Universidade Federal da Bahia
Instituto de Matemática
Curso de Pós-graduação em Matemática
Dissertação de Mestrado

Medidas Invariantes Absolutamente Contínuas para Transformações de Markov

Rolando Restany Gomes de Araújo

Salvador — Bahia
Março de 2006

Medidas Invariantes Absolutamente Contínuas para Transformações de Markov

Rolando Restany Gomes de Araújo

Dissertação apresentada ao colegiado do curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Vilton Jeovan Viana Pinheiro (Orientador)

Prof. Dr. José Ferreira Alves
(Universidade do Porto – Portugal)

Prof. Dr. Alberto Adrego Pinto
(Universidade do Porto – Portugal)

Araújo, R. R. G. **"Medidas Invariantes Absolutamente Contínuas para Transformações de Markov"**.

Orientador: Prof. Dr. Vilton Jeovan Pinheiro.
Dissertação de Mestrado apresentada ao curso de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia, 38 páginas, Salvador-Ba, 2006.

Palavras-Chave: Medidas Invariantes, Transformações de Markov, Operador de Perron-Fröbenius.

Dedicado à Fausta Maria da Conceição (in memorian) e Francisca de Assis Gomes.

"Nenhum problema pode ser resolvido pelo mesmo estado de consciência que o criou. É preciso ir mais longe. Eu penso 99 vezes e nada descubro. Deixo de pensar, mergulho num grande silêncio e a verdade me é revelada!"

Albert Einstein

Agradecimentos

Agradeço às duas pessoas diretamente responsáveis por mais esta vitória, minha mãe, Francisca de Assis Gomes e minha avó materna, Fausta Maria da Conceição; que não mediram esforços nem sacrificios, durante toda minha vida para oferecer o que de melhor estava ao seu alcance e sem sombra de dúvidas, não teria chegado à conclusão deste curso se não fosse pelo ajuda, carinho, atenção exclusiva e o amor delas. Agradeço aos meus familiares pelo apoio e ajuda durante todo esse período.

Aos professores do Instituto de Matemática, pela atenção e disponibilidade em atender, mesmo na resolução de pequenos problemas. Em especial, aos professores José Ferreira Alves (Faculdade de Ciências do Porto), que sempre se mostrou prestativo e atencioso na resolução de dúvidas e o Prof. Vilton Jeovan pela orientação, paciência e transmissão do conhecimento; que certamente é o bem mais precioso que pode ser dado à outra pessoa. A estes serei eternamente grato.

Aos amigos professores do município de Catu: Profa. Jeane Chiam, Profa. Anaci, Prof. Acimar, pelo incentivo e apoio, principalmente nos momentos de maior desânimo. Não poderia deixar de mencionar a Profa. Julieta Bezerra, que com extrema compreensão e carinho possibilitou minha dedicação durante todo o período do curso de mestrado, bem como a Profa. Giselda Fróes pela compreensão e apoio na reta final do curso.

Aos amigos do curso: Abílio Souza, Adriano Cattai, Elisângela Farias, Rosane Funato, Gilclécio Dantas, Silvia Costa, Maurício Porto, Tailsom Jeffersom, os quais pelo objetivo comum que nos uniu, tem a sua parcela de contribuição durante este período de convivência.

Aos funcionários do Instituto de Matemática pela boa vontade e gentileza em atender. Aos demais amigos não citados.

Resumo

Neste trabalho estudaremos a dinâmica das transformações de Markov. Mostraremos que tais transformações admitem medidas invariantes que são absolutamente contínuas com respeito à medida de Lebesgue. Verificaremos esse fato, via operador de Perron-Frobënius; pois seus pontos fixos são densidades de medidas invariantes. Veremos que sob a hipótese de controle forte de distorção, tais transformações exibem medidas invariantes absolutamente contínuas, com densidades limitadas no espaço das funções lipschitz contínuas. Em particular, mostraremos que para uma transformação markoviana expansora por partes, de classe C^2, definida numa variedade compacta $\mathcal{M}$, existe um conjunto finito de tais medidas, que provaremos ser ergódicas e que Lebesgue quase todo ponto pertence a bacia de uma dessas medidas.

Abstract

In this work we study the dynamics of the transformations of Markov. We show that such transformations admit invariant measures that are absolutely continuous with respect to the measure of Lebesgue. We verify that fact, through operator of Perron-Frobënius; because such measures are their fixed points. We see that under the hypothesis of strong distortion control, such transformations exhibit invariant measures absolutely continuous with limited densities in the space of the functions continuous lipschitz. In particular, we show that for a C^2 piecewise expanding markovian map, defined in a compact variety $\mathcal{M}$, one exists finite set of such measures, that we prove to be ergodics and that Lebesgue almost whole point belongs the basin of one of those measured.

Sumário

Introdução

Os Sistemas Dinâmicos munidos de medidas invariantes é o principal objeto de estudo da Teoria Ergódica. Em termos simples um sistema dinâmico é qualquer sistema cujo comportamento se modifica com o tempo; na verdade o mundo à nossa volta pode ser visto como um sistema dinâmico complexo. Mesmo os sistemas ditos simples, podem apresentar um comportamento a longo prazo que apenas podem ser descritos de maneira probabilística, esses sistemas são denominados caóticos.

Nesse trabalho de dissertação, provaremos a existência de probabilidades invariantes fisicamente relevantes para a dinâmica de uma transformação de Markov, a qual definiremos mais adiante.

Se um dado sistema apresenta infinitos pontos periódicos, ele também apresentará infinitas medidas invariantes, no entanto, desejamos encontrar medidas invariantes que sejam relevantes em termos de medida de lebesgue. Queremos que a probabilidade de encontrar algum iterado da transformação que reje o sistema em um conjunto mensurável seja não nula apenas quando a medida de lebesgue nesse conjunto mensurável também seja não nula. Para tal é suficiente que essas medidas invariantes sejam absolutamente contínuas em relação à medida de lebesgue. Propriedades adicionais dessas medidas serão verificadas, como por exemplo ergodicidade, que nos diz num certo sentido que o sistema não pode ser decomposto em termos probabilísticos em mais de um sistema não trivial.

Dividimos essa dissertação em três capítulos. No Capítulo 1, que chamamos de Preliminares, apresentaremos algumas definições e resultados gerais da Teoria da Medida. Omitiremos as demosntrações na maioria das vezes por se tratarem de resultados conhecidos, no entanto, citaremos a fonte utilizada e página, para os leitores que desejarem uma consulta mais detalhada.

No Capítulo 2, onde construiremos as condições necessárias para chegarmos ao resultado principal do nosso trabalho, estudaremos a dinâmica do Operador de Perron-Frobenius, também conhecido como operador de transferência. Inicialmente, sem nos preocuparmos com o espaço de atuação do operador, provaremos que os pontos fixos do operador são probabilidades invariantes absolutamente contínuas à medida de lebesgue. Definiremos transformações de Markov e mostraremos que para essas transformações, existem probabilidades invariantes absolutamente contínuas limitadas no espaço das funções integráveis. Em seguida introduziremos o espaço das funções Lipschitz contínuas e estudaremos o comportamento do operador de Perron-Frobenius neste espaço. Um dos principais resultados desse capítulo é:

Lema(2.4) *Seja $(T, \mathcal{P})$ uma transformação de Markov tal que para todo $\vec{p} \in \widetilde{\mathcal{P}}$ com $inf\{\mu(T(\vec{s})); \vec{s} \in \mathcal{P}\} > 0$; então existe uma probabilidade T-invariante q absolutamente contínua à μ tal que $\frac{dq}{d\mu} \in L^\infty(\mu)$.*

Finalmente, no Capítulo 3, apresentaremos os resultados principais deste trabalho, no qual provaremos a existência de um conjunto finito de medidas invariantes absolutamente contínuas e ergódicas para uma C^2 transformação markoviana expansora por partes definida numa variedade compacta $\mathcal{M}$, e que são limitadas no espaço das funções lipschitz contínuas. Este resultado é obtido a partir da prova do *Teorema A*, abaixo publicado por *Jon Aaronson*, em *An Introduction to Infinite Ergodic Theory.* Mathematical Surveys and Monographs 50, American Math. Society, 1997, 168.

Teorema A. *Suponha que $(T, \mathcal{P})$ uma transformação de Markov; tal que para todo cilindro $\vec{p} \in \widetilde{\mathcal{P}}$ tenham forte controle de distorção. Se $\#T(\mathcal{P}) < \infty$; então existe uma densidade invariante μ, absolutamente contínua a medida de Lebesgue m, tal que $\log \frac{d\mu}{dm}$ pertence ao espaço das funções Lipschitz contínuas $(\mathcal{L})$.*

Outro Teorema que demonstraremos é:

Teorema B. *Se $T : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ é uma C^2 aplicação markoviana expansora por partes, com um número limitado de imagens, então existe um conjunto finito de medidas invariantes absolutamente contínuas à Lebesgue e ergódicas tal que $m - q.t.p.$ pertence a bacia de uma dessas medidas. Ademais a densidade de cada uma dessas medidas com respeito a Lebesgue é uniformemente limitada por alguma constante.*

Por último, no Apêndice, faremos um breve estudo dos shifts, onde exibiremos um resultado de menor importância, mas de alguma relevância para a obtenção do resultado principal do nosso trabalho.

Capítulo 1

Preliminares

Nosso principal objetivo neste capítulo é estabelecer as notações necessárias à compreensão dos capítulos subseqüentes e apresentar definições e resultados que serão úteis para o entendimento da teoria que será desenvolvida no decorrer deste trabalho. Citaremos alguns teoremas de Análise Funcional e da Teoria da Medida. Por se tratarem de resultados conhecidos na literatura vigente omitiremos ou simplificaremos suas demonstrações.

Admitimos que X é um *espaço topológico* e $\mathcal{B}$ denota a *σ-álgebra de Borel*. Seja μ uma aplicação com domínio $\mathcal{B}$, $\mu : \mathcal{B} \to [0, +\infty]$, satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$, com $A_i's$ disjuntos dois a dois e $A_i \in \mathcal{B}\ \forall\ i$.

Dizemos que a aplicação μ acima é uma *medida* sobre os borelianos de X e chamamos a terna $(X, \mathcal{B}, \mu)$ de *espaço de medida*. Quando $\mu(X)$=1, dizemos que se trata de um *espaço de probabilidades.*

Dizemos que $T : X \to X$ é uma *transformação mensurável* se $T^{-1}(A) \in \mathcal{B}\ \forall A \in \mathcal{B}$. No caso em que $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)\ \forall A \in \mathcal{B}$, dizemos que T *preserva medida* ou simplesmente que μ é *T-invariante.* A transformação mensurável $T : X \to X$ no espaço $(X, \mathcal{B}, \mu)$ é dita *não singular* se $\mu(T^{-1}(A)) = 0,\ \forall A \in \mathcal{B}$ tal que $\mu(A) = 0$. Note que toda transformação preservando medida é necessariamente não singular.

Uma propriedade se diz satisfeita em quase todos os pontos (abreviadamente q.t.p.), se o conjunto dos pontos onde a propriedade não é satisfeita tem medida nula.

A transformação não singular $T : X \to X$ é chamada q.t.p. *invertível* se T é invertível em algum $Y \in \mathcal{B}$ com $\mu(X \setminus Y) = 0$ e é dita q.t.p. *localmente invertível* se existem conjuntos mensuráveis disjuntos $\{A_j; j \geq 1\}$ tal que $\mu(X \setminus \bigcup_{j\geq 1} A_j) = 0$ e T é invertível em cada A_j, com $A_j \in \mathcal{B}$, $\forall\ j$.

Um conjunto $A \in \mathcal{B}$ é dito *T-invariante* se temos $T^{-1}(A) = A$.

Um espaço de medida $(X, \mathcal{B}, \mu)$ é chamado *finito* se $\mu(X) < \infty$. No caso em que existe uma seqüencia $\{A_k\}_{k\geqslant 1}$, $A_k \in \mathcal{B}$, satisfazendo $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ e $\mu(A_k) < \infty\ \forall\ k$; então $(X, \mathcal{B}, \mu)$ é dito *σ-finito.*

Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida, $(X', \mathcal{B}')$ um espaço mensurável e $T : X \to X'$ uma aplicação mensurável. A *medida transportada* de μ por T é a medida $\mu' := T_*\mu : \mathcal{B}' \to [0, +\infty]$ definida por:

$$\mu'(A') := \mu(T^{-1}(A')),\ \ A' \in \mathcal{B}'.$$

Enunciaremos alguns Teoremas, dos quais faremos uso no decorrer do nosso trabalho:

1.1 Teorema (**Mudança de Variáveis**). *Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida, $(X', \mathcal{B}')$ um espaço mensurável e $T : X \to X'$ uma aplicação mensurável. Considere $\nu = \mu T^{-1}$ a medida transportada de μ por T. Então $g : X' \to \mathbb{R}$ é ν-integrável se e somente se $g \circ T : X \to \mathbb{R}$ é μ-integrável e:*

$$\int_{X'} g\ d\nu = \int_X g \circ T\ d\mu.$$

Prova. Ver demonstração em [3], pág. 121.

