



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



A DINÂMICA DE APLICAÇÕES DEFINIDAS POR UMA SÉRIE DE POTÊNCIAS  
NO ESPAÇO DE MATRIZES QUADRADAS

*Paulo Henrique Ribeiro do Nascimento*

**Salvador-Bahia**

Janeiro 2004

A DINÂMICA DE APLICAÇÕES DEFINIDAS POR UMA SÉRIE DE POTÊNCIAS  
NO ESPAÇO DE MATRIZES QUADRADAS

*Paulo Henrique Ribeiro do Nascimento*

*Dissertação apresentada ao colegiado do curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.*

**Banca examinadora:**

---

*Prof. Dr. Vilton Jeovan Viana Pinheiro (Orientador)*

---

*Prof. Dr. Augusto Armando de Castro Jr.*

---

*Prof. Dr. Joseph Nee Anyah Yartey*

DO NASCIMENTO, P.

“A DINÂMICA DE APLICAÇÕES DEFINIDAS POR UMA SÉRIE DE POTÊNCIAS NO ESPAÇO DE MATRIZES QUADRADAS” / Paulo Henrique Ribeiro do Nascimento. Salvador-Ba, 2004.

**Orientador:** Dr. Vilton Jeovan Viana Pinheiro (IMPA).

Dissertação de Mestrado apresentada ao curso de Pós-graduação em Matemática da UFBA, 62 páginas.

**Palavras-Chave:** Dinâmica unidimensional, complexa e em  $\mathcal{A}_m$ . Família quadrática, conjuntos de Julia e Mandelbrot.

*“Os sábios são otimistas porque a sua paixão lhes traz alegrias freqüentes evitando-lhes tristezas; não desesperam por nunca alcançar a verdade e recompõem-se facilmente por nunca estarem privados do prazer da investigação. A grande maioria permanece jovem no coração. Talvez nunca tenham sido tão jovens quanto os outros, mas, permanecem-no durante mais tempo. A sua ingenuidade, que transparece aos olhos de todos, é um sinal de juventude. Talvez seja porque só a tristeza envelhece enquanto que a paixão acarreta alegrias sem dor”.*  
(Cit. in Appell, 1925:91)

**Jules Henri Poincaré.**

# Resumo

*Sistemas dinâmicos* são objetos matemáticos utilizados para modelar fenômenos físicos cujo o estado (ou descrição instantânea) muda com o tempo ( $t$ ). A variável tempo pode ser discreta ( $t \in \mathbb{Z}$ ) ou contínua ( $t \in \mathbb{R}$ ). Em geral, dentre os sistemas dinâmicos existentes, o que mais entendemos são os determinísticos e os estocásticos. O primeiro, significa que podemos prever situações futuras do sistema partindo de observações feitas anteriormente, e o segundo, que a evolução do sistema é governada por uma certa probabilidade. Um sistema é caótico se pequenas mudanças em suas condições iniciais provocam grandes mudanças em seu comportamento, caso contrário, o sistema é estável. Nesta dissertação, estudamos a estabilidade de sistemas dinâmicos determinísticos com tempo discreto.

Ao leitor que desconhece a dinâmica das aplicações unimodais em  $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ , com parâmetros reais, sugiro a leitura do Apêndice A. Neste, ainda tomamos como exemplo, a família de aplicações quadráticas. Esta família constitui o modelo no qual teremos subsídios para uma compreensão de certos elementos básicos existentes em um sistema dinâmico de outra dimensão.

Vencida esta etapa, temos no Capítulo 1, o estudo da dinâmica de aplicações holomorfas, onde destacamos o Teorema de Montel 1.15 e uma versão equivalente dada pelo Teorema 1.21, que caracteriza o conjunto de Julia, fecho do conjunto de pontos periódicos repulsores de uma aplicação holomorfa  $f$ , como um conjunto de pontos  $z \in \mathbb{C}$  tais que a família  $\{f^n\}_{n \geq 0}$  é não-normal em  $z$ .

Provamos, no Capítulo 2, que qualquer que seja a matriz do espaço  $\mathbb{R}^{m \times m}$ , esta possui uma forma de Jordan equivalente. Definimos, ainda, uma série de potências no espaço  $\mathbb{R}^{m \times m}$  a coeficientes reais e estabelecemos sob que condições existe um subconjunto de  $\mathbb{R}^{m \times m}$  tal que esta série convirja.

No Capítulo 3, exibimos alguns resultados sobre a dinâmica das aplicações definidas por séries de potências a coeficientes reais. O primeiro, apresenta-se um resultado que garante a existência de uma classe de matrizes semelhantes cujas órbitas também são semelhantes. Tomamos, portanto, como representante dessas classes uma matriz de Jordan. Este fato simplifica, um pouco, o nosso estudo

da dinâmica em  $\mathcal{A}_m$ . Os demais resultados, alguns destes inerentes, são estudados em  $\mathcal{A}_2$ , visto que, existem 4 classes a analisar e pode-se ter uma noção geral do estudo em  $\mathcal{A}_m$ . Dentre estes, temos como principais resultados desta dissertação, o Teorema A, página 33, que nos garante que, em contraste com o fato de polinômios em  $\mathbb{C}$  apresentarem infinitas órbitas periódicas, a quantidade de órbitas periódicas atratoras é finita e limitada por seu grau e o Teorema B, página 35, que afirma que se um polinômio em  $\mathbb{C}$  de grau  $\eta \geq 2$ , a coeficientes reais (com a condição adicional de que o conjunto de pontos críticos está contido em  $\mathbb{R}$ ) tem órbita  $\mathcal{O}(p)$  periódica atratora contida em  $\mathbb{R}$ , então a órbita  $\mathcal{O}(p \cdot I_d)$ , onde  $I_d$  é matriz identidade em  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ , é periódica atratora.

# Abstract

*Dynamical systems* are mathematical objects used to model physical phenomena whose state (or instantaneous description) change with the time ( $t$ ). The variable time can be discrete ( $t \in \mathbb{Z}$ ) or continuous ( $t \in \mathbb{R}$ ). Generally, among the existent dynamic systems, the most understood are deterministic and stochastic. The first, means that we can foresee future states of the system from observations done previously, and the second, that the evolution of the system is governed by a certain probability. A system is *chaotic* if small changes in its initial conditions provoke great changes in its behavior, otherwise, the system is *stable*. In this dissertation, we studied the stability of deterministic dynamic systems with discrete time.

To the reader that ignores the dynamics of the unimodal maps in  $I \subset \mathbb{R}$ , with real parameters, we suggest the reading of the Appendix A. In this, we still took as an example, the family of quadratic maps. This family constitutes the model in which we will have subsidies for an understanding of certain existent basic elements in a dynamic system of another dimension.

Won this stage, we have in the Chapter 1, the study of the dynamics of holomorphic applications, where we detached the Montel's Theorem 1.15 and an equivalent version given by the Theorem 1.21, that characterizes Julia's set, bolt of the set of repulsive periodic points of an holomorphic map  $f$ , as the set of points  $z \in \mathbb{C}$  such as the family  $\{f^n\}_{n \geq 0}$  is no-normal in  $z$ .

We proved, in the Chapter 2, that for all matrix of the space  $\mathbb{R}^{m \times m}$ , this possesses a equivalent Jordan form. We defined, still, a power series in the space  $\mathbb{R}^{m \times m}$  with real coefficients and we established under that conditions exist a subset of  $\mathbb{R}^{m \times m}$  such that this series converges.

In the Chapter 3, we exhibited some results on the dynamics of the maps defined by power series with real coefficients. The first, comes a result that guarantees the existence of a class of similar matrix whose orbits are also similar. We took, therefore, as representative of those classes a Jordan matrix. This fact simplifies, a little, our study of the dynamics in  $\mathcal{A}_m$ . The other results, some of these

inherent ones, are studied in  $\mathcal{A}_2$ , because, exist 4 classes to analyze and a general notion of the study can be had in  $\mathcal{A}_m$ , among these, we have as main results of this dissertation, the Theorem A, page 33, which guarantees us that, in contrast with the fact that polynomials in  $\mathbb{C}$  present infinite periodic orbits, the amount of attractors periodic orbits is finite and limited by its degree and the Theorem B, page 35, that affirms if a polynomial in  $\mathbb{C}$  of degree  $\eta \geq 2$ , with real coefficients (with the additional condition that the set of critical points is contained in  $\mathbb{R}$ ) its attractor periodic orbit  $\mathcal{O}(p)$  contained in  $\mathbb{R}$ , then  $\mathcal{O}(p \cdot \mathbf{I}_d)$ , where  $\mathbf{I}_d$  is the identity matrix in  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ , is an attractor periodic orbit.

# Sumário

|   |            |
|---|------------|
| <b>Resumo</b>   | <b>v</b>   |
| <b>Abstract</b>   | <b>vii</b> |
| <b>Preliminares</b>   | <b>1</b>   |
| <b>1 A dinâmica das aplicações holomorfas</b>                           | <b>5</b>   |
| 1.1 O espaço de funções contínuas em $\mathbb{C}$ . . . . .             | 5          |
| 1.2 O conjunto de Julia . . . . .                                       | 14         |
| <b>2 O espaço <math>\mathbb{R}^{m \times m}</math></b>                  | <b>21</b>  |
| 2.1 Série de potências . . . . .  | 23         |
| <b>3 A dinâmica das aplicações em <math>\mathcal{A}_m</math></b>        | <b>27</b>  |
| <b>A A dinâmica das aplicações unimodais em <math>\mathbb{R}</math></b> | <b>36</b>  |
| A.1 Aplicações quadráticas em $\mathbb{R}$ . . . . .                    | 40         |
| A.1.1 O diagrama de bifurcações . . . . .                               | 47         |
| A.2 Aplicações quadráticas em $\mathbb{C}$ . . . . .                    | 48         |
| A.2.1 O conjunto de Mandelbrot . . . . .                                | 50         |
| A.3 A família quadrática em $\mathcal{A}_2$ . . . . .                   | 55         |
| <b>Bibliografia</b>   | <b>57</b>  |
| <b>Índice Remissivo</b>   | <b>59</b>  |

# Lista de Figuras

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 3.1 | Diagrama de folhas e fibras . . . . .                                   | 28 |
| 3.2 | Subespaço de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ das matrizes de Jordan . . . . . | 28 |
| 3.3 | Aplicações $f$ tais que $Sf < 0$ e $ Df^m(p)  = 1$ . . . . .            | 32 |
| A.1 | A família quadrática . . . . .  | 46 |
| A.2 | Diagrama de bifurcação . . . . .  | 48 |
| A.3 | Janelas do diagrama de bifurcações . . . . .                            | 48 |
| A.4 | O conjunto de Mandelbrot. . . . .                                       | 51 |
| A.5 | O conjunto de Mandelbrot e os conjuntos Julia . . . . .                 | 52 |

# Lista de Tabelas

|     |  |    |
|-----|--|----|
| A.1 | Classificação dos pontos fixos na família quadrática quanto à sua hiperbolicidade. . . . | 40 |
| A.2 | Relação entre pontos fixos e órbitas periódicas de período $n$ em $f_1^n$ . . . . .      | 45 |

# Preliminares

Seja  $\mathbb{X}$  um espaço métrico e  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$  uma aplicação contínua. As iterações de  $f$  são as aplicações  $f^n, n \in \mathbb{N}$ , obtidas de forma indutiva por  $f^0 = I_d, f^1 = f$  e  $f^{n+1} = f \circ f^n$ . Se  $f$  é uma bijeção, podemos então definir a aplicação  $f^{-n} = (f^{-1})^n, n \in \mathbb{N}$ , porém, se  $f$  é não inversível, definimos  $f^{-n}(y) = \{x; f^n(x) = y\}$ . O conjunto  $\mathcal{O}_f(x)$  dos pontos obtidos por iterações de um elemento  $x \in \mathbb{X}$  pela aplicação  $f$  é chamado de *órbita* de  $x$  e denotaremos por

$$\mathcal{O}_f(x) = \{f^n(x) \in \mathbb{X}; n \in \mathbb{Z}\}.$$

A *órbita positiva* de  $x$  pela aplicação  $f$  é o conjunto dos pontos obtidos por iterações positivas e a denotaremos por

$$\mathcal{O}_f^+(x) = \{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}},$$

e, a pré-órbita de  $x$ , o conjunto dos pontos obtidos por iterações negativas e o denotaremos por

$$\mathcal{O}_f^-(x) = \{f^{-n}(x)\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

Um elemento  $x \in \mathbb{X}$  é dito *ponto fixo* para  $f$  se  $f(x) = x$  e *ponto periódico de período  $m$*  para  $f$  se  $f^m(x) = x$  e  $f^j(x) \neq x$ , para todo  $0 < j < m$ . Observe que um ponto fixo é um ponto periódico de período 1. Denotaremos o conjunto dos pontos fixos de uma aplicação  $f$  por

$$\mathcal{F}ix(f) = \{x \in \mathbb{X}, f(x) = x\}.$$

A órbita de um ponto  $x_0 \in \mathbb{X}$  por uma aplicação  $f$  é dita *periódica de período  $m$* , se  $f^m(x_0) = x_0$  e,  $\forall 0 < j < m, f^j(x_0) \neq x_0$ . Denotaremos este conjunto simplesmente por  *$m$ -ciclo* ou, ainda, por

$$\mathcal{P}er_m(f) = \{x \in \mathbb{X}; f^m(x) = x \text{ e } f^j(x) \neq x, \forall 0 < j < m\}.$$

Um subconjunto  $\mathbb{Y} \subset \mathbb{X}$  é dito *positivamente invariante* se  $f(x) \in \mathbb{Y}, \forall x \in \mathbb{Y}$ , isto é,  $f(\mathbb{Y}) \subset \mathbb{Y}$ .  $\mathbb{Y} \subset \mathbb{X}$  é dito *negativamente invariante* se  $f^{-1}(x) \in \mathbb{Y}, \forall x \in \mathbb{Y}$ , isto é,  $f^{-1}(\mathbb{Y}) \subset \mathbb{Y}$ . Finalmente,  $\mathbb{Y} \subset \mathbb{X}$

é dito *invariante* se  $\mathbb{Y}$  é positivamente e negativamente invariante, neste caso  $f(\mathbb{Y}) = \mathbb{Y} = f^{-1}(\mathbb{Y})$ . Observemos que órbitas, periódicas ou não, são sempre conjuntos invariantes e que a órbita de um elemento num conjunto positivamente invariante está contido neste.

Chamamos de *omega limite* de um ponto  $x \in \mathbb{X}$  e denotamos por  $\omega(x)$ , o conjunto de todos os pontos de acumulação da seqüência  $\{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ , onde  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$  é uma aplicação e  $\mathbb{X}$  é um espaço topológico. Num espaço métrico  $\mathbb{X}$ , definimos a distância entre um ponto  $x \in \mathbb{X}$  e um subconjunto não vazio  $\mathbb{Y} \subset \mathbb{X}$  por  $d(x, \mathbb{Y}) = \inf\{d(x, y); y \in \mathbb{Y}\}$ . Portanto, se atribuirmos a  $\mathbb{X}$  uma métrica, então  $\omega(x)$  pode ser descrito como o menor conjunto fechado  $\mathbb{Y}$  tal que  $d(f^n(x), \mathbb{Y}) \rightarrow 0$ , ou seja,  $y$  pertence ao conjunto  $\omega$ -limite de  $x$  se existe uma seqüência  $n_k$  tendendo a infinito, à medida que  $k$  tende a infinito, tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(f^{n_k}(x), y) = 0.$$

Um conjunto fechado e não vazio  $\mathbb{Y} \subset \mathbb{X}$ , positivamente invariante, é dito um *atrator minimal* para uma aplicação  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ , se sua *bacia de atração*  $\mathcal{B}_f(\mathbb{Y})$ , o conjunto que consiste de todos os pontos  $x \in \mathbb{X}$  tais que  $\omega(x) \subset \mathbb{Y}$ , tem medida de Lebesgue positiva e, se não existe subconjunto fechado próprio  $\mathbb{Y}'$  de  $\mathbb{Y}$ , positivamente invariante, tal que  $\text{Leb}(\mathcal{B}_f(\mathbb{Y}')) > 0$  (ver [11]).

Sejam  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$  e  $g : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$  duas aplicações de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ . Dizemos que  $f$  e  $g$  são *topologicamente conjugadas* ou *topologicamente equivalentes* se existe um homeomorfismo  $h : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$  que leva órbitas de  $\mathbb{X}$  em órbitas de  $\mathbb{Y}$  preservando a orientação das trajetórias, ou seja,  $f \circ h = h \circ g$ . Este conceito está ligado diretamente ao problema de se comparar dois sistemas, identificando-os como dinamicamente equivalentes. Observe que se  $f$  e  $g$  são topologicamente conjugadas, então  $f^n \circ h = h \circ g^n$ . De fato,

$$\begin{aligned} f^n \circ h(x) &= f^{n-1} \circ f \circ h(x) &= f^{n-1} \circ h \circ g(x) \\ &= f^{n-2} \circ f \circ h \circ g(x) &= f^{n-2} \circ h \circ g \circ g(x) \\ \dots &= f^n \circ h(x) &= h \circ g^n(x). \end{aligned}$$

Uma aplicação  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$  de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$  é *estruturalmente estável* se existe uma vizinhança  $v$  de  $f$  tal que, para todo  $g \in v$ , existe um homeomorfismo  $h$  que conjugue  $f$  e  $g$ . Aqui estamos considerando que a topologia do espaço  $C^k$  é definida pela métrica

$$d_k(f, g) = \sup_{1 \leq \ell \leq k} \{d(f(x), g(x)), |D^\ell f(x) - D^\ell g(x)|; x \in \mathbb{X}\},$$

onde  $d$  é a métrica usual em  $\mathbb{X}$ .

Seja  $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^m$  um aberto. Suponhamos que  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$  seja uma aplicação de classe  $C^1$  e

que exista  $x \in \mathbb{X}$  tal que  $f^m(x) = x$ . Dizemos que  $x$  é um ponto periódico *hiperbólico* para  $f$  se todos os autovalores de  $Df^m(x)$  possuem módulo diferente de 1. Se todos os autovalores de  $Df^m(x)$  possuem módulo menor que 1, este atrai pontos de uma certa vizinhança de  $x$ . Se todos os autovalores de  $Df^m(x)$  têm módulo maior que 1, este possui a propriedade de repelir pontos vizinhos a  $x$ . A bacia local atratora da órbita de  $x$ , ou seja, o conjunto  $\mathcal{B}_f(\mathcal{O}(x))$ , é também chamada de *conjunto estável* e também é denotada por  $W^s$ . Se  $x$  é hiperbólico e  $f \in C^k(\mathbb{X}, \mathbb{X})$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , é uma aplicação não constante, então  $\mathcal{B}_f(\mathcal{O}(x))$  é um aberto invariante por  $f$ , ou seja, para todo  $y \in \mathcal{B}_f(\mathcal{O}(x))$ , temos  $f^n(y) \in \mathcal{B}_f(\mathcal{O}(x))$ .

Se  $x \in \mathbb{X}$  é um ponto periódico hiperbólico para uma aplicação diferenciável  $f$  em  $\mathbb{X}$  tal que todos os autovalores de  $Df(x)$  possuem módulo maior que 1, então existe uma vizinhança  $W^u$  de  $\mathcal{O}(x)$ , denominada *conjunto instável local*, tal que, para todo  $y \in W^u$ , a pré-órbita de  $y$  se aproxima de  $\mathcal{O}(x)$ , ou seja,

$$\forall y \in W^u, \exists \{y_n\}; y_n \downarrow \mathcal{O}(x), y_0 = y \text{ e } f(y_{n+1}) = y_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Seja  $x \in \mathbb{X}$  um ponto periódico hiperbólico e  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$  uma aplicação de classe  $C^1$ . Se ao menos um dos autovalores de  $Df^m(x)$  possui módulo maior que 1 e existe autovalor de  $Df^m(x)$  de módulo menor que 1 chamamos  $x$  de *sela*. As selas são estruturalmente instáveis, ou seja, pequenas perturbações no sistema, mesmo se o módulo de apenas um autovalor de  $Df^m(x)$  for maior que 1, a órbita de pontos numa vizinhança de  $x$  diverge. No caso em que existe módulo unitário de pelo menos um autovalor de  $Df^m(x)$ , nada podemos afirmar sobre o comportamento da órbita de pontos vizinhos a  $x$ , uma vez que podemos ter na vizinhança de  $x$  um comportamento atrativo ou repulsivo, ou ainda, nenhum destes casos. Se todos os autovalores de  $Df^m(x)$  possuem módulo menor que um e, pelo menos um deles é igual a zero, então  $x$  é dito um super atrator.

Seja  $f$  uma aplicação e  $x$  um ponto do seu domínio. Dizemos que  $x$  é *recorrente* se  $x \in \omega(x)$ . Em outras palavras,  $x$  é recorrente se sua trajetória retorna arbitrariamente próxima de  $x$  à medida que iteramos  $x$ . Observaremos que a dinâmica dos pontos recorrentes são mais interessantes.

Um conjunto fechado e não vazio  $\Delta$  é dito *minimal* se ele é invariante por uma aplicação  $f$ , e se não possui subconjunto próprio que seja fechado e invariante. Claro que qualquer órbita periódica é um conjunto minimal.

