Programa de Pós-Graduação
em Matemática
IM-UFBA

Prova de seleção para o mestrado em Matemática 2015.2
Data: 08/06/2015

Instruções:

- **TEMPO MÁXIMO DE PROVA: QUATRO HORAS.**
- Esta prova contém dez questões; todas as questões têm o mesmo valor.
- Identifique com clareza o espaço onde fizer cada questão. Justifique seus passos.
- Nenhuma consulta é permitida. **Calculadoras e celulares não são permitidos.**
- Respostas/conclusões devem ser escritas **com caneta**.
- Escreva seu nome em cada folha de resposta e enumere as páginas. Para facilitar a correção, **questões 1 a 4** devem estar num grupo de folhas, **questões 5 a 7** devem estar em outro grupo de folhas e **questões 8 a 10** em outro grupo de folhas.
- O candidato só poderá deixar o local de prova depois de *transcorrida uma hora do seu início*, e não poderá levar a folha de questões e nem a folha de respostas.

Questões:

(1) Mostre que toda sequência convergente em $\mathbb{R}$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$.

(2) Use a definição formal de limite de função real para mostrar que $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$.

(3) Determine se a função real $f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ é diferenciável em $x_0 = 0$.

(4) (a) Derive a função $f(x) = \sqrt[3]{(e^{x^2}\cdot x^3+1)^2}$.

(b) Calcule $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin(x)}$.

(5) Considere o conjunto $X = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, isto é, o conjunto diferença entre o conjunto dos números reais e o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$. Mostre que X é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$. O conjunto X é um compacto de $\mathbb{R}$?

(6) Mostre que dois espaços vetoriais com dimensões (finitas) diferentes não podem ser isomorfos.

(7) Sejam E e F espaços vetoriais, $L : E \to F$ transformação linear e $N(L)$ seu núcleo. Mostre que

$$L \text{ é injetora} \iff N(L) = \{\vec{0}\}$$

onde $\vec{0}$ é o vetor nulo de E.

(8) Ache transformação linear $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que

$$N(L) = [(1,0,1,0),(-1,0,0,1)] \quad \text{e} \quad I(L) = [(1,-1,0,2),(0,1,-1,0)],$$

onde $N(L)$ é o núcleo de L e $I(L)$ é a imagem de L.

(9) Seja T a aplicação linear com domínio P_2 (o conjunto dos polinômios reais de grau menor ou igual a 2) e contra-domínio $\mathbb{R}$ definida por $T(p) = \int_0^1 p(t)\,dt$. Determine a matriz de T com respeito às bases $\{x^2, x, 1\}$ de P_2 e $\{1\}$ de $\mathbb{R}$.

(10) Seja R a rotação em $\mathbb{R}^3$ ao redor do eixo z, no sentido anti-horário, com centro na origem e ângulo $\pi/2$. Ou seja, R associa a cada ponto $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ um ponto $Q = (-y, x, z)$. Encontre o polinômio característico de R em relação a uma base de $\mathbb{R}^3$ e, a partir dele, determine os autovalores e autovetores de R (caso eles não existam, justifique sua conclusão com base nos cálculos feitos). Interprete geometricamente o resultado que você obteve.