \mathcal{J}_x$. Agora, particionando $B_x(y,\delta)$ em subconjuntos $U_{x,1}, ..., U_{x,k}$ tal que cada $f_x^{n_\delta(x)}|_{U_{x,j}}$ é injetora para $j = 1, ..., k$, temos

$$\begin{aligned} 1 = \nu_{\theta^{n_\delta(x)}(x)}(f_x^{n_\delta(x)}(B_x(y,\delta)) &\leq \sum_{j=1}^{k} \nu_{\theta^{n_\delta(x)}(x)}(f_x^{n_\delta(x)}(U_{x,j})) \\ &\leq p_x p_{\theta(x)} \cdots p_{\theta^{n_\delta(x)-1}(x)} \nu_x(B_x(y,\delta)) \end{aligned} \tag{4.4}$$

□

Agora, seja μ^1 e μ^2 duas medidas ergódicas maximizantes. Nosso objetivo é provar que essas medidas coincidem. Primeiro provaremos que μ_x^1 e μ_x^2 são equivalentes.
Com efeito, fixada uma partição $\mathcal{P} \succ \pi_X^{-1}(\varepsilon_X)$ tal que $diam(\mathcal{P}) < \delta_0$ e para cada $P_x \in \mathcal{P}_x$ tem interior não vazio, e a fronteira ∂P tem medida zero para ambas μ^1 e μ^2. Podemos escolher $\delta > 0$ pequeno de modo que $P_x \in \mathcal{P}_x$ contém

alguma bola de raio δ.
Por outro lado, para $n \in \mathbb{N}$ tempo hiperbólico de $y \in \mathcal{J}_x$, existe $f_x^n(y) \in P_{\theta^n(x)} \in \mathcal{P}_{\theta^n(x)}$, então $P_{\theta^n(x)}(f_x^n(y)) \subset B(f_x^n(y), \delta_0)$, portanto $f_x^n|_{g(P_{\theta^n(x)}(f_x^n(y)))}$ é injetiva, onde $g = (f_x^n)^{-1}$. Usando o Lema 4.0.5 temos

$$\mu^j_{\theta^n(x)}(P_{\theta^n(x)}(f_x^n(y))) = p_x p_{\theta(x)} \cdots p_{\theta^{n-1}(x)} \mu_x^j(g(P_{\theta^n(x)}(f_x^n(y)))); \; j = 1, 2. \tag{4.5}$$

Por acima, existe $z \in P_{\theta^n(x)}(f_x^n(y))$, tal que $B(z, \delta) \subset P_{\theta^n(x)}(f_x^n(y))$, então pelo Lema 4.0.7, temos que

$$\mu^j_{\theta^n(x)}(B(z, \delta)) \geq (p_{\theta^n(x)} p_{\theta(\theta^n(x))} \cdots p_{\theta^{n_\delta(\theta^n(x))-1}(\theta^n(x))})^{-1}$$

e

$$\mu^j_{\theta^n(x)}(P_{\theta^n(x)}(f_x^n(y))) \geq (p_{\theta^n(x)} p_{\theta(\theta^n(x))} \cdots p_{\theta^{n_\delta(\theta^n(x))-1}(\theta^n(x))})^{-1} \geq (degF)^{-n^*_\delta}.$$

por (4.5)

$$(degF)^{-n^*_\delta} \leq p_x p_{\theta(x)} \cdots p_{\theta^{n-1}(x)} \mu_x^j(g(P_{\theta^n(x)}(f_x^n(y)))) \leq (degF)^{n^*_\delta}; \; j = 1, 2. \tag{4.6}$$

Antes de provar a unicidade, enunciaremos o seguinte Lema que nos permitir aproximar a medida de um conjunto mensurável sobre uma fibra, através dos ramos inversos dos tempos hiperbólicos da partição $\mathcal{P}$ dada acima. Denotamos por $\mathcal{Q}$ a família de todas as imagens $g(P_{\theta^n(x)})$, para $n \in \mathbb{N}$ tal que n é tempo hiperbólico para algum $y \in \mathcal{J}_x$.

Lema 4.0.8. *Dado qualquer conjunto mensurável $E \subset \mathcal{J}_x$ e $\varepsilon > 0$, existe uma família ξ de elementos disjuntos dois a dois de $\mathcal{Q}$ tal que*

$$\mu_x^j\big(E \setminus \bigcup_\xi g(P)\big) = 0 \quad e \quad \mu_x^j\big(\bigcup_\xi g(P) \setminus E\big) \leq \varepsilon, \quad j = 1, 2.$$

