Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática - IM
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PGMAT
Dissertação de Mestrado

O Teorema das Curvaturas Principais e Aplicações

Teles Araújo Fernandes

Salvador-Bahia
Fevereiro de 2010

O Teorema das Curvaturas Principais e Aplicações

Teles Araújo Fernandes

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Ézio de Araújo Costa.

Salvador-Bahia

Fevereiro de 2010

Fernandes, Teles Araújo.

O Teorema das Curvaturas Principais e Aplicações / Teles Araújo Fernandes. – Salvador: UFBA, 2010.

35 f.

Orientador: Prof. Dr. Ézio de Araújo Costa.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2010.

Referências bibliográficas.

1. Geometria diferencial. 2. Variedades (Matemática). 3. Variedades riemannianas. I. Costa, Ézio de Araújo. II. Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática. III. Título.

CDU : 514.764.2

O Teorema das Curvaturas Principais e Aplicações

Teles Araújo Fernandes

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 05 de fevereiro de 2010.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Ézio de Araújo Costa (Orientador)
UFBA

Prof. Dr. José Nelson Bastos Barbosa
UFBA

Prof. Dr. Vicente Francisco de Sousa Neto
UNICAP

A minha mãe Madalena Araújo e minha noiva Manuela Silva.

Agradecimentos

Agradeço a todos que, de forma direta ou indireta, me deu apoio na elaboração deste trabalho. Em particular, ao meu orientador Ézio Costa que me transferiu um pouco da sua sabedoria, ao professor José Nelson Bastos que me deu grande apoio no que envolveu a geometria riemanniana geral, a minha noiva Manuela Souza e minha mãe Madalena Araújo. Agradeço ao meu presidente Luiz Inácio Lula da Silva pois sem o seu incentivo a educação superior não poderia me demitir, da empresa onde trabalhei, para estudar matemática.

Existe apenas um bem, o saber, e apenas um mal, a ignorância.

Sócrates.

Resumo

Neste trabalho demonstramos um teorema devido a Brian Smyth e Frederico Xavier, a saber: **O Teorema das Curvaturas Principais**. Entre aplicações desse teorema, provamos uma generalização de Efimov: Não existe hipersuperfície $f : \mathbb{M}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ completa e orientável com $Ric \leq -c$ tal que $c > 0$. De forma original, também provamos que, esse resultado é verdadeiro quando substituimos a curvatura de Ricci pelas curvaturas de Gauss-Kronecker e escalar.

Além disso, ainda como consequência deste teorema provamos que, para $n \geq 4$ não existe hipersuperfície $f : \mathbb{M}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ completa e orientável com $Ric \leq -c$ tal que $c > 0$ e com as curvaturas seccionais não assumindo todos os valores reais.
Palavras-chave: Hipersuperfícies do $\mathbb{R}^{n+1}$; imersão Isométrica; curvatura de Ricci; curvatura seccional; curvatura Gauss-Kronecker; curvatura média; variedade riemanniana completa.

Abstract

We demonstrated a theorem due to Brian Smyth and Frederico Xavier, namely: **The Principal Curvature Theorem**. Among applications of this theorem, we prove a generalization of Efimov: There are no complete and orientable hypersurfaces $f : \mathbb{M}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ with $Ric \leq -c$ such that $c > 0$. In original form, also proved that this result is true when we substitute the curvature of Ricc for curvature and Gauss-Kronecker scalar.

Moreover, even as a consequence of this theorem we prove that, to $n \geq 4$, there are no complete and orientable hypersurfaces $f : \mathbb{M}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ with $Ric \leq -c$ such that $c > 0$ and the sectional curvatures not taking all real values.

Keywords: Hipersurface in $\mathbb{R}^{n+1}$; isometric immersions; Ricci curvature; sectional curvature; Gauss-Kronecker curvature; mean curvature; completeness Riemannian manifolds.

Sumário

Introdução **1**

1 Preliminares **2**

1.1 Fatos Básicos da Geometria Riemanniana 2

1.2 Variedades Riemannianas Completas 4

1.3 Hipersuperfícies de $\mathbb{R}^{n+1}$ 6

2 Hipersuperfícies Convexas de $\mathbb{R}^{n+1}$ **12**

2.1 Propriedade da Envoltória Convexa da Hipersuperfície de $\mathbb{R}^{n+1}$ 12

3 O Teorema das Curvaturas Principais **21**

4 Aplicações **27**

Referências **34**

Introdução

É fato conhecido e provado por Nash [8] que toda variedade Riemanniana $\mathbb{M}^n$ pode ser imersa isometricamente em algum espaço euclidiano $\mathbb{R}^m$. Entretanto, se $m = n+1$ pode existir obstrução á existência de tais imersões (hipersuperfícies). Por exemplo, o clássico Teorema de Hilbert [6] afirma que o plano hiperbólico não pode ser imerso isometricamente no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$. Em 1968, Efimov [4] foi mais além e mostrou que uma superfície completa com curvatura gaussiana menor ou igual a uma constante negativa não pode ser imersa isometricamente em $\mathbb{R}^3$. Reilly [10] propos: Se uma n-variedade completa tem curvatura de Ricci menor ou igual a uma constante negativa então essa variedade não pode ser imersa isometricamente no $\mathbb{R}^{n+1}$. Smyth e Xavier [11] mostraram que este resultado é verdadeiro para $n = 3$ e para $n \geq 4$ com a hipótese adicional das curvaturas seccionais não asumirem todos os valores reais.

A prova do resultado de Smyth e Xavier se baseia no Teorema das Curvaturas Principais que é nosso principal resultado. Em seguida damos aplicações do referido teorema. Em particular, provamos que o resultado de Smyth e Xavier é válido em dimensão $n = 3$ e também quando substituimos a curvatura de Ricci pela curvatura escalar ou pela curvatura de Gauss-Kronecker.

Assim, o objetivo deste trabalho é demonstrar, com detalhes, o resultado em [11] e acrescentar que esses resultados também são válidos para as curvaturas de Guass-Kronecker e escalar. Para atingir nosso objetivo, dedicamos o primeiro capítulo as noções básicas da geometria Riemanniana que estão relacionada com o proposto. No segundo capítulo, apresentamos os conceitos de hipersuperfícies convexas de $\mathbb{R}^{n+1}$ e da propriedade da envoltória convexa das variedades. No terceiro capítulo, demonstramos o Teorema das Curvaturas Principais e, para finalizar este trabalho, o capítulo quatro apresenta as aplicações desse teorema.

Capítulo 1

Preliminares

O objetivo deste capítulo é familiarizar o leitor com a linguagem básica e alguns resultados fundamentais da Geometria Riemanniana. Começamos com conceitos básicos: variedades diferenciáveis, métrica Riemanniana, conexão Riemanniana e curvatura. Em seguida é apresentada a segunda seção, onde definimos uma distância em uma variedade, as curvas geodésicas e a completude de variedades. Na terceira seção, abordamos o conceito e as principais equações das hipersuperfícies de $\mathbb{R}^{n+1}$.

1.1 Fatos Básicos da Geometria Riemanniana

Uma variedade diferenciável de classe C^∞ e de dimensão n, denotada por $\mathbb{M}^n$, é um conjunto conexo $\mathbb{M}$ e uma família de aplicações biunívocas $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{M}$ de abertos U_α de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{M}$ tais que:

(i) $\displaystyle\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = \mathbb{M}$.

(ii) Para todo par α, β, com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $x_\alpha^{-1}(W)$ e $x_\beta^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e as aplicações $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ são diferenciáveis.

(iii) A família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ é máxima relativamente às condições (i) e (ii).

De agora em diante, quando indicarmos uma variedade diferencável por $\mathbb{M}$, estaremos considerando que sua dimensão é n, salvo menção em contrário.

Dada uma variedade diferenciável $\mathbb{M}$ definimos uma métrica Riemanniana como uma função que associa cada $p \in \mathbb{M}$ um produto interno $\langle , \rangle_p : T_p\mathbb{M} \times T_p\mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo a seguinte propriedade: Se U é um aberto em $\mathbb{M}$ e X, Y são campos de vetores diferenciáveis em U, então a função $\langle X, Y\rangle : U \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\langle X, Y\rangle(p) = \langle X_{|_p}, Y_{|_p}\rangle_p$$

é diferenciável em U.

Uma variedade Riemanniana é uma variedade diferenciável com uma métrica Riemanniana.

Sejam $\chi(\mathbb{M})$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em $\mathbb{M}$ e $\mathcal{C}(\mathbb{M})$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em $\mathbb{M}$. Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável $\mathbb{M}$ é uma aplicação

$$\begin{array}{rccc} \nabla: & \chi(\mathbb{M}) \times \chi(\mathbb{M}) & \longrightarrow & \chi(\mathbb{M}) \\ & (X,Y) & \longmapsto & \nabla_X Y \end{array}$$

que satisfaz as propriedades:

$$(i) \quad \nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_y Z,$$

$$(ii) \quad \nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$$

$$(iii) \quad \nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y,$$

onde $X, Y, Z \in \chi(\mathbb{M})$ e $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{M})$.

Definição 1.1.1. *Seja $\mathbb{M}$ uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ e uma métrica Riemanniana $\langle , \rangle$. A conexão é dita compatível com a métrica $\langle , \rangle$ se*

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \ X, Y, Z \in \chi(\mathbb{M}).$$

Sejam X, Y campos diferenciáveis de vetores em uma variedade diferenciável $\mathbb{M}$. É possível provar que existe um único campo vetorial Z tal que, para todo $f \in \mathcal{C}(\mathbb{M})$, $Zf = (XY - YX)f$. O campo vetorial Z é chamado o *colchete* de X e Y e denotamos $[X, Y] = XY - YX$.

Definição 1.1.2. *Uma conexão afim em uma variedade diferenciável $\mathbb{M}$ é dita simétrica quando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \text{ para todo } X, Y \in \chi(\mathbb{M}).$$

Um teorema de Levi-Civita mostra que dada uma variedade Riemanniana $\mathbb{M}$, existe uma única conexão afim ∇ em $\mathbb{M}$ tal que ∇ é simétrica e compatível com a métrica Riemanniana. Dizemos que essa conexão é a conexão Riemanniana de $\mathbb{M}$.

A curvatura R de uma variedade Riemanniana $\mathbb{M}$ é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \chi(M)$ uma aplicação $R(X,Y) : \chi(\mathbb{M}) \longrightarrow \chi(\mathbb{M})$ dada por

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, \ Z \in \chi(\mathbb{M}).$$

onde ∇ é conexão Riemanniana de $\mathbb{M}$.

Intimamente relacionado com o operador curvatura está a curvatura seccional que definimos,

Definição 1.1.3. *(Curvatura seccional) Dado um ponto $p \in \mathbb{M}^n$ e um subespaço bi-dimensional $\sigma \subset T_p\mathbb{M}^n$ o número real $K_p(u,v) = K_p(\sigma) = \dfrac{\langle R(u,v)u, v\rangle}{|u \wedge v|^2}$ onde u, v é uma base qualquer de σ, é chamado curvatura seccional de σ em p.*

Existem combinações importantes das curvatura seccionais, a saber:
Seja $x = z_n$ um vetor unitário em $T_p\mathbb{M}$, tomemos uma base ortonormal $\{z_1, ..., z_n = x\}$ do hiperplano de $T_p\mathbb{M}$ ortogonal a $x = z_n$.

A curvatura de Ricci, no ponto p, e na direção x é

$$Ric_p(x) = \sum_{i \neq n} \langle R(x, z_i)x, z_i\rangle.$$

A curvatura escalar, no ponto p é a soma das curvaturas de Ricci, i.é,

$$\tau(p) = \sum_i Ric_p(z_i) = \sum_{ij} \langle R(z_i, z_j)z_i, z_j\rangle,\ j = 1, ..., n.$$

1.2 Variedades Riemannianas Completas

Dados dois pontos p e q em $\mathbb{M}$, dizemos que a distância de p a q, denotada por $d(p,q)$, é o ínfimo dos comprimentos de todas as curvas diferenciáveis por partes ligando p a q. Munido da métrica d, $\mathbb{M}$ é um espaço métrico completo e além disso, a topologia induzida por d em $\mathbb{M}$ coincide com a topologia inicial de $\mathbb{M}$.