**0.1. PROPOSIÇÃO.** *Seja  $\mathbb{X}$  um espaço métrico,  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$  uma aplicação contínua e  $\emptyset \neq \mathbb{Y} \subset \mathbb{X}$  um subespaço compacto. Então,  $\mathbb{Y}$  é minimal se, e somente se,  $\omega(x) = \mathbb{Y}; \forall x \in \mathbb{Y}$ .*

**Prova.** Assuma  $\mathbb{Y}$  minimal. Portanto,  $\mathbb{Y}$  é invariante, assim,  $\forall x \in \mathbb{Y}, \omega(x) \subset \mathbb{Y}$ . Como  $\mathbb{Y}$  é compacto,  $\omega(x) \subset \mathbb{Y}$  é um subconjunto não vazio invariante. Logo,  $\omega(x) = \mathbb{Y}$ , pois  $\mathbb{Y}$  é minimal.

Por outro lado, assumamos  $\omega(x) = \mathbb{Y}, \forall x \in \mathbb{Y}$ . Suponha  $\emptyset \neq \mathbb{Y}' \subset \mathbb{Y}$  é um conjunto fechado e invariante. Se  $x \in \mathbb{Y}'$ , então  $\mathbb{Y} = \omega(x) \subset \mathbb{Y}' \subset \mathbb{Y}$ . Logo,  $\mathbb{Y}' = \mathbb{Y}$ .  $\square$

Seja  $\mathbb{X}$  um espaço métrico. Uma aplicação  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$  é *topologicamente transitiva* se, para quaisquer abertos  $U_1$  e  $U_2$  de  $\mathbb{X}$ , existe  $x \in U_1$  e algum  $n \in \mathbb{N}$ , tal que  $f^n(x) \in U_2$ . Dizemos que há *dependência sensível das condições iniciais* em  $f$ , se quaisquer que sejam  $x, y \in \mathbb{X}$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$ , para algum  $n > 0$ . De forma intuitiva, se uma aplicação possui dependência sensível das condições iniciais, dois pontos arbitrariamente próximos eventualmente se separam em alguma iteração da aplicação  $f$ .

Dizemos que  $f$  é *caótica* em  $\mathbb{Y} \subset \mathbb{X}$ , se o conjunto de pontos periódicos de  $f$  for denso em  $\mathbb{Y}$ , ou seja,  $\overline{\text{Per}} = \mathbb{Y}$ , se esta possuir dependência sensível das condições iniciais e for uma aplicação topologicamente transitiva. A condição de *dependência sensível das condições iniciais* está associada ao comportamento assintoticamente imprevisível dos seus elementos e a de *transitividade topológica* e indecomponibilidade de  $\mathbb{Y}$ .

# Capítulo 1

## A dinâmica das aplicações holomorfas

Neste capítulo, estudaremos o espaço das funções contínuas num aberto do conjunto dos números complexos  $\mathbb{C}$  e, em particular, o espaço das funções holomorfas, enfatizando a dinâmica de aplicações polinomiais de grau maior ou igual a dois. Veremos que aplicações holomorfas têm como uma das principais características, decompor o plano complexo em duas regiões disjuntas, os conjuntos estável e o de Julia.

### 1.1 O espaço de funções contínuas em $\mathbb{C}$

Seja  $\{f_\kappa\}_{\kappa \geq 1}$  uma seqüência de funções  $f_\kappa : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ , onde  $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$  é um aberto. Dizemos que a seqüência  $\{f_\kappa\}_{\kappa \geq 1}$  *converge pontualmente* em  $\mathbb{X} \subset \mathcal{U}$ , se para todo  $z \in \mathbb{X}$ , existe o limite  $\lim_{\kappa \rightarrow \infty} f_\kappa(z)$ . A função  $f(z) = \lim_{\kappa \rightarrow \infty} f_\kappa(z)$  é chamada de *limite pontual desta seqüência*. A seqüência de funções  $\{f_\kappa\}_{\kappa \geq 1}$ , definidas em  $\mathbb{X} \subset \mathcal{U}$ , com valores em  $\mathbb{C}$ , *converge uniformemente* para  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{C}$ , se para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\kappa_0 \geq 1$ , tal que se  $\kappa \geq \kappa_0$ , então  $|f_\kappa(z) - f(z)| < \varepsilon$ , para todo  $z \in \mathbb{X}$ . Usaremos a notação  $f_\kappa \xrightarrow{u} f$ , para indicar a convergência uniforme. Observe que uma seqüência que converge uniformemente, converge pontualmente. Conseqüentemente, se o limite uniforme existe, é único. Além disso, uma seqüência de funções contínuas que converge uniformemente, converge para uma função contínua (ver [18]).

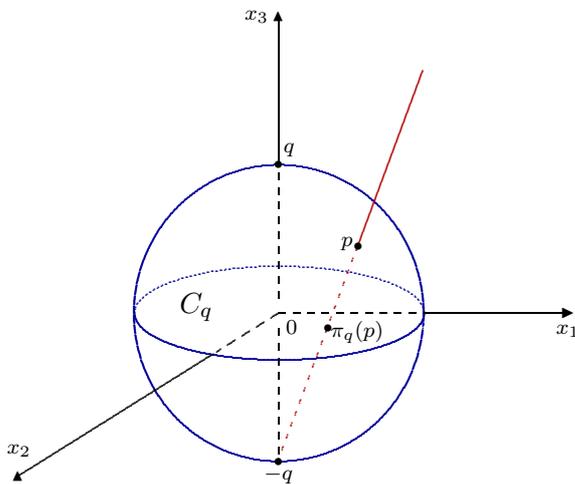
Seja  $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$  um aberto. Dizemos que uma seqüência de funções  $\{f_\kappa\}_{\kappa \geq 1}$  *converge uniformemente nas partes compactas* de  $\mathcal{U}$ , se para todo compacto  $K \subset \mathcal{U}$ , existe  $\kappa_0 \geq 1$ , tal que se  $\kappa \geq \kappa_0$ , então o domínio de  $f_\kappa$  contém  $K$  e, além disso, a seqüência de restrições  $\{f_\kappa|_K\}_{\kappa \geq \kappa_0}$  é uniformemente convergente.

**1.1. TEOREMA ([19]).** *Seja  $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$  um aberto. Se  $\{f_\kappa\}_{\kappa \geq 1}$  é uma seqüência de funções que converge uniformemente nas partes compactas de  $\mathcal{U}$ , então existe uma única função  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que, para todo compacto  $K \subset \mathcal{U}$ , temos  $f_\kappa|_K \xrightarrow{u} f|_K$ . Em particular, se  $f_\kappa$  for contínua, para todo  $\kappa \geq 1$ , então  $f$  é contínua.*

Usaremos a notação  $f_\kappa \xrightarrow{upc} f$  para indicar a convergência uniforme em partes compactas em um aberto.

Consideremos  $C(\mathcal{U})$ , o conjunto de todas as funções contínuas  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ , onde  $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$  é um aberto. Observemos que, se  $K \subset \mathcal{U}$  é um compacto,  $\|f\|_K = \sup_{z \in K} \{|f(z)|\} < +\infty$  é uma norma e é conhecida como a *norma da convergência uniforme* em  $K$ . Seja  $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ , o conjunto de todas as aplicações holomorfas definidas em um aberto  $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$  e introduzamos neste conjunto a topologia da convergência uniforme nas partes compactas de  $\mathcal{U}$ . Claro que  $\mathcal{A}(\mathcal{U}) \subset C(\mathcal{U})$ . Veremos, a seguir, que é possível construir uma métrica  $\rho$  de maneira tal que a convergência nas partes compactas de  $\mathcal{U}$  de uma seqüência em  $C(\mathcal{U})$  equivale à convergência relativamente à esta métrica.

Seja  $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; |x_1^2 + x_2^2 + x_3^2| = 1\}$  a esfera de raio 1,  $S_q^2 = S^2 \setminus \{-q\}$ , onde  $q = (0, 0, 1)$  é o pólo norte, e designemos por  $C_q$ , o plano ortogonal ao diâmetro  $[-q, q]$  que passa pelo centro da esfera.



Definimos a *projeção estereográfica*, com pólo em  $-q$ , como sendo a aplicação

$$\begin{aligned} \pi_q : S_q^2 &\rightarrow C_q \\ p &\mapsto (u(p), v(p)). \end{aligned}$$

O ponto  $\pi_q(p) \in C_q$  é o ponto no qual a semi-reta  $\lambda(s) \subset \mathbb{R}^3, s \in \mathbb{R}$ , corta o plano  $C_q$  em  $Ox_1x_2$ . Para obtermos uma expressão para a aplicação  $\pi_q$ , observemos que os pontos de  $\lambda(s)$  são da forma  $-q + s(p + q)$ , onde  $p, q \in S^2$  são os pontos extremos do segmento. Assim, para obtermos uma expressão para  $\pi_q$ , observemos que

$$\begin{aligned} \lambda(s) &= -q + s(p + q) \\ &= (0, 0, -1) + s[(x_1, x_2, x_3) + (0, 0, 1)] \\ &= (sx_1, sx_2, sx_3 + s - 1). \end{aligned}$$

Um ponto da semi-reta  $\lambda(s)$  está no plano  $C_q$  se  $sx_3 + s - 1 = 0$ . Portanto,  $s = \frac{1}{1+x_3}$ . Para  $p(x_1, x_2, x_3)$ , segue que

$$\begin{aligned} \pi_q : S_q^2 &\rightarrow C_q \\ p &\mapsto \left( \frac{x_1}{1+x_3}, \frac{x_2}{1+x_3}, 0 \right) = (u(p), v(p)). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Claro que  $\pi_q$  é de classe  $C^\infty$  em  $S_q^2$ , logo  $\pi_q$  é contínua em  $S_q^2$ . A inversa de  $\pi_q$  é dada por

$$\begin{aligned} \pi_q^{-1} : C_q &\rightarrow S_q^2 \\ (u, v) &\mapsto \left( \frac{2x_1}{1+x_1^2+x_2^2}, \frac{2x_2}{1+x_1^2+x_2^2}, \frac{1-x_1^2-x_2^2}{1+x_1^2+x_2^2} \right). \end{aligned} \quad (1.2)$$

De fato, seja  $\beta(s), s \in \mathbb{R}$ , uma semi-reta que passa pelos pontos  $\pi_q(p)$  e  $-q$ . Logo,

$$\begin{aligned} \beta(s) &= -q + s(\pi_q(p) + q) \\ &= (0, 0, -1) + s[(u, v, 0) + (0, 0, 1)] \\ &= (su, sv, s-1). \end{aligned}$$

Portanto,  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (su)^2 + (sv)^2 + (s-1)^2 = 1$ . Segue que,  $s = \frac{2}{1+u^2+v^2}$ . Logo,

$$(x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{1-u^2-v^2}{1+u^2+v^2} \right).$$

Se adotarmos as identidades  $(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + ix_2, x_3) = (w, t)$  e  $(u, v, 0) = u + iv = z$ , teremos, nestas coordenadas, que

$$\pi_q(w, t) = \pi_q(x_1 + ix_2, x_3) = \pi_q(x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{x_1}{1+x_3}, \frac{x_2}{1+x_3}, 0 \right) = \frac{x_1 + ix_2}{1+x_3} = \frac{w}{1+t} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \pi_q^{-1}(z) &= \pi^{-1}(u + iv) = \pi_q(u, v, 0) \\ &= \left( \frac{2x_1}{1+x_1^2+x_2^2}, \frac{2x_2}{1+x_1^2+x_2^2}, \frac{1-(x_1^2+x_2^2)}{1+x_1^2+x_2^2} \right) = \left( \frac{2z}{1+|z|^2}, \frac{1-|z|^2}{1+|z|^2} \right). \end{aligned} \quad (1.4)$$

As expressões em (1.3) e (1.4) nos dizem que  $\pi_q$  é contínua em  $S_q^2$  e que  $\pi_q^{-1}$  é contínua em  $\mathbb{C}$ . Portanto,  $\pi_q : S_q^2 \rightarrow \mathbb{C}$  é um homeomorfismo.

**1.2. LEMA ([19]).** *Seja  $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$  um aberto. Existe uma seqüência  $\{K_\kappa\}_{\kappa \geq 1}$  de subconjuntos compactos de  $\mathcal{U}$  tais que:*

- (i)  $K_\kappa \subset \text{int}(K_{\kappa+1}) \subset \mathcal{U}, \forall \kappa \geq 1$ ;
- (ii)  $\mathcal{U} = \bigcup_{\kappa \geq 1} K_\kappa = \bigcup_{\kappa \geq 1} \text{int}(K_\kappa)$ ;
- (iii) *Para todo compacto  $K \subset \mathcal{U}$  existe  $\kappa_0 = \kappa(K)$  tal que se  $\kappa \geq \kappa_0$ , então  $K \subset \text{int}(K_\kappa)$ .*

Seja  $\{K_\kappa\}_{\kappa \geq 1}$  uma cobertura de  $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ , como no Lema 1.2, e definamos

$$d_\kappa(f, g) = \sup_{z \in K_\kappa} \{d[f(z), g(z)]\} \quad (1.5)$$

onde  $d$  é dado por

$$d(z_1, z_2) = \|\pi_q^{-1}(z_1) - \pi_q^{-1}(z_2)\|, \quad (1.6)$$

com  $z_1, z_2 \in \mathcal{U}$  e  $\|\cdot\|$  a norma usual do  $\mathbb{R}^3$ . Podemos obter de (1.4) e (1.6) que

$$d(z_1, z_2) = \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{(1 + |z_1|^2) \cdot (1 + |z_2|^2)}}. \quad (1.7)$$

Observemos que o diâmetro de  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  é 2 e, para todo  $z_1, z_2 \in \mathcal{U}$ ,  $d(z_1, z_2) < 2$ . Além disto, a relação  $d(z_1, z_2) = d\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}\right)$  é válida, para todo  $z_1, z_2$  não-nulos.

É possível mostrar que os abertos de  $\mathbb{C}$ , definidos pela métrica  $d$ , coincidem com os abertos usuais de  $\mathbb{C}$  e, também, pode-se verificar que as relações em (1.5), (1.6) constituem uma métrica em  $\mathcal{A}(\mathcal{U})$  e  $\mathcal{A}(K_\kappa)$ , respectivamente. Definamos, portanto,

$$\rho(f, g) = \sup_{\kappa \geq 1} \left\{ \frac{1}{\kappa} d_\kappa(f, g) \right\}. \quad (1.8)$$

Pode-se mostrar, de maneira fácil, que  $\rho(f, g)$  é uma métrica em  $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ .

**1.3. PROPOSIÇÃO.** *Uma seqüência  $\{f_\kappa\}_{\kappa \geq 1}$ , com  $f_\kappa \in \mathcal{A}(\mathcal{U})$ , para todo  $\kappa \geq 1$ , converge em relação à  $\rho$  se, e somente se, ela converge uniformemente nas partes compactas de  $\mathcal{U}$ .*

**Prova.** Suponha que  $f_\kappa \xrightarrow{upc} f$  e seja  $\varepsilon > 0$ . Sabemos que  $0 < \frac{d_\kappa}{\kappa} < \frac{2}{\kappa}, \forall \kappa \geq 1$ . Seja  $\kappa_0 \geq 1$  tal que se  $\kappa \geq \kappa_0$ , então  $\frac{d_\kappa(f_m, f)}{\kappa} < \frac{\varepsilon}{2}$ , para todo  $m \geq 1$  e todo  $\kappa \geq \kappa_0$ . Observemos que

$$\sup_{\kappa \geq \kappa_0} \left\{ \frac{d_\kappa(f_m, f)}{\kappa} \right\} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Tomemos  $\kappa \in \{1, \dots, \kappa_0\}$ . Como  $\{f_m\}_{m \geq 1}$  converge uniformemente em  $K_\kappa$ , existe  $m(\kappa)$  tal que se  $m \geq m(\kappa)$ , então

$$\|f_m - f\|_{K_\kappa} = \sup_{z \in K_\kappa} \{|f_m(z) - f(z)|\} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Desta forma, se  $z \in K_\kappa$ , então

$$d(f_m(z) - f(z), 0) = \frac{2 \cdot |f_m(z) - f(z)|}{\sqrt{1 + |f_m(z) - f(z)|^2}} < 2 \cdot |f_m(z) - f(z)| \leq 2 \cdot \|f_m - f\|_K < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Isto implica que  $d_\kappa(f_m, f) \leq \frac{\varepsilon}{2}$  e, portanto, se fizermos  $m_0 = \max\{m(1), \dots, m(\kappa_0)\}$  e  $m \geq m_0$ , então  $\rho(f_m, f) < \varepsilon$ .

Por outro lado, suponha que  $f_m \rightarrow f$  com relação à métrica  $\rho$ , isto é,  $f_m - f \rightarrow 0$  com respeito à métrica  $\rho$ . Fixemos um compacto  $K \subset \mathcal{U}$  e  $\kappa_0 \geq 1$  tal que  $K \subset K_{\kappa_0}$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , seja  $m_0 > 1$  tal que, se  $m \geq m_0$ , então  $\rho(f_m - f, 0) < \frac{2 \cdot \varepsilon}{\kappa_0 \sqrt{1 + \varepsilon^2}}$ . Isto implica que, para todo  $z \in K_{\kappa_0}$  e todo  $m \geq m_0$ , temos

$$\frac{2 \cdot |f_m(z) - f(z)|}{\kappa_0 \sqrt{1 + |f_m(z) - f(z)|^2}} = \frac{d(f_m(z) - f(z), 0)}{\kappa_0} < \frac{2 \cdot \varepsilon}{\kappa_0 \sqrt{1 + \varepsilon^2}}.$$

Como a função  $h(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$  é crescente, segue que

$$|f_m(z) - f(z)| < \varepsilon, \forall z \in K_{\kappa_0}, \forall m \geq m_0.$$

Em particular, temos

$$\|f_m - f\|_K \leq \|f_m - f\|_{K_{\kappa_0}} < \varepsilon.$$

Logo,  $\{f_m\}_{m \geq 1}$  converge uniformemente nas partes compactas de  $\mathcal{U}$  para  $f$ .  $\square$

Uma *forma diferencial complexa de grau 1* ou *1-forma diferencial* é uma aplicação  $\omega$ , definida em um aberto  $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ , que associa cada ponto de  $z \in \mathcal{U}$  a uma aplicação  $\mathbb{R}$ -linear  $\omega(z) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ . Observemos que o contra-domínio de  $\omega$  é de aplicações no conjunto  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ , o conjunto de todas as aplicações  $\mathbb{R}$ -lineares de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{C}$  que, por sua vez, possui uma estrutura natural de espaço vetorial sobre  $\mathbb{C}$ , com as operações de soma e produto por um escalar. Uma base para este espaço pode ser obtida se considerarmos as aplicações:

$$\begin{array}{l} dx : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C} \\ (u, v) \mapsto dx(u, v) = u \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{l} dy : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C} \\ (u, v) \mapsto dy(u, v) = v. \end{array}$$

Conseqüentemente, podemos escrever uma 1-forma diferencial como  $\omega = A(z)dx + B(z)dy$ , onde  $A$  e  $B$  são funções do aberto  $\mathcal{U}$  em  $\mathbb{C}$ . Diremos que  $\omega$  é de classe  $C^k$  se assim são as aplicações  $A$  e  $B$ . Uma 1-forma diferencial  $\omega$  é *exata* num aberto  $V \subset \mathcal{U}$ , se existe uma função diferenciável  $f : V \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $df = \omega|_V$ . Esta aplicação  $f$  é chamada de primitiva de  $\omega$  em  $V$ . Dizemos que uma 1-forma diferencial  $\omega$ , definida em um aberto  $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$  e de classe  $C^k$ ,  $k \geq 0$ , é *fechada*, se para todo  $z \in \mathcal{U}$  existe uma vizinhança  $V$  de  $z$ ,  $V \subset \mathcal{U}$ , tal que  $\omega|_V$  é exata.

**1.4. TEOREMA ([19]).** *Seja  $\omega = A(x, y) dx + B(x, y) dy$  uma 1-forma contínua no aberto  $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i)  $\omega$  é fechada;
  - (ii) Para todo retângulo  $Q \subset \mathcal{U}$  com lados paralelos aos eixos, têm-se  $\int_{\partial Q} \omega = 0$ .
- Se  $\omega$  for de classe  $C^1$ , então as condições acima são equivalentes a
- (iii)  $\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$ .

**1.5. LEMA ([19]).** *Sejam  $g : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função contínua e  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{U}$  um caminho de classe  $C^1$  por partes. Então*

$$\left| \int_{\gamma} g(z) \, dz \right| \leq M(g, \gamma) \cdot \ell(\gamma), \quad (1.9)$$

onde  $M(g, \gamma) = \sup_{z \in \gamma([a, b])} \{|g(z)|\}$  e  $\ell(\gamma)$  é o comprimento de  $\gamma$ .