Demonstração. Por Lema 3.2.1, todos os expoentes de Lyapunov de μ^j são maiores que $\alpha(F)$. Por Lema 2.0.4, existe $N \geq 1$ e $\lambda > 0$ tal que $\mu^j - q.t.p.$ tem densidade $> 2\lambda$ de tempos hiperbólicos.
Seja $U_1 \subset \mathcal{J}_x$ aberto e $K_1 \subset \mathcal{J}_x$ um compacto tal que $K_1 \subset E \subset U_1$ e $\mu_x^j(U_1 \setminus E) \leq \varepsilon$ e $\mu_x^j(K_1) \geq \frac{1}{2}\mu_x^j(E)$ para $j = 1, 2$. Usando Lema 2.0.5, com $A = K_1$ e $\nu_x = \mu_x^j/\mu_x^j(K_1)$, podemos encontrar $n_1 \geq 1$ tal que $\exp(-\alpha n_1/2) < d(K_1, U_1^c)$ e o subconjunto $L_1 \subset K_1$ de pontos $y \in \mathcal{J}_x$ para qual n_1 é tempo hiperbólico que satisfaz $\mu_x^j(L_1) \geq \lambda\mu_x^j(K_1) \geq (\lambda/2)\mu_x^j(E)$. Seja ξ_1 a família de todos $g(P_{\theta^{n_1}(x)})$, que intersectam L_1, com $P_{\theta^{n_1}(x)} \in \mathcal{P}_{\theta^{n_1}(x)}$ e g o ramo inverso de $f_x^{n_1}$. Os elementos de ξ_1 são disjuntos dois a dois, pois os elementos de $\mathcal{P}_{\theta^{n_1}(x)}$ e g o ramo inverso de $f_x^{n_1}$. Usando Lema 2.0.3 o diâmetro $diam(\xi_1) \leq \exp(-\alpha n_1/2)$. Deste, seja E_1 a união de todos os elementos de ξ_1 que estão contido em U_1. Por construção, temos

$$\mu_x^j(E_1 \cap E) \geq \mu_x^j(L_1) \geq \lambda\mu_x^j(K_1) \geq (\lambda/2)\mu_x^j(E).$$

Continuando, consideremos o conjunto aberto $U_2 = U_1 \backslash \overline{E_1}$ e $K_2 \subset E \backslash \overline{E_1}$ um conjunto compacto tal que $\mu_x^j(K_2) \geq \frac{1}{2}\mu_x^j(E \backslash E_1)$. Observe que $\mu_x^j(\overline{E_1} \backslash E_1) = 0$, de fato a fronteira dos átomos de $\mathcal{P}$ tem medida zero e é preservada por os ramos inversos, já que μ^j é invariante. Fazendo o mesmo raciocínio, existe $n_2 > n_1$ tal que $\exp(-\alpha n_2/2) < d(K_2, U_2^c)$ e conjunto $L_2 \subset K_2$ tal que $\mu_x^j(L_2) \geq \lambda \mu_x^j(K_2)$ e n_2 é tempo hiperbólico para cada $y \in L_2$. Denotamos ξ_2 a família de imagens inversa $g(P_{\theta^{n_2}(x)})$ que interceptam a L_2, com $P_{\theta^{n_2}(x)} \in \mathcal{P}_{\theta^{n_2}(x)}$ e g o ramo inverso de $f_x^{n_2}$. Como antes, os elementos de ξ_2 são disjuntos dois a dois e o diâmetro $diam(\xi_2) \leq \exp(-\alpha n_2/2)$. Isso garanta que seu união E_2 esta contido em U_2. Consequentemente, os elementos da união $\xi_1 \cup \xi_2$ são também disjuntos dois a dois. Além disso,

$$\mu_x^j(E_2 \cap (E \setminus E_1)) \geq \mu_x^j(L_2) \geq \lambda \mu_x^j(K_2) \geq (\lambda/2)\mu_x^j(E \setminus E_1).$$

Repetindo o processo, construímos uma família de $\xi_k, k \geq 1$ de elementos de $\mathcal{Q}$ tal que seus elementos são disjuntos dois a dois e estão contido em U_1, e

$$\mu_x^j(E_{k+1} \cap (E \setminus (E_1 \cup \cdots \cup E_k))) \geq (\lambda/2)\mu_x^j(E \setminus (E_1 \cup \cdots \cup E_k)) \tag{4.7}$$

para todo $k \geq 1$, onde $E_i = \bigcup_{\xi_i} g(P)$. Assim, $\mu_x^j(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \setminus E) \leq \mu_x^j(U_1 \setminus E) \leq \varepsilon$ e (4.7) implica que

$$\mu_x^j(E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = 0$$

isso completa a prova do lema, com $\xi = \bigcup_{k=1}^{\infty} \xi_k$. □

Demonstração da unicidade da medida. Combinando (4.6) com Lema 4.0.8, temos que, para qualquer $E_x \subset \mathcal{J}_x$,

$$\begin{aligned}
\mu_x^1(E_x) \leq \mu_x^1(U_1) &\leq \varepsilon + \sum_{\xi = \bigcup_{k=1}^{\infty} \xi_k} \mu_x^1(g(P_{\theta^{n_k}(x)})) \\
&\leq \varepsilon + \sum_{\xi = \bigcup_{k=1}^{\infty} \xi_k} (deg(F))^{2n_\delta^*} \mu_x^2(g(P_{\theta^{n_k}(x)})) \\
&\leq \varepsilon + (deg(F))^{2n_\delta^*} \mu_x^2(E_x)
\end{aligned}$$

