Universidade Federal da Bahia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática
Data: 27/07/2017

Prova de seleção - 2017.2

Instruções:

- **TEMPO MÁXIMO DE PROVA: QUATRO HORAS.**
- Esta prova contém dez questões; todas as questões têm o mesmo valor.
- Identifique com clareza o espaço onde fizer cada questão. Justifique seus passos.
- Nenhuma consulta é permitida. **Calculadoras e celulares não são permitidos.**
- Respostas/conclusões devem ser escritas **com caneta**.
- O candidato só poderá deixar o local de prova depois de *transcorrida uma hora do seu início*, e não poderá levar a folha de questões e nem a folha de respostas.
- $\mathbb{K}$ denotará sempre um corpo.

Questões:

1. Seja V um espaço vetorial (plano) de $\mathbb{R}^3$ formada pelos vetores $v = (x, y, z)$ tais que $x - 2y + 4z = 0$. Obtenha uma base $\{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^3$ tal que v_1, v_2 pertençam a V.

2. Sejam E, F espaços vetoriais de mesma dimensão finita n. Mostre que uma transformação linear $T : E \to F$ é injetiva se, e somente se, é sobrejetiva. A afirmação continua verdadeira em espaços de dimensão infinita? Se verdadeira prove e se falsa dê um contraexemplo.

3. Uma matriz quadrada $a = [a_{ij}]$ chama-se simétrica (respctivamente antissimétrica) quando $a_{ij} = a_{ji}$ (respectivamente $a_{ij} = -a_{ji}$) para todo i e para todo j. Prove que o conjunto S das matrizes simétricas e o conjunto A das matrizes antissimétricas $n \times n$ são subespaços vetoriais de $M_n(\mathbb{K})$ e que se tem $M_n(\mathbb{K}) = S \oplus A$.

4. Se os vetores v_1, v_2, …, v_m de um espaço vetorial V geram um subespaço de dimensão r, prove que o conjunto dos vetores $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ tais que $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m = 0$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$ de dimensão $m - r$.

5. A transformação linear T em $\mathbb{R}^2$ definida por $T(x_1, x_2) = (x_1, 0)$ é tal que $T^2 = T$. Prove que se S é uma transformação linear tal que $S^2 = S$ então $S = 0$, $S = I$ em que I é a identidade ou existe uma base ordenada $\mathcal{B}$ tal que $[T(x_1, x_2)]_{\mathcal{B}} = [(x_1, 0)]_{\mathcal{B}}$.

6. Sejam $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuas no ponto $a \in X$. Prove que a função $\phi : X \to \mathbb{R}$ definida por $\phi(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ é contínua no ponto $a \in X$.

7. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \text{ é racional} \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

f é integrável? Justifique. Se sim, qual o valor de $\int_0^1 f(x)dx$.

8. Seja $\{x_n\}$ uma sequência limitada. Prove que $\{x_n\}$ converge se, e somente se, possui um único valor de aderência. Mostre que o resultado não vale se tirarmos a hipótese de $\{x_n\}$ ser limitada.

9. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ constantes tais que $a \neq 0$ e $bc > 0$. Determine o(s) ponto(s) do gráfico da função $f(x) = a(x-b)(x-c)$ tais que a reta tangente passa pela origem.

10. Determine, sem usar nenhum método de integração, $f(x)$ sabendo que $f'(x) = \dfrac{\arctan x}{1+x^2}$ e $f(0) = \frac{1}{3}$.