□

Sejam μ e ν duas medidas num espaço mensurável $(X, \mathcal{B})$. Dizemos que ν é *absolutamente contínua* com respeito a μ se $\mu(A) = 0$ implica $\nu(A) = 0$, qualquer que seja A o conjunto mensurável. Neste caso escrevemos $\nu \ll \mu$. Caso tenhamos $\mu(A) = 0$ se e somente se $\nu(A) = 0$, dizemos que μ é *equivalente* a ν e escrevemos $\mu \sim \nu$.

Chamamos *suporte* da medida μ o conjunto dos pontos tais que toda vizinhança tem medida positiva para μ e este é denotado por $supp(\mu) = \{x; \forall\ aberto\ V \ni x, \mu(V) > 0\}$. Quando μ

é invariante para T a *bacia* de μ a qual denotamos por $\mathcal{B}(\mu)$ é o conjunto dos pontos tais que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(T^j(x)) = \int \varphi\ d\mu$$

para toda função contínua $\varphi : X \to \mathbb{R}$. Note que a bacia sempre é um conjunto invariante.

Uma probabilidade invariante μ diz-se *ergódica* se todo subconjunto invariante por T, tem medida é 0 ou 1. Se μ é ergódica então $\mathcal{B}(\mu)$ tem μ-medida total.

1.2 Teorema (Radon-Nikodym). *Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida σ-finita. Seja $\nu : \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{R}}$ uma medida σ-finita absolutamente contínua com respeito a μ. Então existe uma função mensurável não negativa $f : X \to \mathbb{R}$ tal que:*

$$\nu(A) = \int_A f d\mu, \qquad \forall A \in \beta.$$

Prova. Ver demonstração em [9], pág. 238.

□

A função $f \in L^1(\mu)$ obtida no Teorema de Radon-Nikodym é chamada de derivada de Randon-Nikodym ou densidade da medida ν em relação a medida μ e denotada por $f = \dfrac{d\nu}{d\mu}$.

1.3 Lema (Fatou). *Seja $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma seqüencia de funções mensuráveis não negativas e $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ q.t.p. sobre um conjunto mensurável E, então:*

$$\int_E f\ d\mu \le \lim_{n\to\infty}\inf \int_E f_n\ d\mu.$$

Prova. Ver demonstração em [9], pág. 83.

□

1.4 Teorema (Convergência Dominada). *Seja $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma seqüencia de funções mensuráveis e $| f_n | \le g$ sobre um conjunto E, onde g é uma função integrável sobre E. Se $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ q.t.p. em E então:*

$$\int_E f\ d\mu \le \lim_{n\to\infty}\int_E f_n\ d\mu.$$

Prova. Ver demonstração em [4], pág. 75.

□

1.5 Teorema (Ascoli-Arzelá). *Seja (X, d) um espaço métrico compacto. Seja $\mathcal{F}$ uma família equicontínua de funções $\psi : X \to \mathbb{R}$. Isto é, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $\mid x-y \mid < \delta$ então $\mid \psi(x) - \psi(y) \mid < \epsilon$ para toda $\psi \in \mathcal{F}$. Se $\mathcal{F}$ é uniformemente limitada; isto é, existe $M > 0$ tal que $\mid \psi \mid < M$ para toda $\psi \in \mathcal{F}$, então toda seqüencia $\{\psi_n\}$ de elementos de $\mathcal{F}$ tem uma subseqüência $\{\psi_{n_k}\}$ uniformemente convergente em X.*

Prova. Ver demonstração em [7], pág. 244.

□

Denotamos $L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$; $1 \leq p < \infty$ ou simplesmente $L^p(\mu)$ o espaço das funções, tais que $\mid f \mid^p$ é integrável. Em $L^p(\mu)$ definimos a norma $\| \cdot \|_p$ como:

$$\| f \|_p = \left(\int_X \mid f \mid^p \ d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

Definimos $L^\infty(\mu)$ o espaço das funções tais que existe $M > 0$ tal que $\mid f(x) \mid \leq M$ para q.t.p. $x \in X$, e escrevemos $L^\infty(\mu) = \{f : X \to \mathbb{R}; \exists M > 0;\ \mu(\{x; f(x) > M\}) = 0$. Em $L^\infty(\mu)$ definimos a norma $\| \cdot \|_\infty$ como:

$$\| f \|_\infty = \inf \{M > 0;\ \mu(\{x; f(x) > M\}) = 0\}.$$

Uma partição $\mathcal{P}$ de um espaço de probabilidades $(X, \mathcal{B}, \mu)$, que chamaremos de uma partição com respeito a medida μ, é uma família de subconjuntos de $\mathcal{B}$ de medida não nula; tais que:

(i) $A_i, A_j \in \mathcal{P},\ i \neq j \ \Rightarrow \mu(A_i \cap A_j) = 0$

(ii) $\mu(X \setminus \bigcup_{A_i \in \mathcal{P}} A_i) = 0$

Chamamos de densidade de probabilidade a uma função $\rho \in L^1(\mu)$ tal que $\rho \geq 0$ e $\| \rho \| = 1$, de fato observe que ρ induz uma medida de probabilidade ν_ρ dada por

$$0 \leq \nu_\rho(A) := \int_A \rho \ d\mu \leq 1 \ \forall A \in \mathcal{B}.$$

Dizemos que ν_ρ é T-invariante se $\nu_\rho(T^{-1}(A)) = \nu_\rho(A);\ \forall A \in \mathcal{B}$.

Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida. Se $T : X \to X$ é uma transformação não singular, definimos o operador $\mathcal{P} : L^1(\mu) \to L^1(\mu)$ por

$$\int_A \mathcal{P} f \ d\mu = \int_{T^{-1}(A)} f \ d\mu$$

Observe que o operador está bem definido, ou seja, se ν_f é a medida definida por $\nu_f := \int_{T^{-1}(A)} f \, d\mu$, temos pela não singularidade de T que $\nu_f \ll \mu$. Logo, pelo teorema de Randon-Nikodym existe uma única $g_f \in L^1(\mu)$, tal que $\nu_f(A) := \int_A g_f \, d\mu$, $\forall A \in \mathcal{B}$. Assim $\mathcal{P}f$ é, por definição nossa g_f dada pelo Teorema de Randon-Nikodym.

O operador $\mathcal{P}$ é chamado de *Perron-Fröbenius* correspondente para T. A importância deste operador para o estudo de medidas invariantes segue do fato que seus pontos fixos são densidades de medidas invariantes absolutamente contínuas. Para verificarmos esta afirmação, suponha que $h \in L^1(\mu)$ seja um ponto fixo de $\mathcal{P}$, ou seja, $\mathcal{P}h = h$. Assim, definindo ν por $\nu(A) = \int_A h \, d\mu$, veremos que $\nu \ll \mu$ e, além disto

$$\nu(T^{-1}(A)) = \int_{T^{-1}(A)} h \, d\mu = \int_A \mathcal{P}h \, d\mu = \int_A h \, d\mu = \nu(A).$$

Logo, ν é absolutamente contínua e invariante.

1.6 Proposição. *Seja $\mathcal{P} : L^1(\mu) \to L^1(\mu)$ o operador de Perron-Fröbenius de uma transformação T como dita anteriormente. Então valem:*

1. *$\mathcal{P}$ é um operador linear,*

2. *$\mathcal{P}$ é positivo: $f \geq 0 \ \Rightarrow \mathcal{P}f \geq 0$,*

3. *$\mathcal{P}$ preserva a média: $\displaystyle\int_X \mathcal{P}f \, d\mu = \int_X f \, d\mu$,*

4. *$\mathcal{P}$ é uma contração fraca: $\| \mathcal{P}f \|_1 \leq \| f \|_1$,*

5. *Se $T^n = \overbrace{T \circ ... \circ T}^{n \ vezes}$ e $\mathcal{P}$ é o operador de Perron-Fröbenius correspondente para T então $\mathcal{P}^n$ é o operador correspondente para T^n e*

$$\int_A \mathcal{P}^n f \, d\mu = \int_{T^{-n}(A)} f \, d\mu.$$

Prova.

1. Seja $A \subset X$ um conjunto mensurável e sejam λ_1 e λ_2 constantes. Então, se $f_1, f_2 \in$

$L^1(\mu)$,

$$\begin{aligned}
\int_A \mathcal{P}(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) d\mu &= \int_{T^{-1}(A)} (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)\ d\mu \\
&= \lambda_1 \int_{T^{-1}(A)} f_1\ d\mu + \lambda_2 \int_{T^{-1}(A)} f_2\ d\mu \\
&= \lambda_1 \int_A \mathcal{P} f_1\ d\mu + \lambda_2 \int_A \mathcal{P} f_2\ d\mu \\
&= \int_A (\lambda_1 \mathcal{P} f_1 + \lambda_2 \mathcal{P} f_2) d\mu.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\mathcal{P}(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 \mathcal{P} f_1 + \lambda_2 \mathcal{P} f_2 \qquad \forall\ f_1, f_2 \in L^1(\mu)\ e\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Qualquer que seja A mensurável, tem-se

$$\int_A \mathcal{P} f\ d\mu = \int_{T^{-1}(A)} f\ d\mu \geq 0.$$

Logo, se $f \geq 0$, então $\mathcal{P} f \geq 0$.

3. O resultado decorre diretamente de

$$\int_X \mathcal{P} f\ d\mu = \int_{T^{-1}(X)} f\ d\mu = \int_X f\ d\mu$$

4. Seja $f \in L^1(\mu)$. Sejam $f^+ = max(f, 0)$ e $f^- = -min(0, f)$. Então, f^+ e $f^- \in L^1(\mu)$, $f = f^+ - f^-$ e $|f| = f^+ + f^-$. Como $\mathcal{P}$ é um operador linear, tem-se

$$\mathcal{P} f = \mathcal{P}(f^+ - f^-) = \mathcal{P}(f^+) - \mathcal{P}(f^-).$$

Consequentemente,

$$|\mathcal{P} f| \leq |\mathcal{P}(f^+)| + |\mathcal{P}(f^-)| = \mathcal{P}(f^+) + \mathcal{P}(f^-) = \mathcal{P}|f|$$

e

$$\| \mathcal{P} f \|_1 = \int_X |\mathcal{P} f|\ d\mu \leq \int_X \mathcal{P}|f|\ d\mu = \int_X |f|\ d\mu = \| f \|_1 .$$

5. A prova segue por indução em n. Para $n = 1$, óbvio, admitindo que vale para $n = k$; para $n = k + 1$ obtemos

$$\int_A \mathcal{P}^{k+1} f\ d\mu = \int_A \mathcal{P}^k(\mathcal{P} f)\ d\mu = \int_{T^{-k}(A)} \mathcal{P} f\ d\mu = \int_{T^{-1}(T^{-k}(A))} f\ d\mu = \int_{T^{-(k+1)}(A)} f\ d\mu.$$

Logo,

$$\int_A \mathcal{P}^n f\ d\mu = \int_{T^{-n}(A)} f\ d\mu.$$

$\square$

1.7 Corolário. *$\mathcal{P}$ é contínuo.*

Prova. Segue da contração fraca.

$\square$

Uma coleção $\mathcal{F} \subset L^1(\mu)$ é chamada *uniformemente integrável*, se para todo $\epsilon > 0$, existe $M > 1$ tal que,

$$\int_{\{|f| \geq M\}} | f | \, d\mu \leq \epsilon, \quad \forall f \in \mathcal{F},$$

em que $\{| f | \geq M\} = \{x \in X, | f(x) | \geq M\}$. Uma coleção $\mathcal{F}$ é uniformemente integrável, se e somente se, é *fracamente pré-compacta* em $L^1(\mu)$, ou seja toda seqüência de funções em $\mathcal{F}$ possui subseqüência $\{f_{n_k}\}_{k \geq 1}$ que convergente fracamente para alguma $h \in L^1(\mu)$. Escrevemos $f_{n_k} \rightharpoonup h$, significando

$$\int_A f_{n_k} d\mu \longrightarrow \int_A h \, d\mu, \qquad \forall A \in \mathcal{B}.$$

O préfixo pré é usado porque tomamos $h \in L^1(\mu)$, ao invés de $h \in \mathcal{F}$.

