Programa de Pós-Graduação
em Matemática
IME-UFBA

Prova de seleção para o Mestrado em Matemática 2025.1
Área de Concentração: Matemática
Data: 25/11/2024

Instruções:

- **TEMPO MÁXIMO DE PROVA: QUATRO HORAS.**
- Esta prova vale 10 (dez) pontos.
- Identifique com clareza o espaço onde fizer cada questão. Justifique seus passos.
- Nenhuma consulta é permitida. **Calculadoras e celulares não são permitidos.**
- Respostas/conclusões devem ser escritas **com caneta**.
- Escreva seu nome em cada folha de resposta e enumere as páginas. Para facilitar a correção, **questões 1 a 3** devem estar num grupo de folhas e **questões 4 a 6** devem estar em outro grupo de folhas.
- O candidato só poderá deixar o local de prova depois de *transcorrida uma hora do seu início*, e não poderá levar a folha de questões e nem a folha de respostas.

Questões:

(1) (2,0 pts) Considere a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é irracional; e} \\ \frac{1}{q} & \text{se } x = \frac{p}{q} \text{ com } q > 0 \text{ e mdc}(p,q) = 1. \end{cases}$$

Note que $f(0) = f(1) = 1$.

(a) (vale 0,5 pt) Mostre que: dado $z > 0$ qualquer fixado, apenas um número finito de pontos (x, y) do gráfico da f satisfazem $y \geqslant z$.

(b) (vale 0,5 pt) Seja $a \in [0,1]$ um número racional. f é contínua em a ? Justifique cuidadosamente a sua resposta.

(c) (vale 1,0 pt) Seja $a \in [0,1]$ um número irracional. f é contínua em a ? Justifique cuidadosamente a sua resposta.

(2) (1,0 pt) Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais.

(a) (vale 0,5 pt) Suponha que $|x_n - x_{n+1}| \leq \frac{1}{n^2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostre que a sequência converge.

(b) (vale 0,5 pt) Suponha agora que $|x_n - x_{n+1}| \leq \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A sequência necessariamente converge ? Caso sim, justifique, caso não dê um contra-exemplo.

(3) (2,0 pts) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + x^2 \mathrm{sen}(\frac{1}{x})\,, & x \neq 0, \\ 0\,, & x = 0\,. \end{cases}$$

(a) (vale 1,0 pt) Mostre que f é uma função diferenciável com $f'(0) > 0$.

(b) (vale 1,0 pt) Mostre que em nenhum intervalo contendo o ponto zero a função f é monótona.

****

(4) (2,0 pts)

Se verdadeiro, prove. Se falso, dê contra-exemplo.

(a) Se λ é autovalor do operador linear invertível A então λ^{-1} é autovalor de A^{-1} .

(b) Se A é um operador linear auto-adjunto (um operador linear $A : E \to E$ num espaço vetorial munido de produto interno, chama-se auto-adjunto se $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ para todos $x, y \in E$) e B é um operador linear invertível então $B^{-1}AB$ é auto-adjunto.

(c) Todo operador linear injetivo no espaço $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (definido logo abaixo) é também sobrejetivo.
O espaço $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{a \ : \ a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$ é o conjunto de todas as sequências de números reais . A soma de dois vetores e o produto por escalar são definidos da seguinte maneira:
Para dois vetores $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, \dots)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, \dots)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ temos:
1. Soma de vetores: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3, \dots)$
2. Produto por escalar: $\alpha \cdot \mathbf{u} = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3, \dots)$

(d) Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão finita com produto interno. Seja $\beta \subset V$ um conjunto ortogonal de vetores não nulos. Então β é um conjunto linearmente independente.

(5) (1,0 pts) Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Uma projeção é uma aplicação linear $\pi : V \to V$ tal que $\pi^2 = \pi$. Mostre que toda projeção $\pi : V \to V$ satisfaz $V = \ker(\pi) \oplus \mathrm{im}(\pi)$.

(6) (2,0 pt) Sejam $n \geqslant 2$ e V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão finita n e base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$.

Chamamos de *funcional linear sobre* V a qualquer aplicação $f : V \to \mathbb{R}$ que seja uma transformação linear.

Definindo de maneira usual as operações de soma e multiplicação por escalar para funcionais lineares, obtemos o chamado *espaço dual* de V, que é o espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ dado por

$$V^* = \{\ f \mid f \text{ é um funcional linear}\}.$$

Observe que o vetor nulo de V^* é o funcional identicamente nulo $\mathbb{O}$.

(a) (vale 1,0 pt) Usando convenientemente a base B acima e a notação dos *deltas de Kronecker*, exiba explicitamente (*definindo cuidadosamente* cada um dos funcionais exibidos) uma base B^* para o espaço dual V^*.

Verifique cuidadosamente que o conjunto de funcionais que você exibiu é, de fato, uma base para o espaço dual.

Qual é, portanto, a dimensão do espaço dual ?

(b) (vale 0,5 pt) Fixado um vetor $v \in V$ qualquer, podemos definir a *aplicação de avaliação em* v, eval_v, que é a função definida em V^* a valores reais que satisfaz $\text{eval}_v(f) = f(v)$ para todo funcional linear f sobre V. Mostre que a função de avaliação em v é um elemento do *bidual* de V, i.e., $\text{eval}_v \in V^{**}$.

(c) (vale 0,5 pt) Mostre que

$$\{\text{eval}_{v_1}, \dots, \text{eval}_{v_n}\}$$

é uma base do espaço bidual V^{**}.

Justifique cuidadosamente todas as suas afirmações.

A base acima sugere a existência de um *isomorfismo canônico* entre V e V^{**}. Exiba esse isomorfismo, justificando sucintamente o motivo pelo qual é um isomorfismo.