Dada uma curva parametrizada $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{M}$, dizemos que γ é uma geodésica se $\dfrac{D}{dt}\left(\dfrac{d\gamma}{dy}\right) = 0$ para todo $t \in I$ onde, $\dfrac{D}{dt}$ é a derivada covariante. Note que, se γ é uma geodésica, então

$$\frac{d}{dt}\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}\rangle = 2\langle \frac{D}{dt}\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}\rangle = 0.$$

Portanto, o comprimento do vetor tangente $\dfrac{d\gamma}{dt}$ é constante. O comprimento de arco s de γ, a partir de uma origem fixa, digamos $t = t_0$, é dado por

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \| \frac{d\gamma}{dt} \|\ dt = c(t - t_0).$$

Se $c = 1$, dizemos que a geodésica γ está normalizada.

Com o intuito de definir aplicação exponencial e vizinhança totalmente normal, seguem duas proposições e suas demostrações podem ser encontradas em [3].

Proposição 1.2.1. *Dado $p \in \mathbb{M}$, existem uma vizinhança V de p em $\mathbb{M}$, um número real $\varepsilon > 0$ e uma aplicação C^∞, $\gamma(-a,a) \times \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{M}$ tal que $t \longmapsto \gamma(t,q,w)$ é a única geodésica de $\mathbb{M}$ que no instante $t = 0$ passa por q com velocidade w, para cada $q \in V$ e cada $w \in T_q\mathbb{M}$. Onde $\mathcal{U} = \{(q,w) \in T\mathbb{M}; q \in V, w \in T_q\mathbb{M}, \|w\| < \varepsilon\}$.*

Seja $p \in \mathcal{U} \subset T\mathbb{M}$ como acima. Então a aplicação $exp : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{M}$ dada por $exp(q,v) = \gamma\left(\|v\|, q, \dfrac{v}{\|v\|}\right)$ é chamada aplicação exponencial em $\mathcal{U}$. Dizemos que $\mathbb{M}$ é geodesicamente completa se para todo $p \in \mathbb{M}$, a aplicação exponencial exp_p, está definida para todo $v \in T_p\mathbb{M}$, i.é, se as geodésicas que partem de p estão definidas para todos os valores de $t \in \mathbb{R}$.

Proposição 1.2.2. *Para cada $p \in \mathbb{M}$ existem uma vizinhança W de p e um número $\delta > 0$, tais que, para cada $q \in W$, exp_q é um difeomorfismo em $B_\delta(0) \subset T_q\mathbb{M}$ e $exp_q(B_\delta(0)) \supset W$. Dizemos que (W, δ) é uma vizinhança totalmente normal de p.*

Agora, definiremos variedade completa e curva divergente. Em seguida temos um teorema, devido a Hopf e Rinow, que torna relevante o conceito de completeza. Na sequência, apresentamos uma caracterização de variedade completa.

Definição 1.2.3. *(Variedade Riemanniana completa) Diremos que $\mathbb{M}$ é uma variedade riemanniana completa se $\mathbb{M}$ é geodesicamente completa.*

Definição 1.2.4. *(Curva divergente) Dizemos que uma curva $\alpha : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{M}$ é divergente em $\mathbb{M}$ se para cada compacto $K \subset \mathbb{M}$, $\exists t_0 \in [0, +\infty)$ tal que $\alpha(t) \notin K$, para todo $t > t_0$. O comprimento de uma curva divergente é dado por $l(\alpha) = \lim\limits_{s \to \infty} \displaystyle\int_0^s |\alpha^{'}(t)|\, dt$.*

Agora, segue um teorema devido a Hopf, sua prova pode ser encontrada em [3] pág. 163. Este teorema possui um corolário seguinte que caracteriza as variedades completas em função das curvas divergentes.

Teorema 1.2.5. *Seja $\mathbb{M}$ uma variedade Riemmaniana e seja $p \in \mathbb{M}$. As afirmações seguintes são equivalentes:*

(i) exp_p está definida em todo o $T_p\mathbb{M}$.

(ii) Os limitados e fechados de $\mathbb{M}$ são compactos.

(iii) $\mathbb{M}$ é completa como espaço métrico.

(iv) $\mathbb{M}$ é geodesicamente completa.

(v) Existe uma sucessão de compactos $K_n \subset \mathbb{M}$, $K_n \subset intK_{n+1}$ e $\bigcup\limits_n K_n = \mathbb{M}$, tais que se $q_n \notin K_n$ então $d(p, q_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$.

Além disso, cada uma das afirmações acima implica que

(vi) Para todo $q \in \mathbb{M}$ existe uma geodésica γ ligando p a q com $l(\gamma) = d(p, q)$.

Corolário 1.2.6. *Uma variedade Riemanniana $\mathbb{M}$ é completa se, e somente se, o comprimento de qualquer curva divergente é ilimitado.*

Prova: Seja $\mathbb{M}$ uma variedade Riemanniana completa, pelo teorema 1.2.5 existe uma sucessão de compactos $K_n \subset \mathbb{M}$, $K_n \subset intK_{n+1}$ e $\bigcup_n K_n = \mathbb{M}$, tais que se $q_n \notin K_n$ então $d(p, q_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, para todo $p \in \mathbb{M}$. Seja $\alpha : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{M}$ uma curva divergente tal que $\alpha(t_n) = q_n$. Da definição de distância d em $\mathbb{M}$ seque que $d(p, q_n) \leq \int_0^s |\alpha'(t)|\, dt$. Além disso, $d(p, q_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ logo $\int_0^s |\alpha'(t)|\, dt \xrightarrow[s\to\infty]{} \infty$. Portanto o comprmento de uma curva divergente qualquer α é ilimitado.

Reciprocamente, se $\mathbb{M}$ é uma variedade Riemanniana não completa então existe uma geodésica normalizada, γ, que não está definida para todo $t \in \mathbb{R}$, i.é, γ não se estende.

Vamos mostrar que γ se estende. Para isso, seja $\gamma : [0, s_0) \longrightarrow \mathbb{M}$ com $\gamma(0) = p$. Já que $l(\gamma) = s_0$, é suficiente demonstrar que γ sai de qualquer compacto.

Com efeito, pois caso contrário teríamos um compacto K tal que, para todo t_0 e algum $t > t_0$, $\gamma(t) \in K$. Sendo assim, existiria uma sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergindo a s_0 com $s_n < s_0$ e $\gamma(s_n) \in K$. Portanto existe subsequência $\{\gamma(s_k)\}_{k\in\mathbb{N}'\subset\mathbb{N}}$ de $\{\gamma(s_n)\}$ tal que $\gamma(s_k) \to q_0 \in K$.

Seja (W, δ) uma vizinhança totalmente normal de q_0. Da convergência de $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ podemos escolher um índice n_0 tal que, se $n, m > n_0$ então $\|s_n - s_m\| < \delta$ com $\gamma(s_n), \gamma(s_m) \in W$. Da proposição 1.2.1, existe uma única geodésica η de comprimento menor que δ ligando $s(t_n)$ a $s(t_m)$. Portanto γ coincide com η onde γ está definida. Como $exp_{\gamma(s_n)}$ é um difeomorfismo em $B_\delta(0)$ e $exp_{\gamma(s_n)}(B_\delta(0)) \supset W$, η estende γ além de q_0. Isso mostra que γ se estende o que é um absurdo pois estamos supondo que γ não se estende. Portanto $\mathbb{M}$ é completa. $\square$

1.3 Hipersuperfícies de $\mathbb{R}^{n+1}$

Iniciamos esta seção com alguns fatos gerais das imersões isométricas. Em seguida exibimos os principais conceitos das hipersuperfícies de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Sejam $\mathbb{M}^n$ e $\overline{\mathbb{M}}^m$ variedades Riemannianas. Dizemos que $f : \mathbb{M}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{M}}^m$ é uma imersão se a diferencial $df_x : T_x\mathbb{M} \longrightarrow T_x\overline{\mathbb{M}}$ é injetiva para todo $x \in \mathbb{M}$. O número $p = m - n$ é chamado codimensão de f. Uma imersão $f : \mathbb{M}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{M}}^{n+p}$ entre duas variedades Riemannianas com métricas $\langle ; \rangle_{\mathbb{M}}$ e $\langle ; \rangle_{\overline{\mathbb{M}}}$, respectivamente, é chamada uma imersão isométrica se:

$$\langle X; Y\rangle_{\mathbb{M}} = \langle df_x X; df_x Y\rangle_{\overline{\mathbb{M}}}$$

para todo $x \in \mathbb{M}$ e todo $X, Y \in T_x\mathbb{M}$.

Seja $f : \mathbb{M}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{M}}^{n+p}$ uma imersão isométrica. Em cada $x \in \mathbb{M}$ existe uma vizinhança $U \subset \mathbb{M}$ tal que a restrição de f a U é um mergulho em $f(U)$. Portanto podemos identificar U com sua imagem por f, isto é, f é localmente uma inclusão.

Dessa forma, podemos considerar o espaço tangente de $\mathbb{M}$ em x como um subespaço do espaço tangente a $\overline{\mathbb{M}}$ em x, e escrever

$$T_x\overline{\mathbb{M}} = T_x\mathbb{M} \oplus T_x\mathbb{M}^{\perp},$$

onde $T_x\mathbb{M}^{\perp}$ é o complemento ortogonal de $T_x\mathbb{M}$ em $T_x\overline{\mathbb{M}}$. Com esta decomposição obtemos um fibrado de vetores $T\mathbb{M}^{\perp} = \bigcup_{x\in\mathbb{M}} T_x\mathbb{M}^{\perp}$, chamado fibrado normal a $\mathbb{M}$. Dessa maneira, os vetores

$$T\overline{\mathbb{M}}_{|_{f(\mathbb{M})}} = \{X \in T\overline{\mathbb{M}} : \pi(X) \in f(\mathbb{M}),\ \text{onde } \pi : T\overline{\mathbb{M}} \longrightarrow \overline{\mathbb{M}} \text{ é a projeção}\}$$

é uma soma direta do fibrado tangente $T\mathbb{M}$ com $T\mathbb{M}^{\perp}$, isto é,

$$T\overline{\mathbb{M}}_{|_{f(\mathbb{M})}} = T\mathbb{M} \oplus_W T\mathbb{M}^{\perp}.$$

Com respeito a estas decomposições temos as projeções

$$()^T : T\overline{\mathbb{M}}_{|_{f(\mathbb{M})}} \longrightarrow T\mathbb{M}$$

$$()^{\perp} : T\overline{\mathbb{M}}_{|_{f(\mathbb{M})}} \longrightarrow T\mathbb{M}^{\perp},$$

as quais são chamadas tangente e normal respectivamente.

Seja $\overline{\mathbb{M}}^{n+p}$ uma variedade Riemanniana com a conexão de Levi-Civita $\overline{\nabla}$, e seja $f : \mathbb{M}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{M}}^{n+p}$ uma imersão isométrica. Dados campos de vetores $X, Y \in T\mathbb{M}$, temos que

$$\overline{\nabla}_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^T + (\overline{\nabla}_X Y)^{\perp}.$$

Com a unicidade da conexão de Levi-Civita temos que $\overline{\nabla}^T$ é a conexão de Levi-Civita de $\mathbb{M}$, e será denotada por ∇.

Portanto, obtemos a fórmula de Gauss:

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y). \tag{1.1}$$

A qual define uma função $\alpha : T\mathbb{M} \times T\mathbb{M} \longrightarrow T\mathbb{M}^{\perp}$ chamada segunda forma fundamental de f. Pode-se concluir, com as propriedades das conecções de Levi-Civita ∇ e $\overline{\nabla}$, que α é simétrica e bilinear sobre o anel $C^{\infty}(\mathbb{M})$ das funções diferenciáveis em $\mathbb{M}$.
Em particular, para algum ponto $x \in \mathbb{M}$ e campos de vetores $X, Y \in T\mathbb{M}$, a função

$$\begin{array}{rccc} \alpha_x : & T_x\mathbb{M} \times T_x\mathbb{M} & \longrightarrow & T_x\mathbb{M}^{\perp} \\ & (X, Y) & \longmapsto & \alpha_x(X, Y) = \alpha(X, Y)(x) \end{array}$$

depende apenas dos valores de X e de Y em x.