Capítulo 2

Dinâmica do Operador de Perron-Fröbenius

Neste capítulo, provaremos a existência de pontos fixos para o Operador de Perron-Fröbenius, quando T for uma Transformação de Markov. Ademais, analisaremos o comportamento do Operador de Perron-Fröbenius no espaço das funções Lipschitz contínuas e concluiremos que existe um ponto fixo para o mesmo, sendo este uma densidade de uma medida T-invariante.

2.1 Existência da probabilidade

Dada $f \in L^1_+(\mu)$, vamos definir $A_n f$ por $A_n f := \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{P}^k f$ e provaremos nesta seção, a existência de uma probabilidade T-invariante cuja densidade é o limite de uma subseqüência de $A_n f$.

2.1 Proposição. *Seja T uma transformação não singular de $(X, \mathcal{B}, \mu)$. Se existe f pertencente a $L^1(\mu)_+$ tal que $\{A_n f\}_{n\geq 1}$ é uma família uniformemente integrável, então existe uma probabilidade T-invariante que é absolutamente contínua a μ.*

Prova. Segue da integrabilidade uniforme, que existe subsequência $\{A_{n_k} f\}_{k\geq 1}$ e uma h pertencente a $L^1(\mu)$, tal que $A_{n_k} f \rightharpoonup h$ significando que

$$\int_A A_{n_k} f \; d\mu \longrightarrow \int_A h \; d\mu := \nu(A) \; ; \; \forall A \in \mathcal{B}$$

onde definimos ν desse modo; obviamente ν é medida e $\nu \ll \mu$.

Por hipótese, temos que

$$\lim_{n_k\to\infty}\left(\frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1}\mathcal{P}^j f\right)=h,$$

então, devido a continuidade do operador vale

$$\mathcal{P}h=\lim_{n_k\to\infty}\mathcal{P}\left(\frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1}\mathcal{P}^j f\right).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\left(\frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1}\mathcal{P}^j f\right) &= \frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1}\mathcal{P}^{j+1} f\\ &= \frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1}\mathcal{P}^j f-\frac{1}{n_k}\mathcal{P}^0 f+\frac{1}{n_k}\mathcal{P}^n f\end{aligned}$$

como as duas últimas parcelas são limitadas, vão para zero quando $n_k\to\infty$. Segue então que,

$$\mathcal{P}h=\lim_{n_k\to\infty}\mathcal{P}\left(\frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1}\mathcal{P}^j f\right)=\lim_{n_k\to\infty}\frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1}\mathcal{P}^j f=h$$

e então,

$$\int_A \mathcal{P}h\;d\mu=\int_A h\;d\mu=\nu(A);\qquad \forall A\in\mathcal{B}.$$

Como já foi observado ν, tendo a densidade como ponto fixo de $\mathcal{P}$, é T-invariante.

□

2.2 Proposição. *Seja T uma transformação não singular de $(X,\mathcal{B},\mu)$. Se existe $M>0$ e $1\le p\le\infty$ tal que $\|\ \mathcal{P}^n f\ \|_p\le M\ \forall\ n$, então existe uma probabilidade T-invariante ν absolutamente contínua à μ tal que $h=\dfrac{d\nu}{d\mu}\in L^p(\mu)$.*

Prova. Segue da *Proposição (2.1)* que para qualquer $f\in L^p(\mu)_+$ temos $A_n f:=\dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{P}^k f\in L^p(\mu)$, de fato,

$$\begin{aligned}\|\ A_n f\ \|_p &= \|\ \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{P}^k f\ \|_p\\ &\le \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\|\ \mathcal{P}^k f\ \|_p\\ &\le \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}M\end{aligned}$$

a última desigualdade decorre de $\| \mathcal{P}^n f \|_p \leq M \; \forall \; n$.

Assim $\{A_n f\}_{n\geq 1}$ é uma família uniformemente integrável e isto já prova a existência da probabilidade T-invariante ν. Decorrente da integrabilidade uniforme, temos que existe uma subsequência $\{A_{n_k} f\}_{k\geq 1}$ satisfazendo $A_{n_k} f \rightharpoonup h$; então:

$$\begin{aligned}
\| h \|_p^p &= \int | h |^p \, d\mu \\
&= \int \lim_{k\to\infty} | A_{n_k} f |^p \, d\mu \\
&\leq \lim_{k\to\infty} \inf \int | A_{n_k} f |^p \, d\mu \\
&= \lim_{k\to\infty} \inf \| A_{n_k} f \|_p^p
\end{aligned}$$

e portanto, $h = \dfrac{d\nu}{d\mu} \in L^p(\mu)$.

□

2.2 Transformações de Markov

Seja T uma transformação não singular localmente invertível e $\mathcal{P}$ uma partição enumerável de X. Nessas condições, dizemos que $\mathcal{P}$ é uma *Partição de Markov* para a transformação T se :

(i) $T(A)$ é a reunião de elementos de $\mathcal{P}$, $\forall A \in \mathcal{P}$

(ii) $T : A \to T(A)$ é invertível, $\forall A \in \mathcal{P}$

(iii) $\mathcal{P}$ gera $\mathcal{B}$ sob T, no sentido de que $\bigvee_{k=0}^{\infty} T^{-k}(\mathcal{P}) = \mathcal{B}$, em que:

$$\bigvee_{k=0}^{\infty} T^{-k}(\mathcal{P}) = \left\{ \bigcap_{k=0}^{\infty} T^{-k} A_k, A_k \in \mathcal{P}, \; \forall k \right\}$$

Dada uma transformação T não singular localmente invertível e $\mathcal{P}$ uma partição de Markov; chamamos o par $(T, \mathcal{P})$ de *Transformação de Markov*.

Chamamos *Conjunto Cilindro* e denotamos por $\vec{p}$, o conjunto

$$\vec{p} = [p_0, ..., p_{n-1}] = \bigcap_{i=0}^{n-1} T^{-i} p_i,$$

em que os elementos $p_0, ..., p_{n-1} \in \mathcal{P}$ e $\vec{p} \in \mathcal{P}^{n-1}$ é uma partição de X.

Consideraremos que $\mu(\vec{p}) > 0,\ \forall \vec{p}\ \in \mathcal{P}$. Chamamos de g^n o ramo inverso de T^n, satisfazendo $T^n \circ g^n(x) = x,\ \forall\ x \in \vec{p}$. A fim de simplificar nossa notação, denotaremos o ramo inverso de T^n restrito ao cilindro $\vec{p}$ por $g_{\vec{p}} := g_{p_0} \circ ... \circ g_{p_{n-1}} = (T^n\big|_{\vec{p}})^{-1}$. Ademais; designaremos o domínio de $g_{\vec{p}}$, que é $T^n(\vec{p})$, por $Dom(g_{\vec{p}})$.

Vamos denotar $\widetilde{\mathcal{P}} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}^{n-1}$. Como $(T^n\big|_{\vec{p}})$ é uma bijeção com sua imagem escreveremos o Jacobiano de $(T^n\big|_{\vec{p}})$ com respeito a μ por $J_\mu T^n$, ou seja,

$$\mu(T^n(\vec{p})) := \int_{\vec{p}} J_\mu T^n\ d\mu.$$

Diremos que uma Transformação de Markov $(T, \mathcal{P})$ tem distorção limitada em todo cilindro (ou controle fraco de distorção), se existe $C > 0$, tal que

$$\left|\frac{J_\mu g_{\vec{p}}(x)}{J_\mu g_{\vec{p}}(y)} - 1\right| \leq C;\ \forall\ x, y \in Dom(g_{\vec{p}}),\ \forall \vec{p} \in \widetilde{\mathcal{P}}$$

2.3 Lema (Lema da distorção). *Sejam $\vec{p} = [p_0, ..., p_{n-1}]\ \in \mathcal{P}^{n-1}$ um cilindro e $\vec{q} \in \widetilde{\mathcal{P}}$ e suponhamos que $(T, \mathcal{P})$ tem distorção limitada em todo cilindro, então:*

$$\frac{\mu(g_{\vec{q}} \cap \vec{p})}{\mu(\vec{p})} \leq C^2 \cdot \frac{\mu(\vec{q} \cap T(p_{n-1}))}{\mu(T(p_{n-1}))}.$$

Prova. Temos que $T^n(\vec{p}) = T(p_{n-1})$ e para $\mu - q.t.p.\ x \in \vec{p}$:

$$\begin{aligned}
\mu(\vec{p}) &= \mu(g_{\vec{p}} \circ T(p_{n-1})) \\
&= \int_{x\in\ T(p_{n-1}))} J_\mu\ g_{\vec{p}}(x)\ d\mu \\
&\leq \int_{x\in\ T(p_{n-1}))} \|\ J_\mu\ g_{\vec{p}}\ \|_\infty\ \ d\mu \\
&< \int_{x\in\ T(p_{n-1}))} (|J_\mu\ g_{\vec{p}}(y_\epsilon)| + \epsilon)\ d\mu \\
&< \int_{x\in\ T(p_{n-1}))} ((C+1) \cdot |J_\mu\ g_{\vec{p}}(z)| + \epsilon)\ d\mu\ \ \forall \epsilon, \forall z \\
&\leq \int_{x\in\ T(p_{n-1}))} (C+1) \cdot |J_\mu\ g_{\vec{p}}(z)|\ d\mu \\
&= C \cdot |J_\mu\ g_{\vec{p}}(z)|\ \mu(T(p_{n-1})),\ \forall z.
\end{aligned}$$

Por outro lado, procedendo da mesma forma temos:

$$\begin{aligned}
\mu(g_{\vec{q}} \cap \vec{p}) &= \int_{\vec{q}\, \cap\, T^n(\vec{p})} J_\mu \; g_{\vec{p}}(x) \; d\mu \\
&= \int_{\vec{q}\, \cap\, T(p_{n-1})} J_\mu \; g_{\vec{p}}(x) \; d\mu \\
&\leq C \cdot |J_\mu \; g_{\vec{p}}(x)| \cdot \mu(\vec{q} \cap T(p_{n-1})) \\
&< C^2 \cdot \frac{\mu(\vec{p}) \cdot \mu(\vec{q} \cap T(p_{n-1}))}{\mu(T(p_{n-1}))}
\end{aligned}$$

e então, temos o resultado desejado.

$\square$

2.4 Lema. *Seja $(T, \mathcal{P})$ uma Transformação de Markov com distorção limitada em todo cilindro e $inf\{\mu(T(\vec{s})); \vec{s} \in \mathcal{P}\} > 0$; então existe uma probabilidade T-invariante ν absolutamente contínua à μ tal que $\dfrac{d\nu}{d\mu} \in L^\infty(\mu)$.*

Prova. Segue do *Lema (2.3)* que $\forall n \geq 1, \vec{p} = [p_0, ..., p_{n-1}] \; \in \mathcal{P}^{n-1}$ um cilindro e A um conjunto mensurável, $A \in \mathcal{B}$ vale:

$$\frac{\mu(T^{-n}(A) \cap \vec{p})}{\mu(\vec{p})} \leq C^2 \cdot \frac{\mu((A) \cap T(p_{n-1}))}{\mu(T(p_{n-1}))}$$

Seja $\Gamma = \{T(\vec{s}); \vec{s} \in \mathcal{P}\}$ e suponhamos que $\mu(T(\vec{s})) \geq \epsilon > 0;\ \forall\ T(\vec{s}) \in \Gamma$. Assim nós temos,

$$\begin{aligned}
\mu(T^{-n}(A)) &= \sum_{\vec{r} \in \mathcal{P}^n} \frac{\mu(T^{-n}(A) \cap \vec{p})}{\mu(\vec{p})} \cdot \mu(\vec{p}) \\
&\leq C^2 \cdot \sum_{\vec{r} \in \mathcal{P}^n} \frac{\mu(A \cap T(p_{n-1}))}{\mu(T(p_{n-1}))} \cdot \mu(\vec{p}) \\
&\leq \frac{C^2}{\epsilon} \cdot \sum_{\vec{r} \in \mathcal{P}^n} \mu(A \cap T(p_{n-1})) \cdot \mu(\vec{p}) \\
&\leq \frac{C^2}{\epsilon} \cdot \sum_{\vec{r} \in \mathcal{P}^n} \mu(A) \cdot \mu(\vec{p}) \\
&\leq \frac{C^2}{\epsilon} \cdot \mu(A)
\end{aligned}$$

