Instituto de Matemática e Estatística da UFBA

Programa de Doutorado em Matemática UFBA/UFAL

Prova de seleção para o Doutorado em Matemática 2018.1
Data: 15/01/2018

Instruções:

- **TEMPO MÁXIMO DE PROVA: CINCO HORAS.**
- Esta prova contém cinco questões; todas as questões têm o mesmo valor.
- Identifique com clareza o espaço onde fizer cada questão. Justifique seus passos em todas as questões.
- Nenhuma consulta é permitida. **Calculadoras e celulares não são permitidos.**
- Respostas/conclusões/provas/argumentos/demonstrações devem ser escritas **com caneta**.
- Escreva seu nome em cada folha de resposta e enumere as páginas.
- O candidato só poderá deixar o local de prova depois de *transcorrida uma hora do seu início*, e não poderá levar a folha de questões e nem a folha de respostas.

Questões:

(1) Diga se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa e justifique.

(a) a série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ é convergente;

(b) a mesma série acima é absolutamente convergente;

(c) o conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \notin \mathbb{Z}^2\}$ é conexo por arcos mas não é convexo.

(2) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Assuma que não exista $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$ e $f'(x) = 0$. É verdade que $S = \{x \in [0,1] : f(x) = 0\}$ é finito? Justifique.

(3) Dada uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, onde X é um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^k$, suponha que exista $c \in \mathbb{R}$ tal que $\sqrt[n]{\|f_n(x)\|} \leq c < 1$ para todo $x \in X$ e todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, onde $\|\cdot\|$ denota uma norma em $\mathbb{R}^k$ e $k > 1$ é um número inteiro fixado. Prove que $\sum_{n\geq 1} \|f_n(x)\|$ e $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ convergem uniformemente em X.

(4) Seja $f : U \to \mathbb{R}$ diferenciável em um aberto conexo U de $\mathbb{R}^n$ com derivada $Df : U \to L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ tal que $Df \equiv 0$, onde $n > 1$ é um inteiro fixado. Mostre que f é constante.

(5) Seja $f : U \to \mathbb{R}^m$ diferenciável em um aberto *convexo* U de $\mathbb{R}^n$, com derivada $Df : U \to L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ limitada, onde $n > 1$ e $m \geq 1$ são números inteiros fixados. Mostre que f é Lipschitz e

$$Lip(f) = \sup_{x\in U}\{\|Df(x)\|_{op}\},$$

onde $\|Df(x)\|_{op}$ denota a norma do operador e $Lip(f)$ é a menor constante de Lipschitz de f.