Programa de Pós-Graduação
em Matemática
IME-UFBA

Prova de seleção para o mestrado em Matemática 2018.1
Área de Concentração: Matemática
Data: 15/12/2017

Instruções:

- **TEMPO MÁXIMO DE PROVA: QUATRO HORAS.**
- Esta prova contém dez questões; todas as questões têm o mesmo valor.
- Identifique com clareza o espaço onde fizer cada questão. Justifique seus passos.
- Nenhuma consulta é permitida. **Calculadoras e celulares não são permitidos.**
- Respostas/conclusões devem ser escritas **com caneta**.
- Escreva seu nome em cada folha de resposta e enumere as páginas. Para facilitar a correção, **questões 1 a 5** devem estar num grupo de folhas e **questões 6 a 10** devem estar em outro grupo de folhas.
- O candidato só poderá deixar o local de prova depois de *transcorrida uma hora do seu início*, e não poderá levar a folha de questões e nem a folha de respostas.

Questões:

(1) Considere A um subconjunto infinito arbitrário de $\mathbb{R}$, fixado. Mostre que as seguintes afirmações sobre A são equivalentes:

(I) Todo subconjunto infinito de A possui um ponto de acumulação.

(II) Toda sequência de pontos de A possui uma subsequência convergente.

Em seguida, exiba um subconjunto não-enumerável da reta que satisfaça (a qualquer uma, logo ambas) essas propriedades, justificando cuidadosamente toda e qualquer afirmação feita.

(2) Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções reais contínuas e suponha que $x_o \in \mathbb{R}$ satisfaça $f(x_0) < g(x_0)$. Mostre que existe $\delta > 0$ que é tal que $f(x) < g(x)$ sempre que $|x - x_0| < \delta$.

(3) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $\mathbb{R}$, porém **não diferenciável** em $x = 0$, e seja f a função definida pela igualdade

$$f(x) = 1 + x.g(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

(a) Mostre que f é diferenciável no ponto $x = 0$.

(b) Determine a equação da reta tangente ao gráfico da f no ponto de intersecção desse gráfico com o eixo y. Mostre ainda que se g for uma função estritamente crescente em $\mathbb{R}$ então o ponto de tangência será o único ponto de intersecção entre a reta tangente exibida e o gráfico da f.

(4) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ e suponha que f satisfaça

$$\int_0^x f(t)dt = x.f(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Sabendo que $f(3) = 5$, determine $f(-3)$. Justifique todas as suas afirmações.

(5) Dadas partições

$$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\} \text{ e } Q = \{a = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_m = b\}$$

de $[a, b]$, dizemos que Q **refina** P se $P \subseteq Q$.

(a) Considere $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada qualquer, fixada. Mostre que: quando se refina uma partição, a soma inferior de f não diminui e a soma superior de f não aumenta, i.e., se Q refina P então

$$s(f; P) \leqslant s(f; Q) \leqslant S(f; Q) \leqslant S(f; P).$$

(Sugestão: Comece analisando o caso em que Q possui um único ponto a mais que P).

(b) Prove o **Critério de Riemann** para integrabilidade: uma função limitada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável se, e somente se, para qualquer $\varepsilon > 0$ existe uma partição P de $[a, b]$ (que pode depender de ε) que é tal que $S(f; P) - s(f; P) < \varepsilon$.

(6) Seja V o espaço vetorial das funções polinomiais de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Considere o operador linear $D : V \to V$ dado por $D(p) = p'$, onde p' denota a derivada da função p, para toda $p \in V$

(a) Encontre o núcleo e a imagem de D.

(b) D tem inversa à direita?

(7) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n sobre um corpo F. Dada uma base ordenada $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ de V, considere o único operador linear sobre V tal que

$$T(\alpha_j) = \alpha_{j+1}, \text{ para } j = 1, 2, \ldots, n-1 \text{ e } T(\alpha_n) = 0.$$

(a) Qual é a matriz de T em relação a $\mathcal{B}$?

(b) Prove que $T^n = 0$, mas $T^{n-1} \neq 0$.

(8) Seja V o espaço vetorial das funções polinomiais de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, de grau menor ou igual a 2. Sejam a_1, a_2 e a_3 números reais distintos. Considere a função $L_i : V \to \mathbb{R}$, dada por $L_i(p) = p(a_i)$, para todo $p \in V$, onde $i = 1, 2, 3$.

(a) Prove que L_1, L_2 e L_3 são funcionais lineares linearmente independentes.

(b) Encontre a base de V cuja base dual é $\{L_1, L_2, L_3\}$.

(9) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear. Prove que

$$T^2 - \operatorname{tr}(T)T + \det(T)I = 0,$$

onde I é a transformação identidade.

(10) Considere o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ como espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais, com as operações usuais. Sejam $\mathbb{P}$ o conjunto dos números primos e

$$S = \{\log(p) : p \in \mathbb{P} \text{ e } p > 1\},$$

onde $\log$ é a função logaritmo natural. Prove que S é linearmente independente. Conclua que $\mathbb{R}$ tem dimensão infinita sobre $\mathbb{Q}$, justificando cuidadosamente.