**1.6. TEOREMA (Cauchy-Goursat [19]).** *Seja  $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$  um aberto. Se  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função holomorfa, então a forma  $f(z) \, dz$  é fechada.*

**1.7. TEOREMA (de Morera [19]).** *Sejam o aberto  $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$  e  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função contínua. Se a forma  $f(z) \, dz$  for fechada então  $f$  é analítica, ou seja, holomorfa em  $\mathcal{U}$ .*

**1.8. LEMA ([19]).** *Seja  $\{g_{\kappa}\}_{\kappa \geq 1}$  uma seqüência de funções contínuas que converge uniformemente nas partes compactas de  $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ , para uma função contínua  $g : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ . Se  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{U}$  é um caminho de classe  $C^1$  por partes, então*

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \left( \int_{\gamma} g_{\kappa}(z) \, dz \right) = \int_{\gamma} g(z) \, dz. \quad (1.10)$$

**1.9. PROPOSIÇÃO.** *Uma seqüência de funções holomorfas em um aberto  $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ , que converge nas partes compactas de  $\mathcal{U}$ , converge para uma função holomorfa.*

**Prova.** Seja  $\{f_{\kappa}\}_{\kappa \geq 1}$  uma seqüência em  $\mathcal{A}(\mathcal{U})$  tal que  $f_{\kappa} \xrightarrow{upc} f$ ,  $f$  uma função contínua em  $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ . Pelo Teorema 1.7, basta mostrar que  $f(z) \, dz$  é fechada. Seja  $Q \subset \mathcal{U}$  um retângulo arbitrário. Como  $f_{\kappa} \in \mathcal{A}(\mathcal{U})$ ,  $\forall \kappa \geq 1$ , temos, pelo Teorema 1.6, que  $\int_{\partial Q} f_{\kappa}(z) \, dz = 0$ . Do Lema 1.8 temos que

$$\int_{\partial Q} f(z) \, dz = \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \left( \int_{\partial Q} f_{\kappa}(z) \, dz \right) = 0.$$

Do Teorema 1.4,  $f(z) \, dz$  é fechada.  $\square$

**1.10. TEOREMA ([19]).** *Seja  $\{f_{\kappa}\}_{\kappa \geq 1}$  uma seqüência de funções holomorfas em um aberto  $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$  tal que  $f_{\kappa} \xrightarrow{upc} f$ . Então  $\{f_{\kappa}^{(n)}\}_{\kappa \geq 1}$  converge nas partes compactas de  $\mathcal{U}$  para  $f^{(n)}$ .*

**1.11. PROPOSIÇÃO.** *Sejam  $\{K_{\kappa}\}_{\kappa \geq 1}$  e  $\{\tilde{K}_{\kappa}\}_{\kappa \geq 1}$  duas seqüências de compactos satisfazendo aos itens do Lema 1.2. Sejam  $\rho$  e  $\tilde{\rho}$  as métricas obtidas das respectivas seqüências de compactos. Então um seqüência em  $C(\mathcal{U})$  converge relativamente à métrica  $\rho$  se, e somente se, ela converge relativamente à métrica  $\tilde{\rho}$ . Em particular, a identidade  $\iota : (C(\mathcal{U}), \rho) \rightarrow (C(\mathcal{U}), \tilde{\rho})$  é um homeomorfismo.*

**Prova.** Seja  $\{f_{\kappa}\}_{\kappa \geq 1}$  uma seqüência convergente em relação à métrica  $\rho$ . Pela Proposição 1.3,  $\{f_{\kappa}\}_{\kappa \geq 1}$  converge nas partes compactas de  $\mathcal{U}$ . Novamente, pela Proposição 1.3,  $\{f_{\kappa}\}_{\kappa \geq 1}$  converge relativamente à métrica  $\tilde{\rho}$ .  $\square$

Sejam  $(\mathbb{X}_1, d_1)$  e  $(\mathbb{X}_2, d_2)$  dois espaços métricos e  $C(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2)$ , o conjunto de todas as funções contínuas de  $\mathbb{X}_1$  em  $\mathbb{X}_2$ . Se  $K \subset \mathbb{X}_1$  é um compacto, consideremos a métrica em  $C(K, \mathbb{X}_2)$  dada por

$$d(f, g) = \sup_{f, g \in C(K, \mathbb{X}_2)} \{d_2(f(x), g(x)); x \in K\}. \quad (1.11)$$

Dizemos que um subconjunto  $\mathcal{F} \subset C(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2)$  é *equicontínuo* em  $z_0 \in \mathbb{X}_1$ , se para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que se  $z \in \mathbb{X}_1$  e  $d_1(z, z_0) < \delta$ , então  $d_2(f(z), f(z_0)) < \varepsilon$ , para todo  $f \in \mathcal{F}$ . O subconjunto  $\mathcal{F}$  é equicontínuo em  $\mathbb{X} \subset \mathbb{X}_1$ , se  $\mathcal{F}$  for equicontínuo em todos os pontos de  $\mathbb{X}$  e  $\mathcal{F}$  é *uniformemente equicontínuo* em  $\mathbb{X}$  se, para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$ , tal que se  $z, z_0 \in \mathbb{X}$  e  $d_1(z, z_0) < \delta$ , então  $d_2(f(z), f(z_0)) < \varepsilon$ , para todo  $f \in \mathcal{F}$ .

**1.12. PROPOSIÇÃO ([18]).** *Seja  $\mathcal{F} \in C(K)$ , onde  $K \subset \mathbb{X}$  e  $\mathbb{X}$  um espaço métrico.  $\mathcal{F}$  é equicontínuo em  $K$  se, e somente se,  $\mathcal{F}$  é uniformemente equicontínuo em  $K$ .*

Um subconjunto  $K$  de um espaço métrico  $\mathbb{X}$  é dito *relativamente compacto* quando o seu fecho  $\overline{K}$  é compacto. Isto implica que toda seqüência  $\{K_\kappa\}_{\kappa \geq 1} \in K$  possui subsequência convergente em  $\mathbb{X}$ .

**1.13. TEOREMA (Arzelá-Ascoli [18]).** *Seja  $\mathcal{F} \subset C(K, \mathbb{X})$  onde  $K$  e  $\mathbb{X}$  são espaços métricos e  $K$  é um compacto. Então  $\mathcal{F}$  é relativamente compacto em  $C(K, \mathbb{X})$  se, e somente se, as duas condições abaixo forem satisfeitas:*

- (i)  $\mathcal{F}$  é equicontínuo em  $K$ ;
- (ii) Para todo  $z \in K$ , o conjunto  $\mathcal{F}(z) = \{f(z), f \in \mathcal{F}\}$  é relativamente compacto em  $\mathbb{X}$ .

Particularizemos o Teorema de Arzelá-Ascoli para o caso em que  $K \subset \mathbb{C}$  é um compacto e  $\mathbb{X} = \mathbb{C}$ . Como consequência, teremos que um subconjunto  $\mathcal{F} \subset C(K)$  é relativamente compacto se, e somente se,  $\mathcal{F}$  é equicontínuo e  $\mathcal{F}(z)$  é limitado, para todo  $z \in K$ . Uma consequência deste resultado para subconjuntos de  $C(\mathcal{U})$ , onde  $\mathcal{U}$  é um aberto, é o corolário a seguir.

**1.14. COROLÁRIO ([19]).** *Sejam  $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$  um aberto e  $\mathcal{F} \subset C(\mathcal{U})$ , onde  $C(\mathcal{U})$  está munido com a métrica  $\rho$  como em (1.8). Então  $\mathcal{F}$  é relativamente compacto em  $C(\mathcal{U})$  se, e somente se,  $\mathcal{F}$  é equicontínuo e, além disso, para todo  $z_0 \in \mathcal{U}$ ,  $\mathcal{F}(z_0)$  é limitado.*

Diremos que  $\mathcal{F} \subset C(\mathcal{U})$  é *localmente limitado* se, para todo  $z_0 \in \mathcal{U}$ , existem uma vizinhança  $V$  de  $z_0$  em  $\mathcal{U}$  e uma constante  $M = M(V) > 0$ , tais que para toda  $f \in \mathcal{F}$  tenhamos  $\|f\|_V \leq M$ , ou seja,  $\mathcal{F} \subset C(\mathcal{U})$  é localmente limitada, se para todo  $z_0 \in \mathcal{U}$  existem  $r > 0$  e  $M = M(r) > 0$  tais que  $\overline{D_r(z_0)} \subset \mathcal{U}$  e, além disso,  $|f(z)| \leq M$ , para toda  $f \in \mathcal{F}$  e todo  $z \in \overline{D_r(z_0)}$ .

Atribui-se a P. Montel (1911) a formulação do conceito de normalidade de funções holomorfas e a percepção que a limitação de uma classe de funções pode ser usada como critério de normalidade. Este é o ingrediente chave para o estudo da dinâmica complexa.

**1.15. TEOREMA (Montel).** *Sejam  $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$  um aberto e  $\mathcal{A}(\mathcal{U})$  o conjunto de todas as aplicações holomorfas de  $\mathcal{U}$  em  $\mathbb{C}$ . Um subconjunto  $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}(\mathcal{U})$  é normal se, e somente se,  $\mathcal{F}$  é localmente limitada.*

**Prova.** Seja  $\mathcal{F} \in \mathcal{A}(\mathcal{U})$  uma família de funções localmente limitada, portanto,  $\mathcal{F}(z_0) = \{f(z_0); f \in \mathcal{F}\}$  é limitado. Tomemos  $z_0 \in \mathcal{U}$ ,  $r > 0$  e  $M > 0$  tais que  $\overline{D} = \overline{D_r(z_0)} \subset \mathcal{U}$  e  $\|f\|_{\overline{D}} \leq M$ , para toda  $f \in \mathcal{F}$ . Pela fórmula da integral de Cauchy temos que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw,$$

onde  $f \in \mathcal{F}$ ,  $z \in D_r(z_0)$  e  $\gamma(\theta) = z_0 + re^{i\theta}$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Segue, para  $z_1, z_2 \in D_r(z_0)$ , que

$$\begin{aligned} |f(z_2) - f(z_1)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z_2} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z_1} dw \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma} f(w) \left( \frac{1}{w-z_2} - \frac{1}{w-z_1} \right) dw \right| \\ &= \frac{|z_2 - z_1|}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z_2)(w-z_1)} dw \right| \\ &\leq \frac{|z_2 - z_1|}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \sup_{w \in \gamma([0, 2\pi])} \left\{ \frac{|f(w)|}{|w-z_2||w-z_1|} \right\} \\ &\leq \frac{r \cdot M}{(r - |z_0 - z_2|)(r - |z_0 - z_1|)} \cdot |z_2 - z_1|. \end{aligned}$$

Se tomarmos  $z_1, z_2 \in \overline{D_{\frac{r}{2}}(z_0)}$ , então  $r - |z_0 - z_j| \geq \frac{r}{2}$ ,  $j = 1, 2$ . Logo,

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leq k|z_2 - z_1|, k = \frac{4M}{r}.$$

Isto implica que  $\mathcal{F}$  é uniformemente equicontínuo em  $\overline{D_{\frac{r}{2}}(z_0)}$ , uma vez que, se  $|z_2 - z_1| < \frac{\varepsilon}{k}$ , então  $|f(z_2) - f(z_1)| < \varepsilon$ .

Por outro lado, suponha  $\mathcal{F}$  uma família normal. Pelo Corolário 1.14,  $\mathcal{F}(z_0)$ ,  $z_0 \in \mathcal{U}$  é limitada e, além disso,  $\mathcal{F}$  é equicontínua em  $z_0$ . Seja  $M > 0$  tal que  $|f(z_0)| < M, \forall f \in \mathcal{F}$ . Da equicontinuidade, decorre que existe  $r > 0$  tal que  $\overline{D_r(z_0)} \subset \mathcal{U}$  e, além disso,  $|f(z) - f(z_0)| < 1, \forall f \in \mathcal{F}$  e  $\forall z \in \overline{D_r(z_0)}$ . Isto implica que  $|f(z)| \leq M + 1, \forall f \in \mathcal{F}$  e  $\forall z \in \overline{D_r(z_0)}$ . Logo,  $\mathcal{F}$  é localmente limitada.  $\square$

Uma família  $\mathcal{F} \subset C(\mathcal{U})$  é *uniformemente limitada* se existe  $M > 0$  tal que  $|f(z)| \leq M$ , para todo  $z \in \mathcal{U}$  e toda  $f \in \mathcal{F}$ . Como consequência desta definição e do Teorema 1.15 temos o seguinte corolário.

**1.16.** COROLÁRIO ([19]). *Uma família uniformemente limitada de funções holomorfas é normal.*

Uma seqüência de funções em  $C(\mathcal{U})$  é dita *localmente limitada* se a família  $\mathcal{F} = \{f_\kappa; \kappa \geq 1\}$  for localmente limitada. A mesma definição é dada para uma seqüência *uniformemente limitada*.

**1.17.** COROLÁRIO ([19]). *Uma seqüência localmente ou uniformemente limitada de funções holomorfas em  $\mathcal{U}$  possui subseqüência uniformemente convergente nas partes compactas de  $\mathcal{U}$ .*

**1.18.** COROLÁRIO ([19]). *Seja  $\{f_\kappa\}_{\kappa \geq 1}$  uma seqüência de funções holomorfas em  $\mathcal{U}$ . Então  $\{f_\kappa\}_{\kappa \geq 1}$  converge uniformemente nas partes compactas de  $\mathcal{U}$  se, e somente se, ela for localmente limitada e, além disso, para todo  $z \in \mathcal{U}$ , existe o limite  $\lim_{\kappa \rightarrow \infty} f_\kappa(z)$ .*

**Prova.** Suponha que  $\{f_\kappa\}_{\kappa \geq 1}$  seja localmente limitada e que, para todo  $z \in \mathcal{U}$ , existe  $\lim_{\kappa \rightarrow \infty} f_\kappa(z) = f(z)$ . Seja  $\{f_{\kappa_k}\}_{\kappa_k \geq 1}$  uma subseqüência de  $\{f_\kappa\}_{\kappa \geq 1}$ , uniformemente convergente nas partes compactas de  $\mathcal{U}$ . É claro que, para todo  $z \in \mathcal{U}$ , temos  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{\kappa_k}(z) = f(z)$ , logo  $f_{\kappa_k} \xrightarrow{upc} f$ . Segue que o conjunto  $\{f_1, f_2, f_3, \dots\}$  possui somente um ponto limite em  $C(\mathcal{U})$ , para toda função  $f$ . Logo,  $f_\kappa \xrightarrow{upc} f$ .

Por outro lado, se  $f_\kappa \xrightarrow{upc} f$ , o conjunto  $\{f_1, f_2, f_3, \dots\} \subset \mathcal{A}(\mathcal{U})$  é compacto e, Pelo Teorema 1.15,  $\{f_\kappa\}_{\kappa \geq 1}$  é localmente limitada. Além disso,  $\lim_{\kappa \rightarrow \infty} f_\kappa(z) = f(z), \forall z \in \mathcal{U}$ .  $\square$

Como conseqüência dos corolários 1.16, 1.17 e 1.18, podemos dizer que *uma família  $\{f_\kappa\}_{\kappa \geq 1}$  de aplicações é normal em um subconjunto aberto  $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ , se toda subseqüência de  $\{f_\kappa\}_{\kappa \geq 1}$  possui subseqüência uniformemente convergente em qualquer subconjunto compacto de  $\mathcal{U}$ , que converge ou para uma aplicação holomorfa limitada ou para o infinito.*

Uma aplicação  $f$  é *conforme* ou *univalente* se ela for analítica e injetora. Uma aplicação holomorfa  $\psi : \tilde{R} \rightarrow R$ , onde  $\tilde{R}$  e  $R$  são superfícies de Riemann, é uma *aplicação de recobrimento*, ou, simplesmente, um *recobrimento*, se para todo  $w \in R$ , existe  $V \subset R$ , aberto, com  $x \in V$ , tal que cada componente conexa de  $\psi^{-1}(V)$  é levada conformalmente por  $\psi$  em  $V$ . O espaço  $\tilde{R}$  é chamado de *espaço de recobrimento* de  $R$ . Se o espaço de recobrimento  $\tilde{R}$  for simplesmente conexo, o chamaremos de *cobertura universal* e o denotaremos por  $\tilde{R}^\infty$ . Uma aplicação determinada pelo quociente de dois polinômios em  $\mathbb{C}$  é chamada de *racional*. *Homografias* ou *transformações de Möbius* são aplicações racionais, não constantes, cujo quociente é formado por polinômios em  $\mathbb{C}$  de grau no máximo 1. Utilizaremos o Teorema 1.19 para demonstrar uma outra versão menos conhecida do Teorema de Montel.

**1.19. TEOREMA (da Uniformização de Riemann [19]).** *Toda superfície de Riemann simplesmente conexa é conformemente equivalente a  $\overline{\mathbb{C}}$ , a  $\mathbb{C}$  ou a  $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ . Além disto, valem as seguintes propriedades:*

(i) *O único aberto equivalente a  $\overline{\mathbb{C}}$  é o próprio  $\overline{\mathbb{C}}$ .*

(ii) *Se  $\mathcal{U}$  é equivalente a  $\mathbb{C}$ , então  $\mathcal{U} = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{z_0\}$ , para algum  $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ .*

**1.20. COROLÁRIO ([20]).** *Seja  $S = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ . Então  $S^\infty$  é conformalmente equivalente ao disco  $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ .*

Agora, visto o resultado do Teorema 1.19, podemos enunciar o Teorema 1.15 de uma forma mais adequada para a caracterização do conjunto de Julia.

**1.21. TEOREMA (Montel).** *Seja  $\mathcal{F}$  uma família de funções holomorfas num aberto  $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ . Se existem três valores fixos em  $\overline{\mathbb{C}}$  que são omitidos por todas as aplicações em  $\mathcal{F}$ , então  $\mathcal{F}$  é normal em  $\mathcal{U}$ .*

**Prova.** Seja  $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$  um disco. Composto toda  $f \in \mathcal{F}$  com uma transformação de Möebius assumiremos que as aplicações em  $\mathcal{F}$  não assumem os valores 0, 1 e  $\infty$ . Consideremos os conjuntos  $\Delta = \{z; |z| < 1\}$  e  $S = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ . Pelo Corolário 1.20, existe uma aplicação de recobrimento  $\psi : \Delta \rightarrow S$ . Seja  $\tilde{f} : \mathcal{U} \rightarrow \Delta$  um levantamento de  $f \in \mathcal{F}$ , ou seja,  $\psi \circ \tilde{f} = f$ . Como toda  $\tilde{f}$  no conjunto  $\tilde{\mathcal{F}} = \{\tilde{f}; f \in \mathcal{F}\}$  é limitada, pelo Teorema 1.16,  $\tilde{\mathcal{F}}$  é normal. Segue que  $\mathcal{F}$  é também normal.  $\square$

De outra forma, poderíamos pensar que, se  $\mathcal{F}$  é uma família não normal de funções holomorfas num aberto  $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ , então, para todo  $w \in \mathbb{C}$ , com no máximo uma exceção, temos  $f(z) = w$ , para algum  $z \in \mathcal{U}$  e algum  $f \in \mathcal{F}$ .

## 1.2 O conjunto de Julia

No início do século passado, Gaston Julia e Pierre Fatou publicaram vários artigos sobre as propriedades iterativas de aplicações holomorfas, tendo como fator desencadeador o método de Newton para o cálculo dos zeros destas aplicações. Conseguiram provar, utilizando este método a uma dada aplicação, que seqüências poderiam convergir para uma solução ou seriam periódicas ou poderiam divergir. Observaram que as fronteiras existentes entre regiões de convergência eram curvas de geometria muito complicada e que, posteriormente, viriam a ser conhecidas como ‘*Conjunto de*

*Julia*'. Por ser muito limitada a capacidade de se construir gráficos, não produziram qualquer imagem. Depois de algumas décadas, devido principalmente aos gráficos de Mandelbrot e aos trabalhos de Douardy, Hubbard e Sullivan, a atenção mais uma vez foi despertada para o rico comportamento dinâmico de aplicações no plano complexo.

Algumas definições e propriedades das aplicações em  $\mathbb{C}$  são comuns às de aplicações em  $\mathbb{R}$ . Uma aplicação  $f$  holomorfa e de classe  $C^k, k \geq 1$ , possui ponto periódico  $z_0 = f^n(z_0)$  atrator, se  $|Df^n(z_0)| < 1$  e repulsor, se  $|Df^n(z_0)| > 1$ .  $z_0$  é dito um superatrator, se  $|Df^n(z_0)| = 0$  e se  $|Df^n(z_0)| = 1$ , o chamaremos de neutro ou indiferente. Na vizinhança de um ponto periódico atrator  $w$  existe um aberto  $\mathcal{B}(w)$  tal que todos os seus elementos são atraídos por ele. Denominemos este conjunto de *bacia imediata de atração* e o conjunto de todos os pontos que se aproximam de uma órbita periódica atratora de *bacia de atração da órbita*.

Seja  $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  uma aplicação de classe  $C^k, k \geq 1$ . O fecho do conjunto de pontos periódicos repulsores de  $f$  é chamado o *conjunto de Julia* de  $f$  e será denotado por  $\mathcal{J}_f$ . Geralmente o conjunto de Julia é repulsor e possui geometria fractal. Veremos a seguir que certas propriedades são inerentes a este conjunto, por exemplo, a invariância, a compacidade e caoticidade com que a aplicação  $f$  se comporta e, para tal, caracterizaremos o conjunto de Julia  $\mathcal{J}_f$  de outra maneira.

