Universidade Federal da Bahia
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática

Nome: ____

Prova de Seleção para o Curso de Mestrado em Matemática da UFBA-2023.2

A prova deve ser escrita em caneta azul ou preto. Duração 4 horas.

Parte I

Nas questões a seguir, assinale a(s) alternativa(s) corretamente com verdadeiro (V) ou falso (F). Cada questão vale 1 ponto.

1. Seja V o espaço vetorial real de todos os polinômios com coeficientes reais de grau no máximo n (incluindo o polinômio nulo), na indeterminada t. Consideremos o operador linear $T : V \to V$ definido por $T(p) = p'$ (derivada de p), para todo $p \in V$.

(a) [____] 0 é o único autovalor de T.

(b) [____] T é injetivo.

(c) [____] T é sobrejetivo.

(d) [____] T é diagonalizável.

(e) [____] O polinômio característico de T é x^{n+1}.

2. Seja V o espaço vetorial real de todas as matrizes reais $n \times n$. Consideremos o operador linear $T : V \to V$, definido por $T(A) = A^t$ (transposta de A), para todo $A \in V$, e seja A_T a matriz associada a T na base canônica.

(a) [____] 1 e -1 são os únicos autovalores de T.

(b) [____] O autoespaço associado a 1 tem dimensão $\frac{n(n+1)}{2}$.

(c) [____] O autoespaço associado a -1 tem dimensão $\frac{n(n-1)}{2}$.

(d) [____] $\det(A_T) \in \{-1, 1\}$.

(e) [____] $\ker T \neq \{\underline{0}\}$.

3. Seja V um espaço vetorial real de dimensão n munido de um produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e sejam $S_1 = \{v_1, ..., v_n\}$ uma base de V e $S_2 = \{w_1, ..., w_n\}$ um sistema de n vetores distintos de V. Adicionalmente, sejam A e B dois operadores lineares em V tais que $\langle Au, Au \rangle = \langle Bu, Bu \rangle$, para todo $u \in V$.

(a) [____] As hipóteses dadas implicam que $\langle Au, Av \rangle = \langle Bu, Bv \rangle$, para todo $u, v \in V$.

(b) [____] Não existe um operador ortogonal $C : V \to V$ tal que $A = CB$.

(c) [____] Existe, e não é único, um operador linear $F : V \to V$ tal que $F(v_i) = w_i$ para todo $i = 1, 2, ..., n$.

(d) [____] Existe um automorfismo $G : V \to V$ tal que $G(S_1) = S_2$ se, e somente se, S_2 é linearmente independente.

(e) [____] Se S_2 é linearmente independente e $\langle v_i, v_j \rangle = \langle w_i, w_j \rangle$, para todo $i, j = 1, \ldots, n$. Então existe um automorfismo ortogonal $H : V \to V$ tal que $Hv_i = w_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável. A reta horizontal $y = L$ é chamada assíntota horizontal à direita da curva $y = f(x)$ se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.

(a) [____] Se $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$, então f possui assíntota horizontal à direita.

(b) [____] Se $f'(x_0) = 0$, então x_0 é extremo de f.

(c) [____] Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in A \subset \mathbb{R}$, então a restrição de f a A é crescente.

(d) [____] Se $f'(x)$ é nula em infinitos pontos, então f não pode ser estritamente crescente.

(e) [____] Se x_0 é um ponto de inflexão de f, então x_0 é extremo de f'.

5. Considere as seguintes séries e analise as afirmações a seguir.

(a) [____] $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, se $a_n \to 0$.

(b) [____] Se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

(c) [____] $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = \frac{2}{3}$.

(d) [____] A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ é convergente.

(e) [____] A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n^2}$ é divergente.

6. Considere as seguintes sequências de números reais e analise as afirmações a seguir.

(a) [____] Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, então $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

(b) [____] Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente, então $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

(c) [____] Toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ é convergente.

(d) [____] Se $|a_n| \to a$, com $a \in [0, +\infty)$, então $a_n \to a$ ou $a_n \to -a$.

(e) [____] Se $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$, então $\ln a_n \to 0$.

Parte II

Resolver as seguintes questões, justificando por extenso cada resposta. Cada questão vale 1 ponto.

1. Considere a função

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (3z, 2y-x, -y) \end{array}$$

e as bases

$$B = \{(2,0,0), (-1,-1,0), (1,1,1)\} \quad \text{e} \quad B' = \{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$$

para o domínio e o contradomínio respectivamente.

(a) Verifique que T é uma transformação linear.

(b) Determine a matriz A associada a T respeito às bases B e B'.

(c) Determine $\ker T$ e $\operatorname{Im} T$. Em particular, determinar uma base e a dimensão para cada um desses espaços.

(d) Estude a injetividade e a sobrejetividade de T .

2. Demonstre a seguinte afirmação.

Seja A uma matriz superiormente triangular de ordem n. Então o operador linear de $\mathbb{R}^n$ definido por A é um automorfismo se e somente se todos os elementos da diagonal principal de A são não nulos.

3. Seja $f : [a,b] \to [a,b]$ contínua. Prove que f possui pelo menos um ponto fixo, i.e. existe $x \in [a,b]$ tal que $f(x) = x$.

4. Prove que: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz $|f(x) - f(y)| \le (x-y)^2$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se, somente se, f é constante.