Seja X campos de vetores em $T\mathbb{M}$ e ξ de $T\mathbb{M}^{\perp}$, denote por $A_\xi X$ a componente tangencial de $-\overline{\nabla}_\xi X$, i.é.,

$$A_\xi X = -(\overline{\nabla}_X \xi)^T.$$

Portanto para cada $Y \in T\mathbb{M}$ temos

$$0 = X\langle \xi, Y\rangle = \langle \overline{\nabla}_X \xi, Y\rangle + \langle \xi, \overline{\nabla}_X Y\rangle,$$

Da fórmula de Gauss segue que

$$\langle A_\xi X, Y\rangle = \langle \alpha(X, Y), \xi\rangle.$$

Em particular, a função

$$\begin{array}{rccc} A : & T\mathbb{M} \times T\mathbb{M}^{\perp} & \longrightarrow & T\mathbb{M} \\ & (X, \xi) & \longmapsto & A(X, \xi) = A_\xi X \end{array}$$

é bilinear sobre $C^{\infty}(\mathbb{M})$. Portanto, a função $A_\xi : T\mathbb{M} \longrightarrow T\mathbb{M}$ é linear sobre $C^{\infty}(\mathbb{M})$ e simétrica, isto é, $\langle A_\xi X, Y\rangle = \langle X, A_\xi Y\rangle$ para todo $X, Y \in T\mathbb{M}$. Por abuso de notação chamaremos a função A_ξ de segunda forma fundamental na direção normal ξ.

A componente normal de $\overline{\nabla}_X \xi$, denotada por $\nabla^{\perp}_X \xi$, define uma conexão compatível no conjunto normal $T\mathbb{M}^{\perp}$. Dizemos que $\nabla^{\perp}$ é a conexão normal de f, e obtemos a fórmula de Weingarten

$$\overline{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla^{\perp}_X \xi. \tag{1.2}$$

Sejam $X, Y, Z \in T\mathbb{M}$, então

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z &= \overline{\nabla}_X \nabla_Y Z + \overline{\nabla}_X \alpha(Y, Z) \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z + \alpha(X, \nabla_Y Z) - A_{\alpha(Y,Z)} X + \nabla^{\perp}_X \alpha(Y, Z), \end{aligned} \tag{1.3}$$

onde a primeira equação é dada por 1.1 e a última equação segue de 1.1 e 1.2.
De maneira similar,

$$\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z = \nabla_Y\nabla_X Z + \alpha(Y,\nabla_X Z) - A_{\alpha(X,Z)}Y + \nabla_Y^{\perp}\alpha(X,Z). \tag{1.4}$$

Seguindo de 1.1 temos

$$\overline{\nabla}_{[X,Y]}Z = \nabla_{[X,Y]}Z + \alpha([X,Y],Z). \tag{1.5}$$

Subtraindo 1.4 e 1.5 de 1.3, e tomando componentes tangenciais, obtemos a aquação de Gauss

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle \overline{R}(X,Y)Z,W\rangle + \langle \alpha(X,W),\alpha(Y,Z)\rangle - \langle \alpha(X,Z),\alpha(Y,W)\rangle,$$

onde R e $\overline{R}$ são os operadores curvaturas de $\mathbb{M}$ e $\overline{\mathbb{M}}$ respectivamente. Em particular, se $K(X,Y) = \langle R(X,Y)Y,X\rangle$ e $\overline{K}(X,Y) = \langle \overline{R}(X,Y)Y,X\rangle$ são as curvaturas seccionais do plano gerado pelos vetores ortogonais $X,Y \in T_x\mathbb{M}$, a equação de Gauss é

$$K(X,Y) = \overline{K}(X,Y) + \langle \alpha(X,X),\alpha(Y,Y)\rangle - \|\alpha(X,Y)\|^2. \tag{1.6}$$

Dado uma imersão isométrica $f : \mathbb{M}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{M}}^m$ dizemos que f é uma hipersuperfície se a codimensão de f é igual a um.

Seja $p \in \mathbb{M}$ e $\xi \in (T_p\mathbb{M})^{\perp}$, $|\xi| = 1$. Como $A_\xi : T_p\mathbb{M} \longrightarrow T_p\mathbb{M}$ é simétrica, existe uma base ortonormal de autovetores $\{e_1,...,e_n\}$ de $T_p\mathbb{M}$ com autovalores reais $\lambda_1,...,\lambda_n$, i.é, $A_\xi(e_i) = \lambda_i e_i$, $1 \leq i \geq n$. Se escolhemos uma orientação para $\mathbb{M}$ e $\overline{\mathbb{M}}$, então o vetor ξ fica unicamente determinado se exigirmos que, sendo $\{e_1,...,e_n\}$ uma base na orientação de $\mathbb{M}$, $\{e_1,...,e_n,\xi\}$ seja uma base na orientação de $\overline{\mathbb{M}}^m$. Neste caso, denominamos os e_i direções principais e os λ_i curvaturas principais de f. Dizemos que $G_p = \lambda_1(p)\cdots\lambda_n(p)$ é a curvatura de Gauss-Kronecker de f e que $H_p = \dfrac{1}{n}(\lambda_1(p) + ... + \lambda_n(p))$ é a curvatura média de f.

Agora, seja $f : \mathbb{M}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{M}}^m$ uma imersão isométrica e $x \in \mathbb{M}$. Podemos considerar, localmente, um campo diferenciável de vetores normal e unitário, i.é, um campo de vetores diferenciável ξ em $T\mathbb{M}^{\perp}$ definido num aberto U de x tal que $\langle \xi_y,\xi_y\rangle = 1$ para todo $y \in U$. Na verdade, existe apenas duas possibilidades de escolha para ξ. Dado $X \in T_x\mathbb{M}$ e $Y \in T\mathbb{M}$ é fácil ver da fórrmula de Gauss que

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \langle A_\xi X,Y\rangle\xi. \tag{1.7}$$

Por outro lado, já que ξ é um campo de vetor normal unitário, temos $\langle \overline{\nabla}_X \xi, \xi \rangle = 0$, consequentemente $\nabla^{\perp}_X \xi = 0$ para todo $X \in T\mathbb{M}$. Portanto, da fórmula de Weingarten temos

$$\overline{\nabla}_X \xi = -A_\xi X. \tag{1.8}$$

Quando $\overline{\mathbb{M}}^m = \mathbb{R}^{n+1}$, A_ξ tem uma interpretação geométrica interessante. Para ver isto, definimos a aplicação normal de Gauss.

Seja uma hipersuperfície orientável $f : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, seja ξ um campo normal global unitário de vetores em $T\mathbb{M}^{\perp}$. A aplicação normal de Gauss é definida por

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbb{M} & \longrightarrow & S^n \\ & x & \longmapsto & \xi_x \end{array}$$

Onde $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é a esfera e $\xi_x \in S^n$ denota a traslação paralela do vetor $\xi_x \in T_x\mathbb{M}^{\perp}$ para a origem do $\mathbb{R}^{n+1}$.

Proposição 1.3.1. *Seja $f : \mathbb{M}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientável com aplicação de Gauss $\phi : \mathbb{M} \longrightarrow S^n$. Então, para cada $x \in \mathbb{M}$ temos*

$$d\phi_x = -A_{\xi_x}.$$

Prova: Dado $X \in T_x\mathbb{M}$, seja $\gamma : (-\varepsilon, +\varepsilon) \longrightarrow \mathbb{M}$ uma curva diferenciável tal que $\gamma(0) = x$ e $\gamma'(0) = X$. Então

$$d\phi_x(X) = \frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma)(t)_{|t=0} = \overline{\nabla}_X \xi = -A_{\xi_x} X.$$

onde a última igualdade é dada por 1.8. Portanto $-A_\xi$ é a derivada da aplicação normal de Gauss. $\square$

A curvatura seccional das hipersuperfícies admite uma expressão mais simples do que aquela apresentada em 1.1.3.

De fato, sejam $f : \mathbb{M}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{M}}^{n+1}$ uma hipersuperfície, $p \in \mathbb{M}$ e $\xi \in (T_p\mathbb{M})^{\perp}$, $|\xi| = 1$. Considere uma base ortonormal $\{e_1, ..., e_n\}$ de $T_p\mathbb{M}$ que diagonaliza A_ξ. Se $\lambda_1, ..., \lambda_n$ são os autovalores de A_ξ então, de 1.1 e de 1.7 obtemos,

$$\langle \alpha(e_i, e_i), \alpha(e_j, e_j) \rangle = \lambda_i \lambda_j$$

Portanto a equação 1.6 reduz-se a

$$K(X, Y) - \overline{K}(X, Y) = \lambda_i \lambda_j.$$

Se $\overline{\mathbb{M}}^m = \mathbb{R}^{n+1}$ então $K(X,Y) = \lambda_i\lambda_j$. Consequentemente, a curvatura de Ricci e a curvatura escalar são respectivamente,

$$Ric_p(x) = \sum_{i\neq n} \lambda_i\lambda_j$$

$$\tau(p) = \sum_i \sum_{i\neq n} \lambda_i\lambda_j$$

Definição 1.3.2. *Dada uma função $f : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável, dizemos que $p \in \mathbb{M}$ é um ponto crítico se df_p não é sobrejetiva. A imagem de um ponto crítico é um valor crítico. Se a imagem de um ponto p não é um valor crítico, dizemos que é um valor regular e em particular, segue do teorema da função implícita que a imagem inversa de um valor regular é uma hipersuperfície de $\mathbb{M}$.*

Se $f : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma funçao diferenciável, é possível provar que o conjunto dos valores críticos de f tem medida nula em $\mathbb{R}$. Esse resultado é devido a Sard e sua prova pode ser encontrada em [7].

Capítulo 2

Hipersuperfícies Convexas de $\mathbb{R}^{n+1}$

Aqui, apresentaremos sem demonstrações, o teorema de H. Wu [12] e o teorema de Sacksteder-van Heijenoort [12]. O primeiro garante que uma hipersuperfície convexa e homeomorfa ao $\mathbb{R}^n$ é o gráfico de uma função convexa não negativa. O segundo mostra basicamente que uma hipersuperfície completa de $\mathbb{R}^{n+1}$, com curvatura seccional não negativa e não identicamente nula, é convexa. Antes de exibir esses resultados, veremos o conceito da envoltória convexa e o teorema de Robert Osserman.

2.1 Propriedade da Envoltória Convexa da Hipersuperfície de $\mathbb{R}^{n+1}$

Nesta seção definiremos a propriedade da envoltória convexa da hipersuperfície de $\mathbb{R}^{n+1}$ e demostraremos o teorema de Robert Osserman. Este teorema é uma caracterização das variedades com tal propriedade e tem grande relevância na demonstração do teorema das curvaturas principais.

Definição 2.1.1. *(Envoltória convexa) Dado $E \subset \mathbb{R}^n$, a envoltória convexa de E, que será denotada por $Env(E)$, é a intersecção de todos os subespaços convexos que contém E.*

Definição 2.1.2. *Dada uma hipersuperfície $f : \mathbb{M}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, dizemos que f tem a propriedade da envoltória convexa se, para todo domínio D em $\mathbb{M}$, com $f(D)$ limitado em $\mathbb{R}^{n+1}$, tivermos $f(D) \subset Env(\partial f(D))$.*

Observação 2.1.3. *Se, na definição acima, D é relativamente compacto então os valores de fronteira de $f(D)$ conincidem com a imagem da fronteira, i.é, $\partial f(D) = f(\partial D)$.*

A seguir, provamos o teorema de Osserman, este dá uma estimativa para as curvaturas principais em um determinado ponto. Para isto, apresentamos o lema que segue.

Lema 2.1.4. *Seja* $f : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ *uma hipersuperfície com segunda forma fundamental* A *na direção* ξ. *Denote os autovalores de* A *por* $\lambda_1 \geq ... \geq \lambda_n$. *Para cada* $R > 0$ *seja* $B_R(c_R)$ *a bola de raio* R *e centro em* $c = f(p) + R\xi$.

(i) Se V_p *é uma vizinhança de* p *em* $\mathbb{M}$ *e* $f(V_p) \subset \overline{B}_R(c)$ *então* $\lambda_n \geq \dfrac{1}{R}$.