Observamos que se $g \in L^1(\mu)_+$ e $\dfrac{1}{\mu(A)}\displaystyle\int_A g\, d\mu \leq M$, $\forall A \in \mathcal{B}$, isto implica que $\| g \|_\infty \leq M$. Tomando agora a densidade $f \equiv \mathbf{1}$ e $A \in \mathcal{B}$ temos,

$$\begin{aligned}
\int_A \mathcal{P}^k \mathbf{1}\, d\mu &= \int_{T^{-n}(A)} \mathbf{1}\, d\mu \\
&= \sum_{\vec{r} \in \mathcal{P}^n} \int_{x \in (\vec{r} \cap T^{-n}(A))} \mathbf{1}\, d\mu \\
&= \sum_{\vec{r} \in \mathcal{P}^n} \int_{x \in g_{\vec{p}}(A \cap T^{-n}(\vec{r}))} \mathbf{1}\, d\mu \\
&= \sum_{\vec{r} \in \mathcal{P}^n} \int_A J_\mu g_{\vec{p}}(\vec{r})\, d\mu \\
&= \sum_{\vec{r} \in \mathcal{P}^n} \mu(g_{\vec{p}}(A \cap T^n(\vec{r}))) \\
&= \sum_{\vec{r} \in \mathcal{P}^n} \mu(\vec{r} \cap T^{-n}(A)) \\
&= \mu(T^{-n}(A)) \\
&\leq \frac{C^2}{\epsilon} \cdot \mu(A)
\end{aligned}$$

portanto, encontramos

$$\| \mathcal{P}^n \mathbf{1} \|_\infty \leq \frac{C^2}{\epsilon}\ \forall\, n.$$

Assim, pela *Proposição (2.2)* existe uma probabilidade T-invariante $\nu \ll \mu$ em X e $n_k \to \infty$ tal que $\dfrac{d\nu}{d\mu} \in L^\infty(\mu)$ e

$$\frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1} \mathcal{P}^j \mathbf{1} \rightharpoonup \frac{d\nu}{d\mu}$$

em $L^\infty(\mu)$, significando

$$\int_A \frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1} \mathcal{P}^j \mathbf{1}\, d\mu \longrightarrow \int_A \frac{d\nu}{d\mu}\, d\mu \quad \forall A \in \mathcal{B}.$$

□

2.5 Lema. *Seja $(T, \mathcal{P})$ uma Transformação de Markov com distorção limitada em todo cilindro e $inf\{\mu(T(\vec{s})); \vec{s} \in \mathcal{P}\} > 0$; então existe uma probabilidade T-invariante ν absolutamente contínua à μ tal que* $\displaystyle\inf_{\vec{q} \in T(\vec{s})} \left(\frac{d\nu}{d\mu}\right) > 0$.

Prova. Inicialmente, observemos que para $\vec{p}$ e $\vec{q} \in \mathcal{P}$ temos,

$$\left(\frac{C^2}{\epsilon}\right)^{-1} \cdot \frac{\mu(\vec{p})}{\mu(\vec{q})} \leq \frac{\mu(g_{\vec{p}}(x))}{\mu(g_{\vec{p}}(y))} \leq \left(\frac{C^2}{\epsilon}\right) \cdot \frac{\mu(\vec{p})}{\mu(\vec{q})},$$

de fato, observemos que

$$\frac{\mu(g_{\vec{p}}(x))}{\mu(g_{\vec{p}}(y))} = \frac{\int_{\vec{p}} J_\mu g_{\vec{p}} \, d\mu}{\int_{\vec{q}} J_\mu g_{\vec{q}} \, d\mu}.$$

Do Lema anterior e da hipótese de distorção limitada, podemos escrever

$$\log \frac{J_\mu g_{\vec{p}}}{J_\mu g_{\vec{q}}} \leq \left| \frac{J_\mu g_{\vec{p}}(x)}{J_\mu g_{\vec{q}}(y)} - 1 \right| \leq C.$$

Ademais, pelo Lema da Distorção, encontramos

$$\frac{\int_{\vec{p}} J_\mu g_{\vec{p}} \, d\mu}{\int_{\vec{q}} J_\mu g_{\vec{q}} \, d\mu} \leq \frac{C^2}{\epsilon} \cdot \frac{J_\mu g_{\vec{p}}(x)\mu(\vec{p})}{J_\mu g_{\vec{q}}(y)\mu(\vec{q})}$$

Portanto, para $A \in \mathcal{B}$

$$\left(\frac{C^2}{\epsilon}\right)^{-1} \cdot \mu(A) \leq \mu(T^{-n}(A)) \leq \left(\frac{C^2}{\epsilon}\right) \cdot \mu(A),$$

assim;

$$\left(\frac{C^2}{\epsilon}\right)^{-1} \leq \frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} \mathcal{P}^j \mathbf{1} \leq \left(\frac{C^2}{\epsilon}\right)$$

como $\frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} \mathcal{P}^j \mathbf{1} \rightharpoonup \frac{d\nu}{d\mu}$, temos então

$$\left(\frac{C^2}{\epsilon}\right)^{-1} \leq \frac{d\nu}{d\mu} \leq \left(\frac{C^2}{\epsilon}\right).$$

□

2.3 Ação do Operador no espaço das funções Lipschitz contínuas

Nesta seção analisaremos o comportamento do Operador de Perron-Fröbenius no espaço das funções Lipschitz contínuas, que definiremos adiante e para tal faremos uso de alguns lemas auxiliares, que fornecerão subsídios para podermos concluir que existe algum ponto fixo do Operador nesse mesmo espaço.

Dada uma partição mensurável $\mathcal{P}$ de um espaço de medida $(X, \mathcal{B}, \mu)$ e uma aplicação mensurável $T : X \to X$ definiremos uma métrica associada a $\mathcal{P}$ e T como segue. Seja $0 < \beta < 1$ fixado, introduziremos a métrica d_β em X dada por $d_\beta = \beta^{s(x,y)}$, onde $s(x, y)$ é o tempo de separação de x e y, definido a seguir. Se x e y estão em elementos distintos de uma partição $\mathcal{P}$ de X então $s(x, y) = 0$. Se x e y estão num mesmo elemento da partição então $s(x, y)$ é o maior inteiro $n \geq 0$ tal que $T^k x$ e $T^k y$ estão no mesmo elemento da partição para $k = 0, ..., n$.

Aqui trabalharemos com o conceito de função Lipschitz contínua com respeito aos elementos da partição $\mathcal{P}$ de X. Assim no nosso contexto, dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é *Lipschitz contínua* em $A \subset X$ se:

$$D_A f := \sup_{x \neq y \in A} \frac{| f(x) - f(y) |}{d_\beta(x, y)} < \infty$$

e Lipschitz contínua em $x \in X$ se é Lipschitz contínua em alguma vizinhança de x. Uma função é *localmente Lipschitz contínua* em $A \subset X$ se é Lipschitz contínua em cada ponto de A. Dada uma função $f : X \to \mathbb{R}$, dizemos que f é $\mathcal{P}$*-Lipschitz contínua por partes em* X, se é Lipschitz contínua em cada $A \in \mathcal{P}$ e $D_{\mathcal{P}} f := \sup_{A \in \mathcal{P}} D_A f < \infty$. Note que qualquer função limitada $\mathcal{P}$-Lipschitz contínua por partes é Lipschitz contínua em X. Seja $\mathcal{P}'$ uma partição definida como segue $\mathcal{P}' := \{X \backslash T(X) \cup$ partição de $T(X)$ gerada por $T(\mathcal{P})\}$, a coleção das funções $\mathcal{P}'$-Lipschitz contínua por partes em X é denotada por $\mathcal{L}$ e equipada com a norma:

$$\| f \|_{\mathcal{L}} := \| f \|_1 + D_X f.$$

Por simplicidade nos referiremos ao espaço $\mathcal{L}$, como o espaço das funções Lipschitz contínuas.

No nosso contexto o *Teorema (1.5)* acima será enunciado da seguinte forma:

2.6 Teorema. *Se* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *é uma sequência de funções Lipschitz contínuas e* $\sup_{n \geq 1} \| f_n \|_{\mathcal{L}} < \infty$, *então existe uma subsequência* $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *e uma função* g *lipschitz contínua tal que*

$$f_{n_k}(x) \to g(x), \quad \text{quando } k \to \infty \ \forall x \in X,$$

$$\| g \|_{\mathcal{L}} \leq \lim_{n \to \infty} \inf \| f_n \|_{\mathcal{L}}$$

e

$$\| f_{n_k} - g \|_1 \to 0, \quad \text{quando } k \to \infty.$$

Prova. Tomemos uma sequência $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ em $\mathcal{L}$ (espaço das funções lipschitz contínuas). Por hipótese $\| f_n \|_{\mathcal{L}} \leq K$; $n \geq 1$ e $K > 0$. Podemos tomar $| f_n(x) | \leq 2K$, $x \in X$, $n \geq 1$ e sabemos que $| f_n(x) - f_n(y) | \leq K \cdot d_\beta(x, y)$; $\forall x, y \in X$; $n \geq 1$.

Seja $\Gamma \subset X$ um subconjunto enumerável denso; logo existe uma subsequência $\{f_{n_k}\}$ tal que $(f_{n_k}(x))_{k\geq 1}$ é uma sequência de Cauchy $\forall x \in \Gamma$. De fato $(f_{n_k}(x))_{k\geq 1}$ é uma sequência de Cauchy $\forall x \in X$ e então existe $g \in \mathcal{L}$, $g : X \to \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = g(x)$ $\forall x \in X$. E decorrente do Lema de Fatou, temos que

$$\| g \|_1 \leq \lim_{k\to\infty} \inf \| f_{n_k} \|_1 .$$

Seja $\mathcal{P}'$ uma partição definida como anteriormente; tomemos um elemento qualquer $B \in \mathcal{P}'$, então para $x, y \in B$, com $x \neq y$

$$D_{\mathcal{P}'}g = \frac{| g(x) - g(y) |}{d_\beta(x,y)} \longleftarrow \frac{| f_{n_k}(x) - f_{n_k}(y) |}{d_\beta(x,y)} \leq D_{\mathcal{P}'} f_{n_k}$$

portanto $D_{\mathcal{P}'}g \leq \lim\limits_{k\to\infty} \inf D_{\mathcal{P}'} f_{n_k}$ e isto é suficiente para mostrar que $g \in \mathcal{L}$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \| g \|_{\mathcal{L}} &= \| g \|_1 + D_{\mathcal{P}'}g \\ &\leq \lim_{k\to\infty} \inf \| f_{n_k} \|_1 + \lim_{k\to\infty} \inf D_{\mathcal{P}'} f_{n_k} \end{aligned}$$

e portanto,

$$\| g \|_{\mathcal{L}} \leq \lim_{k\to\infty} \inf \| f_{n_k} \|_{\mathcal{L}} .$$

Por último, como $| f_{n_k}(x) | \leq g(x)$; $\forall x \in X$, pelo Teorema da Convergência Dominada $\| g \|_1 \leq \lim\limits_{k\to\infty} \| f_{n_k} \|_1$ e então temos $\| f_{n_k} - g \|_1 \longrightarrow 0$, quando $k \to \infty$.

□

A fim de simplificar a notação escreveremos $d(x,y) = d_\beta(x,y)$ para representar a métrica $d_\beta(x,y) = \beta^{s(x,y)}$, onde $0 < \beta < 1$ fixado e $s(x,y)$ é o tempo de separação de x e y. Consideraremos que as transformações de Markov trabalhadas nesta seção satisfazem $\inf\{\mu(T(\vec{p})); \vec{p} \in \mathcal{P}\} > 0$, $\forall\ \vec{p} \in \mathcal{P}$.

2.7 Lema. *Seja $\vec{p}$ um cilindro e $h : \vec{p} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que h é uma função Lipschitz contínua e $g_{\vec{p}}$ é o ramo inverso de $(T^n\big|_{\vec{p}})$, então para $0 < \beta < 1$ fixado e $x, y \in Dom(g_{\vec{p}})$ vale:*

$$|h(g_{\vec{p}}(x))| \leq \frac{1}{\mu(\vec{p})} \int_{\vec{p}} |h(x)|\ d\mu + \beta^n \cdot D_{\vec{p}} h$$

Prova.

$$\begin{aligned}
|h(g_{\vec{p}}(x))| &\leq \frac{1}{\mu(\vec{p})}\int_{\vec{p}}|h(x)|\ d\mu + \left|h(g_{\vec{p}}(x)) - \frac{1}{\mu(\vec{p})}\int_{\vec{p}} h(x)\ d\mu\right| \\
&\leq \frac{1}{\mu(\vec{p})}\int_{\vec{p}}|h(x)|\ d\mu + \left|h(g_{\vec{p}}(x)) - h(g_{\vec{p}}(y))\right| \\
&\leq \frac{1}{\mu(\vec{p})}\int_{\vec{p}}|h(x)|\ d\mu + D_{\vec{p}}h\cdot d(g_{\vec{p}}(x), g_{\vec{p}}(y)) \\
&= \frac{1}{\mu(\vec{p})}\int_{\vec{p}}|h(x)|\ d\mu + D_{\vec{p}}h\cdot \beta^n
\end{aligned}$$

□

Para o Lema e Proposição a seguir consideraremos o conjunto Ω_β abaixo; o qual desempenhará papel importante na próxima seção. Em que

$$\Omega_\beta := \left\{\vec{p}\ \in \widetilde{\mathcal{P}};\ \left|\frac{J_\mu g_{\vec{p}}(x)}{J_\mu g_{\vec{p}}(y)} - 1\right| \leq C d_\beta(x,y);\ \forall (x,y)\in\vec{p}\in Dom(g_{\vec{p}})\right\}$$

com $C\in\mathbb{R}_+$.