Dizemos que uma família de aplicações holomorfas  $\{f_\kappa\}_{\kappa \geq 1}$  é *normal em um ponto  $p$*  se existe uma vizinhança  $V_p$  contida em  $\mathcal{U}$  na qual  $\{f_\kappa\}_{\kappa \geq 1}$  seja normal. Seja  $f$  uma aplicação holomorfa e denotemos por  $\mathcal{J}_f^\circ$  o conjunto dos pontos em  $\mathbb{C}$  tais que a família  $\{f^n\}_{n \geq 0}$  é não normal, ou seja

$$\mathcal{J}_f^\circ = \{z \in \mathbb{C} : \{f^n\}_{n \geq 0} \text{ é não normal em } z\}.$$

**1.22. PROPOSIÇÃO.** *Se  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  é uma aplicação polinomial de grau  $\eta \geq 2$ , então  $\mathcal{J}_f^\circ$  é não vazio, compacto e invariante.*

**Prova.** Suponha que  $\mathcal{J}_f^\circ = \emptyset$ . Seja  $B = B_r(0) \subset \mathbb{C}$ , uma bola aberta de centro na origem e raio  $r > 0$ . Como  $\overline{B}$  é compacto, existe uma cobertura finita de abertos onde  $\{f^n\}$  é normal,  $\forall r$ . Como  $f$  é polinomial de grau  $\eta \geq 2$ , temos, para um valor de  $r$  suficientemente grande, que existem  $z \in B$  tal que  $|f^n(z)| \rightarrow \infty$  e que, pelo Teorema Fundamental da Álgebra [19],  $\exists w$  tal que  $f(w) = w$ . Conseqüentemente,  $f^n(w) = w, \forall n$ . Assim, é impossível que qualquer subsequência de  $\{f^n\}$  convirja uniformemente ou para uma aplicação limitada, em qualquer subconjunto compacto de  $B$  o qual contém tanto  $z$  quanto  $w$ , ou convirja para o infinito, o que contradiz a normalidade de  $\{f^n\}$ .

Seja agora  $F_f^0$ , o conjunto dos pontos tais que a família  $\{f^n\}$  é normal em  $z \in \mathbb{C}$ , isto é,  $F_f^0 = \mathbb{C} \setminus \mathcal{J}_f^\circ$ . Observemos que  $F_f^0$  é um conjunto aberto e, conseqüentemente,  $\mathcal{J}_f^\circ$  é um conjunto fechado. Como  $f$  é uma aplicação polinomial de grau  $\eta \geq 2$ , existe  $r > 0$  tal que  $|f(z)| \geq 2 \cdot |z|$ , se  $|z| > r$ , no que implica  $|f^n(z)| > 2^n \cdot r$ , se  $|z| > r$ . Portanto,  $f^n(z)$  diverge se tomarmos valores em  $V = \{z : |z| > r\}$ . Assim, a família  $\{f^n\}$  é normal em  $V$ , por definição. Segue que  $V \subset \mathbb{C} \setminus \mathcal{J}_f^\circ$ . Logo,  $\mathcal{J}_f^\circ$  é limitado e, conseqüentemente, compacto.

Para mostrarmos que  $\mathcal{J}_f^\circ$  é invariante, mostremos, equivalentemente, que  $F_f^0$  é positivamente e negativamente invariante. Tomemos um conjunto aberto  $V \subset F_f^0$ , e  $\{f^n\}$ , uma família normal de aplicações em  $V$ . Uma vez que  $f$  é contínua, claro que  $f^{-1}(V)$  é um aberto. Seja  $\{f^{n_i}\}$  uma subsequência de  $\{f^n\}$ . Como  $\{f^n\}$  é normal em  $V$ ,  $\{f^{n_i+1}\}$  possui subsequência, digamos  $\{f^{n'_i+1}\}$ , que converge uniformemente nas partes compactas de  $V$ . Em particular, se  $K \subset f^{-1}(V)$  é um subconjunto compacto,  $\{f^{n'_i+1}\}$  converge uniformemente no subconjunto compacto  $f(K)$  de  $V$ . Logo,  $\{f^{n'_i}\}$  é uniformemente convergente em  $K$ . Portanto,  $\{f^n\}$  é normal em  $f^{-1}(V)$  e, tomando  $z \in F_f^0$  qualquer, temos que  $\{f^n\}$  é normal em  $f^{-1}(z)$ . Portanto,  $f^{-1}(z) \subset F_f^0$  e, conseqüentemente,  $f^{-1}(F_f^0) \subset F_f^0$ . Logo,  $F_f^0 \subset f(F_f^0)$ .

Por outro lado, seja  $V \subset F_f^0$  um conjunto aberto com  $\{f^n\}$  normal em  $V$ . Uma vez que  $f$  é uma aplicação aberta,  $f(V)$  é um conjunto aberto. A seqüência  $\{f^{n_i-1}\} \subset \{f^{n_i}\}$  possui subsequência que converge uniformemente nas partes compactas de  $V$ , digamos  $\{f^{n'_i-1}\}$ . Em particular, se  $K \subset f(V)$  é compacto, então  $\{f^{n'_i-1}\}$  converge uniformemente em  $f^{-1}(K)$ , pois  $f^{-1}(K) \subset V$  é compacto. Segue que  $\{f^{n'_i}\}$  converge uniformemente em  $K$ . Portanto,  $\{f^n\}$  é normal em  $f(V)$  e, portanto, para  $z \in F_f^0$  temos que  $f(z) \in F_f^0$ . Logo,  $f(F_f^0) \subset F_f^0$  e, conseqüentemente,  $F_f^0 \subset f^{-1}(F_f^0)$ . Logo,  $F_f^0 = f^{-1}(F_f^0)$  e  $f(F_f^0) = F_f^0$ . Portanto,  $\mathcal{J}_f^\circ = f^{-1}(\mathcal{J}_f^\circ) = f(\mathcal{J}_f^\circ)$ .  $\square$

**1.23. PROPOSIÇÃO.** *Para todo inteiro positivo  $k$ ,  $\mathcal{J}_{f^k}^\circ = \mathcal{J}_f^\circ$ .*

**Prova.** Seja  $F_f^0$  como na Proposição 1.22. É claro que, se toda subsequência de  $\{f^n\}$  possui subsequência uniformemente convergente em um dado conjunto, o mesmo é verdade para  $\{f^{kn}\}$ . Portanto,  $F_f^0 \subset F_{f^k}^0$ . Por outro lado, se  $K \subset \mathcal{U}$  é um conjunto compacto e  $\{f_\kappa\}$  é uma família normal de aplicações em  $\mathcal{U}$ , então o mesmo acontece para  $\{h \circ f_\kappa\}$ ,  $h$  uma aplicação polinomial qualquer. Portanto, se  $\{f^{kn}\}$  é normal em um aberto  $V$ ,  $\{f^{kn+r}\}$  também é normal em  $V$ , com  $0 < r < k - 1$ . Porém, qualquer subsequência de  $\{f^n\}$  contém uma subsequência infinita de  $\{f^{kn+r}\}$ , para algum inteiro positivo  $r < k$ , que por sua vez possui subsequência uniformemente convergente em subconjuntos compactos de  $V$ . Portanto,  $\{f^n\}$  é normal em  $V$  e, conseqüentemente,  $F_f^0 \supset F_{f^k}^0$ . Logo,  $F_f^0 = F_{f^k}^0$  e, conseqüentemente,  $\mathcal{J}_f^\circ = \mathcal{J}_{f^k}^\circ$ .  $\square$

**1.24. LEMA.** *Sejam  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  uma aplicação polinomial de grau  $\eta \geq 2$  e  $\mathcal{U}$  uma vizinhança aberta de  $w \in \mathcal{J}_f^\circ$ . Então,*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(\mathcal{U})$$

*omite no máximo um ponto  $p$  do plano complexo, por isso chamado excepcional. Além disso,  $p \notin \mathcal{J}_f^\circ$  e independe de  $w$  e de  $\mathcal{U}$ .*

**Prova.** Pela definição de  $\mathcal{J}_f^\circ$ , a família  $\{f^n\}$  é não normal em  $w$ , portanto, pelo Teorema 1.21,  $W \equiv \bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(\mathcal{U})$  é todo o plano complexo  $\mathbb{C}$ , exceto, possivelmente, por um ponto  $p$ .

Suponhamos, inicialmente, que  $p \notin W$ . Note que, se  $f(z) = p$ , então  $z = p$ . De fato, como  $f$  é uma aplicação aberta e  $W$  é a união infinita de abertos, temos que  $f(W) \subset W$ . Segue que  $z \notin W$  e, como  $\mathbb{C} \setminus W$  consiste, no máximo, de um ponto, concluímos que  $z = p$ .

Como  $f$  é um polinômio de grau  $\eta$  e  $p$  é a solução única da equação  $f(z) = p$ , temos que  $0 = f(z) - p = c \cdot (z - p)^\eta$ , para alguma constante  $c \in \mathbb{C}$ , e se tomarmos  $z$  suficientemente próximo a  $p$ ,  $f^n(z) \xrightarrow{u} p$ , à medida que  $n \rightarrow \infty$ . De fato,  $|f'(z)| \leq a < 1$  implica que  $|\eta \cdot c \cdot (z - p)^{\eta-1}| \leq a$ . Segue que  $|z - p| \leq \frac{1}{\eta \cdot \sqrt[\eta]{|c|}} < \frac{1}{\eta \cdot \sqrt[2]{|c|}}$ . Portanto,  $\{f^n\}$  é normal em  $p$  e o ponto excepcional  $p \notin \mathcal{J}_f^\circ$ . Claramente,  $p$  depende somente do polinômio  $f$ . De fato, se  $W$  omite um ponto  $p \in \mathbb{C}$ , então  $\mathcal{J}_f^\circ$  é o círculo de centro em  $p$  e raio  $c^{-\frac{1}{\eta-1}}$ .  $\square$

**1.25. COROLÁRIO.** *Seja  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  uma aplicação polinomial de grau  $\eta \geq 2$ . Para todo  $z \in \mathbb{C}$ , com no máximo uma exceção, é válido que se  $\mathcal{U}$  é um aberto intersectando  $\mathcal{J}_f^\circ$ , então  $f^{-n}(z)$  intersecta  $\mathcal{U}$  para infinitos valores de  $n$ .*

**Prova.** Seja  $p \in \mathbb{C}$  o ponto excepcional como no Lema 1.24. Se  $z \neq p$ , então  $z \in f^n(\mathcal{U})$  e, conseqüentemente,  $f^{-n}(z)$  intersecta  $\mathcal{U}$ , para algum  $n$ . Usando este argumento infinitas vezes, obtemos uma seqüência infinita de valores para  $n$ , com  $f^{-n}(z)$  intersectando  $\mathcal{U}$ .  $\square$

**1.26. COROLÁRIO.** *Seja  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  uma aplicação polinomial de grau  $\eta \geq 2$ . Se  $z \in \mathcal{J}_f^\circ$ , então  $\mathcal{J}_f^\circ$  é o fecho de  $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(z)$ .*

**Prova.** Pela Proposição 1.22 temos, para  $z \in \mathcal{J}_f^\circ$ , que  $f^{-n}(z) \subset \mathcal{J}_f^\circ$ , logo  $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(z) \subset \mathcal{J}_f^\circ$  e, conseqüentemente,  $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(z)} \subset \mathcal{J}_f^\circ$ .

Reciprocamente, se  $\mathcal{U}$  é um aberto contendo  $z \in \mathcal{J}_f^\circ$ , então, pelo Corolário 1.25,  $f^{-n}(z)$  intersecta  $\mathcal{U}$ , para algum  $n$ , e pelo Lema 1.24,  $z$  não pode ser um ponto excepcional.  $\square$

**1.27. COROLÁRIO.** *Se  $f$  é uma aplicação polinomial de grau  $\eta \geq 2$ ,  $\text{int}(\mathcal{J}_f^\circ) = \emptyset$ .*

**Prova.** Seja  $\mathcal{U}$  uma vizinhança aberta de  $w \in \mathcal{J}_f^\circ$  e suponha que  $\mathcal{U} \subset \mathcal{J}_f^\circ$ . Então, como  $\mathcal{J}_f^\circ$  é invariante (Proposição 1.22), temos que  $f^n(\mathcal{U}) \subset \mathcal{J}_f^\circ, \forall n$ . Segue que,  $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(\mathcal{U}) \subset \mathcal{J}_f^\circ$ . Como  $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(\mathcal{U})$  é todo o plano complexo, exceto, possivelmente, por um ponto (Lema 1.24),  $\mathcal{J}_f^\circ$  é ilimitado, o que contradiz a Proposição 1.22.  $\square$

Dizemos que um conjunto  $\Delta$  é *perfeito* se para todo  $v \in \Delta$ ,  $v$  é ponto de acumulação de outros pontos em  $\Delta$ , ou seja,  $\Delta$  não possui pontos isolados.

**1.28. PROPOSIÇÃO.**  *$\mathcal{J}_f^\circ$  é perfeito.*

**Prova.** Tomemos  $\mathcal{U}$  como sendo uma vizinhança de  $v \in \mathcal{J}_f^\circ$ .

Se  $v$  não é ponto periódico para  $f$  temos, pelos Corolário 1.26 e Proposição 1.22, que  $\mathcal{U}$  contém um ponto de  $f^{-n}(v) \subset \mathcal{J}_f^\circ$ , para algum  $n \geq 1$ , e este ponto deve ser diferente de  $v$ .

Se  $v$  é ponto fixo, então a equação  $f(z) = v, \forall z \neq v$ , não possui solução e, como visto na prova do Lema 1.24,  $v \notin \mathcal{J}_f^\circ$ . Pelo Corolário 1.26,  $\mathcal{U}$  contém um ponto de  $f^{-n}(z)$ , para algum  $n \geq 1$ . Por sua invariância, qualquer outro ponto está em  $\mathcal{J}_f^\circ$  e é diferente de  $v$ , uma vez que  $f^n(v) = v$ .

Se  $v$  é ponto periódico de período  $m$ , temos, pela Proposição 1.23, que  $\mathcal{J}_f^\circ = \mathcal{J}_{f^m}^0$  e, pela afirmação do caso anterior, observamos que  $\mathcal{U}$  contém pontos de  $\mathcal{J}_f^\circ = \mathcal{J}_{f^m}^0$  diferentes de  $v$ .  $\square$

**1.29. TEOREMA.** *Se  $f$  é uma aplicação polinomial de grau  $\eta \geq 2$ , então  $\mathcal{J}_f^\circ = \mathcal{J}_f$ .*

**Prova.** Seja  $w \in \mathcal{J}_f$ , ou seja,  $f^m(w) = w$ , para algum  $m$ . Façamos  $g(w) = f^m(w)$  e, conseqüentemente,  $w$  é ponto fixo para  $g$ . Suponha que  $\{g^n\}$  seja uma família normal em  $w$ . Portanto, existe vizinhança  $V$  de  $w$  na qual uma subsequência  $\{g^{n_i}\}$  converge uniformemente para uma aplicação analítica  $g_0$  limitada. Claro que não há divergência em  $V$ , visto que  $g^n(w) = w, \forall n$  e que  $\{g^n\}$  é normal em  $w$ . Pelo Teorema 1.10,  $(g^{n_i})'(z) \xrightarrow{u} g_0'(z)$ , se  $z \in V$ . Contudo, pela regra da cadeia,  $|(g^{n_i})'(w)| = |(g'(w))^{n_i}|$  e como  $w$  é ponto fixo repulsor,  $|g'(w)| > 1$ , logo  $|(g^{n_i})'(w)| \rightarrow \infty$ , contradizendo a limitação de  $g_0'(w)$ . Concluimos, portanto, que  $\{g^n\}$  é não normal em  $w$ . Assim, pela Proposição 1.23,  $w \in \mathcal{J}_g^0 = \mathcal{J}_{f^m}^0 = \mathcal{J}_f^\circ$ . Como  $\mathcal{J}_f^\circ$  é fechado, segue que  $\mathcal{J}_f \subset \mathcal{J}_f^\circ$ .

Seja  $K = \{w \in \mathcal{J}_f^\circ : \exists z \neq w, \text{ com } f(z) = w \text{ e } f'(z) \neq 0\}$ . Seja  $V$  uma vizinhança aberta de  $w \in K$  a qual achamos, localmente, a aplicação analítica inversa  $f^{-1} : V \rightarrow \mathbb{C} \setminus V$  e, assim,  $f(f^{-1}(z)) = z, \forall z \in V$ . Definamos a família de aplicações analíticas  $\{h_n\}$  em  $V$  por

$$h_n(z) = \frac{f^n(z) - z}{f^{-1}(z) - z}.$$

Seja  $\mathcal{U} \subset V$  uma vizinhança de  $w$ . Como  $w \in \mathcal{J}_f$ ,  $\{f^n\}$  é uma família não normal em  $\mathcal{U}$ , o mesmo acontecendo para a família  $\{h_n\}$ . Pelo Teorema 1.21,  $h_n(z)$  assume os valores 0 ou 1, para algum  $n$  e  $z \in \mathcal{U}$ . No primeiro caso temos que  $f^n(z) = z$ , para algum  $z \in \mathcal{U}$ ; no segundo,  $f^n(z) = f^{-1}(z)$  e, portanto,  $f^{n+1}(z) = z$ , para algum  $z \in \mathcal{U}$ . Assim,  $\mathcal{U}$  contém um ponto periódico de  $f$ , portanto  $w \in \mathcal{J}_f$ . Mostramos então que  $K \subset \mathcal{J}_f$  e, conseqüentemente,  $\overline{K} \subset \overline{\mathcal{J}_f} = \mathcal{J}_f$ . Contudo,  $K$  contém quase todos os pontos de  $\mathcal{J}_f^\circ$ . Uma vez que  $\mathcal{J}_f^\circ$  não possui pontos isolados, pela Proposição 1.28,  $\mathcal{J}_f^\circ = \overline{K} \subset \mathcal{J}_f$ .  $\square$

Podemos, ainda, caracterizar o conjunto de Julia da seguinte forma:

**1.30. PROPOSIÇÃO.** *Seja  $w$  um ponto periódico atrator de  $f$ . Então  $\partial\mathcal{B}(w) = \mathcal{J}_f$ .*

**Prova.** Provemos inicialmente que  $\mathcal{J}_f \subset \partial\mathcal{B}(w)$ . Seja  $z_0 \in \mathcal{J}_f$ . Pela invariância de  $\mathcal{J}_f$ , temos que  $f^n(z_0) \in \mathcal{J}_f, \forall n$ . Logo,  $z_0 \notin \mathcal{B}(w)$ . Contudo, pelo Lema 1.24, se  $\mathcal{U}$  é uma vizinhança aberta de  $z_0$ , o conjunto  $f^n(\mathcal{U})$  contém pontos de  $\mathcal{B}(w)$ , para algum  $n$ , e assim, existem pontos arbitrariamente próximos a  $z_0$  que são atraídos por  $w$ . Logo,  $z_0 \in \overline{\mathcal{B}(w)}$  e, portanto,  $z_0 \in \partial\mathcal{B}(w)$ , ou seja,  $\mathcal{J}_f \subset \partial\mathcal{B}(w)$ .

Por outro lado, mostremos agora que  $\partial\mathcal{B}(w) \subset \mathcal{J}_f$ . Suponha  $z_0 \in \partial\mathcal{B}(w)$  e  $V$  uma vizinhança de  $z_0$ , então  $f^n(z)$  tende ao  $w$ -ciclo,  $\forall z \in V \cap \partial\mathcal{B}(w)$ , por outro lado, as iterações de  $f^n(z)$  permanecem fora de  $\mathcal{B}(w)$ , para todo  $z \in V \setminus \mathcal{B}(w)$ . Conseqüentemente,  $\{f^n\}$  não é normal em  $V$ .  $\square$

**1.31. LEMA.** *Seja  $f$  uma aplicação holomorfa em  $\mathbb{C}$  e  $p$  um ponto periódico hiperbólico repulsor. Então  $\{f^n\}$  é uma família não normal em  $p$ .*

**Prova.** Suponha que  $\{f^n\}$  seja uma família normal em  $p$ , isto é, existe vizinhança  $V$  de  $p$  tal que  $\{f^n\}$  é normal. Desta forma, qualquer que seja a seqüência selecionada de  $\{f^n\}$ , temos que existe uma subseqüência  $\{f^{n_k}\}$  desta seqüência que converge uniformemente em todo subconjunto compacto de  $V$  para uma função analítica  $f$ , ou dirvege. Um absurdo, pois  $p \in V$ ,  $f^{n_k}(p)$  não está na bacia de atração do infinito e  $f^{n_k}(p) \not\rightarrow f$ , uma vez que a convergência deveria se dar de maneira uniforme, ou seja,  $(f^{n_k})' \rightarrow f'$  e  $|(f^{n_k})'| \rightarrow \infty$ .  $\square$

O próximo resultado é um corolário do Teorema 1.21. Observe aqui que a hipótese do lema 1.24 é modificada.

**1.32. COROLÁRIO.** *Sejam  $f$  uma aplicação holomorfa,  $z_0 \in \mathcal{J}_f$  e  $\mathcal{U}$  uma vizinhança de  $z_0$ . Então*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(\mathcal{U})$$

*omite no máximo um ponto no plano complexo.*

**Prova.** Suponha que  $\mathcal{F} = \{f^n\}$  omite, no mínimo, dois pontos. Neste caso  $\mathcal{F}$  é uma família normal em  $\mathcal{U}$ .  $\square$

**Exemplo 1.1.** *Considere a aplicação  $f(z) = z^2$  definida no plano complexo. O conjunto  $\mathcal{J}_f = \{z : |z| = 1\}$  é o conjunto de Julia para  $f$ . Observe que se tomarmos  $w \in \mathbb{C} \setminus \{z : |z| \leq 1\}$ ,  $f^n(w) \rightarrow \infty$ . Por outro lado, se  $w \in \{z : 0 < |z| < 1\}$ ,  $f^n(w) \rightarrow 0$ , mas  $f^n(w) \neq 0$ . Assim, de acordo com o Corolário 1.32,  $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(\mathcal{U}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , qualquer que seja  $\mathcal{U}$  vizinhança de  $z \in \mathcal{J}_f$ .*

## Capítulo 2

### O espaço $\mathbb{R}^{m \times m}$

Este capítulo tem o intuito de fomentar o estudo da dinâmica de matrizes quadradas, com entradas reais, por aplicações definidas por séries de potências. Consideremos, portanto, o conjunto de todas as  $m \times m$  matrizes quadradas com entradas reais e o denotemos por  $\mathbb{R}^{m \times m}$ . É fácil verificar que o conjunto  $\mathbb{R}^{m \times m}$ , munido da norma

$$\|A\| = \sup \{|A \cdot v|; v \in S^{m-1}\},$$

onde  $S^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^m; \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2} = 1\}$ , é um espaço vetorial normado sobre o corpo  $\mathbb{R}$ , em relação às operações usuais de adição de matrizes e multiplicação por um escalar.

