Programa de Pós-Graduação
em Matemática
IME-UFBA

Prova de seleção para o Mestrado em Matemática 2023.1
(Área de Concentração de Matemática)
Data: 29/11/2022

Instruções:

- **TEMPO MÁXIMO DE PROVA: QUATRO HORAS.**
- Esta prova contém dez questões; todas as questões têm o mesmo valor.
- Identifique com clareza o espaço onde fizer cada questão. Justifique seus passos.
- Nenhuma consulta é permitida. **Calculadoras e celulares não são permitidos.**
- Respostas/conclusões devem ser escritas **com caneta**.
- Escreva seu nome em cada folha de resposta e enumere as páginas. Para facilitar a correção, **questões 1 a 5** devem estar num grupo de folhas e **questões 6 a 10** devem estar em outro grupo de folhas.
- O candidato só poderá deixar o local de prova depois de *transcorrida uma hora do seu início*, e não poderá levar a folha de questões e nem a folha de respostas.

Questões:

(1) Mostre que toda sequência convergente em $\mathbb{R}$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$.

(2) Demonstre que toda função polinomial $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, com coeficientes reais e grau ímpar, tem alguma raíz real.

(3) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{se } x \neq 0; \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

(a) Determine $g'(x)$ para $x \neq 0$.

(b) Verifique que g é diferenciável em $x_0 = 0$ e escreva a equação da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 0.

(4) Seja f uma função real de variável real que é duas vezes diferenciável e tal que $f'(x)$ e $f''(x)$ são positivas em todo o ponto $x \in \mathbb{R}$; seja ainda $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \int_0^x f(t^2)dt.$$

Justifique que g é três vezes diferenciável, calcule $g''(x)$ e $g'''(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$ e aproveite o resultado para estudar, quanto à concavidade e inflexões, o gráfico de g.

(5) Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é racional;} \\ x & \text{se } x \text{ é irracional.} \end{cases}$$

Mostre que f não é integrável à Riemann em $[0,1]$, ou seja, mostre que não existe $\int_0^1 f(x)\,dx$ no sentido de Riemann.

(6) Mostre que dois espaços vetoriais com dimensões (finitas) diferentes não podem ser isomorfos.

(7) Sejam V e U espaços vetoriais e $T : V \to U$ uma transformação linear, de núcleo W, e sejam $v \in V$, $u \in U$ tais que $T(v) = u$. Seja $v + W$ a classe lateral $v + W = \{v + w : w \in W\}$. Mostre que $v + W = \{x \in V : T(x) = u\}$.

(8) Ache transformação linear $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que

$$N(L) = [(1,0,1,0), (-1,0,0,1)] \quad \text{e} \quad I(L) = [(1,-1,0,2), (0,1,-1,0)],$$

onde $N(L)$ é o núcleo de L, $I(L)$ é a imagem de L e $[u,v]$ denota o subespaço vetorial gerado pelos vetores u, v.

(9) Seja T a aplicação linear com domínio P_2 (o conjunto dos polinômios reais de grau menor ou igual a 2) e contradomínio $\mathbb{R}$ definida por $T(p) = p(-1)$. Determine a matriz de T com respeito às bases $\{x^2, x, 1\}$ de P_2 e $\{1\}$ de $\mathbb{R}$.

(10) Sejam n um inteiro positivo e $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear que é uma isometria, i.e., $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(a) Mostre que, se n for ímpar, então existe um autoespaço associado a um autovalor 1 ou -1.

[Dica: use o resultado da questão (2) desta prova.]

(b) O mesmo vale para dimensões pares? Justifique cuidadosamente a sua resposta, provando-a, se for positiva; ou apresentando contraexemplo, se for negativa.