(ii) Se $\lambda_n > \dfrac{1}{R}$ *então existe vizinhança de* p *em* $\mathbb{M}$ *tal que* $f(V_p) \subset B_R(c)$.

Prova: Inicialmente vamos provar (i). Seja $x : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{M}$ uma parametrização em p, com $x(p) = 0$.

Em $T_p\mathbb{M}$, seja $\{\dfrac{\partial}{\partial u_1}(p), ..., \dfrac{\partial}{\partial u_n}(p)\}$ uma base ortonormal que diagonaliza A_p.

Defina a aplicação

$$\begin{array}{rcl} g \ : U \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & ||f \circ x(u) - c||^2 \end{array}$$

Aplicando a fórmula de Taylor a g, obtemos:

$$g(u) = g(0) + dg(0)u + \frac{1}{2}d^2g(0)u^2 + ||u||^2\rho(u) \tag{2.1}$$

Com $\lim\limits_{u \to 0} \rho(u) = 0$. Note que,

$$\begin{aligned} dg(0) &= 2\langle \frac{\partial}{\partial u_i} f \circ x(u)_{|0}; f \circ x(u) \rangle \\ &= 2\langle \frac{\partial}{\partial u_i}(p); -R\xi_0 \rangle = 0 \\ d^2g(0) &= \frac{\partial}{\partial u_j}\{2\langle \frac{\partial}{\partial u_i} f \circ x(u)_{|0}; f \circ x(u) \rangle\}_{|0} \\ &= 2\langle \frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j} f \circ x(u); -R\xi_0 \rangle_{|0} + 2\langle \frac{\partial}{\partial u_i} f \circ x(u); \frac{\partial}{\partial u_j} f \circ x(u) \rangle_{|0} \\ &= -2R\lambda_j\delta_{ij} + 2\delta_{ij} \\ &= 2\delta_{ij}(1 - R\lambda_j) \end{aligned}$$

Portanto, da equação 2.1

$$\begin{aligned} g(u) &= g(0) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 g(0)}{\partial u_i u_j} u_i u_j + ||u||^2 \rho(u) \\ &= R^2 + \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij}(1 - R\lambda_j) u_i u_j + ||u||^2 \rho(u) \\ &= R^2 + \sum_{j=1}^{n} (1 - R\lambda_j) u_j u_j + ||u||^2 \rho(u) \\ &= R^2 + \sum_{j=1}^{n} \{1 - R\lambda_j + \rho(u)\} u_j^2 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Suponha que existe vizinhança V_p de p em $\mathbb{M}$ tal que $f(V_p) \subset B_R(c)$. Então para todo $u \in U$ segue de 2.2

$$0 \geq g(u) - R^2 = \sum_{j=1}^{n} \{1 - R\lambda_j + \rho(u)\} u_j^2 \tag{2.3}$$

Em particular para $u = (0, ..., t)$ obtemos,

$$0 \geq g(0, ..., t) - R^2 = (1 - R\lambda_n + \rho(0, ..., t))t^2$$

Como $\lim_{u \to 0} \rho(u) = 0$ temos que $\lambda_n \geq \dfrac{1}{R}$.

Para provar (ii) suponha que existe $\varepsilon_0 \geq 0$ tal que

$$\lambda_1 \geq ... \geq \lambda_n = \frac{1}{R} + \frac{\varepsilon_0}{R}$$

Donde temos

$$-\varepsilon_0 + \rho(u) = 1 - R\lambda_n + \rho(u) \geq ... \geq 1 - R\lambda_1 + \rho(u)$$

E da equação 2.3

$$g(u) - R^2 \leq \sum_{j=1}^{n} \{-\varepsilon_0 + \rho(u)\} u_j^2$$

Já que $\lim_{u \to 0} \rho(u) = 0$, dado $\varepsilon = \varepsilon_0$ existe $\delta \geq 0$ tal que $||u|| \leq \delta$ temos $\rho(u) \leq ||\rho(u)|| < \varepsilon$.

Portanto, para todo u tal que $||u|| \leq \delta$ temos

$$g(u) - R^2 \leq \sum_{j=1}^{n} \{-\varepsilon_0 + \rho(u)\} u_j^2 \leq 0$$

logo,

$$||f \circ x(u) - c||^2 - R^2 \leq 0$$

Isso mostra que existe vizinhança $V_p = x(U)$ tal que $f(V_p) \subset B_R(c)$ concluindo a prova de (ii). $\square$

Teorema 2.1.5. *(Robert Osserman) Seja $f : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície, f tem a propriedade da envoltória convexa se, e somente se, para todo ponto de $\mathbb{M}$, não existe direção normal ξ tal que a segunda forma fundamental de f, A_ξ tem todos os autovalores positivos.*

Prova: Inicialmente, suponha que existe $p \in \mathbb{M}$ e um vetor normal unitário ξ_0 em $\mathbb{M}$, no ponto p, tal que todas as curvaturas principais são positivas, ou equivalentemente, como no lema anterior, $\lambda_n > 0$. Escolha $R > 0$ tal que $\lambda_n > \frac{1}{R}$. Por 2.1.4 (ii), existe V_p vizinhança de p em $\mathbb{M}$, tal que $f(V_p) \subset B_R(c)$. Sendo f uma imersão, podemos restringir V_p (se necessário) a uma vizinhança $V_p^{'}$ tal que $f : \overline{V_p^{'}} \longrightarrow f(\overline{V_p^{'}})$ seja bijetora.

Note que, sendo $V_p^{'}$ uma vizinhança de p então $p \notin \partial V_p^{'}$ e como $f_{|_{V_p^{'}}}$ é bijetora obtemos que $f(p) \notin f(\partial V_p^{'})$.

Da continuidade de f e da compacidade de $\partial V_p^{'}$ vem que $E = f(\partial V'_p)$ é compacto em $B_R - f(p)$.

Defina a função

$$\begin{aligned} h \ : \ \partial V_p^{'} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \quad \langle f(x) - f(p); \xi_0 \rangle \end{aligned}$$

Note que h é não negativa pois,

$$\begin{aligned} h(x) &= \langle f(x) - f(p); \xi_0 \rangle \\ &= \langle f(x) - c + R\xi_0; \xi_0 \rangle \\ &= \langle f(x) - c; \xi_0 \rangle + R \\ &= ||f(x) - c|| \cos\{f(x) - c; \xi_0\} + R \\ &\geq -||f(x) - c|| + R \end{aligned}$$

e como $f(p) \notin f(\partial V_p^{'})$ e $f(V_p^{'}) \subset B_R(c)$ obtemos que $-||f(x) - c|| + R > 0$.

Além disso, $h(x) \neq 0$ caso contrário existiria $x \in \partial V_p^{'}$ tal que $\langle f(x) - f(p); \xi_0 \rangle = 0$. Reescrevendo esta igualdede temos,

$$\langle f(x) - c; \xi_0 \rangle = \langle f(p) - c; \xi_0 \rangle = -R$$

Portanto,

$$\langle f(x) - c; \xi_0 \rangle = ||f(x) - c|| ||\xi_0|| cos\{f(x) - c; \xi_0\} = -R.$$

Obtemos então $cos\{f(x) - c; \xi_0\} = -1$ e $||f(x) - c|| = R$ e temos $f(x) - c = \pm R\xi_0$. Se $f(x) - c = -R\xi_0$ então $f(x) - c = f(p) - c$ e temos $f(x) = f(p)$. Como $f_{|_{V_p'}}$ é bijetora, $x = p$ o que é um absurdo pois $p \notin \partial V_p'$. Se $f(x) - c = R\xi_0$ então $f(x) - c = -(f(p) - c)$ o que implica $f(x) - f(p) = -2\{f(p) - c\} = -2R\xi_0$. Portanto $\langle f(x) - f(p); \xi_0 \rangle = \langle -2R\xi_0; \xi_0 \rangle = -2R \neq 0$ que é um absurdo pois estamos supondo que $h(x) = 0$. Isto conclui que h não se anula.

Da continuidade de h e da compacidade da $\partial V_p^{'}$ vem que h possui um mínimo positivo em E, digamos ω. Portanto $f(\partial V_p^{'}) \subset S = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x - f(p); \xi_0 \rangle \geq \omega > 0\}$ e temos claramente que $f(p) \notin S$. Logo existe um subespaço convexo S que contém $f(\partial V_p^{'})$ mas não contém $f(V_p^{'})$. Segue que $f(V_p^{'}) \not\subset Env(f(\partial V_p^{'}))$. Como $V_p^{'}$ é relativamente compacto, da observação 2.1.3 temos que $f(V_p^{'}) \not\subset Env(\partial f(V_p^{'}))$. Isto mostra que f não tem a propriedade da envoltória convexa.

Reciprocamente, suponha que f não tem a propriedade da envoltóoria convexa. Então existe um domínio $D \in \mathbb{M}$, com $f(D)$ limitado mas $f(D) \not\subset Env(\partial f(D))$. Portanto, existe um subespaço convexo $S = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, v \rangle \leq a, \|v\| = 1\}$ com $\partial f(D) \subset S$ e $f(D) \not\subset S$. Logo existe $p_0 \in D$ tal que $\langle f(p_0), v \rangle = b > a$.

Afirmação 2.1.6. *Existem $p \in D$, ξ direção normal em p e $B_R(c_R)$ (com $c_R = f(p) + R\xi$) tal que $f(D) \subset \overline{B}_R(c_R)$.*

Prova: Para a provar essa afirmação, considere os lemas que seguem:

Lema 2.1.7. *Seja $\overline{B}_r(c_r)$ o fecho da bola de raio r e centro c_r, onde $\langle c_r; v \rangle = a$ e $\overline{f(D)} \subset B_r(c_r)$. Para cada $t > r$, se $\overline{B}_t(c_t)$ é o fecho da bola de raio t e centro $c_t = c_r + v\sqrt{t^2 - r^2}$ então $\partial f(D) \subset \overline{B}_t(c_t)$.*

Prova: Para todo valor de fronteira x de $f(D)$,

$$\begin{aligned}
\|x - c_t\|^2 &= \langle x - c_r + v\sqrt{t^2 - r^2}; x - c_r + v\sqrt{t^2 - r^2} \rangle \\
&= \|x - c_r\|^2 + 2\sqrt{t^2 - r^2}\langle x - c_r, v \rangle + t^2 - r^2 \\
&< r^2 + 2\sqrt{t^2 - r^2}\langle x - c_r, v \rangle + t^2 - r^2
\end{aligned}$$

Já que $\overline{f(D)} \subset \overline{B}_r(c_r)$, $\langle x, v\rangle \leq a$ e $\langle c_r, v\rangle = a$, segue que

$$r^2 + 2\sqrt{t^2 - r^2}\langle x - c_r, v\rangle + t^2 - r^2 \leq t^2.$$

Portanto,

$$\|x - c_t\|^2 \leq t^2.$$

$\square$

Lema 2.1.8. *Se* $(2b - 2a)\sqrt{t^2 - r^2} > 2r^2$ *então* $f(p)$ *não pertence a* $\overline{B}_t(c_t)$.

Prova:

$$\begin{aligned}
\|f(p) - c_t\|^2 &= \langle f(p) - c_r + v\sqrt{t^2 - r^2}; f(p) - c_r + v\sqrt{t^2 - r^2}\rangle \\
&= \langle f(p) - c_r, f(p) - c_r\rangle + 2\langle f(p) - c_r, v\sqrt{t^2 - r^2}\rangle + t^2 - r^2 \\
&> t^2 - 2r^2 + 2\langle f(p) - c_r, v\sqrt{t^2 - r^2}\rangle \\
&= t^2 - 2r^2 + 2\langle f(p) - c_r, v\rangle\sqrt{t^2 - r^2} - 2\langle r, v\rangle\sqrt{t^2 - r^2} \\
&= t^2 - 2r^2 + (2b - 2a)\sqrt{t^2 - r^2} > t^2
\end{aligned}$$

$\square$

Lema 2.1.9. *Existe* $t = R$ *tal que* $\overline{f(D)} \subset \overline{B}_R(c_R)$ *e existe* $q = f(p) \in f(D)$ *tal que* $q \in \partial\overline{B}_R(c_R)$.

