Programa de Pós-Graduação
em Matemática
IME-UFBA

Prova de seleção para o mestrado em Matemática 2017.1
Área de concentração: Matemática
Data: 20/02/2017

Instruções:

- **TEMPO MÁXIMO DE PROVA: QUATRO HORAS.**
- Esta prova contém dez questões; todas as questões têm o mesmo valor.
- Identifique com clareza o espaço onde fizer cada questão. Justifique seus passos.
- Nenhuma consulta é permitida. **Calculadoras e celulares não são permitidos.**
- Respostas/conclusões devem ser escritas **com caneta**.
- O candidato só poderá deixar o local de prova depois de *transcorrida uma hora do seu início*, e não poderá levar a folha de questões e nem a folha de respostas.
- $\mathbb{K}$ denotará sempre um corpo.

Questões:

(1) Seja T um operador linear em $\mathbb{K}^2$. Prove que ou T tem vetor cíclico ou é um múltiplo escalar do operador identidade.

(2) Determine todas as possíveis formas de Jordan de uma matriz de ordem 3 com entradas complexas. Se A e B são duas matriz de ordem $n > 3$ com entradas complexas que possuem o mesmo polinômio característico e mínimo então A e B são semelhantes?

(3) Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno e $P : V \to V$ uma projeção tal que $V = W \oplus U$ em que $W = \text{Im}(P)$ e $U = \text{Nuc}(P)$. Mostre que P é um operador autoajunto se, e somente se, P é uma projeção ortogonal, ou seja, W e U são complementos ortogonais.

(4) Seja V um $\mathbb{C}$-espaço vetorial munido de um produto interno. Mostre que se $\langle T(v), v\rangle = 0$ para todo $v \in V$ então T é o operador nulo. Isso continua válido se V é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial?

(5) Seja V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno. Mostre que a correspondência $F : V \to V^*$ que associa a cada $v \in V$ o funcional linear $F(v) = f_v$ tal que $f_v(w) = \langle w, v\rangle$ para todo $w \in V$ é um isomorfismo. Se V é um $\mathbb{C}$-espaço vetorial de dimensão finita a correspondência ainda é biunívoca? Justifique.

(6) Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno canônico e $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador cuja matriz na base canônica é:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Mostre que T é diagonalizável. Encontre uma base ortonormal $\beta \subset \mathbb{R}^3$ formada por autovetores. Escreva a matriz associada a T na base β.

(7) Seja $T : V \to V$ um operador autoadjunto num $\mathbb{R}$-espaço vetorial de dimensão 2, munido de produto interno. Mostre que existe uma base ortonormal $\{v_1, v_2\} \subset V$ formada por autovetores de T.

(8) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno e $T : V \to V$ um operador linear idempotente, ou seja, $T^2 = T$. Prove que T é autoadjunto se, e somente se, $TT^* = T^*T$.

(9) Seja A uma matriz $n \times n$ com entradas reais tal que $A^2 + I = 0$. Prove que n é par e se $n = 2k$ então A é semelhante sobre $\mathbb{R}$ a uma matriz em blocos da forma

$$\begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

em que I é a matriz identidade de ordem k.

(10) Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno. Mostre que se $T : V \to V$ é uma função que preserva produto interno, ou seja, $\langle T(v), T(w)\rangle = \langle v, w\rangle$ para todo $v, w \in V$ então T é um operador linear injetivo.