Dizemos que duas matrizes  $A$  e  $B$  pertencentes  $\mathbb{R}^{m \times m}$  são *semelhantes*, se existe uma matriz não singular (invertível)  $C \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , tal que  $A = C^{-1} \cdot B \cdot C$ . Sabemos que a relação de semelhança é uma relação de equivalência em  $\mathbb{R}^{m \times m}$ . Entretanto, cada classe de equivalência, segundo a relação de semelhança, contém uma  $m \times m$  matriz que está sob a forma canônica de Jordan. Portanto, faremos um breve estudo sobre as classes de equivalência representadas por  $m \times m$  matrizes de Jordan, segundo esta relação de semelhança.

**2.1. TEOREMA.** *Considere  $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ , o espaço vetorial das matrizes quadradas de ordem  $m$  com entradas complexas. Então, existe uma matriz não singular  $P \in \mathbb{C}^{m \times m}$  tal que*

$$A = P^{-1} \cdot J \cdot P,$$

onde  $J \in \mathbb{C}^{m \times m}$  é uma matriz diagonal ou em blocos e  $P$  é a matriz dos autovetores associados a cada autovalor de  $A$ .

**Prova.** Consultar bibliografia em Álgebra Linear.  $\square$

O Teorema 2.1 afirma que qualquer  $m \times m$  matriz  $A$ , com entradas complexas, é semelhante a uma matriz diagonal ou blocos  $J$ , ou seja, se fizermos

$$A_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 0 \text{ ou } 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 0 \text{ ou } 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda_k & 0 \text{ ou } 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_k \end{bmatrix}, \quad \lambda_k \in \mathbb{C},$$

então,

$$J = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Porém, se  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , nem sempre poderemos escrevê-la na forma  $P^{-1} \cdot J \cdot P$ ,  $P$  e  $J \in \mathbb{R}^{m \times m}$ . De fato, obteremos autovalores reais, distintos ou não, ou ainda, autovalores complexos com parte imaginária não nula. Se todos os autovalores de  $A$  são reais e distintos, obteremos autovetores linearmente independentes, formando uma matriz  $P$  de autovetores e a matriz  $J$  estará sob a forma de diagonal. Se pelo menos um dos autovalores reais de  $A$  possuir uma certa multiplicidade, formaremos a matriz  $P$  tomando os autovetores associados a cada autovalor diferente, completando-a com a quantidade necessária de vetores linearmente independentes, tal que  $\dim(P) = m^2$ , e a matriz  $J$  semelhante a  $A$ , toma a forma em blocos. Nestes casos e no caso em que os autovalores de  $A$  são complexos com parte imaginária não nula,  $P$  pode ser determinada como nos diz o Teorema 2.2.

Consideremos as matrizes

$$J_k = \begin{bmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ -\beta_k & \alpha_k \end{bmatrix} \quad I_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

No caso do Teorema 2.2 a  $m \times m$  matriz  $A$ , com entradas reais, é semelhante a uma matriz diagonal ou blocos  $J$  do tipo

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \text{ ou } I_d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \text{ ou } I_d & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{k-1} & 0 \text{ ou } I_d \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & J_k \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

**2.2. TEOREMA.** *Seja  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$  com autovalores  $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ . Então existe uma matriz não singular  $P \in \mathbb{R}^{m \times m}$  tal que*

$$A = P^{-1} \cdot J \cdot P,$$

onde  $J \in \mathbb{R}^{m \times m}$  é uma matriz diagonal ou em blocos (ver (2.2)), e  $P \in \mathbb{R}^{m \times m}$  é a matriz dos autovetores associados a cada autovalor de  $A$ .

**Prova.** Consultar bibliografia em Álgebra Linear.  $\square$

Dos Teoremas 2.1 e 2.2 concluímos que, qualquer que seja a  $m \times m$  matriz  $A$ , com entradas reais ou complexas, ela pode ser escrita sob as formas de Jordan vistas em (2.1) e (2.2). Denotemos por  $\mathbb{M}J_m(\mathbb{R})$  o conjunto de todas as matrizes sob a forma de Jordan que são semelhantes a algum  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ .

## 2.1 Série de potências

Consideremos uma seqüência de termos reais  $\{a_n\}_{n \geq 0}$ . A seqüência  $\{S_j\}_{j \geq 0}$  obtida, recursivamente, por

$$\begin{cases} S_0 = a_0 \\ S_j = a_j + S_{j-1}, \quad j \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

é chamada de *série*. Denota-se, também, uma série  $\{S_j\}_{j \geq 0}$  por  $\sum a_j$ ,  $\sum_{j \geq 0} a_j$  ou  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ . Os números  $S_j$  são chamados de *reduzidas* ou *somas parciais* da série. Uma série é dita *convergente* se existir o limite  $S = \lim_{j \rightarrow \infty} S_j$  e chamaremos  $S = \sum_{j=0}^{\infty} a_j$  a *soma da série*. Caso não exista o limite  $\lim_{j \rightarrow \infty} S_j$ , a série será dita *divergente*.

Se considerarmos a seqüência  $\{a_j x^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ , onde  $a_0$  é uma constante e  $a_j, j \geq 1$ , são os coeficientes de ordem  $j$ , obteremos uma *série de potências* em  $\mathbb{R}$ , ou seja, uma seqüência  $\{S_j\}_{j \geq 0}$  de termos obtidos pela soma de  $j$  termos da seqüência  $\{a_j x^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ , onde, para cada  $j$ ,  $S_j = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_j x^j$ . Utiliza-se as notações  $\sum_{j \geq 0} a_j x^j$  ou  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$  para designar a série de potências  $\{S_j\}_{j \geq 0}$ .

Seja  $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$  um aberto e  $\varphi : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação definida por uma série de potências  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ . Seja  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{m \times m}$  um aberto e  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$  uma aplicação obtida de forma induzida pela mesma série de potências que  $\varphi$ , ou seja,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^{m \times m} &\rightarrow \mathbb{R}^{m \times m} \\ X &\mapsto \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot X^j, a_j \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Nosso interesse aqui é o de determinar um conjunto  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{m \times m}$  cujos elementos são tais que a série de potências  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j X^j$  convirja. Substituiremos, com o intuito de obter um resultado mais abrangente, os coeficientes  $a_j \in \mathbb{R}$  da série por  $A_j \in \mathbb{R}^{m \times m}$ .

Observemos inicialmente que, se a série de potências  $\sum_{j=0}^{\infty} \|A_j\| \cdot \|Y\|^j, A_j \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , converge, então a série  $S = \sum_{j=0}^{\infty} A_j \cdot X^j$  convergirá absolutamente, para todo  $X \in \mathbb{R}^{m \times m}$  tal que  $\|X\| < \|Y\|$ . Com efeito, se considerarmos  $\|X\| < \|Y\|$ , teremos que,

$$\|A_j \cdot X^j\| = \|A_j\| \cdot \|X^j\| \leq \|A_j\| \cdot \|X\|^j < \|A_j\| \cdot \|Y\|^j.$$

Desta forma,  $\sum_{j=0}^{\infty} \|A_j \cdot X^j\| < \sum_{j=0}^{\infty} \|A_j\| \cdot \|Y\|^j$ , o que prova que  $\sum_{j=0}^{\infty} A_j \cdot X^j$  é absolutamente convergente. Consideremos então o número  $\rho(S)$ , o *raio de convergência* da série  $S$  e dado por

$$\rho(S) = \rho = \sup \left\{ r \geq 0; \sum_{j=0}^{\infty} \|A_j\| \cdot r^j < \infty \right\}.$$

A região de convergência da série de potências  $S$  será o disco  $\mathcal{U}$  de centro na matriz nula e raio  $\rho$ , chama de disco de convergência da série, já que, se  $\|X\| > \rho$ , então  $S$  diverge. De fato, suponha  $X \in \mathbb{R}^{m \times m}$  uma matriz não nula tal que  $\sum_{j \geq 0} A_j \cdot X^j$  convirja. Sendo assim, observe que a seqüência  $\{A_j \cdot X^j\}_{j \geq 0}$  é limitada, ou seja, para todo  $j \in \mathbb{N}$ , existe uma constante positiva  $M$ , tal que  $\|A_j\| \cdot \|X\|^j < M$ . Mas, se tomarmos  $\|Y\| < \|X\|$ ,

$$\begin{aligned} \|A_j \cdot Y^j\| &\leq \|A_j\| \cdot \|Y^j\| \\ &\leq \|A_j\| \cdot \|Y\|^j \\ &= \|A_j\| \cdot \|X\|^j \left( \frac{\|Y\|}{\|X\|} \right)^j \\ &< M \cdot \left( \frac{\|Y\|}{\|X\|} \right)^j. \end{aligned}$$

Concluimos então que

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|A_j \cdot Y^j\| < M \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{\|Y\|}{\|X\|} \right)^j.$$

Uma vez que  $\frac{\|Y\|}{\|X\|} < 1$ , claro que  $\sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{\|Y\|}{\|X\|} \right)^j$  converge. Conseqüentemente,  $\sum_{j=0}^{\infty} A_j \cdot Y^j$  converge absolutamente, implicando em  $\|X\| \leq \rho$ .

**2.3. TEOREMA.** (FÓRMULA DE HADAMARD) *O raio de convergência  $\rho(S)$  de uma série de potências*

$$S = \sum_{j=0}^{\infty} A_j X^j, A_j \in \mathbb{R}^{m \times m}, \text{ é dado por}$$

$$\rho(S) = \frac{1}{\limsup_{j \rightarrow \infty} \sqrt[j]{\|A_j\|}}.$$

**Prova.** Sejam  $S = \sum_{j=0}^{\infty} A_j X^j$  uma série de potências e  $\rho = \frac{1}{\limsup_{j \rightarrow \infty} \sqrt[j]{\|A_j\|}}$ . Suponha que

$\|X\| < \rho$ , com  $0 < \rho < \infty$ . Portanto, existe  $R > 0$ , tal que

$$\|X\| < R < \rho.$$

Deste fato decorre que  $\frac{1}{\rho} < \frac{1}{R}$ . Como  $\frac{1}{\rho} = \limsup_{j \rightarrow +\infty} \sqrt[j]{\|A_j\|}$  é o maior ponto de acumulação da seqüência  $(\sqrt[j]{\|A_j\|})_{j \geq 0}$ , existe  $j_0$  tal que, se  $j \geq j_0$ , então  $\sqrt[j]{\|A_j\|} < \frac{1}{R}$ , resultando em  $\|A_j\| < \frac{1}{R^j}$ .

Conseqüentemente,

$$\|A_j X^j\| \leq \|A_j\| \cdot \|X^j\| < \frac{1}{R^j} \cdot \|X^j\| \leq \left(\frac{\|X\|}{R}\right)^j.$$

Segue que,  $\sum_{j=j_0}^{+\infty} \|A_j X^j\| \leq \sum_{j=j_0}^{+\infty} \left(\frac{\|X\|}{R}\right)^j$  e como  $\frac{\|X\|}{R} < 1$ , a série  $\sum_{j=j_0}^{+\infty} \left(\frac{\|X\|}{R}\right)^j$  converge. Por

comparação, concluímos que a série  $\sum_{j=j_0}^{+\infty} \|A_j \cdot X^j\|$  também converge. Assim,

$$\sum_{j=0}^{+\infty} A_j \cdot X^j = A_0 + A_1 X + A_2 X^2 + \dots + A_{j_0-1} X^{j_0-1} + \sum_{j=j_0}^{+\infty} A_j X^j$$

é convergente, uma vez que  $\sum_{j=j_0}^{+\infty} A_j X^j$  converge absolutamente.  $\square$

Um caso particular, o qual se refere ao estudo da convergência da série de potências  $\sum_{j=0}^{\infty} A_j \cdot X^j$ ,

é o da série de potências a coeficientes reais, ou seja,  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot X^j, a_j \in \mathbb{R}$ .

Consideremos a série  $S = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot X^j, a_j \in \mathbb{R}$ , e  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^{m \times m}$  como sendo o disco de convergência desta série de potências. Denotaremos por  $\mathcal{A}_m$ , o conjunto das aplicações  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$  definidas por séries de potências de matrizes a coeficientes reais, que foram obtidas de forma induzida por aplicações  $\varphi : \mathcal{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por séries de potências em  $\mathbb{R}$  ( $\mathcal{A}_1$ ), ou seja,

$$\begin{array}{ccc} \varphi : \mathcal{I} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ccc} f : \mathcal{U} & \rightarrow & \mathbb{R}^{m \times m} \\ X & \mapsto & \sum_{j=0}^{\infty} a_j X^j. \end{array}$$

Sabemos que para uma aplicação  $f : \mathcal{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável, classificar em hiperbólico um ponto  $p \in \mathcal{I}$  se relaciona ao valor absoluto da derivada de  $f$  em  $p$ . Neste caso, dado um  $\varepsilon > 0$ , tão pequeno quanto se queira,  $f(p + \varepsilon)$  é aproximada pela aplicação linear  $f(p) + \varepsilon \cdot f'(p)$ , ou seja,

$$f(p + \varepsilon) \approx f(p) + \varepsilon \cdot f'(p).$$

Esta situação é semelhante no conjunto de aplicações  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ , de classe  $C^1$ , onde  $\mathbb{X}$  representa um espaço métrico de dimensão  $n \geq 2$ . Denotemos este conjunto por  $C^1(\mathbb{X})$  e o dotemos da topologia  $C^1$ .

Seja  $f = (f_1, \dots, f_m)$  uma aplicação de classe  $C^1$ , definida em  $\mathbb{R}^m$  com valores em  $\mathbb{R}^m$ , e seja  $p \in \mathbb{R}^m$  um vetor. A *matriz jacobiana*  $Df(p)$  de  $f$  em  $p$ , ou simplesmente a derivada de  $f$ , é a matriz

$$Df(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m}(p) \end{bmatrix}.$$

Portanto, para um vetor  $p \in \mathbb{R}^m$  e um vetor  $\varepsilon \in \mathbb{R}^m$  de valor absoluto tão pequeno quanto se queira, temos que

$$f(p + \varepsilon) \approx f(p) + Df(p) \cdot \varepsilon,$$

ou seja, se assumirmos  $f(p) = p$ , então para uma pequena variação  $\varepsilon$  em  $p$  a aplicação  $f$  move  $p + \varepsilon$  aproximadamente para  $Df(p) \cdot \varepsilon$ .

Observe que, se tomarmos uma aplicação  $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{m \times m} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$ , podemos obter a derivada de  $f$  escrevendo  $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{m^2} \rightarrow \mathbb{R}^{m^2}$ ,  $f = (f_{11}, \dots, f_{1m}, f_{21}, \dots, f_{2m}, \dots, f_{m1}, \dots, f_{mm})$ .

## Capítulo 3

# A dinâmica das aplicações em $\mathcal{A}_m$

Vimos, em capítulos anteriores, definições e afirmações que nos serviram de base para analisar a dinâmica de determinadas classes de funções em  $\mathbb{R}$  e em  $\mathbb{C}$ . O nosso objetivo agora será o de analisar a dinâmica de famílias de aplicações  $f$  em  $\mathcal{A}_m$ ,  $m \geq 2$ . Visto que, caracterizarmos o comportamento da órbita de uma matriz  $A$ , por tais aplicações, à medida que modificamos as aplicações numa determinada família, não é uma tarefa muito fácil, apresentaremos um resultado importante que o simplificará. Vale a pena ressaltar que, por uma questão de conveniência, utilizaremos somente  $f$  para designar tanto a aplicação em  $\mathcal{A}_1$  quanto a sua aplicação induzida em  $\mathcal{A}_m$ .

**3.1. PROPOSIÇÃO.** *Seja  $f \in \mathcal{A}_m$  e  $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$  uma matriz não singular. Se  $A = B \cdot J \cdot B^{-1}$ , então  $f^n(A) = B \cdot f^n(J) \cdot B^{-1}$ .*

**Prova.** Como  $A = B^{-1} \cdot J \cdot B$ ,

$$\begin{aligned} f(A) &= f(B^{-1} \cdot J \cdot B) \\ &= \sum_{j \geq 0} a_j (B^{-1} \cdot J \cdot B)^j \\ &= \sum_{j \geq 0} a_j \underbrace{(B^{-1} \cdot J \cdot \overbrace{B \cdot B^{-1}}^I \cdot J \cdot B \cdot \dots \cdot B^{-1} \cdot J \cdot B)}_{j \text{ vezes}} \\ &= \sum_{j \geq 0} a_j (B^{-1} \cdot J^j \cdot B) = B^{-1} \cdot \left( \sum_{j \geq 0} a_j J^j \right) \cdot B = B^{-1} \cdot f(J) \cdot B. \end{aligned}$$

Suponha agora, por indução, que  $f^n(A) = B \cdot f^n(J) \cdot B^{-1}$ . Portanto,

$$f^{n+1}(A) = f(f^n(A)) = f(B \cdot f^n(J) \cdot B^{-1}) = B \cdot f(f^n(J)) \cdot B^{-1} = B \cdot f^{n+1}(J) \cdot B^{-1}. \quad \square$$

Em outras palavras, a Proposição 3.1 nos diz que a órbita de uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , através de uma aplicação definida por uma série de potências a coeficientes reais, pode ser analisada pela matriz de Jordan  $J$  semelhante a matriz  $A$  dada no domínio de convergência desta aplicação. Note que, para cada matriz  $B$  invertível, estaremos associando um subespaço no qual ocorrem as iterações de  $J$ , e que, para cada  $n$ ,  $f^n(J)$  é um representante da classe de equivalência, em relação a semelhança de matrizes, a qual  $f^n(A)$  também pertence.

Representemos o comportamento de  $A$  e o de sua matriz de Jordan  $J$  semelhante, em um plano  $OMJ_mMI_m$  (ver Figura 3.1). O eixo horizontal ( $MJ_m$ ) representa o conjunto no qual ocorrem as iterações das matrizes de Jordan  $J$ , e o vertical, o conjunto de matrizes não singulares em  $\mathbb{R}^{m \times m}$ . Observemos ainda que, para cada matriz invertível  $B$ , a órbita de  $A$  está num subespaço, representado por uma reta paralela ao eixo horizontal, o qual chamaremos de *folha*. Cada classe de equivalência, dada pela relação de semelhança, é representada por uma reta vertical paralela ao eixo de matrizes não singulares, a qual chamaremos de *fibra*.

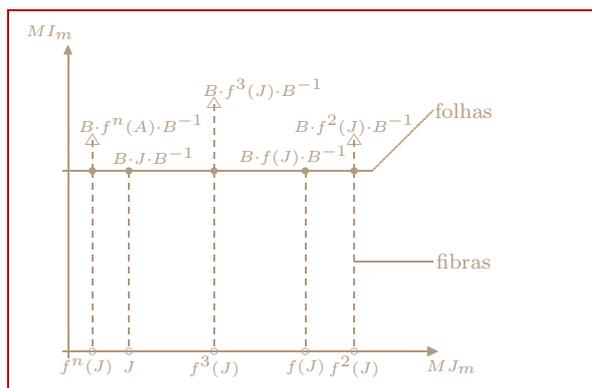


Figura 3.1: Diagrama de folhas e fibras

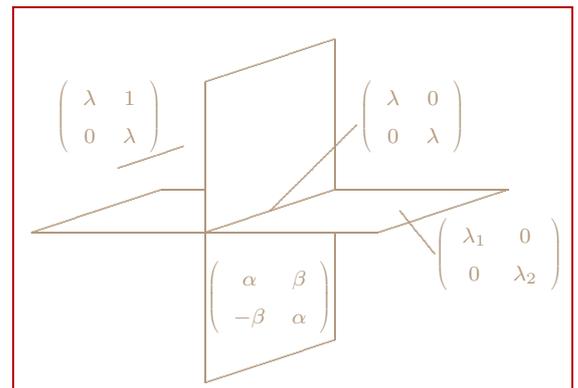


Figura 3.2: Subespaço de  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  das matrizes de Jordan

Direcionemos o nosso estudo para o da dinâmica das aplicações de uma família em  $\mathcal{A}_2$ . Para tal, veja que se  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  e  $J$  é uma matriz de Jordan semelhante a  $A$ , claro que  $J$  assume uma das formas

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}; \quad e \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

As seguintes afirmações caracterizam a órbita de uma matriz  $A$  de acordo com a matriz de Jordan a qual ela é semelhante.

