Programa de Pós-Graduação
em Matemática
IM-UFBA

Prova de seleção para o mestrado em Matemática 2016.2
Data: 11/08/2016

Instruções:

- **TEMPO MÁXIMO DE PROVA: QUATRO HORAS.**
- Esta prova contém dez questões; todas as questões têm o mesmo valor.
- Identifique com clareza o espaço onde fizer cada questão. Justifique seus passos.
- Nenhuma consulta é permitida. **Calculadoras e celulares não são permitidos.**
- Respostas/conclusões devem ser escritas **com caneta**.
- Escreva seu nome em cada folha de resposta e enumere as páginas. Para facilitar a correção, **questões 1 a 5** devem estar num grupo de folhas e **questões 6 a 10** devem estar em outro grupo de folhas.
- O candidato só poderá deixar o local de prova depois de *transcorrida uma hora do seu início*, e não poderá levar a folha de questões e nem a folha de respostas.

Questões:

(1) Mostre que se uma sequência de Cauchy possui uma subsequência que é convergente, então ela própria é convergente.

(2) Demonstre o Teorema de Conservação do Sinal: Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua em $x_0 \in \mathbb{R}$ e $f(x_0) > 0$ então existe um intervalo aberto J que contém x_0 e que é tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in J$.

(3) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0; \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

(a) Determine $g'(x)$ para $x \neq 0$.

(b) Verifique que g é diferenciável em $x_0 = 0$ e escreva a equação da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 0.

(4) Seja f uma função real de variável real que é duas vezes diferenciável e tal que $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$ são negativas em todo o ponto $x \in \mathbb{R}$; seja ainda $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \int_0^x f(t)^2 \, dt.$$

Justifique que g é três vezes diferenciável, calcule $g''(x)$ e $g'''(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$ e aproveite o resultado para estudar, quanto à concavidade e inflexões, o gráfico de g.

(5) Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é racional;} \\ x & \text{se } x \text{ é irracional.} \end{cases}$$

Determine para quais valores de t a pré-imagem $f^{-1}(\{t\})$ é um aberto de $\mathbb{R}$.

(6) Escreva a expressão de uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cujo núcleo seja a reta $y = x$ e a imagem seja a reta $y = 2x$.

(7) Seja $\mathbb{V}$ o espaço vetorial das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e considere $\mathbb{W}_1 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = f(-x)\}$ e $\mathbb{W}_2 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = -f(-x)\}$.

(a) Mostre que $\mathbb{W}_1$ e $\mathbb{W}_2$ são subespaços vetoriais de $\mathbb{V}$.

(b) Mostre que $\mathbb{V} = \mathbb{W}_1 \oplus \mathbb{W}_2$.

(8) Sejam E, F espaços vetoriais de mesma dimensão finita n. Mostre que uma transformação linear $T : E \to F$ é injetiva se, e somente se, é sobrejetiva. A afirmação continua verdadeira em espaços de dimensão infinita? Se verdadeira prove e se falsa dê um contraexemplo.

(9) Mostre que se $v_1, \ldots, v_n$ são autovalores de uma transformação linear associados a autovalores distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, então $v_1, \ldots, v_n$ são linearmente independentes.

(10) (a) Mostre que dois espaços de mesma dimensão (finita) são isomorfos. Conclua que todo $\mathbb{Q}$-espaço vetorial de dimensão n é isormorfo a $\mathbb{Q}^n$.

(b) Mostre que $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ é infinita.