2.8 Lema. *Suponha h uma função Lipschitz contínua e $\vec{p} = [p_0, ..., p_{n-1}] \in \mathcal{P}^{n-1}$ um cilindro. Então para $x, y \in \vec{p}\in\Omega_\beta$ temos:*

$$|J_\mu g_{\vec{p}}(x)\cdot h(g_{\vec{p}}(x)) - J_\mu g_{\vec{p}}(y)\cdot h(g_{\vec{p}}(y))|\ \leq M''\cdot d(x,y)\cdot\left(M\int_{\vec{p}}|h|\ d\mu + (M+1)\mu(\vec{p})\beta^n D_{\vec{p}}h\right)$$

Prova. Inicialmente, da desigualdade triangular obtemos

$$\begin{aligned}
|J_\mu g_{\vec{p}}(x)h(g_{\vec{p}}(x)) - J_\mu g_{\vec{p}}(y)h(g_{\vec{p}}(y))| &\leq \\
&\leq J_\mu g_{\vec{p}}(x)|h(g_{\vec{p}}(x))|\left|\frac{J_\mu g_{\vec{p}}(x)}{J_\mu g_{\vec{p}}(y)} - 1\right| + \\
&+ J_\mu g_{\vec{p}}(y)|h(g_{\vec{p}}(x)) - h(g_{\vec{p}}(y))| \\
&= \text{(I)} + \text{(II)}
\end{aligned}$$

Analisando os fatores da parcela (I), observamos que:

(i) $J_\mu g_{\vec{p}}(x) \leq M''\cdot\mu(\vec{p}),\ \forall x\in\vec{p}$, decorre diretamente do *Lema da Distorção*

(ii) $|h(g_{\vec{p}}(x))|\ \leq \dfrac{1}{\mu(\vec{p})}\displaystyle\int_{\vec{p}}|h(x)|\ d\mu + \beta^n\cdot D_{\vec{p}}h;$ pelo *Lema (2.7)*

(iii) $\left|\dfrac{J_\mu g_{\vec{p}}(x)}{J_\mu g_{\vec{p}}(y)} - 1\right| \leq M\cdot d(x,y)$; pois por hipótese $\forall\vec{p}\ \in\widetilde{\mathcal{P}}$; temos que $\vec{p}\in\Omega_\beta$

e, portanto,

$$\begin{aligned}(\mathrm{I}) &\leq M'' \cdot \mu(\vec{p}) \cdot M \cdot d(x,y) \cdot \left(\frac{1}{\mu(\vec{p})} \int_{\vec{p}} |h| \; d\mu + D_{\vec{p}} h \cdot \beta^n \right) \\ &\leq M \cdot d(x,y) \cdot \left(\int_{\vec{p}} |h| \; d\mu + \mu(\vec{p}) \cdot D_{\vec{p}} h \cdot \beta^n \right)\end{aligned}$$

Analisando a parcela (II), basta verificarmos que

$$\begin{aligned}|h(g_{\vec{p}}(x)) - h(g_{\vec{p}}(y))| &\leq d(g_{\vec{p}}(x), g_{\vec{p}}(y)) \cdot D_{\vec{p}} h \\ &\leq d(x,y) \cdot \beta^n \cdot D_{\vec{p}} h\end{aligned}$$

e, portanto,

$$(\mathrm{II}) \leq M'' \cdot \mu(\vec{p}) \cdot d(x,y) \cdot \beta^n \cdot D_{\vec{p}} h$$

Assim, podemos concluir que

$$\begin{aligned}(\mathrm{I}) + (\mathrm{II}) &\leq M'' \cdot M \cdot d(x,y) \cdot \left(\int_{\vec{p}} |h| \; d\mu + \mu(\vec{p}) \cdot D_{\vec{p}} h \cdot \beta^n \right) + M'' \cdot \mu(\vec{p}) \cdot d(x,y) \cdot D_{\vec{p}} h \cdot \beta^n \\ &\leq M'' \cdot d(x,y) \cdot \left(M \int_{\vec{p}} |h| \; d\mu + (M+1) \cdot \mu(\vec{p}) \cdot D_{\vec{p}} h \cdot \beta^n \right)\end{aligned}$$

chegando então ao resultado desejado.

□

A próxima Proposição estabelece um estimativa para o Operador de Perron-Fröbenius no espaço das funções Lipschitz contínuas.

2.9 Proposição. *Seja h uma função Lipschitz contínua e $\mathcal{P}$ o Operador de Perron-Fröbenius para T, então vale:*

$$\| \mathcal{P}^n \; h \| \leq M'' \cdot (D_{\mathcal{P}'} h \cdot \beta^n \; + \| \; h \; \|_1)$$

Prova. Inicialmente, podemos deduzir uma representação do Operador de Perron-Fröbenius que será útil na demostração desta proposição.

Sabemos que T é invertível em cada $\vec{p} \in \mathcal{P}^{n-1}$, $T^{-1} : T(\vec{p}) \to \vec{p}$ e $g_{\vec{p}}$ ramo inverso de T^n, restrito a $\vec{p}$; que estamos denotando por $g_{\vec{p}}$, e que satisfaz $T^n \circ g_{\vec{p}}(x) = x \; \forall x \in \vec{p}$, dessa forma podemos escrever

$$\begin{aligned}T^{-n}(X) &= \bigcup_{\vec{p} \in \mathcal{P}^{n-1}} \vec{p} \\ &= \bigcup_{\vec{p} \in \mathcal{P}^{n-1}} \mathrm{Im}(g_{\vec{p}})\end{aligned}$$

agora, pela definição do operador

$$\begin{aligned}
\int_X \mathcal{P}^n \; h \; d\mu &= \int_{T^{-n}(X)} h \; d\mu \\
&= \int_{\bigcup\limits_{\vec{p} \in \mathcal{P}^{n-1}} \mathrm{Im}(g_{\vec{p}})} h \; d\mu \\
&= \sum_{\vec{p} \in \mathcal{P}^{n-1}} \int_{\mathrm{Im}(g_{\vec{p}})} h \; d\mu \\
&= \sum_{\vec{p} \in \mathcal{P}^{n-1}} \int_{\mathrm{Dom}(g_{\vec{p}})} J_\mu g_{\vec{p}} \cdot h \circ g_{\vec{p}} \;\; d\mu
\end{aligned}$$

e, portanto, temos

$$\mathcal{P}^n \; h = \sum_{\vec{p} \in \mathcal{P}^{n-1}} J_\mu g_{\vec{p}} \cdot h \circ g_{\vec{p}}.$$

Segue então que para $x \in \mathrm{Dom}(g_{\vec{p}})$

$$\begin{aligned}
|\mathcal{P}^n h(x)| &\leq \sum_{\vec{p} \in \mathcal{P}^{n-1}} \left(\frac{1}{\mu(\vec{p})} \int_{\vec{p}} |h(x)| \; d\mu + D_{\vec{p}} h \cdot \beta^n \right) \cdot M'' \cdot \mu(\vec{p}) \\
&\leq M'' \cdot \sum_{\vec{p} \in \mathcal{P}^{n-1}} \mu(\vec{p}) \cdot \left(\frac{1}{\mu(\vec{p})} \int_{\vec{p}} |h(x)| \; d\mu + D_{\mathcal{P}'} h \cdot \beta^n \right), \text{ pois } D_{\vec{p}} h \leq D_{\mathcal{P}'} h \\
&\leq M'' \cdot (\| \; h \; \|_1 \; + D_{\mathcal{P}'} h \cdot \beta^n)
\end{aligned}$$

Por último, para h uma função Lipschitz contínua e $x, y \; \in \vec{q} \in \mathcal{P}'$, temos

$$\begin{aligned}
|\mathcal{P}^n h(x) - \mathcal{P}^n h(y)| &\leq \sum_{\vec{q} \in \mathcal{P}^{n-1}} |J_\mu g_{\vec{q}}(x) \cdot h(g_{\vec{q}}(x)) - J_\mu g_{\vec{q}}(y) \cdot h(g_{\vec{q}}(y))| \\
&= M'' \cdot d(x,y) \cdot \sum_{\vec{q} \in \mathcal{P}^{n-1}} \left(M \int_{\vec{q}} |h| \; d\mu + (M+1) \cdot \mu(\vec{q}) \cdot \beta^n \cdot D_{\vec{q}} h \right), \text{pelo } \textit{Lema(2.8)} \\
&\leq M'' \cdot d(x,y) \cdot (M \; \| \; h \; \|_1 \; + (M+1) \cdot D_{\mathcal{P}'} h \cdot \beta^n)\,;
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{|\mathcal{P}^n h(x) - \mathcal{P}^n h(y)|}{d(x,y)} \leq M,$$

em que basta tomarmos

$$M = M'' \cdot (M \cdot \| \; h \; \|_1 \; + (M+1) \cdot D_{\mathcal{P}'} h \cdot \beta^n)\,.$$

Dessa forma, segue por definição que $D_{\mathcal{P}'} \mathcal{P}^n h < M$, sendo então o próprio Operador $\mathcal{P}$ Lipschitz contínuo.

$\square$

2.4 Propriedades de Distorção e Ergocidade

Um subconjunto aberto mensurável $W \subset X$, tal que $W(T) = \{x; \forall$ aberto $U \ni x, \exists n > 0$ com $T^n(U) \cap U \neq \emptyset\}$ é chamado *conjunto errante* para T uma transformação não singular. Denotamos por $\mathcal{W}(T)$ a coleção dos conjuntos errantes. Dessa forma chamamos a parte *Dissipativa* da transformação T e denotamos por $\mathcal{D}(T) = \bigcup(\mathcal{W}(T))$ a união mensurável das coleções de conjuntos errantes para T. Dessa forma, a transformação T é chamada totalmente dissipativa se $\mathcal{D}(T) = X \mod \mu$.

O conjunto $\mathcal{C}(T) := X \backslash \mathcal{D}(T)$ é chamado parte *Conservativa* de T. A transformação não singular T é chamada *Conservativa* se $\mathcal{C}(T) = X \mod \mu$.

Se podemos particionar o domínio X da forma $\{\mathcal{C}(T), \mathcal{D}(T)\}$, então dizemos que T possui uma decomposição de *Hopf*. (Ver em [1], pág. 15)

Seja o conjunto

$$\Omega_\beta := \left\{ \vec{p} \in \widetilde{\mathcal{P}};\ \left| \frac{J_\mu T^n(x)}{J_\mu T^n(y)} - 1 \right| \leq C d_\beta(T^n(x), T^n(y));\ \forall (x,y) \in \vec{p} \in \mathcal{P}^{n-1} \right\}$$

em que $C \in \mathbb{R}_+$. Nós dizemos que uma transformação de Markov $(T, \mathcal{P})$ possui *controle forte de distorção* se existe $C > 1$ tal que para todo $\vec{p} \in \widetilde{\mathcal{P}}$, $\vec{p} \in \Omega_\beta$. Observe que por questão de conveniência estamos reescrevendo o conjunto Ω_β, definido anteriormente, mas são de fato os mesmos.

Seja $(T, \mathcal{P})$ uma Transformação de Markov e $C > 0$. Uma coleção $\Theta \subset \widetilde{\mathcal{P}}$ é chamada *Coleção Schweiger* para T se todos os elementos da coleção possuem distorção limitada para algum $C > 0$, e

$$\bigcup_{B \in \Theta} B = X \mod \mu.$$

Uma Transformação de Markov $(T, \mathcal{P})$ possui *controle fraco de distorção* se existe uma Coleção Schweiger para T.