**3.2. PROPOSIÇÃO.** *Seja  $f \in \mathcal{A}_2$ . Então*

$$f \left( \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) \end{bmatrix}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

*Em particular,*

$$f^n \left( \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} f^n(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f^n(\lambda_2) \end{bmatrix}.$$

**Prova.** Claro que

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}^j = \begin{bmatrix} \lambda_1^j & 0 \\ 0 & \lambda_2^j \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} f \left( \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \right) &= \sum_{j \geq 0} a_j \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}^j \\ &= \sum_{j \geq 0} a_j \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1^j & 0 \\ 0 & \lambda_2^j \end{bmatrix} \\ &= \sum_{j \geq 0} \begin{bmatrix} a_j \lambda_1^j & 0 \\ 0 & a_j \lambda_2^j \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{j \geq 0} a_j \lambda_1^j & 0 \\ 0 & \sum_{j \geq 0} a_j \lambda_2^j \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} f^n \left( \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \right) &= f^{n-1} \left( \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) \end{bmatrix} \right) \\ &\vdots \\ &= \begin{bmatrix} f^n(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f^n(\lambda_2) \end{bmatrix}. \quad \square \end{aligned}$$

Mais interessante que a proposição 3.2 é o que veremos na proposição a seguir, onde o valor de  $f$ , aplicado a uma matriz de Jordan da forma  $\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$ , origina, em uma das entradas de sua imagem, o valor da derivada de  $f$ , aplicada ao valor  $\alpha$ .

**3.3. PROPOSIÇÃO.** *Seja  $f \in \mathcal{A}_2$ . Então*

$$f \left( \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} f(\alpha) & Df(\alpha) \\ 0 & f(\alpha) \end{bmatrix}.$$

*Em particular,*

$$f^n \left( \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} f^n(\alpha) & Df^n(\alpha) \\ 0 & f^n(\alpha) \end{bmatrix}.$$

**Prova.** Verifiquemos inicialmente que

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}^j = \begin{bmatrix} \alpha^j & j\alpha^{j-1} \\ 0 & \alpha^j \end{bmatrix}.$$

De fato,

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 2\alpha \\ 0 & \alpha^2 \end{bmatrix}.$$

Suponha por indução que

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}^j = \begin{bmatrix} \alpha^j & j\alpha^{j-1} \\ 0 & \alpha^j \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}^{j+1} = \begin{bmatrix} \alpha^j & j\alpha^{j-1} \\ 0 & \alpha^j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^{j+1} & j+1\alpha^j \\ 0 & \alpha^{j+1} \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} f \left( \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \right) &= \sum_{j \geq 0} a_j \cdot \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}^j = \sum_{j \geq 0} a_j \cdot \begin{bmatrix} \alpha^j & j\alpha^{j-1} \\ 0 & \alpha^j \end{bmatrix} \\ &= \sum_{j \geq 0} \begin{bmatrix} a_j \alpha^j & j a_j \alpha^{j-1} \\ 0 & a_j \alpha^j \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{j \geq 0} a_j \alpha^j & \sum_{j \geq 0} j a_j \alpha^{j-1} \\ 0 & \sum_{j \geq 0} a_j \alpha^j \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f(\alpha) & Df(\alpha) \\ 0 & f(\alpha) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Em particular, já que  $f^n$  também é analítica, temos, trocando  $f$  por  $f^n$ , que

$$f^n \left( \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} f^n(\alpha) & Df^n(\alpha) \\ 0 & f^n(\alpha) \end{bmatrix}. \quad \square$$

Observemos que o isomorfismo  $\xi$ , na Proposição A.19, nos garante uma conjugação entre as aplicações  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $f \in \mathcal{A}_2$ , e  $\tilde{f} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\tilde{f} \in \mathcal{A}_1(\mathbb{C})$ , ou seja,

$$\begin{aligned} f \circ \xi &= \xi \circ \tilde{f} \\ &\vdots \\ f^j \circ \xi &= \xi \circ \tilde{f}^j. \end{aligned}$$

Em outras palavras, a dinâmica de  $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$  por  $f \in \mathcal{A}_2$  é conjugada à dinâmica de  $\alpha + \beta i$  por  $f \in \mathcal{A}_1$ .

Investiguemos a forma com a qual podemos obter pontos periódicos para uma aplicação  $f \in \mathcal{A}_2$ . Se  $P = \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix}$ , com  $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$ , é uma matriz tal que  $f^n(P) = P$ , então  $f^n(p_1) = p_1$  e  $f^n(p_2) = p_2$ . De fato, pela Proposição 3.2, temos que

$$\begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} = f^n \left( \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} f^n(p_1) & 0 \\ 0 & f^n(p_2) \end{bmatrix}.$$

Portanto,  $f^n(p_1) = p_1$  e  $f^n(p_2) = p_2$ . Sendo assim, se  $\mathcal{O}(P)$  é órbita periódica atratora, então,  $\mathcal{O}(p_i)$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , é órbita periódica atratora.

Existirá, para certas aplicações  $f \in \mathcal{A}_2$ , um outro tipo de ponto periódico. Consideremos  $f \in \mathcal{A}_2$  e  $P = \begin{bmatrix} p & 1 \\ 0 & p \end{bmatrix}$ ,  $p \in \mathbb{R}$ , tais que  $f^n(P) = P$ . Então  $f^n(p) = p$  e  $Df^n(p) = 1$ . Isto é claro, pois, pela Proposição 3.3, temos que

$$\begin{bmatrix} p & 1 \\ 0 & p \end{bmatrix} = f^n \left( \begin{bmatrix} p & 1 \\ 0 & p \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} f^n(p) & Df^n(p) \\ 0 & f^n(p) \end{bmatrix}.$$

Neste caso,  $p$  é ponto periódico não hiperbólico para  $f \in \mathcal{A}_1$  e, se  $Sf < 0$ , a órbita de  $P$  é atratora. Este resultado é facilmente constatado se utilizarmos os resultados obtidos nas Proposições 3.2, 3.3, 3.4. Porém, antes de mostrar este último resultado, devemos verificar que, se  $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma aplicação analítica cuja derivada é não constante em um aberto  $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ , então, dado  $x_0 \in \mathcal{I}$ , existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $f'(x) \neq f'(x_0)$ , para todo  $x \in B = B_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$ . De fato, se tomarmos  $g(x) = f'(x) - f'(x_0)$ ,  $x \in B$ , claro que  $g(x)$  é analítica e não constante. Desta forma,  $g(x_0) = 0$  implica em  $x_0$  ser isolado (ver [19]) e, conseqüentemente,  $f'(x) \neq f'(x_0)$ , para algum  $\varepsilon > 0$ .

**3.4. PROPOSIÇÃO.** *Sejam  $f \in \mathcal{A}_1$  uma aplicação polinomial de grau  $n \geq 2$  com derivada de Schwarz negativa e  $p \in \text{Dom}(f)$  tal que  $f^n(p) = p$  e  $|Df^n(p)| \leq 1$ . Então a órbita de  $p$  por  $f$  é periódica atratora.*

**Prova.** Já sabemos que se  $|Df^m(p)| < 1$ ,  $p \in \mathcal{B}_f$  e, conseqüentemente,  $\mathcal{O}(p)$  é órbita periódica atratora. Resta-nos verificar, portanto, que se  $Sf < 0$  e  $|Df^m(p)| = 1$ , então  $\mathcal{O}(p)$  é atratora. Uma vez que  $f \in \mathcal{A}_1$  é polinomial de grau  $n \geq 2$ , ou seja, uma aplicação analítica cuja derivada é não constante, teremos os seguintes casos:

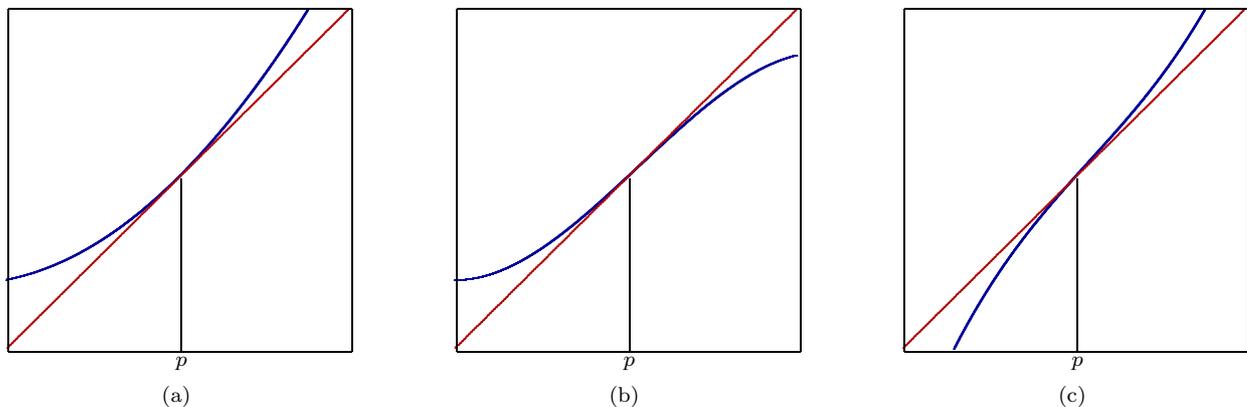


Figura 3.3: Aplicações  $f$  tais que  $Sf < 0$  e  $|Df^m(p)| = 1$ .

(i) Existe um conjunto de medida positiva  $\Upsilon$  numa vizinhança do ponto  $p$ , tal que se  $x \in \Upsilon$ ,  $f^n(x) \rightarrow p$  (Figuras 3.3 (a) e (b)). Torna-se desnecessário o gráfico para  $f^n(x) \leq i(x)$ , onde  $i(x) = x$ , uma vez que esta classe de aplicações também possui um conjunto de medida positiva onde seus elementos são atraídos por  $p$ .

(ii)  $p$  é um repulsor fraco de  $f$ , ou seja, existe uma vizinhança  $V_p$  de  $p$  tal que, escrevendo  $g = f|_{V_p}^{-1}$ , teremos  $g^n(x) \rightarrow p, \forall x \in V_p$  (Figura 3.3 (c)).

No caso (i) não temos o que provar. Suponhamos, então, que  $p$  seja um repulsor fraco. Uma vez que  $Sf < 0$ , temos que  $Sf^m < 0$  e, pelo princípio do mínimo (Lema A.2), temos que  $|Df^m(x)| > \min\{|Df^m(p - \varepsilon)|, |Df^m(p + \varepsilon)|\} > 1, \forall x \in V_p$ , com  $f \in \mathcal{A}_1$ . Um absurdo, pois  $|Df^m(p)| = 1$ .  $\square$

**3.5. TEOREMA.** *Seja  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  uma aplicação polinomial de grau  $\eta \geq 2$  e  $p \in \mathbb{C}$  um ponto periódico atrator de período  $m$ . Então a bacia atratora da órbita de  $p$  contém algum ponto crítico de  $f$ .*

**Prova.** Seja  $p \in \mathbb{C}$  um ponto periódico atrator de período  $m$  e  $C_f = \{w \in \mathbb{C}; f'(w) = 0\}$  o conjunto de pontos críticos de  $f$ . Seja  $\mathcal{B}_f(\mathcal{O}(p)) = \{x \in \mathbb{C}; \omega_f(x) \subset \mathcal{O}(p)\}$  a bacia atratora da órbita de  $p$  e suponha que  $C_f \cap \mathcal{B}_f(\mathcal{O}(p)) = \emptyset$ . Pela observação feita na Proposição 1.22, vimos que a bacia da órbita de  $p$  é limitada e, como  $\mathcal{B}_f(\mathcal{O}(p))$  é um aberto que contém  $\mathcal{O}(p)$ , podemos escolher uma vizinhança aberta de  $\mathcal{O}(p)$  contida nesta bacia, digamos  $V = B_\varepsilon(\mathcal{O}(p))$ , para algum  $\varepsilon$  pequeno e positivo. Observemos que  $f^{-k}(V) \subset \mathcal{B}_f(\mathcal{O}(p)), \forall k$ . Desta forma, a imagem de qualquer ramo de  $f^{-k}|_V$  possui imagem em  $\mathcal{B}_f(\mathcal{O}(p))$  e, conseqüentemente, pelo Teorema de Montel,  $\{f^{-k}\}$  é uma

família normal em  $V$ . Claro que o ramo inverso de  $f^{-k}$  restrito a  $V$  está bem definido, uma vez que  $f^k(w) \notin V$ , para todo  $w \in C_f$  e todo  $k$ . Assim, para cada componente conexa  $U$  de  $f^{-1}(V)$  teremos que  $f|_U : U \rightarrow V$  é um biholomorfismo<sup>1</sup>. Como  $p$  é ponto fixo repulsor para  $f^{-1}|_V$ , pelo Lema 1.31,  $\{f^{-k}\}$  é não normal. Com esta contradição podemos concluir que  $w \in \mathcal{B}_f(\mathcal{O}(p))$ .  $\square$

O resultado a seguir apresenta uma peculiaridade: afirma que polinômios em  $\mathbb{C}$ , apesar de apresentarem infinitas órbitas periódicas, a quantidade de órbitas periódicas atratoras é finita e limitada pelo grau do polinômio.

**TEOREMA A.** *Seja  $f$  um polinômio em  $\mathbb{C}$  de grau  $\eta$ . Então  $f$  tem no máximo  $\eta - 1$  órbitas periódicas atratoras.*

**Prova.** Como  $f(z)$  é um polinômio em  $\mathbb{C}$  de grau  $\eta$ , claro que, no máximo, existem  $\eta - 1$  pontos críticos. Suponha  $p \in \mathbb{C}$  tal que  $|Df^m(p)| < 1$  e  $w \in \mathbb{C}$  um ponto crítico de  $f^m$ . Como  $f$  é holomorfa, pelo Teorema 3.5, o ponto  $w$  é atraído por  $\mathcal{O}_{f^m}(p)$ . Uma vez que  $(f^m)'(w) = 0$ , pela regra da cadeia temos que  $f'(f^{m-1}(w)) \cdot \dots \cdot f'(w) = 0$ . Segue que, para algum  $j < m$ ,  $f'(f^j(w)) = 0$ . Logo,  $f^j(w)$  é ponto crítico de  $f$  e, portanto, existem, no máximo,  $(\eta - 1)$  órbitas periódicas atratoras.  $\square$

Observe que se  $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  é uma aplicação definida por uma série de potências a coeficientes reais, então  $\overline{F(z)} = F(\bar{z}), \forall z \in \mathbb{C}$ . De fato, se  $F(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j, a_j \in \mathbb{R}$ , teremos

$$\overline{F(z)} = \overline{\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j} = \sum_{j=0}^{\infty} \overline{a_j z^j} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \bar{z}^j = F(\bar{z}).$$

**3.6. TEOREMA.** *Seja  $f(z)$  um polinômio em  $\mathbb{C}$  a coeficientes reais, tal que o conjunto de pontos críticos de  $f(z)$  sejam todos reais. Então todas as órbitas periódicas atratoras de  $f$  estão em  $\mathbb{R}$ .*

**Prova.** Suponha que exista uma órbita periódica atratora de período  $m$  que não esteja contida em  $\mathbb{R}$  e seja  $p \in \mathbb{C}$  um ponto desta órbita. Pela observação feita anteriormente temos que  $\overline{f^m(p)} = f^m(\bar{p}) = \bar{p}$ , pois,  $f^m(p) = p$ . Logo, se  $z \in \mathbb{C}$  está na bacia de atração da órbita de  $p$ , então  $\bar{z}$  também é atraído pela órbita de  $\bar{p}$ , ou seja,  $f^n(z) \rightarrow \mathcal{O}(p)$  e  $f^n(\bar{z}) \rightarrow \mathcal{O}(\bar{p})$ . Porém, pelo Teorema 3.5 e pelo Teorema A, temos que existe ponto crítico  $w$  que é atraído por estas órbitas, ou seja,  $f^n(w) \rightarrow \mathcal{O}(p)$  e  $f^n(w) \rightarrow \mathcal{O}(\bar{p})$ , já que  $f(w) = f(\bar{w})$ . Uma vez que  $f$  é um polinômio a coeficientes reais, temos que  $\mathbb{R}$  é invariante por  $f$ , portanto,  $\mathcal{O}(w) \in \mathbb{R}$  e, conseqüentemente,  $\mathcal{O}(p) \in \mathbb{R}$ , contrariando o fato de que  $\mathcal{O}(p) \not\subset \mathbb{R}$ .  $\square$

<sup>1</sup>aplicação holomorfa cuja inversa também é holomorfa

**3.7. PROPOSIÇÃO.** *Seja  $f$  uma aplicação polinomial em  $\mathbb{C}$  de grau  $\eta \geq 2$  a coeficientes reais. Se o conjunto de pontos críticos de  $f$  são todos reais, então  $Sf < 0$ .*

**Prova.** Seja  $f(z)$  um polinômio e suponha

$$f'(z) = \prod_{i=1}^n z - z_i,$$

com os  $z_i$  distintos e reais. Então

$$\begin{aligned} f''(z) &= \sum_{j=1}^n \frac{f'(z)}{z - z_j} = \sum_{j=1}^n \frac{\prod_{i=1}^n z - z_i}{z - z_j} \\ f'''(z) &= \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{\prod_{i=1}^n z - z_i}{(z - z_i)(z - z_k)}. \end{aligned}$$

Segue que,

$$\begin{aligned} Sf(z) &= \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2} \left[ \frac{f''(z)}{f'(z)} \right]^2 \\ &= \frac{\sum_{j=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{\prod_{i=1}^n z - z_i}{(z - z_i)(z - z_k)}}{\prod_{i=1}^n z - z_i} - \frac{3}{2} \left[ \frac{\sum_{j=1}^n \frac{\prod_{i=1}^n z - z_i}{z - z_j}}{\prod_{i=1}^n z - z_i} \right]^2 \\ &= \sum_{j \neq k} \frac{1}{(z - z_j)(z - z_k)} - \frac{3}{2} \left[ \sum_{j=1}^n \frac{1}{z - z_j} \right]^2 \\ &= -\frac{1}{2} \left[ \sum_{j=1}^n \frac{1}{z - z_j} \right]^2 - \sum_{j=1}^n \frac{1}{(z - z_j)^2} < 0. \quad \square \end{aligned}$$

**3.8. TEOREMA.** *Seja  $J \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  uma matriz de Jordan semelhante a  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ . Se  $J$  está na bacia de atração de um ponto fixo  $P = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix}$ , então  $A$  também é atraída por  $P$ .*

**Prova.** Seja  $B$  uma matriz não singular tal que  $A = B \cdot J \cdot B^{-1}$ . Então

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(A) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(B \cdot J \cdot B^{-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} B \cdot f^n(J) \cdot B^{-1} \\ &= B \cdot \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(J) \right] \cdot B^{-1} \\ &= B \cdot \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} \cdot B^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix}. \quad \square \end{aligned}$$

Seja  $N \subset M$  uma subvariedade e  $f : M \rightarrow M$ . Temos que, se  $\mathcal{A} \subset N$  é um atrator para  $f|_N$ , em geral  $\mathcal{A}$  não é atrator para  $f$ . O resultado que apresentaremos a seguir garante a presença de um atrator cuja bacia de atração é um aberto do espaço  $\mathcal{A}_2$ .

**TEOREMA B.** *Seja  $f(z)$  um polinômio em  $\mathbb{C}$  a coeficientes reais de grau  $\eta \geq 2$ , tal que o conjunto dos pontos críticos de  $f(z)$  sejam todos reais. Se  $p \in \text{Dom}(f)$  é tal que  $f^m(p) = p$  e  $|Df^m(p)| \leq 1$ , então  $f \in \mathcal{A}_2$  tem órbita periódica atratora.*

**Prova.** Seja  $f(z)$  um polinômio em  $\mathbb{C}$  a coeficientes reais. Se  $f(z) = az + b$ , o teorema é facilmente verificável. Suponha, portanto, que o grau de  $f$  seja  $\eta \geq 2$  e seja  $C_f = \{w \in \mathbb{C}, f'(w) = 0\}$ , o conjunto de todos os pontos críticos de  $f$ . Sabemos, pela Teorema 3.6, que se  $f(z) \in \mathbb{R}[z]$  é um polinômio tal que  $C_f \subset \mathbb{R}$ , então  $\mathbb{R}$  contém todas as órbitas periódicas atradoras de  $f(z)$ . Pelo Teorema A,  $f$  possuirá, no máximo,  $(\eta - 1)$  órbitas periódicas atradoras e, pelo Teorema 3.5, cada órbita periódica atratora contém algum ponto  $w \in C_f$ . Como  $f \in \mathbb{R}[z]$  e  $C_f \subset \mathbb{R}$ , pela Proposição 3.7,  $Sf < 0$ , e pela Proposição 3.4, temos que existe um aberto  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}$  tal que  $\mathcal{U} \subset B_f(p)$ .

Seja  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{U}$ , com  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Observe que, se uma matriz  $A$  está próxima a  $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ , então os autovalores de  $A$  estão próximos a  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  e, portanto,  $A$  possui dois autovalores distintos, digamos  $\tilde{\lambda}_1$  e  $\tilde{\lambda}_2$ , em  $\mathcal{U}$ . Desta forma a matriz de Jordan de  $A$  é  $J = \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{\lambda}_2 \end{bmatrix}$ . Segue, da Teorema 3.8, que  $f^n(A) \rightarrow \mathcal{O}(P)$ , onde  $P = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix}$ . Portanto, existe vizinhança de  $\Lambda$  que é atraída por  $\mathcal{O}(P)$ , ou seja,  $P$  é atrator.  $\square$

# Apêndice A

## A dinâmica das aplicações unimodais em $\mathbb{R}$

O modo pelo qual as órbitas de uma família parametrizada de funções mudam à medida que o parâmetro varia chamamos de dinâmica da família. Ao estudarmos a dinâmica de uma família de aplicações, estamos interessados em caracterizar o comportamento assintótico do maior número de órbitas, para quase todos os valores em um conjunto de parâmetros. Para isto, alguns itens se tornam necessários, por exemplo, o conceito básico de estabilidade estrutural que fora introduzido por A. Andronov e L. Pontryagin [9], em 1937, e cuja idéia final fora apresentada por Smale, em 1965: mediante a pequenas perturbações, um sistema estruturalmente estável não se modifica qualitativamente, ou seja, sistemas suficientemente próximos são topologicamente conjugados. Por isso, a fim de entendermos os conceitos relacionados à estabilidade, de visualizarmos o comportamento de pontos num determinado conjunto e o surgimento de alguns conjuntos dinamicamente interessantes em um sistema, tomaremos como objeto de estudo uma classe de aplicações definidas em um subconjunto de  $\mathbb{R}$  com valores em  $\mathbb{R}$ , em particular, a da família quadrática. Porém, antes apresentemos alguns conceitos e resultados que serão empregados neste estudo.

