Programa de Doutorado em Matemática UFBA/UFAL IM-UFBAs

Prova de seleção para o Doutorado em Matemática 2018.1
Data: 04/12/2017

Instruções:

- **TEMPO MÁXIMO DE PROVA: CINCO HORAS.**
- Esta prova contém cinco questões; todas as questões têm o mesmo valor.
- Identifique com clareza o espaço onde fizer cada questão. Justifique seus passos em todas as questões.
- Nenhuma consulta é permitida. **Calculadoras e celulares não são permitidos.**
- Respostas/conclusões/provas/argumentos/demonstrações devem ser escritas **com caneta**.
- Escreva seu nome em cada folha de resposta e enumere as páginas.
- O candidato só poderá deixar o local de prova depois de *transcorrida uma hora do seu início*, e não poderá levar a folha de questões e nem a folha de respostas.

Questões:

(1) Diga se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa e justifique.

(a) a série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$ é convergente.

(b) toda função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^n$ é uniformemente contínua (onde $\mathbb{Z}$ é o subconjunto de $\mathbb{R}$ formado por todos os números inteiros e $n > 1$ é um número inteiro fixado).

(2) Sejam $n > 1$ um número inteiro e K, F subconjuntos disjuntos de $\mathbb{R}^n$ tais que $K \cap F = \emptyset$, K compacto e F fechado. Mostre que $d(K, F) > 0$, onde $d(K, F) = \inf\{d(x, y) : x \in K, y \in F\}$ é a distância entre K e F, e $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é a distância euclidiana.

(3) Seja $f : U \to \mathbb{R}^m$ diferenciável em um aberto *convexo* U de $\mathbb{R}^n$, com derivada $Df : U \to L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ limitada, onde $n > 1$ e $m \geq 1$ são números inteiros fixados.

(a) Mostre que f é Lipschitz e

$$Lip(f) = \sup_{x \in U} \{\|Df(x)\|_{op}\},$$

onde $\|Df(x)\|_{op}$ denota a norma do operadore $Lip(f)$ é a menor constante de Lipschitz de f.

(b) Se $f : U \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável em um aberto *conexo e limitado* U de $\mathbb{R}^n$, com derivada $Df : U \to L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ limitada, então f ainda é Lipschitz? Justifique.

(4) Seja $f_k : U \to \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$ uma sequência de aplicações duas vezes diferenciáveis no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ onde $n > 1$ é um número inteiro fixado. Assuma que $(f_k)_{k \geq 1}$ converge pontualmente a uma aplicação $f : U \to \mathbb{R}$. Suponha que existam $x_0 \in U$ e $C > 0$ tais que $\|D^2 f_k(x)\|_{op} < C$, $\forall x \in U$, $\forall k \in \mathbb{N}$ e $\|Df_k(x_0)\|_{op} < C$, $\forall k \in \mathbb{N}$, onde $\| \cdot \|_{op}$ denota a norma do operador.Mostre que $f \in C^1$.

(5) Seja G_n^+ a família das matrizes reais simétricas e definidas positivas de ordem $n > 1$, onde n é um número inteiro fixado. Mostre que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{Ax \cdot x}{2}\right) dx = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det(A)}}, \quad \forall A \in G_n^+,$$

onde $u \cdot v$ denota o produto interno euclidiano de dois vetores $u, v \in \mathbb{R}^n$, e lembrando que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2}\, dt = \sqrt{\pi/a}$ para todo $a > 0$ fixado.