2.10 Lema. *Suponha que $(T, \mathcal{P})$ é uma Transformação de Markov com controle fraco de distorção e Θ é uma Coleção Schweiger para T. Se $A \in \Theta$; então*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(T^{-n}(A)) = \infty \quad \Rightarrow \quad A \subset \mathcal{C} \ mod\ \mu$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(T^{-n}(A)) < \infty \quad \Rightarrow \quad A \subset X \backslash \mathcal{C} \ mod\ \mu$$

em particular $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são ambos uniões de conjuntos em Θ.

Prova. Da segunda implicação temos que dado um ponto $x \in A$, x volta a A finitas vezes, não retornando a partir de um certo $n \geq n_0$ fixado, ou seja, $A \subset \mathcal{D} = X \backslash \mathcal{C}$. Para a primeira implicação suponhamos que $\mu(A \backslash \mathcal{C}) > 0$ então $\exists B \in \mathcal{B} \cap A := \{B \in \mathcal{B}; B \subset A\}$, $\mu(B) > 0$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(T^{-n}(B)) < \infty$$

portanto, pelo *Lema (2.4)*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(T^{-n}(A)) < \infty$$

□

Ao estudarmos a dinâmica de certas transformações a longo prazo, desejamos saber onde os pontos do espaço são levados por iterados futuros da transformação que reje o sistema, assim definimos o $\omega - limite$ de um ponto $x \in X$, como sendo o conjunto dos pontos $y \in X$, tais que para toda vizinhança V de y a relação $T^n(x) \in V$, $n > 0$ é satisfeita para infinitos valores de n.

Dizemos também que uma transformação contínua T de um espaço topológico X é *transitiva* se existe $x \in X$ tal que $\omega_T(x) = X$. A transformação T é dita *topologicamente transitiva* se para todo par de conjuntos abertos, não vazios $U, V \subset X$ existe $n \geq 1$ tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Lembremos que T é dita *ergódica*, se para todo $A \in \mathcal{B}$, invariante ($T^{-1}(A) = A$ mod μ), implica $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A^c) = 0$

2.11 Lema. *Seja T uma transformação não singular localmente invertível e X um conjunto T-invariante, se existe ϕ invertível tal que ϕ conjuga (T, X) e (σ, Σ), onde σ é shift e Σ é invariante por σ; então (T, X) é topologicamente transitivo.*

Prova. Este Lema é um corolário da *Proposição A*.5. (Ver Apêndice)

□

2.12 Lema. *Suponha que T é topologicamente transitivo com controle fraco de distorção, então T é conservativo ou totalmente dissipativo. Se T é conservativo então T é ergódico.*

Prova. Assumamos que

$$\bigcup_{B \in \Theta} B = X mod\ \mu;$$

daí pelo *Lema (2.10)* temos

$$\mathcal{C} = \bigcup_{B \subset \Theta \cap \mathcal{C}} B \ mod \ \mu.$$

Assim, segue pela irredutibilidade que T é conservativo ou totalmente dissipativo. Suponha que T é conservativo. Já que Θ gera $\mathcal{B}$; segue pelo *Lema de Distorção* que

$$\frac{\mu(T^{-n}(A) \cap \vec{p})}{\mu(\vec{p})} \leq C^2 \cdot \frac{\mu(A) \cap T(p_{n-1}))}{\mu(T(p_{n-1}))} \quad \forall n \in \mathbb{N}; \ \vec{p} \in (\mathcal{P}^{n-1} \cap \Theta); \ A \in \mathcal{B}.$$

Agora, suponha que $T^{-1}(A) = A$ e $\mu(A) > 0$, então para $A \in \mathcal{B}$,

$$\frac{\mu(A \cap \vec{p})}{\mu(\vec{p})} \leq C^2 \cdot \frac{\mu(A) \cap T(p_{n-1}))}{\mu(T(p_{n-1}))} \quad \forall n \in \mathbb{N}; \ \vec{p} \in (\mathcal{P}^{n-1} \cap \Theta).$$

Para μ-q.t.p. $x \in X$, temos que,

$$\frac{\mu(A \cap \vec{p})}{\mu(\vec{p})} = \frac{\mu(A \cap [p_o(x), ..., p_{n-1}(x)])}{\mu(T(p_{n-1}))} \longrightarrow \chi_A(x) \text{ quando } n \to \infty$$

em qur para $n \geq 1$, $p_{n-1}(x)$ é definido por $T^n(x) \in p_{n-1}(x) \in \mathcal{P}$.

Por conservatividade de T, se $\vec{p} = [p_o, ..., p_{n-1}] \in \Theta$ então para μ-q.t.p. $x \in \vec{p}$, $T^k x \in \vec{p}$ para infinitos $k's$, portanto,

$$\chi_A(x) \cdot \frac{\mu(T(p_{n-1}))}{\mu(A \cap T(p_{n-1}))} \leq C^2.$$

E segue que,

$$A = \bigcup_{B \in \Theta, \ \mu(A \cap B) > 0} B \ mod \ \mu.$$

Já que $\mu(A) > 0$, $\exists \ B \in \Theta$ tal que $B \subset A$; por irredutibilidade se $B' \in \Theta$, então $\exists k \geq 0$ tal que $\mu(B \cap T^{-k} B') > 0$, portanto $B' \subset A$. Assim $A = X \text{mod } \mu$, logo $\mu(A^c) = 0$ e concluimos que T é ergodico.

$\square$

Capítulo 3

Teoremas A e B

Neste capítulo demonstraremos os dois Teoremas Principais deste trabalho, provaremos que uma C^2–Transformação Markoviana Expansora por Partes possui uma medida invariante μ que é absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue m, isto é $\mu = hm$, onde h é densidade acotada longe do zero e portanto $\log h$ também é limitado. De fato, mostraremos que h pertence ao espaço das funções $\mathcal{P}'$-Lipischitz contínuas por partes. Esta condição implica que a medida μ é equivalente à de Lebesgue no sentido de que possuem os mesmos conjuntos de medida Lebesgue zero.

Lembramos que dado um cilindro $\vec{p} = [p_0, ..., p_{n-1}] \in \mathcal{P}^{n-1} \subset \widetilde{\mathcal{P}}$, denotamos o ramo inverso de T^n restrito ao cilindro $\vec{p}$, por $g_{\vec{p}} := g_{p_0} \circ ... \circ g_{p_{n-1}} = (T^n\big|_{\vec{p}})^{-1}$. Ademais, nós dizemos que uma transformação de Markov $(T, \mathcal{P})$ possui controle forte de distorção se existe $C > 1$ tal que para todo $\vec{p} \in \widetilde{\mathcal{P}}$, $\vec{p} \in \Omega_\beta$. Onde

$$\Omega_\beta := \left\{ \vec{p} \in \widetilde{\mathcal{P}};\ \left| \frac{J_\mu T^n(x)}{J_\mu T^n(y)} - 1 \right| \leq C \cdot d_\beta(T^n(x), T^n(y));\ \forall\ (x, y) \in \vec{p} \in \mathcal{P}^{n-1} \right\}$$

com $C \in \mathbb{R}_+$.

Teorema A. *Suponha que $(T, \mathcal{P})$ uma transformação de Markov; tal que para todo cilindro $\vec{p} \in \widetilde{\mathcal{P}}$ tenham forte controle de distorção. Se $\#T(\mathcal{P}) < \infty$; então existe uma densidade invariante μ, absolutamente contínua a medida de Lebesgue m, tal que $\log \dfrac{d\mu}{dm}$ pertence ao espaço das funções Lipschitz contínuas $(\mathcal{L})$.*

Prova. Sabemos que (T,X) e (σ,Σ) são conjugados, então pelo *Lema (2.11)* nos podemos assumir que $(T,\mathcal{P})$ é topologicamente transitivo. Pela *Proposição (2.2)* e *Lema (2.4)* existe $h : X \to \mathbb{R}$, tal que $\mathcal{P}h = h$. Pelo *Lema (2.5)* concluímos que $\log h \in L^{\infty}(\mu)$; e isto é suficiente para mostrar que $h \in \mathcal{L}$. Pela ergodicidade de T, nos temos que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{P}^k\mathbf{1} \longrightarrow h = \frac{d\mu}{dm} \text{ em } L^1(\mu) \text{ quando } n \to \infty.$$

Pela *Proposição (2.8)*; existe $q \geq 1$, $0 < \beta < 1$ e $M > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \| \mathcal{P}^q f \|_{\mathcal{L}} &\leq M \cdot D_{\mathcal{P}'} f \cdot \beta^n + M \| f \|_1 \\ &\leq \theta \| f \|_{\mathcal{L}} + M \| f \|_1 \;\; \forall f \in \mathcal{L} \; e \; 0 < \theta < 1. \end{aligned}$$

Agora, iterando nós temos

$$\begin{aligned} \| \mathcal{P}^{qn} f \|_{\mathcal{L}} &= \| \mathcal{P}^q(P^{q\cdots q} f) \|_{\mathcal{L}} \\ &\leq \theta \| \mathcal{P}^{q\cdots q} f \|_{\mathcal{L}} + M \| \mathcal{P}^{q\cdots q} f \|_1 \\ &\leq \theta(\theta^{n-1} \| f \|_{\mathcal{L}} + (\theta^{n-2} + \ldots + 1)M \| f \|_1) + M \| f \|_1 \\ &= \theta^n \| f \|_{\mathcal{L}} + (\theta^{n-1} + \ldots + \theta)M \| f \|_1 + M \| f \|_1 \\ &= \theta^n \| f \|_{\mathcal{L}} + (\theta^{n-1} + \ldots + \theta + 1)M \| f \|_1 \end{aligned}$$

tomando $M' = \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n \cdot M$, obtemos:

$$\| \mathcal{P}^{qn} f \|_{\mathcal{L}} \leq \theta^n \| f \|_{\mathcal{L}} + M' \| f \|_1 < \infty; \; \forall f \in \mathcal{L}; \; n \geq 1 \; e \; 0 < \theta < 1.$$

Considere $A_n\mathbf{1} := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{P}^k\mathbf{1}$. Nós mostramos que $\sup_{n\geq 1} \| \mathcal{P}^k\mathbf{1} \|_{\mathcal{L}} < \infty$; de fato lembremos que $\| \mathcal{P}^k\mathbf{1} \|_{\mathcal{L}} = \| \mathcal{P}^k\mathbf{1} \|_1 + D_X\mathcal{P}^k\mathbf{1}$. Pelo *Lema(2.4)*, $\| \mathcal{P}^k\mathbf{1} \|_1 \leq \frac{C^2}{\epsilon} \cdot \mu(A); A \in \mathcal{B}$ e pela *Proposição (2.9)*, para g uma função Lipschitz contínua vale $D_{\mathcal{P}'}\mathcal{P}^k g < M$, assim $D_X\mathcal{P}^k\mathbf{1} < \infty$.

Considerando $A_n\mathbf{1} := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{P}^k\mathbf{1}$ para $k \geq 1$, temos

$$\| A_n\mathbf{1} \|_{\mathcal{L}} = \left\| \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{P}^k\mathbf{1} \right\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \| \mathcal{P}^k\mathbf{1} \|_{\mathcal{L}}$$

reescrevendo $k = a \cdot q + b$, em que $a \geq 0$ e $0 \leq b < q$ obtemos

$$\begin{aligned} \| A_n \mathbf{1} \|_{\mathcal{L}} &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \| \mathcal{P}^{aq+b} \mathbf{1} \|_{\mathcal{L}} \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \| \mathcal{P}^{aq} (\mathcal{P}^{b} \mathbf{1}) \|_{\mathcal{L}} \\ &\leq \theta^{a} \| \mathcal{P}^{b} \mathbf{1} \|_{\mathcal{L}} + M' \| \mathcal{P}^{b} \mathbf{1} \|_{1} < \infty, \text{ conforme exposto acima.} \end{aligned}$$

Por último, recaímos nas hipóteses dadas pelo Teorema de Ascoli-Arzelá, (*Teorema 2.6*) e portanto, $A_n \mathbf{1}$ possui subsequência convergente em $L^1(\mu)$ cujo limite é h, função lipschitz contínua. Portanto, $\mu = hm$ é uma medida finita T-invariante absolutamente contínua, com $\log h$ limitado.

$\square$

Seja T uma transformação definida num subconjunto $X \subset \mathcal{M}$, em que $\mathcal{M}$ é uma variedade compacta e X possui medida Lebesgue total. Dizemos que T é uma Transformação *Markoviana Expansora por Partes* se existir uma partição enumerável $\mathcal{P}$, com respeito a medida de lebesgue, do domínio X e conjuntos cilindros tais que:

(i) $\| (DT(x))^{-1} \|^{-1} \geq \lambda > 1 \; \forall \; x \in \vec{p} \in \mathcal{P}$,

(ii) $\log \left| \dfrac{\det \, DT(x)}{\det \, DT(y)} \right| \leq C \cdot d(x,y); \; \forall \; x, y \in \vec{p}, \; \forall \; \vec{p} \in \mathcal{P}$,

(iii) Para cada $p_k \in \mathcal{P}$; $T\big|_{p_k}$ é um difeomorfismo C^2 com uma extensão ainda C^2 a $\overline{p_k}$.