Pela arbitrariedade de $\varepsilon > 0$, temos que $\mu_x^1(E_x) \leq (deg(F))^{2n_\delta^*}\mu_x^2(E_x)$. De maneira similar tem-se $\mu_x^2(E_x) \leq (deg(F))^{2n_\delta^*}\mu_x^1(E_x)$ para qualquer E_x mensurável. Por Teorema de Radon Nykodym existe uma função mensurável essencialmente única $h_x : \mathcal{J}_x \to \mathbb{R}$ tal que $\mu_x^1 = h_x \mu_x^2$. Além disso, $(deg(F))^{-2n_\delta^*} \leq h_x \leq (deg(F))^{2n_\delta^*}$. Agora, seja $h : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ definida $h(x,y) = h_x(y)$ e sabemos que para todo mensurável $E_x \subset \mathcal{J}_x$ existe $E \subset \mathcal{J}$ mensuráveis tal que $E_x = E \cap \mathcal{J}_x$. Então, para todo $E \subset \mathcal{J}$ mensurável

$$\begin{aligned}
\mu^1(E) &= \int_X \mu_x^1(E \cap \mathcal{J}_x) d\mathbb{P}(x) = \int_X \mu_x^1(E_x) d\mathbb{P}(x) \\
&= \int_X \int_{E_x} h_x d\mu_x^2 d\mathbb{P}(x) = \int_E h \; d\mu^2
\end{aligned}$$

Desde que $\mu^1, \mu^2 \in \mathcal{M}^1_{\mathbb{P},e}(F)$ são invariantes, então

$$\mu^1 = F_*\mu^1 = (h \circ F)F_*\mu^2 = (h \circ F)\mu^2$$

Como a derivada de Radon Nykodym é essencialmente única, temos que $h = h \circ F$ em $\mu^2 - q.t.p.$ Pela ergodicidade h é constante em quase todo ponto

$$1 = \mu^1(\mathcal{J}) = h \int_{\mathcal{J}} d\mu^2 = h\mu^2(\mathcal{J}) = h$$

então $\mu^1 = \mu^2$ e assim $\mu_x^1 = \mu_x^2$ para todo $x \in X$. $\square$

Bibliografia

[1] J. F. Alves, *Statistical analysis of non-uniformly expanding dynamical systems*, Preprint ..

[2] ———, *SRB measures for non-hyperbolic systems with multidimensional expansion*, Ann. Sci. École Norm **33** (2000), 1–32.

[3] ———, *A survey of recent results on some statistical features of non-uniformly expanding maps*, Discrete and Continuous Dynamical Systems **15** (2006), 1–20.

[4] J. F. Alves, C. Bonatti, and M. Viana, *SRB measures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly expanding*, Invent. Math. **140** (2000), 351–398.

[5] A. Arbieto, C. Matheus, and K. Oliveira, *Equilibrium states for random non-uniformly expanding maps*, Nonlinearity **17** (2004), 581–593.

[6] T. Bogenschütz, *Entropy, pressure, and a variational principle for random dynamical systems*, Random and Computational Dynamics 1 **1, 3** (1992/93), 99–116. 3.2.

[7] ———, *Equilibrium states for random dynamical system*, Phd thesis, Institut fur Dynamische Systeme. Universitat Bremen, 1993.

[8] R. Bowen, *Equilibrium states and the ergodic theory of anosov diffeomorphisms*, Springer, 1975.

[9] V. Guillemin and A. Pollack, *Differential topology*, Prentice-Hall, 1974.

[10] Y. Kifer, *Equilibrium states for random expanding transformations*, Random Comput. Dynam **1** (1992), 1–31.

[11] P. D. Liu, *Random perturbations of axiom A basic sets*, J. Stat. Phys **90** (1998), 467–90.

[12] ———, *Dynamics of random transformations: smooth ergodic theory. ergodic theory and dynamical systems*, Institut fur Dynamische Systeme. Universitat Bremen **21** (2001), 1279–1319.

[13] P. D. Liu and M. Qian, *Smooth ergodic theory of random dynamical systems*, Springer, 1995.

[14] A. Ludwig, *Random dynamical systems*, Springer Monographs in Mathematics, 1998.

[15] V. Mayer, B. Skorulski, and M. Urbanski, *Distance expanding random mappings, thermodynamic formalism , gibbs measures and fractal geometry*, Springer, 2011.

[16] K. Oliveira and M. Viana, *Existence and uniqueness of maximizing measures for robust classes of local diffeomorphisms*, Discrete and Continuous Dynamical Systems **15,1** (2006), 225–236.

[17] ______, *Fundamentos de teoria ergódica*, SBM,Coleção Fronteiras da Matemática, 2014.

[18] F. Przytycki and M. Urbanski, *Conformal fractals- ergodic theory methods*, London Mathematical Society Lecture Note **371** (2010).

[19] V. A. Rokhlin, *On the fundamental ideas of measure theory*, Transl. Amer. Math. Soc **1,10** (1962), 1–52.

[20] D. Simmons and M. Urbanski, *Relative equilibrium states and dimensions of fiberwise invariant measures for distance expanding random maps*, Stochastic and Dynamics **14,1** (2014).

[21] P. Walters, *An introduction to ergodic theory*, Springer, 1982.

Índice