Universidade Federal da Bahia

Prova de Seleção para Mestrado em Matemática

Edital 02.2025

13 de Junho de 2025

Nome: ____

Exercício 1. Defina $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & , x \neq 0, \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$

f é diferenciável em $x = 0$? Se sim, qual o valor de $f'(0)$?

Exercício 2. Sejam A e B subconjuntos não-vazios e limitados de $\mathbb{R}$. Defina

$$A - B = \{a - b : a \in A, b \in B\}.$$

Mostre que $\sup(A - B) = \sup(A) - \inf(B)$.

Exercício 3. Prove ou dê contra-exemplo para as sentenças abaixo:

(a) se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge;

(b) se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Exercício 4. Suponha que $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função que satisfaz

$$|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2 \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

Mostre que f é constante.

Exercício 5. Sejam $K \subset \mathbb{R}$ um compacto e $f\colon K \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Prove que f é uniformemente contínua.

Exercício 6. Sejam A uma matriz $n \times n$ com entradas reais e e_i o i-ésimo vetor da base canônica, i.e. e_i é a matriz $n \times 1$ que tem 1 na i-ésima linha e 0 nas outras. Sejam $x_j \in \mathbb{R}^n$ as soluções de $Ax_j = e_i$. Escreva A^{-1} em função de $x_1, \ldots, x_n$.

Exercício 7. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 9 & -2 & -7 \\ 2 & -6 & 4 & 8 \\ 3 & -9 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Escalone a matriz A.

(b) Encontre uma base para o espaço vetorial gerado pelas colunas de A. Escreva o vetor $\begin{bmatrix} -7 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$ como combinação linear dos elementos desta base.

(c) Encontre uma base para o núcleo de A.

(d) O vetor $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ pertence ao núcleo de A?

Exercício 8. Os operadores lineares $T_0, T_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definidos por $T_0 x = 0$ e $T_1 x = x$ satisfazem $T_0^2 = T_0$ e $T_1^2 = T_1$.

(a) Existe algum operador T diferente de T_0 e T_1 tal que $T^2 = T$?

(b) Se $T \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um operador linear que satisfaz $T^2 = T$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de T, prove que $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.

Exercício 9. Seja $\mathcal{P}_n$ o espaço vetorial dos polinômios com coeficientes reais de grau menor ou igual a n, onde $n \geq 1$. Seja $D \colon \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ o operador de derivação, i.e. $D(p(x)) = p'(x)$. Determine as dimensões do núcleo e da imagem de D.

Exercício 10. Sejam E um espaço vetorial real e $v_1, \ldots, v_m \in E$ vetores que geram um subespaço de dimensão r. Mostre que o conjunto dos $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ tais que $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m = 0$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$ de dimensão $m - r$.