Dizemos que um conjunto $A \subset \mathcal{M}$ é *positivamente invariante* para T, se $T(A) = A$. Um conjunto invariante ($T^{-1}(A) = A$) é em particular um conjunto positivamente invariante.

Para provar o próximo Teorema, necessitaremos do seguinte Lema:

3.1 Lema. *Se $A \subset \mathcal{M}$ é um conjunto positivamente invariante, então existe uma bola B de raio $\delta/4$ tal que $m(B \backslash A) = 0$. Em particular, sendo a medida de $\mathcal{M}$ finita, teremos somente um número finito de conjuntos invariantes distintos.*

Prova. É suficiente mostrarmos que existe uma bola de raio $\delta/4$, onde a medida relativa de A está próxima de 1. Seja $k > 0$ um número pequeno. Sejam A_c um compacto contido em A e A_v uma vizinhança de A_c tal que $m(A \backslash A_c)$ e $m(A_v \backslash A_c)$ sejam ambos menores que $k \cdot m(A)$. Para $x \in A_c$ seja $V_n(x)$ a vizinhança de x; ademais $V_n(x)$ é enviada com distorção limitada por T^n na bola de raio δ em torno de $T^n(x)$. Podemos escolher n sufiucientemente grande de a que para todo $x \in A_c$ se tenha $V_n(x) \subset A_v$. Seja $U_n(x) \subset V_n(x)$ a pré imagem por T^n de $B_{\delta/4}(T^n(x))$. Sejam $x_1, ..., x_N \in A_c$ tais que $U_n(x_1), ..., U_n(x_N)$ cubram A_c.

Podemos ainda se necessário for, reordenar os índices, de forma tal que para $m \leq N$ termos uma subfamília maximal $U_n(x_1), ..., U_n(x_m)$, cujos elementos são disjuntos dois a dois. Notemos que $V_n(x_1), ..., V_n(x_N)$ cobrem A_c, uma vez que a união deste conjunto contém $U_n(x_i)$, para todo $1 \leq i \leq N$. De fato, cada $U_n(x_i)$ deve intersectar algum $U_n(x_k)$ com $k \leq m$ e , deste modo, a sua imagem por T^n, uma bola de raio $\delta/4$em torno de $T^n(x_i)$, intersecta a bola de raio $\delta/4$ em torno de $T^n(x_k)$, estando assim contida na correspondente bola de raio δ. Em particular temos $U_n(x_i) \subset V_n(x_k)$.

Pela distorção limitada, existe uma constante uniforme $C > 0$, independente de x e de n, tal que $m(U_n(x))$ é maior que $C \cdot m(V_n(x))$. Assim sendo, a medida de lebesgue de $U_n(x_1) \cup ... \cup U_n(x_m)$ é maior que $C \cdot m(A_c)$. Se $\theta > 0$ é tal que $m(U_n(x_i) \setminus A_c) \geq \theta \cdot m(U_n(x_i)$ para todo $1 \leq i \leq m$, então

$$m(U_n(x_1) \cup ... \cup U_n(x_m) \setminus A_c) \geq \theta \cdot Cm(A_c) \geq \theta \cdot C(1-k)m(A).$$

Por outro lado, dado que $U_n(x_i) \subset A_v$ e $A_c \subset A$, esta medida tem que ser inferior a $k \cdot m(A)$

$$k \cdot m(A) \geq m(U_n(x_1) \cup ... \cup U_n(x_m) \setminus A_c) \geq \theta \cdot C(1-k)m(A).$$

Podemos deste modo reduzir $k > 0$, aumentando n, de forma tal que θ seja forçosamente pequeno. Desta forma podemos encontrar n e $U_n(x_i)$ tais que a medida de lebesgue relativa de $U_n(x_i) \cap A_c$ em $U_n(x_i)$ seja arbitrariamente próxima de 1. Então, pela distorção limitada e pelo fato de A se positivamente invariante a medida de lebesgue relativa de $T^n(A_c) \subset A$ na bola de raio $\delta/4$ em torno de $T^n(x_i)$ também está arbitrariamente próxima de 1.

□

Um conjunto compacto positivamente invariante A é chamado *atrator* se sua bacia de atração $\mathcal{B}(A) = \{x \in \mathcal{M}, w(x) \subset A\}$ possui medida lebesgue positiva.

Teorema B. *Se $T : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ é uma C^2 Transformação Markoviana expansora por partes, com um número limitado de imagens, então existe um conjunto finito de medidas invariantes absolutamente contínuas com respeito à medida de Lebesgue e ergódicas tal que $m-q.t.p.$ pertence a bacia de uma dessas medidas. Ademais a densidade de cada uma dessas medidas com respeito a Lebesgue é uniformemente limitada por alguma constante.*

Prova. Sejam x e y pertencentes ao cilindro $\vec{p_n} = [p_0, ..., p_{n-1}]$, com $d_\beta(x, y) \leq \epsilon$, ou seja, x e y estão muito próximos.

Lembramos que $d = d_\beta = \beta^{s(x,y)}$, onde $s(x, y)$ é o tempo de separação de x e y. Se x e y estão em elementos distintos de uma partição $\mathcal{P}$ de X então $s(x, y) = 0$. Se x e y estão num mesmo elemento da partição então $s(x, y)$ é o maior inteiro $n \geq 0$ tal que $T^k x$ e $T^k y$ estão no mesmo elemento da partição para $k = 0, ..., n$. Ademais, por

(i) $\| (DT(x))^{-1} \|^{-1} \geq \lambda > 1 \ \forall \ x \in \vec{p} \in \mathcal{P}$

(ii) $\log \left| \dfrac{\det \ DT(x)}{\det \ DT(y)} \right| \leq C \cdot d(x, y); \ \forall \ x, y \in \vec{p}, \ \forall \ \vec{p} \in \mathcal{P}$

temos,

$$\begin{aligned} d(T^j(x), T^j(y)) &\leq \lambda^{-(n+s(T^n(x),T^n(y))-j)} \cdot d(T^{n+s(T^n(x),T^n(y))}(x), T^{n+s(T^n(x),T^n(y))}(y)) \\ &\leq \lambda^{-(n-j)} \cdot \lambda^{-s(T^n(x),T^n(y))} \cdot r, \ \text{onde r} = \text{diam } \vec{p} \end{aligned}$$

e pondo $\beta = \lambda^{-1}$ e fazendo $k = n - j$ obtemos,

$$d(T^j(x), T^j(y)) \leq \beta^{n-j} \cdot \beta^{s(T^n(x),T^n(y))}$$

Agora, tomando logaritmos encontramos

$$\begin{aligned} \log \left| \frac{\det \ DT^n(x)}{\det \ DT^n(y)} \right| &= \prod_{k=0}^{n-1} \log \left| \frac{\det \ DT(T^k(x))}{\det \ DT(T^k(y))} \right| \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (\log |\det DT(T^k(x))| - \log |\det DT(T^k(y))|) \\ &\leq C \cdot \sum_{k=0}^{n} \beta^{n-k} \cdot r \cdot \beta^{s(T^n(x),T^n(y))} \\ &= C' \cdot d_\beta(T^n(x), T^n(y)) \end{aligned}$$

em que $C' = C \cdot \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \beta^{n-k} \cdot r$. Convém observar que como m é a medida de Lebesgue, temos que $J_m T^n = \det DT^n$. Agora, utilizando o fato de que para todo $x > 0$ tem-se $\log x \leq |x - 1|$; obtemos,

$$\log \left| \frac{\det DT^n(x)}{\det DT^n(y)} \right| = \log \left| \frac{J_m T^n(x)}{J_m T^n(y)} \right| \leq \left| \frac{J_m T^n(x)}{J_m T^n(y)} - 1 \right| \leq C d_\beta(T^n(x), T^n(y))$$

portanto, recaímos nas hipóteses do Teorema A e então, existe densidade invariante μ; absolutamente contínua a Lebesgue e limitada no espaço das funções Lipschitz contínuas.

Para provar a existência de um número finito dessas medidas, suponhamos $A \subset X$ algum conjunto T-invariante com medida Lebesgue positiva, dado pelo Lema anterior, então pelo exposto temos que $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{P}^k\chi_A$ converge na norma $L^1(m)$ para alguma h_A que é limitada no espaço das funções Lipschitz contínuas. Escrevendo $\mu_A = h_A m$; temos μ_A densidade T-invariante absolutamente contínua. Observe que escrevendo $A^c = X\backslash A$ temos

$$\mu_A(A^c) = \int_{A^c} h_A \, dm = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{A^c}\mathcal{P}^k\chi_A \, dm = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_X \chi_{A^c}\circ T^k\cdot\chi_A \, dm = 0.$$

Dessa forma, μ_A dá peso total ao conjunto A, ou seja $\mu_A = 1$. Então X pode ser decomposto numa quantidade finita de conjuntos T-invariantes como acima e logo teremos necessariamente uma quantidade finita de medidas invariantes absolutamente contínuas e ergódicas.

Sabemos que $\mu(supp\ \mu) = 1\ \forall\mu$ probabilidade, em particular $\mu_j(supp\ \mu_j) = 1$, como $\mu_j \ll m$ temos então $m(supp\ \mu_j) > 0$. Sabemos também que $supp\ \mu_j$ é um conjunto positivamente invariante. Pelo que acabamos de comentar e pelo *Lema(3.2)*, temos que existe uma bola contida no $supp\ \mu_j$, ou seja $int(supp\ \mu_j) \neq \emptyset\ \forall j$.

Seja $K = \{x,\ w(x)\cap(int(supp\ \mu_1)\cup ...\cup(int(supp\ \mu_j))\} = \emptyset$, observamos que K é positivamente invariante. Logo se $m(K) > 0$, temos pelo Teorema anterior que existe uma medida ν, absolutamente contínua a lebesgue tal que $\nu(K) = 1$.

Observemos que $K\cap int(supp\ \mu_j) = \emptyset$, dessa forma $\mu_j \leq 1 - \mu_j(int(supp\ \mu_j)) < 1$ e assim teríamos $\mu_j \neq \nu\ \forall j$. Absurdo pois $\mu_1, ..., \mu_n$, com $1 \leq j \leq n$, são todas as medidas absolutamente contínuas à lebesgue. Dessa forma, temos necessariamente $m(K) = 0$

Logo para $m - q.t.p.\ x \in \mathcal{M}$ teremos alguma μ_j tal que $w(x)\cap int(supp\ \mu_j) \neq \emptyset$; mas isto implica que existe n_0 tal que $T^{n_0}(x)$ pertence ao $int(supp\ \mu_j)$ e logo $T^{n_0}(x)$ pertence ao $supp\ \mu_j$, como $supp\ \mu_j$ é um conjunto positivamente invariante $T^n(x)$ pertence ao $supp\ \mu_j$ para todo $n \geq n_0$, então concluímos que $w(x) \subset supp\ \mu_j$. Ou seja, lebesgue quase todo ponto pertence a bacia de uma dessas medidas.

□

3.2 Corolário. *Se $\#T(\mathcal{P}) = 1$, então existe uma única medida μ absolutamente contínua com respeito à medida de lebesgue.*

Prova. Como $\#T(\mathcal{P}) = 1$, então existe um conjunto positivamente invariante $A \subset X$ tal que $T(A) = X$, assim pelo Teorema A temos que $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{P}^k\chi_A$ converge na norma $L^1(m)$ para a densidade h_A que é limitada no espaço das funções Lipschitz contínuas. Escrevendo $\mu_A = h_A m$; temos μ_A medida T-invariante absolutamente contínua e ergódica, com $\mu_A(T(A)) = \mu(X) = 1$.

Suponhamos $B \subset X$ conjunto positivamente invariante. Então,

$$\mu_1(B) = \frac{\mu_A(A \cap B)}{\mu_A(A)} \quad \text{e} \quad \mu_2(B) = \frac{\mu_A(A^c \cap B)}{\mu_A(A^c)}$$

são duas medidas absolutamente contínuas, com densidades $h_1 = d\mu_1/m$ e $h_2 = d\mu_2/m$ que são funções lipschitz contínuas. Dessa forma, A e A^c tem interior não vazio, contradição.

