Prova de seleção ao Programa de Mestrado do PPGMAT-UFBA - Semestre 2024.1

17 de novembro de 2023

Instruções: o tempo de prova é de 4 horas. A prova tem 10 problemas e cada problema vale 1 ponto. Numere as páginas de sua resolução e escreva seu nome no topo de cada página. Todas as resoluções devem ser escritas à caneta. Boa prova!

Problema 1. Seja $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear cuja matriz na base canônica é

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 7 \\ 2 & 8 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 8 & 12 \end{bmatrix}.$$

(a) Encontre uma base para o núcleo de A; (b) calcule as dimensões do núcleo e da imagem de A; (c) encontre uma base para a imagem de A.

Problema 2. Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ que é definido pela equação $T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_2)$. (a) Calcule o adjunto de T com respeito ao produto interno usual $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{6} x_j y_j$; (b) encontre um subespaço não-trivial de $\mathbb{R}^6$ invariante por T.

Problema 3. Sejam V e W dois subespaços ortogonais de $\mathbb{R}^n$. Sejam $\{v_1, \ldots, v_k\} \subset V$ e $\{w_1, \ldots, w_\ell\} \subset W$ conjuntos linearmente independentes. Prove que $\{v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_\ell\}$ é linearmente independente.

Problema 4. Considere em $\mathbb{R}^n$ o produto interno usual $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$. Mostre que $\|x\| = \sup_{\|y\|=1} \langle x, y \rangle$.

Problema 5. Seja $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um operador linear. (a) Prove que A é inversível se e somente se 0 não é um autovalor de A. (b) Suponha que A é inversível. Qual é a relação entre os autovalores de A e os autovalores de A^{-1}?

Problema 6. Calcule $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^7 2^n + (n^2+7n+3)3^n}$.

Problema 7. Seja (x_n) uma sequência de números reais. Suponha que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. (a) Prove que $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|$. (b) Vale a recíproca?

Problema 8. Mostre que a derivada segunda de um polinômio de grau ímpar com coeficientes reais sempre tem algum zero.

Problema 9. Sejam $K \subset \mathbb{R}$ compacto e $f : K \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que f é uniformemente contínua.

Problema 10. Seja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável com derivada limitada. Mostre que

$$\sup_{a<x<y<b} \left| \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \right| = \sup_{a<x<b} |f'(x)|.$$