Universidade Federal da Bahia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática
Data: 28/11/2018

Prova de seleção - 2019.1

Instruções:

- **TEMPO MÁXIMO DE PROVA: QUATRO HORAS.**
- Esta prova contém dez questões; todas as questões têm o mesmo valor.
- Identifique com clareza o espaço onde fizer cada questão. Justifique seus passos.
- Nenhuma consulta é permitida. **Calculadoras e celulares não são permitidos.**
- Respostas/conclusões devem ser escritas **com caneta**.
- As respostas das questões de (1) a (5) e aquelas das questões de (6) a (10) deverão estar em folhas diferentes.
- O candidato só poderá deixar o local de prova depois de *transcorrida uma hora do seu início*, e não poderá levar a folha de questões e nem a folha de respostas.
- $\mathbb{K}$ denotará sempre um corpo.

Questões:

1. Sejam E um espaço vetorial real de dimensão finita n e F um subespaço vetorial de E de dimensão m. Denotamos por E^* o espaço dual de E. Por definição, o **anulador** de F, denotado por F°, é o conjunto

$$\{f \in E^* \mid f(u) = 0 \text{ para todo } u \in F\}.$$

Mostre que F° é um subespaço vetorial de E^* e calcule a sua dimensão.

2. Sejam $n \geq 1$ um número natural, a um número real, $\omega = (\omega_1, ..., \omega_n)$ um vetor de $\mathbb{C}^n$ e $A = A(a, \omega_1, ..., \omega_n)$ a matriz complexa definida por

$$A = \begin{bmatrix} a - |\omega_1|^2 & -\overline{\omega}_1\omega_2 & \cdots & -\overline{\omega}_1\omega_n \\ -\overline{\omega}_2\omega_1 & a - |\omega_2|^2 & \cdots & -\overline{\omega}_2\omega_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\overline{\omega}_n\omega_1 & -\overline{\omega}_n\omega_2 & \cdots & a - |\omega_n|^2 \end{bmatrix}$$

(dado $z \in \mathbb{C}$, denotamos por $|z|$ o seu módulo e por $\overline{z}$ o seu conjugado). Calcule o determinante de A.

3. Sejam $n \geq 1$ um número natural e a um número real. Denotamos por $\mathbb{P}_n[X]$ o espaço vetorial dos polinômios em uma indeterminada com coeficientes em $\mathbb{R}$ de grau $\leq n$. Determine a matriz A da aplicação linear $T_a : \mathbb{P}_n[X] \to \mathbb{P}_n[X],\ P(X) \to P(X + a)$ em relação à base $\{1, X, X^2, ..., X^n\}$. Calcule os autovalores de A.

4. Seja $J : E \to E$ uma tranformação linear de um espaço vetorial real E de dimensão finita n satisfazendo $J \circ J = -I$, I sendo o operador identidade de E. Mostre que n é par e que existe uma família de vetores $e_1, ..., e_k$, $k = n/2$ de E, tal que $\{e_1, ..., e_k, J(e_1), ..., J(e_k)\}$ seja uma base de E.

5. Seja A a matriz real definida por

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Calcule A^{2018}.

6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e seja $(a_n)_{n\in I\!N}$ uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Mostre que $(f(a_n))_{n\in I\!N}$ também é uma sequência de Cauchy.

7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{sen}(1/x), & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{1}$$

   a) Mostre que $f'(x)$ existe para cada $x \in \mathbb{R}$.
   b) f' é contínua no ponto $x = 0$?

8. Seja $(a_n)_{n\in I\!N}$ uma sequência em $\mathbb{R}$ com a seguinte propriedade: cada subsequência $(a_{n_k})_{n_k\in I\!N}$ de $(a_n)_{n\in I\!N}$ tem pelo menos uma subsequência $(a_{n_{k_\ell}})_{n_{k_\ell}\in I\!N}$ que converge e os limites de todos estas subsubsequências coincidem. Mostre que $(a_n)_{n\in I\!N}$ converge.

9. Seja $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$, i.e., f é duas vezes diferenciável e f'' é uma função contínua. Suponha também que $f''(x) = 0$ para todos $x \in \mathbb{R}$. Mostre que f é um polinômio.

10. Seja $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função tal que

$$\int_0^\infty |f(x)|\, dx < \infty. \tag{2}$$

f é uma função limitada? Caso seja, justifique. Caso não seja, dê um contra-exemplo.