$\square$

Apêndice

Shift

Os shifts são um importante objeto no estudo em Sistemas Dinâmicos. Parte de sua importância provêm do fato de que certos difeomorfismos contém na sua dinâmica transformações que se assemelham ao de uma transformação shift. Isto é, sob certas condições um difeomorfismo f de uma variedade compacta $\mathcal{M}$ possui um conjunto $X \subset \mathcal{M}$, tal que $f^N(X) = X$, para algum N e $f^N\big|_X$ é conjugado a um shift, ou seja, é dinâmicamente equivalente a algum shift.

Seja S um conjunto enumerável e seja $\mathcal{B}$ a σ-álgebra pelos conjuntos cilindros da forma $[s_1, ..., s_n] := \{x \in S^{\mathbb{N}}; x_k = s_k, 1 \leq k \leq n, n \geq 1\}$; onde $s_1, ..., s_n \in S$. Chamamos de *shift* a aplicação $\sigma : S^{\mathbb{N}} \longrightarrow S^{\mathbb{N}}$, dada por $(\sigma x)_n = x_{n+1}$; onde $S^{\mathbb{N}}$ é um espaço métrico compacto quando equipado com a topologia produto (topologia gerada pelos conjuntos cilindros), $\mathcal{B}(S^{\mathbb{N}})$ é a coleção de Borel conjuntos e $\sigma : S^{\mathbb{N}} \longrightarrow S^{\mathbb{N}}$ é contínua.

Shift de Markov

Seja S um conjunto enumerável como anteriormente. Uma matriz *estocástica* $n \times n$ é uma matriz $P : S \times S \longrightarrow [0, 1]$, cujos coeficientes $p_{s,t}$ satisfazem

$$\sum_{t \in S} p_{s,t} = 1, \ \forall s \in S.$$

Para $q \in$ {conjunto das probabilidades em S} tal que $q(s) > 0$; definimos a medida

$m_q \in$ {conjunto das probabilidades em $S^{\mathbb{N}}$} por:

$$m_q([s_1, ..., s_n]) = q_{s_1} \prod_{k=1}^{n-1} p_{s_k; s_{k+1}}.$$

Seja $\sigma : S^{\mathbb{N}} \longrightarrow S^{\mathbb{N}}$ um shift; então σ é uma transformação mensurável do espaço de medida $(S^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(S^{\mathbb{N}}), m_q)$. E é denominado *Shift de Markov* de P com distribuição inicial q. O shift de Markov de P é chamado *não singular* se $m_q \circ \sigma^{-1} \sim m_q$ para todo $q \in$ {conjunto das probabilidades em S} tal que $q(s) > 0\ \forall s$.

Um subconjunto $\Sigma \subset S^{\mathbb{N}}$ é um *subshift* se é compacto e invariante por σ, isto é, $\sigma(\Sigma) = \Sigma$. Dizemos que um subshift Σ é transitivo ou topologicamente transitivo se $\sigma|\Sigma$ é respectivamente, transitivo ou topologicamente transitivo. O subshift $\Sigma \subset S^{\mathbb{N}}$ é do tipo finito se existe uma matriz $P_{n\times n}$, cujos coeficientes $p_{s,t}$ são 0 ou 1 e tal que $x \in \Sigma$, se e somente se, $p_{x(k),x(k+1)} = 1$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Neste caso, denotamos $\Sigma = \Sigma_P$.

Reciprocamente dada uma matriz $P_{n\times n}$ com coeficientes $p_{s,t}$ que tomam só valores 0 ou 1, podemos definir o conjunto

$$\Sigma := \{\underline{x} = (x_1, x_2, ...) \in S^{\mathbb{N}}; p_{x(k),x(k+1)} = 1\ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Não é difícil ver que Σ é um conjunto compacto e $\sigma(\Sigma) = \Sigma$ [8]. Se $p_{s,t} = 1$ para todo s e t, obtemos $\Sigma = S^{\mathbb{N}}$.

Conjugação

Mostraremos (T, X) e (σ, Σ) são conjugados. Para isso seja $\phi : X \longrightarrow S^{\mathbb{N}}$ definida por $T^{n-1}x \in p_{(\phi(x))_n}\ \in \mathcal{P}$ e sua inversa $\phi^{-1} : S^{\mathbb{N}} \longrightarrow X$, dada por

$$\phi^{-1}(s_1, ..., s_{n-1}) = \bigcap_{k=1}^{n-1} T^{-k} p_{s_k}.$$

A função ϕ^{-1} está bem definida pois $\bigcap_{k=1}^{n-1} T^{-k} p_{(\phi(x))_k}$ é uma interseção não vazia de compactos encaixados e $\lim_{N\to\infty} \{\text{diam}[\bigcap_{n=-N}^{N} T^{-n} p_{(\phi(x))_n}]\} = 0$; consequentemente $\bigcap_{k=1}^{n-1} T^{-k} p_{(\phi(x))_k}$ define um único ponto x em X.

De fato, podemos ver que

$$\begin{aligned}
\phi^{-1} \circ \phi(x) &= \phi^{-1}(\phi(x)) \\
&= \bigcap_{k=1}^{n-1} T^{-k} p_{(\phi(x))_k} \\
&= T^{-1} p_{(\phi(x))_1} \cap T^{-2} p_{(\phi(x))_2} \cap ... \cap T^{-(n-1)} p_{(\phi(x))_{n-1}} \\
&= x
\end{aligned}$$

Vejamos que a dinâmica do sistema é preservada pela aplicação ϕ. De fato, $T^{n-1}x \in p_{(\phi(x))_n}$ se e somente se $(\phi(x))_{n-1} = n$, ou seja $\sigma(\phi(x))_{n-2} = n$. Por outro lado $T^{n-1}x = T^{n-2}(T(x)) \in p_{(\phi(x))_n}$ se e somente se $(\phi(T(x)))_{n-2} = n$. Então temos que $\phi \circ T = \sigma \circ \phi$ e portanto (T, X) e (σ, Σ) são conjugados. Agora provaremos que T é topologicamente transitivo através da aplicação shift. Antes porém, provaremos o seguinte Lema que será utilizado.

A.3 Lema. *Para todo* $1 \leq s \leq n;\ \ 1 \leq t \leq n$ *e* $m \geq 1$ $p_{s,t}^{(m)} = \#S_{s,t}^{(m)}$, *onde* $S_{s,t}^{(m)}$ *é o conjunto das funções* $\psi : \{0, ..., m\} \to \{1, ..., n\}$; *tais que*

$$\begin{aligned}
\psi(0) &= s \\
\psi(m) &= t \\
p_{\psi(k),\psi(k+1)} &= 1, \quad k = 0, ..., m-1.
\end{aligned}$$

Prova. A igualdade vale se $m = 1$. Suponhamos que vale para um valor $m \leq 1$. Provaremos que também é verdade para $m+1$. Seja S a união disjunta dos conjuntos $S_{s,k}^{(m)}$ com k tal que $p_{k,t} = 1$. Então

$$\#S = \sum_{p_{k,t} \neq 0} \#S_{s,k}^{(m)} = \sum_{p_{k,t} \neq 0} p_{s,k}^{(m)} = \sum_{k} p_{s,k}^{(m)}; p_{k,t} = p_{s,t}^{(m+1)}$$

Por outro lado $\#S = \#S_{s,t}^{(m+1)}$; porque a função $\varphi; S \to \{\alpha : \{0, ..., m+1\} \to \{1, ..., n\}\}$ definida como

$$\begin{aligned}
\varphi \circ \psi(i) &= \psi(i)\ i = 0, ..., m. \\
\varphi \circ \psi(m+1) &= t
\end{aligned}$$

é uma bijeção entre S e $S_{s,t}^{(m+1)}$.

□

A.4 Proposição. *Seja* $\Sigma_P \subset S^{\mathbb{N}}$ *um subshift do tipo finito e sejam* $p_{s,t}$ *os coeficientes de* P^m, $m \geq 0$. *Então* $\sigma : \Sigma_P \to \Sigma_P$ *é topologicamente transitivo(ou seja, quando* U *e* V *são sobconjuntos não vazios de* Σ_P, *existe um* $N > 0$, *tal que* $\sigma^k(U) \cap V \neq \emptyset$ $\forall k \geq N$), *se e somente se,* $P^m > 0$ *(isto é* $p^m_{s,t} > 0$ $\forall s, t$) *para algum* m.

Prova. Sejam $U, V \neq \emptyset$ abertos em Σ_P. Queremos provar que existe $n > 0$ tal que $\sigma^n(U) \cap V \neq \emptyset$. O aberto U contém um aberto não vazio da forma $[s_1, ..., s_k] \cap \Sigma_P$ e V um aberto não vazio da forma $[u_1, ..., u_k] \cap \Sigma_P$. Então

$$\sigma^n(U) \cap V \supset \sigma^n([s_1, ..., s_k] \cap \Sigma_P) \cap [u_1, ..., u_k] \cap \Sigma_P = [s_{k+n}] \cap [u_1, ..., u_k] \cap \Sigma_P$$

Sejam $\underline{x}_1 \in [s_1, ..., s_k] \cap \Sigma_P$ e $\underline{x}_2 \in [u_1, ..., u_k] \cap \Sigma_P$. Tomemos n tal que

$$k < n \text{ e } p^{n-k}_{u_k, s_1} > 0$$

A segunda condição implica pelo Lema anterior que existe $\alpha : \{0, ..., n-k\} \to \{1, ..., m\}$ tal que

$$\begin{aligned}
\alpha(0) &= u_k \\
\alpha(n-k) &= s_1 \\
p_{\alpha(i),\alpha(i+1)} &= 0, \quad 0 \leq i \leq n-k.
\end{aligned}$$

Definimos agora $\underline{x} \in \Sigma$ como

$$\begin{aligned}
\underline{x}(i) &= \underline{x}_2(i), \quad i \leq k \\
\underline{x}(i) &= \underline{x}(i-k), \quad k \leq i \leq n \\
\underline{x}(i) &= \underline{x}_1(i-n), \quad i \geq n.
\end{aligned}$$

Observamos então que $x \in \Sigma_P$, pois $\underline{x}_1 \in \Sigma_P$ e pelas condições dadas na definição $\underline{x}_2 \in \Sigma_P$, ademais $\underline{x} \in [s_{n+k}] \cap [u_1, ..., u_k]$ o que implica que $\sigma^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Reciprocamente, se $\sigma : \Sigma_P \to \Sigma_P$ é transitivo, dados $1 \leq s \leq n$ e $1 \leq t \leq n$, tomamos $m > 0$ tal que $\sigma^n[s_k] \cap [u_k] \neq \emptyset$. Seja $\underline{x} \in \sigma^m([s_k]) \cap [u_k] = [s_{k+n}] \cap [u_k]$. Então $\underline{x}$ satisfaz

$$\begin{aligned}
\underline{x}(0) &= k \\
\underline{x}(m) &= k+n \\
p_{\underline{x}(i),\underline{x}(i+1)} &= 1, \quad 1 \leq i \leq m.
\end{aligned}$$

Pelo Lema anterior, isto implica que $p^m_{s,t} > 1$.

□

Referências Bibliográficas

[1] Aaronson, J., *An Introduction to Infinite Ergodic Theory.* Mathematical Surveys and Monographs 50, American Math. Society, 1997.

[2] Alves, J. F. and Viana, M., *Statistical stability for robust classes of maps with non-uniform expansion.* Ergod. Th. and Dynam. Sys.,**22**, 2002.

[3] Castro, A. A., *Teoria da medida.* Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2004.

[4] Fernandez, P. J., *Medida e integração.* Projeto Euclides, IMPA, $2^{a.}$ edição, Rio de Janeiro, 2002.

[5] Lasota, A. and Mackey, M. C., *Chaos, Fractais, and Noise.* Springer-Verlag, Second Edition, New York, 1991.

[6] Lima, E. L., *Curso de Análise vol.2.* Projeto Euclides, IMPA, $5^{a.}$ edição, Rio de Janeiro, 1999.

[7] Lima, E. L., *Espaços Métricos.* Projeto Euclides, IMPA, $2^{a.}$ edição, Rio de Janeiro, 2003.

[8] Mañé, R., *Introdução à Teoria Ergódica.* Projeto Euclides, IMPA/CNPq, Rio de Janeiro, 1983.

[9] Royden, H. L., *Real Analysis.* Stanford University, The Macmillan Company, Second Edition, New York, 1968.

[10] Viana, M., *Introdução à Teoria Ergódica.* Mini-curso proferido na Escola de Verão de Recife, DMAT-UFPe, 2003.

Index

Universidade Federal da Bahia — UFBA
Instituto de Matemática/Depto. de Pós–Graduação em Matemática

Campus de Ondina, Av. Ademar de Barros s/n, CEP : 40170 – 110
www.alunospgmat.ufba.br/