UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA
DATA: 05/07/2018

PROVA DE SELEÇÃO - 2018.2

Instruções:

- **TEMPO MÁXIMO DE PROVA: QUATRO HORAS.**
- Esta prova contém dez questões; todas as questões têm o mesmo valor.
- Identifique com clareza o espaço onde fizer cada questão. Justifique seus passos.
- Nenhuma consulta é permitida. **Calculadoras e celulares não são permitidos.**
- Respostas/conclusões devem ser escritas **com caneta**.
- As respostas das questões de (1) a (5) e aquelas das questões de (6) a (10) deverão estar em folhas diferentes.
- O candidato só poderá deixar o local de prova depois de *transcorrida uma hora do seu início*, e não poderá levar a folha de questões e nem a folha de respostas.
- $\mathbb{K}$ denotará sempre um corpo.

Questões:

1. Sejam V e W espaços vetoriais de dimensões quaisquer (finitas ou infinitas) sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$. Demonstre que existe uma transformação linear injetora $T : V \to W$ se, e somente se, $\dim V \leq \dim W$.

2. Sejam V e W espaços vetoriais sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$ e $T : V \to W$ uma transformação linear. Prove que, para todo subespaço U de V e para todo $\mathbf{v} \in V$, $T\mathbf{v} \in T(U)$ se, e somente se, existe $\mathbf{u} \in \ker T$ tal que $\mathbf{v} + \mathbf{u} \in U$.

3. Sejam $\mathbb{K}$ um corpo e $P(\mathbb{K})$ o $\mathbb{K}$-espaço vetorial dos polinômios em uma indeterminada com coeficientes em $\mathbb{K}$. Demonstre que o operador de derivação $D : P(\mathbb{K}) \to P(\mathbb{K})$ é linear e é sobrejetor mas não injetor.

4. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por:
$$T(x, y, z) = (x, -x + 2y - z, -2x + 2y - z).$$
Determine a matriz A associada a T na base canônica de $\mathbb{R}^3$, verifique que A é diagonalizável e determine uma matriz de diagonalização P.

5. Sejam W o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $(2, -1, 1)$ e $(-3, 0, 1)$, e seja $\cdot$ o produto interno no espaço $\mathbb{R}^3$ definido por:
$$(a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = \sum_{i=1}^{3} (i + 1) a_i b_i.$$
Encontre o complemento ortogonal $W^\perp$ de W neste produto e uma base ortonormal de $W^\perp$.

6. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que f é uniformemente contínua.

7. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \text{ é racional} \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

   f é integrável? Justifique. Se sim, qual o valor de $\int_0^1 f(x)dx$.

8. Seja $\{x_n\}$ uma sequência tal que $|x_{n+1} - x_n| < \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A sequencia $\{x_n\}$ converge? Justifique.

9. Considere a função

$$f(x) = \int_{-x^3+1}^{e^{5x}+3x+1} \sqrt{1+t^2}\ln(1+t^2)dt.$$

   Calcule $f'(0)$.

10. Seja $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável, com $p(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Prove que se $\int_a^b p(x)dx = 0$ então o conjunto $Y = \{x \in [a,b]; p(x) = 0\}$ é denso em $[a,b]$.