Prova: Considere o conjunto

$$\Theta = \{t \geq r : \overline{f(D)} \subset \overline{B}_t(c_t)\}.$$

Para mostrar que, para algum valor de $t => 0$, $\overline{f(D)} \subset \overline{B}_t(c_t)$, é suficiente que $\Theta \neq \emptyset$. Isso é dado diretamente da definição de $\overline{B}_r(c_r)$, pois $\overline{f(D)} \subset \overline{B}_r(c_r)$, consideremos então $t = r = R$. Agora mostremos que algum $q = f(p)$ em $f(D)$ está na fronteira de $\overline{B}_R(c_R)$.

Pela afirmação 2.1.8 Θ é limitado superiormente logo existe $sup\,\Theta = t_0$. Seja $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência em Θ tal que $t_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} t_0$. Para todo k e todo $x \in \overline{f(D)}$ segue da definição de Θ que

$$\|x - c_{t_k}\| \leq t_k$$

Da continuidade da norma temos $\|x - c_{t_0}\| \leq t_0$. Isto prova que $\overline{f(D)} \subset \overline{B}_{t_0}(c_{t_0})$ logo $t_0 \in \Theta$.

Agora, suponha que não existe ponto de $\overline{f(D)}$ em $\partial B_{t_0}(c_{t_0})$. Então, pela compacidade de $\overline{f(D)}$, existiria $t' > t_0$ com $\overline{f(D)} \subset \overline{B}_{t'}(c_{t'})$ o que é uma contradição já que t_0 é supremo. Portanto existe $y \in \overline{f(D)}$ tal que $y \in \partial B_{t_0}(c_{t_0})$.

Seja $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência em D tal que $f(x_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} y$. É fato que, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente pois se não fosse y estaria na fronteira de $f(D)$. Pela afirmação 2.1.7, teríamos $y \in B_{t_0}(c_{t_0})$ que é uma contradição pois $y \in \partial B_{t_0}(c_{t_0})$. Portanto $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente, digamos a $x \in D$. Assim,

$$y = \lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(x) \in f(D)$$

$\square$

Lema 2.1.10. *Existe $R > 0$ tal que $\xi = \dfrac{c_R - f(p)}{R}$ é uma direção unitária e normal a f em p.*

Prova: Seja $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow f(D)$ uma curva diferenciável tal que $\alpha(0) = f(p)$.

Como $f(p) \in \partial\overline{B}_R(c_R)$ (lema 2.1.9) então $\|\alpha(s) - c_R\|^2$ assume o máximo em $s = 0$ pois, $\alpha(s) \subset f(D) \subset \overline{f(D)} \subset \overline{B}_R(c_R)$ e $R = \|\alpha(s) - c_R\| = \|f(p) - c_R\|$. Logo,

$$\frac{d}{dt}(\|\alpha(s) - c_R\|^2)_{|_0} = 0$$

ou seja,

$$\langle \alpha^{'}(0), \alpha(0) - c_R \rangle = 0.$$

Seja agora $\xi = \dfrac{\alpha(0) - c_R}{R}$ então $\langle \alpha^{'}(0), \xi \rangle = 0$ e $\|\xi\| = \dfrac{\|\alpha(0) - c_R\|}{R} = 1$. Isto prova que ξ é um vetor unitário e normal a f em p. $\square$

Portanto, obtemos que existem $p \in D$, ξ direção normal em p e $B_R(c_R)$ (com $c_R = f(p) + R\xi$) tal que $f(D) \subset \overline{B}_R(c_R)$. $\square$

Agora é so aplicar o lema 2.1.4 (i) para concluir que os autovalores de A_ξ são $\lambda_1 \geq ... \geq \lambda_n \geq \dfrac{1}{R} > 0$. $\blacksquare$

Corolário 2.1.11. *Seja $f : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície com segunda forma fundamental A na direção ξ. Se f possui a propriedade da envoltória convexa então $\mathbb{M}$ não é compacta.*

Prova: Pelo teorema anterior A_ξ possui autovalores positivo e negativo em cada ponto de $\mathbb{M}$. Pela proposição 1.3 em [2] obtemos o desejado. $\square$

Agora, abordaremos o conceito das hipersuperfícies convexas e os teoremas de Sacksteder-van Heijenoort e H. Wu. A demonstração desses resultados podem ser vistas em [12].

Definição 2.1.12. *(hipersuperfície convexa) Uma hipersuperfície $f : \mathbb{M}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, é dita convexa se $f(\mathbb{M}) = \partial C$ onde $C \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é um conjunto convexo fechado com interior não vazio.*

Teorema 2.1.13. *(Sacksteder-van Heijenoort) Seja $f : \mathbb{M}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície completa e orientável, A a segunda forma fundamental de f. Se a curvatura seccional de $\mathbb{M}$ é não negativa e não identicamente nula, então temos:*

(i) f é um mergulho e f é uma hipersuperfície convexa.

(ii) Se $r = max\{posto\ de\ A_p,\ p \in \mathbb{M}\}$ (necessariamente $2 \leq r \leq n$) então $\mathbb{R}^{n+1}$ pode ser decomposto em soma direta ortogonal $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{r+1} \oplus \mathbb{R}^{n-r}$ tal que $f(M) \cong \mathbb{M}_1 \oplus \mathbb{R}^{n-r}$. $\mathbb{M}_1^r$ é uma hipersuperfície convexa em $\mathbb{R}^{r+1}$ com segunda forma fundamental de posto r em algum ponto de $\mathbb{M}_1$.

Teorema 2.1.14. *(H. Wu) Seja $f : \mathbb{M}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície e A a segunda forma fundamental de f com respeito a $\xi : \mathbb{M}^n \longrightarrow S^{n-1}$. Temos:*

(i) Se o interior de $\xi(\mathbb{M})$, relativo a S^{n-1}, é não vazio e $\mathbb{M}$ não é compacta então $\mathbb{M}$ é homeomorfa ao $\mathbb{R}^n$.

(ii) Se f (com $f(\mathbb{M}) = \partial C$) é convexa e $\mathbb{M}$ é homeomorfa ao $\mathbb{R}^n$ então as coordenadas podem ser escolhidas tal que $H_0 = \{x = (x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = 0\}$ é o hiperplano suporte de C na origem.

Além disso,

(ii.1) Se $\Pi : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow H_0$ é a projeção ortogonal então $\mathbb{M}$ é o gráfico de uma função convexa não negativa $h : int\,\Pi(C) \longrightarrow \mathbb{R}$.

(ii.2) Para todo a na fronteira de $\Pi(C)$ teremos que $\mathbb{M} \cap \Pi^{-1}(a)$ é um segmento de reta.

(ii.3) Se o interior de $\xi(\mathbb{M})$, relativo a S^{n-1}, é não vazio então para cada $c > 0$, $f(\mathbb{M}) \cap H_c$ é difeomorfo a S^n, onde $H_c = \{x = (x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = c\}$.

Corolário 2.1.15. *Seja $\overline{f} : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície convexa homeomorfa a $\mathbb{R}^n$ satisfazendo $(ii.1)$ e $(ii.3)$ do teorema de Wu. Se $\Pi_{n+1} : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ é a última projeção de $\mathbb{R}^{n+1}$ então $\Pi_{n+1} \circ \overline{f}(M) := (\Pi_{n+1})_{|_{\overline{f}(\mathbb{M})}} : \overline{f}(\mathbb{M}) \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação própria.*

Prova: Inicialmente, notemos que $\Pi : H_c \cap \overline{f}(\mathbb{M}) \longrightarrow \Upsilon = \Pi(H_c \cap \overline{f}(\mathbb{M}))$ é um difeorfismo. Para todo $c > 0$, $H_c \cap \overline{f}(\mathbb{M})$ é difeomorfo a S^n logo $\Upsilon = \Pi(H_c \cap \overline{f}(\mathbb{M}))$ e S^n são difeomorfos.

Como $\Pi_{n+1} \circ \overline{f}(M)$ é contínua, resta mostrar que $(\Pi_{n+1} \circ \overline{f})^{-1}(K)$ é compacto em $\overline{f}(\mathbb{M})$ para todo compacto K em $\mathbb{R}$. Note que, se K é compacto em $\mathbb{R}$ então $K \subset [-c, c]$ para algum $c \in \mathbb{R}$. Como $\overline{f}(\mathbb{M})$ é gráfico de uma função não negativa então $K \subset [0, c]$. Portanto é suficiente mostrar que $(\Pi_{n+1} \circ \overline{f})^{-1}([0, c])$ é compacto em $\overline{f}(\mathbb{M})$.

Como $(\Pi_{n+1} \circ \overline{f})^{-1}([0,c])$ é fechado, resta mostar que $(\Pi_{n+1} \circ \overline{f})^{-1}([0,c])$ é limitado em $\overline{f}(\mathbb{M})$.

Suponha por absurdo que $(\Pi_{n+1} \circ \overline{f})^{-1}([0,c])$ é ilimitado. Como $0 \leq x_{n+1} \leq c$ para todo $(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) = x \in (\Pi_{n+1} \circ \overline{f})^{-1}([0,c])$ então existe $\overline{x} \in (\Pi_{n+1} \circ \overline{f})^{-1}([0,c])$ tal que $\Pi(\overline{x})$ está na componente ilimitada de H_0, i.é, $\Pi(\overline{x}) \in H_0 \backslash \Upsilon$. Como 0, $\Pi(\overline{x}) \in \Pi(C)$ e $\Pi(C)$ é convexo então existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $t_0 \Pi(\overline{x}) = z \in \Upsilon$. Além disso, $\overline{f}(\mathbb{M})$ é gráfico sobre $int\{\Pi(C)\}$, logo existe um único $(w_1, ..., w_{n+1}) = w_0 \in \overline{f}(\mathbb{M})$, com $w_{n+1} = c$ tal que $w_0 = (z, h(z))$.

Como $0, \overline{x} \in \partial C$ e C é conexo, então $\overline{w} = t_0 \overline{x} \in int\, C$. Portanto, temos $\overline{w} \in int\, C$ e $(z, 0) \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash int\, C$. Logo o segmento que liga $\overline{w}$ a $(z,0)$ intersecta $\partial C = \overline{f}(\mathbb{M})$ em algum ponto, digamos $\widehat{w}$. Note que $\widehat{w} = (z, \widehat{w}_{n+1})$ com $\widehat{w}_{n+1} < t_0 \overline{w}_{n+1} < c$. Já que $\overline{f}(\mathbb{M})$ é gráfico de h então $\widehat{w} = (z, h(z)) = w_0$. Portanto, $\widehat{w}_{n+1} = w_{n+1} = c$ o que é um absurdo pois $\widehat{w}_{n+1} < c$. Logo $(\Pi_{n+1} \circ \overline{f})^{-1}([0,c])$ é limitado e $\Pi_{n+1} \circ \overline{f}(M)$ é própria. $\square$

Capítulo 3

O Teorema das Curvaturas Principais

Dedicamos este capítulo a demonstração do Teorema das Curvaturas Principais. Este teorema determina o comportamento das curvaturas principais das hipersuperfícies euclidianas completas. A técnica usada por Brian Smyth e Frederico Xavier, na demonstração desse teorema, foi criar uma perturbação adequada na hipersuperfície dada (com segunda forma fundamental A) obtendo uma hipersuperfície (com segunda forma fundamental $\overline{A}$) com curvatura seccional não negativa. Dai, foi usado o teorema de Sacksteder-van Heijenoort garantindo que a hipersuperfície perturbada é uma hipersuperfície convexa. Além disso, o conjunto de autovalores de A coincide com o de $\overline{A}$. Para concluir a demonstração foi usado o teorema de Hung-Hsi Wu para hipersuperfície convexa. Interessantes consequências saem do teorema das curvaturas principais, essas consequências são tema do próximo capítulo.