Dizemos que  $c$  é um *ponto crítico* de uma aplicação  $f$  de classe  $C^k$ ,  $k \geq 2$ , se  $Df(c) = 0$ . Este ponto é *não degenerado* se  $D^2f(c) \neq 0$ . Se  $c$  é ponto de máximo ou mínimo o chamaremos de *ponto de dobra*. Se  $f$  possui  $\ell$  pontos de dobra dizemos que esta é  $\ell$ -*modal*. Em particular, se  $f$  tem apenas um ponto de dobra a chamaremos de *unimodal*. Um ponto crítico é denominado *não-flat* se existe um difeomorfismo local  $\xi$  tal que  $\xi(c) = 0$  e  $f(x) = \pm|\xi(x)|^\kappa + f(c)$ , para algum  $\kappa \geq 1$ .

**A.1. DEFINIÇÃO.** *Sejam  $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$  um aberto de  $\mathbb{R}$  e  $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação de classe  $C^k$ ,  $k \geq 3$ , com  $f'(x) \neq 0, \forall x \in \mathcal{I}$ . Definimos a derivada de Schwarz ou Schwarziana de  $f$  em  $\mathcal{I}$ , o operador*

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \cdot \left[ \frac{f''(x)}{f'(x)} \right]^2, \quad x \in \mathcal{I} \subset \mathbb{R}. \quad (\text{A.1})$$

A derivada de Schwarz (A.1) é um operador muito útil. Em dinâmica unidimensional consegue estabelecer que para certas aplicações teremos um número finito de órbitas periódicas atratoras. No caso complexo é utilizado como um critério para uma função com valores complexos ser uma transformação linear racional.

Como propriedades da derivada de Schwarz temos:

$$(i) S(f \circ g)(x) = Sf(g(x)) \cdot |Dg(x)|^2 + Sg(x), \forall g \in C^k(\mathcal{I}, \mathcal{I}), k \geq 3,$$

e como consequência imediata temos

$$Sf^n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} Sf(f^i(x)) \cdot |Df^i(x)|^2; \quad (\text{A.2})$$

(ii) A operação composição de aplicações preserva o sinal da derivada de Schwarz. Por exemplo, dada duas funções  $f$  e  $g$  tais que  $Sf(x) < 0$  e  $Sg(x) < 0$ , então  $S(f \circ g)(x) < 0$ ;

Outra propriedade importante, para aplicações  $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$  é um intervalo fechado, com derivada de Schwarz negativa é dada no lema a seguir. Este afirma que o valor mínimo para estas aplicações deve estar no bordo de  $\mathcal{I}$ .

**A.2. LEMA (Princípio do mínimo [3], p.154.).** *Seja  $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$  um intervalo fechado e de extremos  $a$  e  $b$  e  $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  com derivada de Schwarz negativa. Se  $Df(x) \neq 0$ , para todo  $x \in \mathcal{I}$ , então*

$$|Df(x)| > \min\{|Df(a)|, |Df(b)|\}, \forall x \in (a, b).$$

**A.3. TEOREMA ([5]).** *Seja  $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação tal que  $Sf < 0$ . Se  $f$  possui  $n$  pontos críticos, então existem  $n + 2$  órbitas periódicas atratoras.*

**A.4. PROPOSIÇÃO ([5]).** *Seja  $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$  um aberto e  $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação de classe  $C^k, k \geq 3$ , com  $Sf(x) < 0, \forall x \in \mathcal{I}$ . Então, qualquer órbita periódica atratora de  $f$  atrai o ponto crítico de  $f$  ou o bordo de  $\mathcal{I}$ .*

Dizemos que  $J \subset \mathcal{I}$  é um *intervalo errante* para  $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}$  se o conjunto  $\{f^n(J)\}_{n \geq 0}$  são de intervalos dois-a-dois disjuntos e se  $J$  não está contido na bacia de atração de uma órbita periódica de  $f$ . O Teorema de Guckenheimer nos diz que para uma certa classe de aplicações podemos verificar a inexistência desses intervalos.

**A.5. TEOREMA (Guckenheimer [3], p. 157).** *Sejam  $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}$  uma aplicação unimodal de classe  $C^k, k \geq 3$  com derivada de Schwarz negativa e  $c \in \mathcal{I}$  um ponto de dobra não degenerado. Então  $f$  não possui intervalos errantes.*

**A.6. PROPOSIÇÃO.** *Seja  $p \in \mathbb{R}$  um ponto periódico hiperbólico atrator de período  $m$  para uma aplicação diferenciável  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Então existe  $\varepsilon > 0$  tal que se  $x \in B_\varepsilon(\mathcal{O}(p))$  teremos*

$$d(f^n(x), \mathcal{O}(p)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad e \quad |Df^n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

**Prova.** Uma vez que  $f \in C^1$  e  $p$  é tal que  $|Df^m(p)| < 1$ , com  $f^m(p) = p$ , existem  $\varepsilon > 0$  e  $\beta > 0$  tais que  $|Df^m(x)| \leq \beta < 1$ , para  $x \in B_\varepsilon(\mathcal{O}(p)) = \bigcup_{i=0}^{m-1} B_\varepsilon(f^i(p))$ .

Seja  $f^i(x) \in B_\varepsilon(f^i(p))$ ,  $i \in \mathbb{N}$ . Pelo Teorema do Valor Médio,

$$\begin{aligned} |f^{m+i}(x) - f^{m+i}(p)| &= |f^m(f^i(x)) - f^m(f^i(p))| \\ &\leq \beta |f^i(x) - f^i(p)| < |f^i(x) - f^i(p)| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo,  $f^{m+i}(x) \in B_\varepsilon(f^i(p))$  e está mais próximo de  $f^i(p)$  do que está  $f^{m+i}(x)$ .

Observe que,

$$\begin{aligned} |f^m(f^{m+i}(x)) - f^m(f^{m+i}(p))| &< \beta |f^{m+i}(x) - f^{m+i}(p)| \\ &< \beta^2 |f^i(x) - f^i(p)|. \end{aligned}$$

Continuando com este processo,

$$|f^{am}(f^i(x)) - f^{am}(f^i(p))| < \beta^a |f^i(x) - f^i(p)|.$$

Portanto, para  $a \rightarrow \infty$ , teremos  $f^{am}(f^i(x)) \rightarrow f^i(p)$ . Assim, dado  $n$ , pondo  $n = am + i$ , teremos

$$\begin{aligned} |Df^n(x)| &= |Df^{am+i}(x)| \\ &= |D(f^m)^a(f^i(x))| \\ &= |D(f^m)^a(f^i(x)) \cdot Df^i(x)| \\ &< \beta^a |Df^i(x)| \\ &\leq \beta^a \cdot \max\{|Df(x)|, \dots, |Df^{m-1}(x)|\} \\ &\leq \beta^a \cdot M^{m-1}, \text{ onde } M = \sup\{|Df^j|\} \end{aligned}$$

e quando  $n \rightarrow \infty$ ,  $a \rightarrow \infty$  e  $|Df^n(x)| \rightarrow 0$ ,  $\forall x \in B_\varepsilon(\mathcal{O}(p))$ .  $\square$

Sejam  $f : \mathcal{I} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , e  $\Delta \subset \mathcal{I}$  um conjunto compacto e positivamente invariante.  $\Delta$  é dito *hiperbólico repulsor* ou simplesmente *repulsor* se existem constantes  $C > 0$  e  $\lambda > 1$  tal que

$$|Df^n(x)| > C \cdot \lambda^n, \forall n \in \mathbb{N}, x \in \Delta.$$

Apesar de chamarmos hiperbólica a órbita de um ponto  $x$  tal que  $0 < |Df^n(x)| \neq 1$ , não é necessário dar esta noção para conjuntos hiperbólicos atratores, pois, se  $|Df^n(x)| < \frac{1}{C \cdot \lambda^n}, \forall n \in \mathbb{N}, x \in \Delta$ , então todos os pontos em  $\Delta$  serão atraídos por uma união finita de órbitas periódicas hiperbólicas atratoras (ver [6] 393-401).

A principal razão para o estudo da hiperbolicidade em conjuntos positivamente invariantes se deve ao fato de que eles não são destruídos por pequenas perturbações. Mais precisamente, suponha  $\Delta_f \subset \mathcal{I}$  um conjunto compacto positivamente invariante por  $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ , uma aplicação de classe  $C^k, k \geq 1$ . Então existe uma vizinhança  $V_f$  de  $f$  tal que para cada  $g \in V_f$  existe um conjunto compacto hiperbólico positivamente invariante  $\Delta_g$  para  $g$  e um homeomorfismo  $h : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}$  que conjugua  $f$  e  $g$ . A prova disto pode ser encontrada em [3] (225-226).

O Teorema A.7 afirma, para aplicações diferenciáveis, que os conjuntos compactos, positivamente invariantes, que não possuem pontos críticos e não estão na bacia de órbitas periódicas atratoras são hiperbólicos, ou seja, apresentam expansão (ou contração uniforme). Enunciaremos então este teorema, conhecido como o Teorema da Hiperbolicidade de Mañé.

**A.7. TEOREMA (Mañé [3], p. 247-257).** *Seja  $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$  um intervalo compacto e  $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}$  uma aplicação de classe  $C^2$ . Considere os conjuntos:*

- $\mathbb{A}$  o conjunto das órbitas atratoras de  $f$ ;
- $\mathcal{B}$  o conjunto das bacias locais de  $\mathbb{A}$ ;
- $\mathcal{C}_f$  o conjunto de todos os pontos críticos de  $f$ ;
- $\mathcal{U}_f$  uma vizinhança de  $\mathcal{C}_f$ .      *Então,*

1. *Todas as órbitas periódicas de  $f$  contidas em  $\mathcal{I} \setminus \mathcal{U}_f$  que possuem período suficientemente grande, são hiperbólicas repulsoras.*

2. *Se todas as órbitas periódicas de  $f$  que estão contidas em  $\mathcal{I} \setminus \mathcal{U}_f$  são repulsoras, então existe  $C > 0$  e  $\lambda > 1$  tal que*

$$|Df^n(x)| \geq C \cdot \lambda^n, \forall x; \{x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\} \cap \mathcal{U}_f \neq \emptyset.$$

*Em particular, se  $\mathbb{A} = \emptyset$ , então*

$$\mathcal{O}(x) \cap \mathcal{U}_f = \emptyset \Rightarrow |Df^n(x)| > C \cdot \lambda^n, \forall n \geq 0.$$

## A.1 Aplicações quadráticas em $\mathbb{R}$

Nesta seção, por ser um modelo muito estudado e representativo para uma classe de aplicações, nos dedicaremos ao estudo da dinâmica da família quadrática ou logística que consiste no conjunto de aplicações descrito por:

$$\begin{aligned} f_r : \mathcal{I} &\rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{I} \subseteq \mathbb{R} \\ x &\mapsto 4rx(1-x), r \in \mathbb{R}_+^*. \end{aligned} \tag{A.3}$$

Se uma aplicação unimodal  $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$  um aberto, não possui pontos fixos, então a órbita de todo  $x \in \mathcal{I}$  tende para infinito. Por exemplo, no sistema descrito pela aplicação real  $g_r(x) = x^2 + r$ , para  $r > \frac{1}{2}$ , a órbita de qualquer ponto no domínio de  $g_r$  tende a infinito. E, sendo assim, para termos uma dinâmica não trivial, trataremos apenas com aplicações quadráticas que possuem pelo menos um ponto fixo.

Observemos inicialmente que a família de aplicações em (A.3) são unimodais e possuem derivada de Schwarz negativa, para todo  $x \in \mathcal{I} \setminus \{c\}$ , onde  $c$  é um ponto de dobra. De fato,

$$Sf_r(x) = \frac{0}{4r - 8rx} - \frac{3}{2} \left( \frac{-8r}{4r - 8rx} \right)^2 = -\frac{6}{(2x - 1)^2}.$$

Portanto,  $Sf_r(x) < 0, \forall r > 0, \forall x \in \mathcal{I} \setminus \{c\}$ . Além disso, as aplicações em (A.3) possuem, no máximo, dois pontos fixos e, como  $c$  é um ponto crítico não degenerado, então  $f_r$  não possui intervalos errantes (ver A.5). Para qualquer  $r > 0$ , a aplicação  $f_r$  possui gráfico, cuja concavidade está voltada para baixo, intesectando o eixo dos  $x$  nos pontos 0 e 1 e cujo vértice tem coordenadas  $(\frac{1}{2}, r)$ . Podemos verificar que os pontos fixos da família (A.3) possuem abcissas 0 e  $p(r) = \frac{4r-1}{4r}$ . O ponto fixo em  $x = 0$  é atrator se  $0 < r < \frac{1}{4}$  e repulsor se  $r > \frac{1}{4}$ . O ponto fixo em  $x = p(r)$  é atrator se  $\frac{1}{4} < r < \frac{3}{4}$  e repulsor se  $0 < r < \frac{1}{4}$  ou  $r > \frac{3}{4}$ . Para certos conjuntos de parâmetros  $r$  fomos capazes de caracterizar, quanto a hiperbolicidade, os pontos fixos citados e, ainda podemos caracterizar as órbitas dos pontos em  $\mathcal{I}$ . Mencionemos, portanto, estes conjuntos à medida que a dinâmica em  $\{f_r\}$  se complica.

|       |                       |                                 |                   |
|-------|-----------------------|---------------------------------|-------------------|
|       | $0 < r < \frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4} < r < \frac{3}{4}$ | $r > \frac{3}{4}$ |
| 0     | <i>atrator</i>        | <i>repulsor</i>                 | <i>repulsor</i>   |
| $p_r$ | <i>repulsor</i>       | <i>atrator</i>                  | <i>repulsor</i>   |

Tabela A.1: Classificação dos pontos fixos na família quadrática quanto à sua hiperbolicidade.

Para  $r \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ , o ponto  $p(r)$  é repulsor e, qualquer que seja  $x \in (p(r), \frac{1}{4r})$ , a órbita de  $x$  é atraída pelo ponto 0 (ver Figura A.1(a)).

**A.8. PROPOSIÇÃO.** Se  $x \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]$  e  $r > \frac{1}{4}$ , então  $f_r^n(x)$  tende a menos infinito à medida que  $n$  tende a infinito.

**Prova.** Considere, inicialmente,  $x < 0$ . Observe que  $Df_r(x) = 4r - 8rx > 1$ . Portanto,

$$0 > x > f_r(x) > f_r^2(x) > \cdots > f_r^j(x),$$

já que  $|f(x) - f(0)| \geq 4r|x - 0|$ , onde  $4r = \inf_{y \in (-\infty, 0)} \{|Df(y)|\}$ .

Se esta órbita for limitada, ela deve convergir para um ponto fixo e, como  $x < 0$ , temos uma contradição, pois, os pontos fixos são o 0 e o  $p(r) > 0$ . Considere agora  $x > 1$ . Então,  $f_r(x) < 0, \forall x$  e  $f_r^j(x) = f_r^{j-1} \circ f_r(x)$  que tende a menos infinito.  $\square$

Se  $r \in \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ , nos reportaremos ao intervalo  $(0, 1)$ , uma vez que a órbita de  $x \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]$  está na bacia do infinito (ver Proposição A.8 abaixo). Neste caso, sabemos que  $f_r(x)$  tem dois pontos fixos, o 0 (repulsor) e  $p(r)$  (atrator) e a órbita de qualquer elemento em  $(0, 1)$  tende ao atrator  $p(r)$  (ver Figura A.1(b)). Para provarmos este fato dividiremos este caso em dois: o caso  $r \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$  e o caso  $r \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ .

No caso  $r \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$  consideremos, inicialmente, um  $x$  tal que  $0 < x < p(r)$ . Então,  $\frac{1}{4r} < 1 - x$ , de modo que  $1 < 4r(1 - x)$  e, portanto,  $x < 4rx(1 - x) = f_r(x)$ . Como  $f_r(x)$  é crescente em  $[0, p(r)]$ , isto significa que se  $0 < x < p(r)$ , então  $x < f_r(x) < f_r(p(r)) = p(r)$ . Conseqüentemente, para  $0 < x < p(r)$ ,  $\{f_r^n(x)\}_{n=0}^\infty$  é uma seqüência limitada, crescente, que converge para o ponto fixo  $p(r)$ . De modo análogo, podemos mostrar que se  $p(r) < x < \frac{1}{2}$ , então  $\{f_r^n(x)\}_{n=0}^\infty$  é uma seqüência limitada decrescente, que converge também para  $p(r)$ . Finalmente, se  $\frac{1}{2} < x < 1$ , então  $0 < f_r(x) < \frac{1}{2}$  que, pela análise acima,  $\{f_r^n(x)\}_{n=0}^\infty$  converge para  $p(r)$ . Portanto, para  $r \in \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ , a bacia de atração de  $p(r)$  é o intervalo aberto  $(0, 1)$ , e os únicos pontos periódicos existentes são os pontos fixos.

Observemos que quando  $r$  aumenta de  $\frac{1}{4}$  para  $\frac{1}{2}$ ,  $p(r)$  aumenta de 0 para  $\frac{1}{2}$ . Já no caso  $r \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ , se  $r > \frac{1}{2}$ , então  $p(r) > \frac{1}{2}$ , o que torna a análise mais complicada. Apesar disto, é possível mostrar que se  $\frac{1}{2} < r < \frac{3}{4}$  então a bacia de atração de  $p(r)$  é, novamente,  $(0, 1)$ .

Denotemos por  $q(r)$  o número em  $(0, \frac{1}{2})$  tal que  $f_r(q(r)) = f_r(p(r)) = p(r)$ . Este ponto é chamado de *simétrico dinâmico* de  $p(r)$ . Mostremos inicialmente que qualquer  $x \in (0, 1)$  possui uma iterada no intervalo  $(q(r), p(r)]$ . Fixemos  $x$  em  $(0, q(r))$ . Observe que neste intervalo o gráfico de  $f_r(x)$  está localizado acima da linha  $y = x$  de modo que  $x < f_r(x)$ . Se  $\{f_r^n(x)\}_{n=0}^\infty$  fosse uma seqüência crescente contida em  $(0, q(r))$ , então deveria convergir para um ponto fixo, que inexistente neste intervalo.

Portanto, temos que se  $0 < x < q(r)$ , então  $x$  possui uma iterada maior que  $q(r)$ .

Observa-se que se  $q(r) < x < p(r)$ , então  $p(r) < f_r(x) < r$ , já que  $f_r(q(r)) = f_r(p(r)) = p(r)$ . Além disto, usando o fato que  $q(r) < f_r(r)$  e o fato que  $f_r$  é decrescente em  $[\frac{1}{2}, 1]$ , concluímos que se  $p(r) < x < r$ , então  $q(r) < f_r(r) < f_r(x) < p(r)$ .

Finalmente, como  $p(r) < r$  e  $f_r(x)$  é decrescente em  $[p(r), 1]$ , sabemos que se  $r < x < 1$ , então  $0 < f_r(x) < p(r)$ . Segue que se  $0 < x < 1$ , então  $x$  tem uma iterada no intervalo  $(q(r), p(r))$ .

Temos  $q(r) < \frac{1}{2}$  e dos fatos constatados acima, as iteradas de  $x \in (q(r), r]$  oscilam entre os intervalos  $(q(r), p(r))$  e  $[p(r), r]$ . Portanto, se  $x \in (q(r), p(r))$ , então também o está a seqüência  $\{f_r^{2n}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ . Se  $x \in [p(r), r]$ , então também o está a seqüência  $\{f_r^{2n}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ .

Nosso próximo objetivo é provar que  $f_r^2(x)$  tem apenas dois pontos fixos: 0 e  $p(r)$ . Isto é equivalente a mostrar que  $f_r^2(x) - x = 0$  apenas se  $x = 0$  ou  $x = p(r)$ . Entretanto, observe que

$$f_r^2(x) - x = 4r f_r(x)[1 - f_r(x)] - x = 4r[4rx(1-x)][1 - 4rx(1-x)] - x.$$

Como  $p(r)$  é um ponto fixo de  $f_r(x)$  e, portanto, de  $f_r^2(x)$ , sabemos que  $x - p(r)$  é um divisor de  $f_r^2(x) - x$ . Através de uma fatoração encontramos que

$$f_r^2(x) - x = 4rx(x - p(r))[-16r^2x^2 + (16r^2 + 4r)x - r - 1].$$

Claro que a expressão entre colchetes não tem raízes reais para  $\frac{1}{2} < r < \frac{3}{4}$ . Portanto, se  $\frac{1}{2} < r < \frac{3}{4}$ , as únicas raízes de  $f_r^2(x) - x$  são 0 e  $p(r)$  e isto significa que estes são os únicos pontos fixos de  $f_r^2(x)$ .

