Programa de Pós-Graduação
em Matemática
IME-UFBA

Prova de seleção para o Mestrado em Matemática 2024.2
Área de Concentração: Matemática
Data: 10/06/2024

Instruções:

- **TEMPO MÁXIMO DE PROVA: QUATRO HORAS.**
- Esta prova vale 10 (dez) pontos.
- Identifique com clareza o espaço onde fizer cada questão. Justifique seus passos.
- Nenhuma consulta é permitida. **Calculadoras e celulares não são permitidos.**
- Respostas/conclusões devem ser escritas **com caneta**.
- Escreva seu nome em cada folha de resposta e enumere as páginas. Para facilitar a correção, **questões 1 a 3** devem estar num grupo de folhas e **questões 4 a 6** devem estar em outro grupo de folhas.
- O candidato só poderá deixar o local de prova depois de *transcorrida uma hora do seu início*, e não poderá levar a folha de questões e nem a folha de respostas.

Questões:

(1) (2,0 pts) No que segue, **sequência** se refere sempre a uma sequência de números reais.

(a) Mostre que toda sequência de Cauchy é limitada e que se uma sequência de Cauchy possui uma subsequência convergente, então ela própria é convergente.

(b) Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência monótona não-decrescente (i.e., para todo n em $\mathbb{N}$ vale $x_n \leqslant x_m$ para todo $m \geqslant n$) e assuma que existe o número real

$$s = \sup\{x_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Mostre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente. Em seguida, enuncie (sem provar) o resultado análogo para sequencias monótonas não-crescentes.

(c) Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de números reais, um termo x_p da sequência é dito ser um **pico** se $x_p \geqslant x_n$ para todo $n \geqslant p$. Discutindo sobre a finitude ou não do conjunto $\{p \in \mathbb{N} : x_p \text{ é um pico}\}$, prove que qualquer sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais possui ou uma subsequência monótona não-decrescente ou uma subsequência monótona não-crescente.

(d) Sabemos que a construção da reta garante a validade do **Axioma do Supremo**, o qual declara que todo subconjunto da reta que seja limitado superiormente admite supremo. Use esse axioma e os itens anteriores para mostrar que toda sequência de Cauchy é convergente.

(2) (1,0 pt) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(a) Determine $g'(x)$ para $x \neq 0$.

(b) Verifique que g é diferenciável em $x_0 = 0$. A derivada $g'(x)$ é contínua em $x_0 = 0$? Justifique cuidadosamente sua resposta.

(c) Escreva a equação da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 0.

(3) (2,0 pts) Uma **partição** do intervalo $[a, b]$ é um conjunto finito $P \subset [a, b]$ que contém a e b. Para cada função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e partição P de $[a, b]$ defina $V(f; P) = \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$, onde $P = \{t_0, \dots, t_n\}$, $t_0 = a$, $t_n = b$ e $t_0 < t_1 < \dots < t_n$. Dizemos que f tem **variação limitada** se $\sup_P V(f; P) < \infty$, onde o supremo é tomado sobre todas as partições de $[a, b]$.

(a) Mostre que toda função monótona é de variação limitada.

(b) Considere a função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ linear por partes com $f(0) = 0$ e $f(\frac{1}{n}) = \frac{(-1)^n}{n}$ para $n \in \{1, 2, \dots\}$. Esta função é contínua? É uniformemente contínua? Tem variação limitada?

(4) (2,0 pts) Sejam $\mathbb{K}$ um corpo (com $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear. Suponha que todo vetor não-nulo de V é um autovetor de T.

(a) Mostre que se $v_1, v_2 \in V$ são linearmente independentes e $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ são tais que $T(v_1) = \lambda_1 v_1$, $T(v_2) = \lambda_2 v_2$ e $T(v_1 + v_2) = \lambda(v_1 + v_2)$, então $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$.

(b) Mostre que se $\mathcal{B}$ é uma base de V, então existe um autovalor λ de T tal que $\mathcal{B}$ está contido no auto-espaço associado a λ. Conclua que $T = \lambda I$.

(5) (2,0 pts) Sejam $\mathbb{K}$ um corpo (com $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear.

(a) Dizemos que T é **nilpotente** se existe um inteiro positivo k tal que $T^k = 0$ e $T^{k-1} \neq 0$. Mostre que se T é nilpotente e possui algum autovalor, então esse autovalor é nulo. Além disso, exiba um autovetor associado a esse autovalor nulo.

(b) Suponha que V tem dimensão finita e está munido do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dizemos que T é **auto-adjunto** se para todos $v, w \in V$ vale $\langle T(v), w \rangle = \langle v, T(w) \rangle$. Mostre que se T é nilpotente e auto-adjunto, então $T = 0$.

(6) (1,0 pt) Considere o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ como espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais, com as operações usuais. Seja $\mathbb{P}$ o conjunto dos números inteiros positivos primos e

$$S = \{\log(p) : \ p \in \mathbb{P}\}$$

onde $\log$ é a função logaritmo natural. Prove que S é linearmente independente. Conclua (necessariamente usando o resultado anterior) que $\mathbb{R}$ tem dimensão infinita sobre $\mathbb{Q}$, justificando cuidadosamente.