Inicialmente provamos o lema que segue:

Lema 3.0.16. *Sejam $f : \mathbb{M}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície completa e orientável e A a segunda forma fundamental de f com respeito ao compo normal unitário $\xi : \mathbb{M}^n \longrightarrow S^{n-1}$. Considere $\Lambda \subset \mathbb{R}$ o conjunto dos autovalores não nulos de A e $\Lambda^{\pm} = \Lambda \cap \mathbb{R}^{\pm}$. Se Λ^+, Λ^- são ambos não vazios e $inf\, \Lambda^+ \neq 0$ ou $sup\, \Lambda^+ \neq 0$ então, para cada ponto de $\mathbb{M}$, A possui autovalores positivo e negativo. Em particular f tem a propriedade da envoltória convexa.*

Prova: Primeiro mostremos que, em cada ponto de $\mathbb{M}$, A possui um autovalor positivo. Equivalentemente, se $N = \{p \in \mathbb{M}^n : \lambda_i(p) > 0$ para algum $i \in (1, ..., n)\}$ então $\mathbb{M}^n = N$.

Com efeito, $N \neq \emptyset$ já que $\Lambda^+ \neq \emptyset$, i.é, existe $p_1 \in \mathbb{M}^n$ e existe $i \in (1, ...n)$ tal que $\lambda_i(p_1) > 0$. Dado que uma inclusão é óbvia, provemos que $\mathbb{M}^n \subset N$. Suponha que $\mathbb{M} \not\subset N$, i.é, existe $p_2 \in \mathbb{M}^n$ tal que, para todo $i \in (1, ..., n)$ temos $\lambda_i(p_2) \leq 0$. Considere uma curva C que liga p_1 a p_2.

Da conexidade de $\mathbb{M}$ e da continuidade de $\lambda_i : \mathbb{M}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, obtemos que $\lambda_i(C)$ é um intervalo com extremos em $\lambda_i(p_2) \leq 0$ e $\lambda_i(p_1) > 0$. Portanto existe sequência $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ em C com $\lambda_i(p_k) > 0$ tal que $\lambda_i(p_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Isto é uma contradição pois estamos supondo que $inf\,\Lambda^+ > 0$. Portanto $\mathbb{M}^n = N$ e A possui um autovalor positivo em cada ponto de $\mathbb{M}$.

Para concluir a prova do lema, suponha por absurdo que existe um ponto $p_0 \in \mathbb{M}^n$ tal que $\lambda_i(p_0) > 0$ para todo i. Da hipótese $\Lambda^- \neq \emptyset$ e com os mesmos argumentos de conexidade de $\mathbb{M}$ e continuidade de λ_i, obtemos sequência $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\lambda_i(p_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ contradizendo que $inf\,\Lambda^+ \neq 0$. Portanto para todo ponto $p \in \mathbb{M}^n$ existe i tal que $\lambda_i(p) < 0$.

Concluimos então que, para cada ponto de $\mathbb{M}$, A possui autovalores positivo e negativo. Pelo teorema 2.1.5, f tem a propriedade da envoltória convexa.

A prova deste resultado segue de forma análoga se supormos que $sup\,\Lambda^+ \neq 0$. $\square$

Teorema 3.0.17. *(Curvaturas Principais) Sejam $f : \mathbb{M}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície e seja A a segunda forma fundamental de f com respeito a um campo normal unitário global $\xi : \mathbb{M}^n \longrightarrow S^{n-1}$. Considere $\Lambda \subset \mathbb{R}$ o conjunto dos autovalores não nulos de A e $\Lambda^{\pm} = \Lambda \cap \mathbb{R}^{\pm}$. Se Λ^+ e Λ^- são não vazios então $inf\,\Lambda^+ = sup\,\lambda^- = 0$.*

Demonstração:

Suponha por absurdo que $inf\Lambda^+ = 2c > 0$. Seja $t_0 = 1/c$ e defina

$$\overline{f} = f + t_o\xi : \mathbb{M}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

Afirmação 3.0.18. *Seja $\langle , \rangle$ a métrica induzida por f. Então a aplicação $\overline{f}$ é uma hipersuperfície com a métrica dada por $\overline{\langle u; v\rangle} = \langle (I - t_0A)^2u; v\rangle$.*

Prova: Para todo ponto $p \in \mathbb{M}$, a aplicação $d\overline{f}_p : T_p\mathbb{M} \longrightarrow T_f(p)\mathbb{M}$ é injetiva. Caso contrário existiria $q \in \mathbb{M}$ e $T_q\mathbb{M} \ni v \neq 0$ tal que

$$0 = d\overline{f}_q(v) = df_q(v) + t_0 d\xi_q(v) = df_q(v) - t_0 df_q(A_q v) = df_q(v - t_0\lambda_q v).$$

Onde a terceira igualdade é dada por 1.3.1. Da injetividade de df_q vem que $v - t_0\lambda_p v = 0$ donde temos $\lambda(p) = \dfrac{1}{t_0} = c$ e isto é um absurdo pois $\inf \Lambda^+ = 2c$. Portanto $v = 0$ e $d\overline{f}_p$ é injetiva.

Além disso,

$$\begin{aligned}\overline{\langle u; v\rangle} &= \langle (I - t_0A)^2u; v\rangle \\ &= \langle u; v\rangle - 2t_0\langle Au; v\rangle + t_0^2\langle A^2u, v\rangle.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\langle d\overline{f}_p u; d\overline{f}_p(v)\rangle &= \langle df_p(u) - t_0 df_p(Au); df_p(v) - t_0 df_p(Av)\rangle \\ &= \langle df_p(u); df_p(v)\rangle - 2t_0\langle \lambda u, v\rangle_f + t_0^2\langle \lambda u; \lambda v\rangle \\ &= \langle df_p(u); df_p(v)\rangle - 2t_0\langle Au, v\rangle + t_0^2\langle Au; Av\rangle.\end{aligned}$$

Usando que A é um opearador auto-adjunto, obtemos

$$\langle d\overline{f}_p u; d\overline{f}_p(v)\rangle = \langle u; v\rangle - 2t_0\langle Au; v\rangle + t_0^2\langle A^2u, v\rangle.$$

Portanto $\overline{\langle u; v\rangle} = \langle d\overline{f}_p(u); d\overline{f}_p(v)\rangle$ e $\overline{f}$ é uma isometria. □

Note que, se $\widehat{\lambda}$ são os autovalores do operador $I - t_0A$ então $\widehat{\lambda}$ é maior ou igual a unidade em valor absoluto.

De fato, $(I - t_0A)v = \widehat{\lambda}v \Leftrightarrow v - t_0\lambda v = \widehat{\lambda}v \Leftrightarrow 1 - t_0\lambda = \widehat{\lambda}$. Se supormos que $|\widehat{\lambda}| < 1$ então $-2 < -t_0\lambda < 0$ e teriamos $0 < \lambda < \dfrac{2}{t_0} = 2c$ o que é um absurdo pois $\inf \Lambda^+ = 2c$. Portanto $|\widehat{\lambda}| > 1$.

Afirmação 3.0.19. *Munida da métrica* $\overline{\langle u; v\rangle}$, $\mathbb{M}$ *é completa.*

Prova: Seja $\alpha : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{M}$ uma curva divergente. De acordo com 1.2.6, se $\overline{l}(\alpha)$ é o comprimento de α com respeito a mética $\overline{\langle ; \rangle}$, basta mostrar que $\overline{l}(\alpha)$ é ilimitado. Para cada $t \in [0, +\infty)$, seja $\{e_1(t), ...e_n(t)\}$ uma base ortonormal de $T_{\alpha(t)}\mathbb{M}$ que diagonaliza o operador $P = I - t_0A$ e tem $\{\widehat{\lambda_1}, ..., \widehat{\lambda_n}\}$ como autovalores associados. Podemos escrever

$$\alpha'(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t)e_i(t)$$

Assim, teremos

$$\begin{aligned}\overline{|\alpha'(t)|}^2 &= \overline{\langle \alpha'(t); \alpha'(t)\rangle} \\ &= \langle (I - t_0A)\alpha'(t); (I - t_0A)\alpha'(t)\rangle \\ &= \langle P\alpha'(t); P\alpha'(t)\rangle \\ &= \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t)Pe_i(t); \sum_{i=1}^{n} \alpha_j(t)Pe_j(t)\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i(t))^2(\widehat{\lambda_i})^2 \\ &\geq \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i(t))^2 \quad (\textit{pois } |\widehat{\lambda_i}| \geq 1) \\ &= |\alpha'(t)|^2\end{aligned}$$

Portanto,

$$\bar{l}(\alpha) = \lim_{s\to\infty} \int_0^s \overline{|\alpha'(t)|}\, dt \geq l(\alpha) = \lim_{s\to\infty} \int_0^s |\alpha^{'}(t)|\, dt$$

Sendo $\mathbb{M}$, com a métrica $\langle ; \rangle$, uma variedade completa segue que $\bar{l}(\alpha)$ é ilimitado. $\square$

Afirmação 3.0.20. *A imersão $\overline{f}$ possui segunda forma fundamental $\overline{A} = (I - t_0A)^{-1}A$ com respeito ao mesmo campo de vetores normal unitário ξ. Além disso, se $\overline{K}$ é a curvatura seccional de $\overline{f}(\mathbb{M})$ então $\overline{K} > 0$.*

Prova: Para mostrar que o campo global, normal e unitário com respeito a $\overline{A}$ é ξ, assumiremos que $\overline{A} = (I - t_0A)^{-1}A$. Esta igualdade será provada em seguida.

Se N é o campo global, normal e unitário com respeito a $\overline{A}$ então,

$$\begin{aligned}
dN &= -d\overline{f}(\overline{A}) \\
&= -(df + t_0 d\xi)\overline{A} \\
&= -df(\overline{A}) + t_0 df(A\overline{A}) \\
&= -df(\overline{A} - t_0 A\overline{A}) \\
&= -df((I - t_0A)\overline{A}) \\
&= -df(A) \\
&= d\xi
\end{aligned}$$

portanto $\xi = N$.

Ademais, como a derivada covariante do $\mathbb{R}^{n+1}$, com respeito ao campo de vetores X é única, vem que

$$\begin{aligned}
-df(AX) = D_X\xi &= -d\overline{f}(\overline{A}X) \\
&= -(df(\overline{A}X) - t_0 df(A\overline{A}X)) \\
&= -df(\overline{A}X - t_0 A\overline{A}X) \\
&= -df((I - t_0A)\overline{A}X)
\end{aligned}$$

Sendo f uma imersão, $(I - t_0A)\overline{A}X = AX$ e portanto $\overline{A}X = (I - t_0A)^{-1}AX$.

Provemos que $\overline{K} > 0$. Se $\overline{\lambda}$ é um autovalor de $\overline{A}$ então podemos escrever

$$\overline{\lambda} = \frac{\lambda}{1 - t_0\lambda} = \frac{\lambda c}{c - \lambda}.$$

Se $\lambda \leq 0$ então $\lambda c \leq 0$ e $c - \lambda > 0$ logo $\overline{\lambda} \leq 0$. Caso $\lambda \geq 0$ teremos $\lambda c \geq 0$ e como inf $\Lambda^+ = 2c$ segue que $c-\lambda < 0$ logo $\overline{\lambda} \leq 0$. Portanto a curvatura seccional $\overline{K} = \overline{\lambda}_i \overline{\lambda}_j \geq 0$. Do lema 3.0.16, A possui posto $r \geq 2$ e como $\overline{A}$ tem o mesmo posto de A concluí-se que $\overline{K}$ não é identicamente nula. $\square$

Podemos aplicar o teorema 2.1.13 a $\overline{f}$. Assim, $\overline{f}$ é uma hipersuperfície convexa em $\mathbb{R}^{n+1}$ e podemos decompor $\mathbb{M}$ e $\overline{f}$ (veja [5] pág. 1) como segue:

$$\mathbb{M} = \mathbb{M}_1^r \times \mathbb{R}^{n-r} \quad e \quad \overline{f} = \overline{f}_1 \times \overline{f}_2$$

Tal que,

$$\overline{f}_1 : \mathbb{M}_1^r \longrightarrow \mathbb{R}^{r+1} \quad e \quad \overline{f}_2 : \mathbb{R}^{n-r} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-r}$$

Onde $\overline{f}_2$ é a aplicação identidade e $\overline{f}_1$ é uma hipersuperfície convexa em $\mathbb{R}^{r+1}$. A segunda forma fundamental $\overline{A_1}$ com respeito a $\overline{f}_2$ tem posto r em algum ponto de $\mathbb{M}_1^r$. Portanto podemos escrever $\overline{A} = \overline{A}_1 \times \overline{A}_0$ em que $\overline{A}_0$ é a segunda forma fundamental com respeito a $\overline{f}_2$. Segue que $\overline{A}_0 = 0$ e como o posto de $\overline{A}$ é igual ao posto de A, podemos supor que $r = n$.

Afirmação 3.0.21. *A imagem da aplicação de Gauss $\xi : \mathbb{M}^n \longrightarrow S^n$ com relação a imersão $\overline{f}$, tem interior não vazio.*

Prova: Do parágrafo anterior, existe $p \in \mathbb{M}$ tal que $\overline{A}_p$ possui posto n, i.é, $\lambda_i(p) \neq 0$ para todo $i = 1, ..., n$. Da continuidade de λ_i, existe vizinhança de p, $V_i \subset \mathbb{M}$, tal que $\lambda_i(p) \neq 0$ $\forall q \in V_i$.

Se $U = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} V_i$ então a aplicação de Gauss $\xi : U \longrightarrow S^n$ é um difeomorfismo sobre sua imagem.

De fato, $d\xi_p = d\overline{f}_p(-\overline{A_p})$ logo, se $v \in T_pM$ e $d\xi_p(v) = d\overline{f}_p(-\overline{A_p}(v)) = 0$ então, da injetividade de $d\overline{f}_p$ temos que $-\overline{A}_p(v) = 0$. Como o posto de $\overline{A}_{|_U}$ é igual a n, obtemos que $v = 0$. Portanto $d\xi_p$ é injetiva e do teorema da função inversa $\xi_{|_U}$ é um difeomorfismo sobre sua imagem. Já que um difeomorfismo é uma aplicação aberta, $\xi(\mathbb{M})$ tem interior não vazio. $\square$

Do corolário 2.1.11 e do teorema 2.1.14, $\mathbb{M}$ é homeomorfa ao $\mathbb{R}^n$. Podemos então aplicar o corolário 2.1.15 a hipersuperfície $\overline{f}$ e concluir que $\Pi_{n+1} \circ \overline{f}(\mathbb{M})$ é própria.

Afirmação 3.0.22. $\Pi_{n+1} \circ f := (\Pi_{n+1})_{|_{f(|M)}} : f(\mathbb{M}) \longrightarrow \mathbb{R}$ *é própria.*

Prova: Como $\Pi_{n+1} \circ f$ é contínua, é suficiente mostrar que $(\Pi_{n+1} \circ f)^{-1}(K)$ é compacto em $f(\mathbb{M})$, para qualquer compacto $K \in \mathbb{R}$. Já que $(\Pi_{n+1} \circ f)^{-1}(K)$ está contido em $\mathbb{R}^{n+1}$, basta mostrar que $(\Pi_{n+1} \circ f)^{-1}(K)$ é sequencialmente compacto.

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência em $(\Pi_{n+1}\circ f)^{-1}(K)$. Sabemos que, para $\xi=(\xi_1,...\xi_{n+1})$

$$\Pi_{n+1}\circ\overline{f}(x_n)=\Pi_{n+1}\circ f(x_n)+t_0\xi_{n+1}(x_n).$$

Como $\Pi_{n+1}\circ f(x_n)\in K$ e $\|\xi_{n+1}\|\leq 1$ segue que $\Pi_{n+1}\circ\overline{f}(x_n)$ pertence a um compacto K'. Sendo assim, existe subsequência (x_{n_k}) de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\Pi_{n+1}\circ\overline{f}(x_{n_k})$ converge. Se $\Pi_{n+1}\circ\overline{f}$ é uma aplicação própria então (x_{n_k}) também é convergente, digamos a x.

Ademais, da continuidade de $\Pi_{n+1}\circ f$ obtemos que $\Pi_{n+1}\circ f(x_{n_k})$ converge a $\Pi_{n+1}\circ f(x)$. Como $\Pi_{n+1}\circ f(x_{n_k})\in K$ temos $\Pi_{n+1}\circ f(x)\in K$ logo $x\in(\Pi_{n+1}\circ f)^{-1}(K)$ provando que $(\Pi_{n+1}\circ f)^{-1}(K)$ é sequencialmente compacto. $\square$

Decorre do teorema de Sard [7] e do teorema da função implícita que, para quase todo valor regular $a>0$ de $\Pi_{n+1}\circ f:\mathbb{M}\longrightarrow\mathbb{R}$, temos que $(\Pi_{n+1}\circ f)^{-1}(a)$ é uma hipersuperfície de $\mathbb{M}$. Seja então $a>0$ um valor regular de $\Pi_{n+1}\circ f$ e seja $\mathbb{M}_1=(\Pi_{n+1}\circ f)^{-1}(a)$. Já que $\Pi_{n+1}\circ f$ é própria, então $\mathbb{M}_1$ é uma hipersuperfície compacta de $\mathbb{M}^n$ que podemos assumir que é conexa (caso contrário, consideramos uma componente conexa de $\mathbb{M}_1$).

Considere agora o homeomorfismo $h:\mathbb{M}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ e note que $h(\mathbb{M}_1)$ é uma hipersuperfície (topológica) compacta de $\mathbb{R}^n$. Uma generalização do teorema de Jordan nos permite afirmar que $h(\mathbb{M}_1)$ decompõe o $\mathbb{R}^n$ em dois abertos L_1 e $\mathbb{R}^n\setminus L_1$, onde L_1 é relativamente compacto e $\mathbb{R}^n\setminus L_1$ é ilimitado.

Seja então $\Omega=h^{-1}(L_1)$. Observe que Ω é um aberto relativamente compacto em $\mathbb{M}^n$ e que,

$$h(\mathbb{M}_1)=\partial L_1=\partial h(\Omega)=h(\partial\Omega).$$

Portanto,

$$\partial\Omega=\mathbb{M}_1=(\Pi_{n+1}\circ f)^{-1}(a)=f^{-1}(\Pi_{n+1}^{-1}(a)).$$

Assim, $f(\partial\Omega)=\Pi_{n+1}^{-1}(a)=H_a$. Em particular $Envf(\partial\Omega)=Env(H_a)=H_a$. Pelo lema 3.0.16 f tem a propriedade da envoltória convexa. Segue que $f(\Omega)\subset Env(f(\partial\Omega))$. Portanto $f(\Omega)\subset H_a$ (hiperplano) e f possui segunda forma fundamental nula em Ω. Isto é uma contradição pois estamos supondo que $inf\,\Lambda^+\neq 0$.

Para provar que $sup\,\Lambda^-=0$, basta supor por absurdo que $sup\,\Lambda^-=-2c<0$ e proceder de forma análoga ao acima.

$\blacksquare$

Capítulo 4

Aplicações

Aqui, usamos o Teorema das Curvaturas Principais para provar que: Se $n = 3$ e $\mathbb{M}^n$ é uma variedade completa e orientável com curvatura de Ricci menor ou igual a uma constante negativa então, essa variedade não pode ser imersa isometricamente no $\mathbb{R}^4$. E para $n \geq 4$, isso também é válido se, a curvatura seccional não assume todos os valores reais. Isto pode ser enunciado de forma equivalente, a saber, se $\mathbb{M}$ é uma variedade completa e orientável, de dimensão três, com curvatura de Ricci não positiva então, a curvatura de Ricci está próxima de zero quanto se queira, i.é, o ínfimo da curvatura de Ricci é igual a zero. E, se a dimensão é maior ou igual a quatro, isso também é válido se a curvatura seccional não assume todos os valores reais.

Acrescentamos a este resultado, obtido por Smyth e Xavier [11], que isso é também válido para as curvaturas de Gaus-Kronecker e escalar.

Para demonstrar o proposto em dimensão três, necessitamos do próximo teorema.

Teorema 4.0.23. *Seja $f : \mathbb{M}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície completa e orientável com curvatura de Ricci não positiva e A a segunda forma fundamental de f. Suponha que A possui assinatura, i.é, A tem um autovalor positivo e $n-1$ autovalores negativos, ou vice versa, para todo $p \in \mathbb{M}$. Então*

$$\inf_{p\in\mathbb{M}} \|A_p\| := \inf \|A\| = 0$$

$$\inf_{\substack{p\in\mathbb{M}\\ v\in T_p\mathbb{M}}} \|Ric_p(v)\| := \inf \|Ric\| = 0$$

Prova: Sejam $\lambda_1(p), \lambda_2(p), ..., \lambda_n(p)$ os autovalores de A_p, escolhamos uma orientação para $\mathbb{M}$ tal que A_p possua um autovalor positivo e $n-1$ autovalores negativos. Da hipótese sobre a curvatura de Ricci temos

$$Ric_p(v) \leq 0 \Leftrightarrow \sum_{i\neq j} K_p(e_i, e_j) \leq 0.$$

Segue da equação de Gauss que

$$K_p(e_i, e_j) = \lambda_i(p)\lambda_j(p),$$

donde temos que

$$\sum_{i\neq j} K_p(e_i, e_j) \leq 0 \Rightarrow$$
$$\sum_{i\neq j} \lambda_i(p)\lambda_j(p) \leq 0 \Rightarrow$$
$$\lambda_i(p)\sum_{i\neq j} \lambda_j(p) \leq 0$$

Assim, obtemos que

$$\lambda_i(p)\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j(p) - \lambda_i(p)) \leq 0.$$

Note que, para $i = 2$,

$$\lambda_2(p)\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j(p) - \lambda_2(p)) \leq 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_2(p)\lambda_1(p) + \lambda_2(p)\sum_{j=3}^{n} \lambda_j(p) \leq 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_1(p) \geq -\sum_{j=3}^{n} \lambda_j(p) = \sum_{j=3}^{n} \|\lambda_j(p)\|.$$

Portanto,

$$\lambda_1(p) \geq \|\lambda_j(p)\| \text{ para todo } j \neq 2.$$

De forma análoga, para $i = 3$,

$$\lambda_1(p) \geq \|\lambda_j(p)\| \text{ para todo } j \neq 3.$$

Segue que

$$\lambda_1(p) \geq \|\lambda_j(p)\| \text{ para todo } j.$$

Do Teorema das Curvaturas Principais, $\inf \Lambda^+ = \inf\limits_{p\in\mathbb{M}} \lambda_1(p) = 0$. Logo existe uma sequência $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{M}$, tal que $\lambda_1(p_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Como $\lambda_1(p) \geq \|\lambda_j(p)\|$ para todo j então, ao longo dessa mesma sequência $\lambda_j(p_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

Ademais, para todo $p \in \mathbb{M}$,

$$\|A_p\|^2 = \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j(p))^2.$$

Em particular para p_k,

$$\|A_{p_k}\|^2 = \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j(p_k))^2 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Portanto,

$$\inf \|A\| = 0.$$

Além disso, se v_k é uma sequência em $T_{p_k}\mathbb{M}$ obtemos

$$Ric_{p_k}(v_k) = \sum_{i_k\neq j_k} K_{p_k}(e_{i_k}, e_{j_k}) = \sum_{i_k\neq j_k} \lambda_{i_k}(p_k)\lambda_{j_k}(p_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Portanto,

$$\inf \|Ric\| = 0.$$

$\square$

Com esse teorema vimos que, as hipersuperfícies completas e orientáveis com curvatura de Ricci não positiva, que possui segunda forma fundamental com assinatura, tem ínfimo da curvatura de Ricci igual a zero. Nessas condições, as hipersuperfícies de uma variedade de dimensão três tem automaticamente segunda forma fundamental com assinatura. Isso pode ser facilmente provado pelo lema que segue.

Lema 4.0.24. *Seja $f : \mathbb{M}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ uma hipersuperfície com curvatura de Ricci negativa e A a segunda forma fundamental de f. Então A possui assinatura.*

Prova: Sejam $\lambda_1(p), \lambda_2(p)$ e $\lambda_3(p)$ os autovalores de A_p. Da hipótese sobre a curvatura de Ricci temos,

$$Ric_p(v) < 0 \Rightarrow \lambda_i(p) \sum_{i\neq j} \lambda_j(p) < 0$$

.

Para $i = 1$, $\lambda_1(p) \sum\limits_{i\neq j} \lambda_j(p) < 0$ e supondo $\lambda_1(p) > 0$ teremos $\lambda_2(p) + \lambda_3(p) < 0$ o que nos dá $\lambda_2(p) < 0$ ou $\lambda_3(p) < 0$.

Se $\lambda_2(p) < 0$ e $\lambda_3(p) < 0$ nada a fazer. Caso $\lambda_2(p) < 0$ e $\lambda_3(p) > 0$ mudamos a orientação de $\mathbb{M}$ obtendo $\lambda_1(p) < 0, \lambda_2(p) > 0$ e $\lambda_3(p) < 0$.

Se $\lambda_1(p) < 0$ o resultado é análogo. Portanto A_p possue um autovalor positivo e $n-1$ autovalores negativos. $\square$

Com esse lema podemos provar a generalização de Efimov [4] em dimensão três, a saber,

Teorema 4.0.25. *Se $f : \mathbb{M}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ é uma hipersuperfície completa e orientável com curvatura de Ricci negativa então* $\inf \|Ric\| = 0$.

Prova: Seja $f : \mathbb{M}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície e A a segunda forma fundamental de f. Pelo lema 4.0.24 A possui assinatura e pelo teorema 4.0.23 $\inf \|Ric\| = 0$. $\square$

Nós adicionamos ao trabalho de Smyth e Xavier [11] que este último resultado também é válido para as curvaturas de Gauss-Kronecker e escalar. Como podemos ver nos dois próximos teoremas.

Teorema 4.0.26. *Seja $f : \mathbb{M}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ uma hipersuperfície completa e orientável com curvatura de Ricci não positiva então $\inf_{p\in\mathbb{M}} |G_p| = 0$. Em particular se $G_p = cte$ para todo $p \in \mathbb{M}^3$, teremos $G \equiv 0$.*

Prova: Pela afirmação 4.0.24 A possui um autovalor positivo e dois autovalores negativos ou vice-versa. Da demonstração de 4.0.23 existe sequência em $\mathbb{M}$, $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$, tal que $\lambda_i(p_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ para todo $i \in \{1, 2, 3\}$.

Portanto,

$$\lim_{k\to\infty} G(p_k) = \lim_{k\to\infty} \prod_{i=1}^{3} \lambda_i(p_k) = 0.$$

Logo,

$$\inf_{p\in\mathbb{M}} |G_p| = 0.$$

$\square$

Teorema 4.0.27. *Seja* $f : \mathbb{M}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ *uma hipersuperfície completa e orientável com curvatura de Ricci não positiva então* $\inf_{p\in\mathbb{M}} |\tau(p)| = 0$. *Em particular se* $\tau(p) = cte$ *para todo* $p \in \mathbb{M}^3$, *teremos* $\tau \equiv 0$.

Prova: Do teorema 4.0.23, $Ric_{p_k}(v_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Então ao longo desta mesma sequência,

$$\tau(p_k) = \sum_{j}^{3} Ric_{p_k}(v_j) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Logo,

$$\inf_{p\in\mathbb{M}} |\tau(p)| = 0.$$

□

Agora, apresentamos um teorema o qual mostra que uma hipersuperfície completa e orientável, com curvatura de Ricci não positiva, pode ser um cilindro. Além disso, mostra uma relação entre a curvatura média e a curvatura de Ricci. Esta relação será usada para mostrar uma generalização de Efimov para $n \geq 4$.

Teorema 4.0.28. *Seja* $f : \mathbb{M}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ *uma hipersuperfície completa e orientável com curvatura de Ricci não positiva e* H *a curvatura média de* $\mathbb{M}$.

(i) Ou $\inf_{p\in\mathbb{M}} |H_p| = \inf \|H\| := 0$ *ou* $f(\mathbb{M})$ *é um cilindro sobre uma curva plana em* $\mathbb{R}^{n+1}$.

(ii) Se $\inf H \neq -\infty$ *ou* $\sup H \neq +\infty$ *então* $\inf \|Ric\| = 0$.

Em particular, se $H = constante \neq 0$ *então* $f(\mathbb{M})$*é um cilindro.*

Prova: Para a prova de (i), suponhamos inicialmente que Λ^+ ou Λ^-é vazio. Se $\Lambda^+ = \Lambda^- = \emptyset$ então $\mathbb{M}$é um hiperplano e $H \equiv 0$.

Caso $\Lambda^+ = \emptyset$ e $\Lambda^- \neq \emptyset$, da hipótese sobre a curvatura de Ricci sabemos que $\lambda_i(p)\sum_{i\neq j} \lambda_j(p) \leq 0$. então $\sum_{i\neq j} \lambda_j(p) \geq 0$ o que nos dá $\lambda_j(p) = 0$ para todo $j \neq i$.

Dessa forma, $K_p(e_i, e_j) = \lambda_i(p)\lambda_j(p) = 0$ para todo $p \in \mathbb{M}$. Por Hartman-Niremberg [2] pag. 72, $f(\mathbb{M})$ é um cilindro sobre uma curva plana.

Supondo que nem Λ^+ nem Λ^- são vazios, assuma por absurdo que $\inf_{p\in\mathbb{M}} |H_p| \neq 0$. Se $H_p \geq \varepsilon > 0$, da condição sobre a curvatura de Ricci $\lambda(p)(nH_p - \lambda(p)) \leq 0$ para todo $\lambda(p) \in \Lambda$ o que nos dá $n \cdot H_p \leq \lambda(p)$ para todo $\lambda(p) \in \Lambda^+$. Do teorema das curvaturas principais $\inf_{p\in\mathbb{M}} n \cdot H_p \leq \inf \Lambda^+ = 0$. Isto é um absurdo pois estamos supondo $\inf_{p\in\mathbb{M}} H_p \neq 0$.

Caso $H_p \leq -\varepsilon < 0$, teremos que $n \cdot H_p \geq \lambda(p)$ para todo $\lambda(p) \in \Lambda^-$. Analogamente, usando o teorema das curvaturas principais chegamos a uma contradição.
Portanto $\inf H = 0$ e isto conclui a prova de (i).

Para provar (ii) suponha que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $Ric_p(v) \leq -c^2$, equivalentemente, $\lambda(p)(nH_p - \lambda(p)) \leq -c^2$ para todo $\lambda(p) \in \Lambda$. Disto segue que $nH_p \leq \dfrac{-c^2}{\lambda(p)} + \lambda(p)$ para todo $\lambda(p) \in \Lambda^+$.

Como $\inf \Lambda^+ = 0$ existe uma sequência $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{M}$ tal que $\lambda(p_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Portanto $\lim\limits_{k\to\infty} (\dfrac{-c^2}{\lambda(p_k)} + \lambda(p_k)) = -\infty$ e ao longo dessa mesma sequência $H \xrightarrow[k\to\infty]{} -\infty$.

Analogamente, usando que $nH_p \geq \dfrac{-c^2}{\lambda(p)} + \lambda(p)$ para todo $\lambda(p) \in \Lambda^-$ e que $\sup \Lambda^- = 0$, obtemos que $\sup H = +\infty$. $\square$

Teorema 4.0.29. *Seja $f : \mathbb{M}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ $(n \geq 4)$ uma hipersuperfície completa e orientável com curvatura de Ricci negativa. Se a curvatura seccional de $\mathbb{M}$ não assume todos os valores reais então $\inf\limits_{p\in\mathbb{M}} \|Ric_p\| = 0$.*

Prova: Inicialmente vamos provar que, nas condicoes do teorema, $\sup K \neq +\infty$.

Com efeito, suponha que $\inf K = -\infty$. Da continuidade da função curvatura seccional e da hipótese sobre sua imagem temos que $\sup K \neq +\infty$.
Caso $\inf K \neq -\infty$ suponha por absurdo que $\sup K = +\infty$. Então, existem sequências $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $(v_k, u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{M}$ e $T_{p_k}\mathbb{M}$ respectivamente, onde $\lim\limits_{k\to\infty} K_{p_k}(e_{i_k}, e_{j_k}) = +\infty$. Além disso, existe $c > 0$ tal que $\inf K \geq -c$.

Da hipótese sobre a curvatura de Ricci,

$$\sum_{i_k \neq j_k} K_{p_k}(e_{i_k}, e_{j_k}) < 0 \Rightarrow \sum_{K>0} K_{p_k}(e_{i_k}, e_{j_k}) + \sum_{K<0} K_{p_k}(e_{i_k}, e_{j_k}) < 0.$$

E portanto,

$$\sum_{K>0} K_{p_k(e_{i_k}, e_{j_k})} < -\sum_{K<0} K_{p_k(e_{i_k}, e_{j_k})} \leq c.$$

Isto é um absurdo pois estamos supondo que $\sup K = +\infty$.

Provemos o teorema: se a segunda forma fundamental de $\mathbb{M}$ tem um autovalor positivo e $n-1$ autovalores negativos o resultado segue do teorema 4.0.23.

Caso contrário A possui pelo menos dois autovalores positivos e dois autovalores negativos. Como $\lambda(p)(nH_p - \lambda p) < 0$ para todo $\lambda \in \Lambda$ então $nH_p < \lambda(p)$ para $\lambda(p) > 0$. Digamos que $\lambda_{i_1}(p)$ e $\lambda_{i_2}(p)$ são dois autovalores positivos de A_P.

Então, para $H_p > 0$

$$\begin{cases} nH_p & < & \lambda_{i_1}(p) \\ nH_p & < & \lambda_{i_2}(p). \end{cases}$$

Portanto,

$$\lambda_{i_1}(p) \cdot \lambda_{i_2}(p) \geq n^2(H_p)^2 \Rightarrow K_p(e_{i_1}, e_{i_2}) \geq n^2(H_p)^2.$$

Logo,

$$+\infty \neq \sup K \geq \sup K_p(e_{i_1}, e_{i_2}) \geq \sup H.$$

Do teorema 4.0.28 (ii),

$$\inf_{p \in \mathbb{M}} \|Ric_p\| = 0.$$

□

Referências

[1] ALEXANDER, S.; MALTZ, R. Isometric immersions of Riemannian products in Euclidean space, *J. Differential Geometry*, v. **11**, no. 1, p. 47-57, 1976.

[2] DAJCZER, M. et al. *Submanifolds and Isometric Immersions*, 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1990. (Mathematics Lecture Series)

[3] DO CARMO, M. P. *Geometria Riemanniana*, 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008. (Projeto Euclides)

[4] EFIMOV, N. V. Hyperbolic problems in the theory of surfaces. In: PROCEEDINGS OF INTERNATIONAL CONGRESS OF MATHEMATICS, Moscow, 1966. *Amer. Math. Soc. Transl.*, v. **70**, no. 2, p. 26-38, 1968.

[5] HARTMAN, P. On the Sacksteder Decomposition of Complete W-Hypersurfaces of Nonnegative Sectional Curvature, *Arch. Rational Mech. Anal.*, v. **70**, no. 1, p. 13-18, 1979.

[6] HILBERT, D. On surfaces of constant Gaussian curvature, *Trans. Am. Mat. Soc.*, v. **2**, no. 1, p. 87-99, 1901.

[7] LLOYD, N. G. *Degree theory*. Cambridge: University Press, 1978. (Cambridge Tracts in Mathematics, **73**)

[8] NASH, J. The imbedding problem for Riemannian manifolds, *Ann. of Math.*. v. **63**, no. 2, p. 20-63, 1956.

[9] OSSERMAN, R. The convex hull property of immersed manifolds, *J. Differential Geometry*, v. **6**, p. 267-261, 1971.

[10] REILLY, R. C. Applications of the Hessian operador in a Riemannian manifold, *Mich. Math. J.*, no. 26, p. 457-472, 1973.

[11] SMYTH B.; XAVIER, F. Efimov's theorem in dimension greater than two, *Invent. Math.*, v. **90**, no. 3, p. 443-450, 1987.

[12] WU, H. The spherical images of convex hypersurfaces, *J. Differential Geometry*, v. **9**, p. 279-290, 1974.

Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática / Colegiado da Pós-Graduação em Matemática

Av. Adhemar de Barros, s/n, Campus Universitário de Ondina, Salvador - BA
CEP: 40170 -110
<http://www.pgmat.ufba.br>