Mostremos agora que se  $q(r) < x < p(r)$ , então  $\{f_r^{2n}(x)\}_{n=0}^{\infty}$  converge para  $p(r)$ .

Vimos que  $f_r^2(x) - x$  não possui raízes no intervalo  $(q(r), p(r))$ . Portanto,  $f_r^2(x) - x$  tem o mesmo sinal em todo aquele intervalo. Para determinar o sinal, computamos  $f_r^2(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}$ :

$$f_r^2\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}4r\left(\frac{1}{2} - p(r)\right)\left(\frac{16r^2}{4} - \frac{4r}{2} - 1\right) = \frac{1}{2}r\left[\frac{1}{2} - p(r)\right][(4r - 1)^2 - 5].$$

Como  $q(r) < \frac{1}{2} < p(r)$  e  $\frac{1}{2} < r < \frac{3}{4}$ , cada uma das expressões em colchetes é negativa, de modo que  $f_r^2(x) - x$  é positiva em todo intervalo  $(q(r), p(r))$ . Conseqüentemente  $x < f_r^2(x)$  para todo  $x \in (q(r), p(r))$ . Segue que, como  $x \in (q(r), p(r))$ , então a seqüência  $\{f_r^{2n}(x)\}_{n=0}^{\infty}$  está contida em  $(q(r), p(r))$  e é crescente, o que implica que a seqüência converge em direção ao único ponto fixo  $p(r)$  positivo de  $f_r^2(x)$ .

Acabamos de mostrar que  $f_r^{2n}(x) \rightarrow p(r)$  à medida que  $n$  cresce indefinidamente, para todo  $x \in (q(r), p(r)]$ . Pela continuidade de  $f_r(x)$ , vemos que

$$f_r^{2n+1}(x) = f_r(f_r^{2n}(x)) \rightarrow f_r(p(r)) = p(r),$$

à medida que  $n$  cresce indefinidamente. Portanto,  $f_r^n(x) \rightarrow p(r)$  sempre que  $x$  estiver em  $(q(r), p(r)]$ . Como todo  $x$  em  $(0, 1)$  tem uma iterada em  $(q(r), p(r)]$ , concluímos que  $f_r^n(x) \rightarrow p(r)$  quando  $n$  cresce sem limites, para todo  $x \in (0, 1)$ . Em outras palavras, quando  $\frac{1}{2} < r < \frac{3}{4}$ , a bacia de atração de  $p(r)$  é o intervalo  $(0, 1)$ . Uma consequência deste resultado é o fato que se  $\frac{1}{2} < r \leq \frac{3}{4}$ , então não existem pontos periódicos para  $f_r(x)$  outros que pontos fixos. As mesmas conclusões são válidas se consideramos o valor em que  $r = \frac{3}{4}$ , porém o argumento é mais sutil.

Vimos que a partir de  $\frac{3}{4}$ ,  $0$  e  $p(r)$  são pontos fixos repulsivos. Assim, é natural questionarmos o que irá acontecer ao iterarmos os pontos em  $(0, 1)$ . Eles serão atraídas por uma órbita periódica atratora, oscilarão ou apresentarão algum outro tipo de comportamento?

A partir do valor  $\frac{3}{4}$ , a dinâmica da família A.3 passa a ser mais interessante, pois, surgem órbitas periódicas de período maior ou igual a dois. Sabemos que os valores do parâmetro  $r$  os quais  $\{f_r\}$  possui somente uma órbita periódica atratora de período dois é o intervalo  $\left(\frac{3}{4}, \frac{1+\sqrt{6}}{4}\right)$  e para verificarmos isto basta calcularmos para quais valores de  $r$ ,  $|Df_r^2(x)| < 1$ ,  $x \in (0, 1)$ . Vencida esta etapa, verificou-se que, se  $r \in \left(\frac{3}{4}, \frac{1+\sqrt{6}}{4}\right)$ , então, para quase todo  $x \in (0, 1)$ , este  $x$  é atraído por este 2-ciclo. Este ciclo só não atrai os pontos fixos e qualquer outro ponto cuja iterada, eventualmente, seja  $p(r)$ .

Para  $r \in \left(\frac{1+\sqrt{6}}{4}, 1\right)$  mudanças mais significativas ocorrerem.

Uma vez que  $|Df_r^2(x)| < 1$  se, e somente se,  $r \in \left(\frac{3}{4}, \frac{1+\sqrt{6}}{4}\right)$ , temos que se  $r > \frac{1+\sqrt{6}}{4}$ , então  $|Df_r^2(x)| > 1$  e o 2-ciclo, que anteriormente era atrativo, transforma-se num 2-ciclo repulsivo. No entanto, surge um novo 4-ciclo atrativo, para  $r$  um pouco maior que  $\frac{1+\sqrt{6}}{4}$ . À medida que  $r$  aumenta, o 4-ciclo atrativo se transforma num 4-ciclo repulsivo, e um novo 8-ciclo surge no mesmo instante. Este processo é por sua vez repetitivo à medida que  $r$  cresce, porém, isto não ocorre indefinidamente, isto é, existe um valor máximo do parâmetro  $r$  o qual  $f_r(x)$  tem um  $2^k$ -ciclo atrativo, para algum  $k \in \mathbb{N}$ . Desta forma podemos estabelecer que existem valores  $k$  para os quais  $r_k$  se comporta de maneira que

Se  $r_0 < r < r_1$ , então  $f_r(x)$  tem dois pontos fixos e um 2-ciclo;

Se  $r_1 < r < r_2$ , então  $f_r(x)$  tem dois pontos fixos, um 2-ciclo e um  $2^2$ -ciclo;

Se  $r_2 < r < r_3$ , então  $f_r(x)$  tem dois pontos fixos, um 2-ciclo, um  $2^2$ -ciclo e um  $2^3$ -ciclo.

Generalizando:

Se  $r_{n-1} < r < r_n$ , então existe pelo menos um  $2^k$ -ciclo, para  $k \in \mathbb{N}$ , e a seqüência  $\{r_k\}$  possui como limite o número  $r_\infty \approx 0,9038675$ , conhecido como *o número de Feigenbaum* que, juntamente com Collet e Tresset, em meados da década de 1970, conjecturou que estes parâmetros deveriam possuir um limite, calculando-o por um processo numérico. Como  $r_k - r_{k-1}$  representa a distância entre pares sucessivos de parâmetros  $r$ , Feigenbaum, Collet e Tresset observaram que a seqüência

$$d_k = \frac{r_k - r_{k-1}}{r_{k+1} - r_k}, k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$$

converge para o número  $d_\infty \approx 4.669202$ . Este número é o mesmo para a classe de aplicações unimodais.

Seja  $\{2^k - \text{ciclo}\}_{k \in \mathbb{N}}$  a seqüência de ciclos atrativos de período  $2^k$ . Quando  $r$  se aproxima do valor máximo  $r_\infty$ , esta seqüência de ciclos atrativos tendem a um conjunto de Cantor (conjunto compacto, não enumerável, totalmente desconexo e sem pontos isolados) e, neste valor, temos um conjunto de Cantor atrator  $\Delta$ , cuja bacia de atração é quase todo o intervalo  $[0, 1]$ , exceto por um conjunto de medida nula. Neste caso, com base na análise do crescimento das órbitas periódicas de  $f_r$ , para  $r$  suficientemente próximo a  $r_\infty$ , observa-se que, se  $x \in \Delta$ , a órbita de  $x$  é densa em  $\Delta$ , porém, não existe dependência sensível das condições iniciais.

Superado este valor, ou seja,  $r \in (r_\infty, 1)$ , existe um conjunto de parâmetros  $r$ , com medida de Lebesgue positiva, os quais  $f_r$  possui atrator estranho de medida positiva. Da mesma maneira que se comportam os  $2^k$ -ciclos, os fazem, por exemplo, os  $3 \cdot 2^k$ -ciclos, que surgem com a órbita estável de período 3, quando  $r$  atinge um valor de, aproximadamente, 3,83. Generalizando, seja  $p$  um número primo. Os  $p \cdot 2^k$ -ciclos são órbitas estáveis de período  $p \cdot 2^k$ , que surgem a partir de um determinado valor de  $r$  juntamente com o  $p$ -ciclo. Assim, existem respectivos limites para o surgimento de conjuntos de Cantor atratores. Para maiores detalhes sobre este processo consultar bibliografia sobre o assunto.

Resumindo, para  $r \in \left(\frac{3}{4}, 1\right)$ , analisarmos a dinâmica dos pontos  $x \in (0, 1)$  pode ser bastante complicado, uma vez que  $f_r$  pode possuir atratores periódicos ou estranhos, que tornam a órbita da maioria dos pontos densa em  $[0, 1]$ , ver Figura A.1(d).

Para  $r = 1$ ,  $f_1$  possui comportamento dinâmico muito rico. Veja que  $f_1^{-1}([0, 1]) = [0, 1]$  e, para todo  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $f_1^n(0) = 0$ ,  $f_1^n(\frac{3}{4}) = \frac{3}{4}$  e ambos são instáveis. A aplicação  $f_1$  possui 2 pontos fixos e a cada iteração de  $f_1$  a quantidade de pontos fixos em  $[0, 1]$  é duplicada, ou seja,  $\#(Fix(f_1^n)) = 2^n$ . Observemos que estes pontos são periódicos para  $f_1$  de período  $k$  tal que  $k$  é divisor de  $n$ . Se  $n$  for primo, o número de órbitas periódicas de período  $n$ ,  $\#\mathcal{O}_n$ , é dada por  $\frac{2^n - 2}{n}$  e se  $n$  não for primo,

| $n$      | $\#(\text{Fix}(f_1^n) = 2^n)$ | $\#(\text{Fix}(f_1^n)) - \sum_{k n} \#(\text{Fix}(f_1^k))$ | $\#\mathcal{O}_n$    |
|----------|-------------------------------|--|----------------------|
| 1        | 2                             | 0  | 2                    |
| 2        | 4                             | $4 - 2 = 2$  | $\frac{2}{2} = 1$    |
| 3        | 8                             | $8 - 2 = 6$  | $\frac{6}{3} = 2$    |
| 4        | 16                            | $16 - 2 - 2 = 12$  | $\frac{12}{4} = 3$   |
| 5        | 32                            | $32 - 2 = 30$  | $\frac{30}{5} = 6$   |
| 6        | 64                            | $64 - 2 - 2 - 6 = 54$                                      | $\frac{54}{6} = 9$   |
| 7        | 128                           | $128 - 2$  | $\frac{126}{7} = 18$ |
| 8        | 256                           | $256 - 2 - 2 - 12 = 240$                                   | $\frac{240}{8} = 30$ |
| $\vdots$ | $\vdots$                      | $\vdots$   | $\vdots$             |

Tabela A.2: Relação entre pontos fixos e órbitas periódicas de período  $n$  em  $f_1^n$ .

obtemos este número de forma recursiva (observe a Tabela A.2) por

$$\#\mathcal{O}_n = \frac{1}{n} \cdot \left( \#(\text{Fix}(f_1^n)) - \sum_{k|n} \#(\text{Fix}(f_1^k)) \right).$$

Por último, para  $r > 1$  a análise é sucinta. Cada  $f_r$  da família de aplicações possui infinitos pontos periódicos, porém, estão ausentes órbitas periódicas atratoras: por observação já feita anteriormente,  $f_r$  possui derivada de Schwarz negativa,  $\forall r$ , e se existisse órbita periódica atratora, esta atrairia a fronteira de  $\mathcal{I}$  ( $\partial\mathcal{I} = \{0, 1\}$ ) ou atrairia o ponto crítico  $x = \frac{1}{2}$ , mas  $\mathcal{O}(\frac{1}{2})$  tende a menos infinito. Além disso, quase todo ponto está na bacia de atração do menos infinito. De fato, os pontos que não são atraídos são os que nunca saem de  $[0, 1]$ , isto é, os pontos do conjunto  $\Delta_r = \bigcap_{n=0}^{\infty} f_r^{-n}([0, 1])$ . Observe que o conjunto  $f_r^{-1}([0, 1])$  é constituído de duas componentes invariantes em  $[0, 1]$  e, em seu complementar  $\mathcal{N}_r = [0, 1] \setminus f_r^{-1}([0, 1])$ , temos um intervalo *pré-encaixante*<sup>1</sup> e, qualquer que seja o aberto contido em  $\mathcal{N}_r$ , este também é pré encaixante. Tomemos um aberto  $J \subseteq \mathcal{N}_r$ , com  $c \in J$ . Se um intervalo  $J_i \subset [0, 1] \setminus J, i \in \mathbb{N}$ , é levado difeomorficamente em  $J$  pela aplicação  $f_r^s, s \in \mathbb{N}$ , dizemos que  $J_i$  é uma *lacuna* de  $J$  ( $J = J_0$ ). O conjunto de medida de Lebesgue nula cujo os elementos são os pontos  $f_r^n(x) \in [0, 1], \forall n$ , é o conjunto

$$\Delta_{rJ} = [0, 1] \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} J_i.$$

Observemos que  $\Delta_{rJ} = \Delta_r$  e, portanto, é um conjunto de Cantor positivamente invariante por  $f_r$  (ver

<sup>1</sup>conjunto dos pontos em  $[0, 1]$  cuja órbita positiva não o intersecta.

Figura A.1(f)). Uma vez que a aplicação  $f_r, r > 1$ , não possui órbita periódica atratora, pelo Teorema A.7,  $\Delta_{r,J}$  será expansor, tornando a dinâmica dos seus pontos caótica.

Consideremos agora um intervalo  $J \subset \mathcal{I}$  e uma aplicação  $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}$ . Tomemos um ponto  $x_0 \in J$  tal que  $\mathcal{O}(f(x_0)) \cap J \neq \emptyset$ . Definimos a *aplicação de primeiro retorno* de  $x_0$ , a aplicação  $f^n$ , tal que  $n$  é o menor inteiro positivo no qual  $\mathcal{O}(x_0) \cap J \neq \emptyset$ , ou seja,

$$f^n : J \rightarrow \mathcal{I}, n = \min\{k > 0; f^k(x_0) \in J\}.$$

Intervalos pré-encaixantes possuem como característica principal que quase todo ponto deste, retorna a ele mesmo, ou seja, se  $J$  for um intervalo pré-encaixante, então existe  $n$  tal que, para quase todo ponto  $x \in J$ ,  $f^n(x) \in J$ .

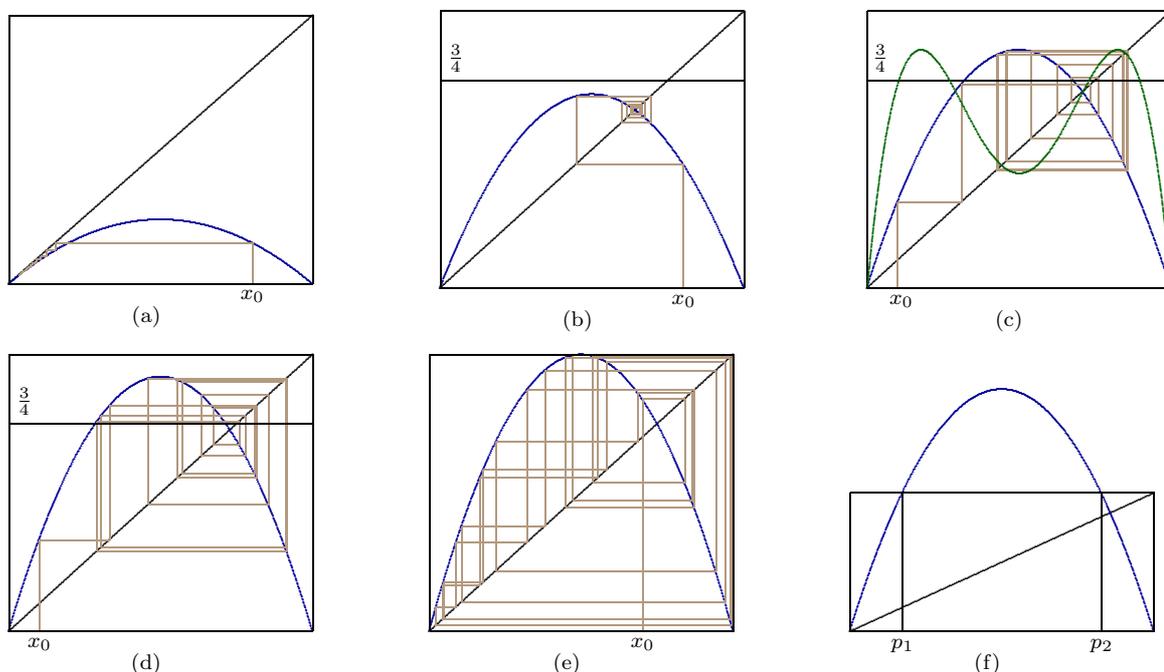


Figura A.1: A família quadrática

Uma aplicação  $f$  unimodal é *renormalizável*, se existem um intervalo  $J$  e um  $n \geq 0$  tal que a aplicação  $f|_{J^n}(J) \subset J$  permanece unimodal. Assim, a aplicação  $f|_{J^n}$  é chamada renormalização de  $f$ . A aplicação  $f$  é *infinitamente renormalizável*, se existem intervalos simétricos arbitrariamente pequenos que possam ser renormalizados por  $f^n$ , para algum  $n \geq 0$ . Este conceito tem como principal idéia o estudo em estruturas menores de uma classe de sistemas dinâmicos através de um operador  $f^n$  que renormaliza o sistema em uma determinada classe.

Consideremos  $\mathfrak{F}$  como sendo o conjunto dos parâmetros  $r$ , não regulares, os quais  $f_r$  é finitamente renormalizável e  $\mathfrak{J}$  como o conjunto dos parâmetros  $r$ , não regulares, os quais  $f_r$  é infinitamente renormalizável.

Basicamente, podemos classificar todas as aplicações em (A.3) em *regulares* ( $\mathfrak{R}$ ), onde constatamos a existência de órbitas periódicas atratoras, ou em *estocásticas*<sup>2</sup> ( $\mathfrak{S}$ ), onde existe um conjunto de parâmetros  $r$ , de medida positiva, os quais  $f_r$  possui medida invariante absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue. É importante salientar que o conjunto  $\mathfrak{S}$  está estritamente contido em  $\mathfrak{I}$ . Portanto,



já que os conjuntos  $\mathfrak{R}$ ,  $\mathfrak{I}$  e  $\mathfrak{S}$  são disjuntos por definição. Esta classificação se deve aos resultados em A.9 e A.10, provados mais recentemente por Lyubich. Assim, em geral, existem somente duas situações. O caso regular: sistemas com a presença de um ciclo atrator e; o caso estocástico: sistemas com a presença de um atrator estranho com uma medida SBR.

**A.9. TEOREMA ([12] e [13]).** *Quase todo parâmetro  $r \in \mathfrak{I}$  é estocástico, ou seja,  $\mu(\mathfrak{I} \setminus \mathfrak{S}) = 0$ .*

**A.10. TEOREMA ([10]).**  $\mu(\mathfrak{I}) = 0$ .

### A.1.1 O diagrama de bifurcações

Muitas vezes, pontos fixos ou periódicos existem para certo valor do parâmetro  $r$  e deixam de existir para outro valor do parâmetro. O valor do parâmetro  $r$  no qual o número ou a estabilidade de pontos fixos ou periódicos muda, chamamos de *valor de bifurcação*.

Uma família parametrizada  $\{f_r\}$  tem uma bifurcação ou bifurca em  $r = r_0$ , se o número ou a natureza (atrativa  $\times$  repulsiva) de algum ponto periódico de  $f_r$  muda quando  $r$  passa através do valor  $r_0$ . Neste caso  $r_0$  é dito ser um ponto de bifurcação da família.

Os diagramas de bifurcações refletem as mudanças de comportamento da dinâmica da família de aplicações  $f_r, r \in (0, 1)$ , os quais incluem a periodicidade e o caos, o *diagrama de bifurcações* (Figura A.1.1): *gráfico dos pontos periódicos de uma função construído em função do parâmetro*. Dois tipos de bifurcações são mais elementares. O primeiro, chamado *bifurcação sela-nó* ou *bifurcação tangente*, ilustra o nascimento de dois pontos fixos ou periódicos, sendo um atrator e o outro um repulsor. O segundo, chamado de *bifurcação de duplo período*, mostra onde um ponto fixo ou periódico

<sup>2</sup>Determinado pelas leis da probabilidade; aleatório

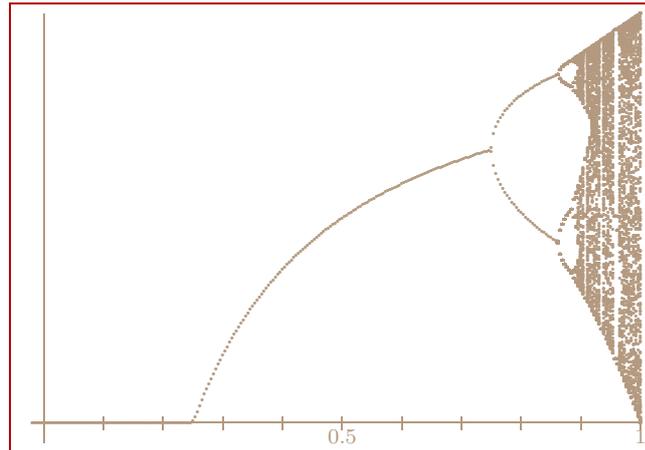


Figura A.2: Diagrama de bifurcação

perde sua estabilidade e co-existem órbita periódica atratora e repulsora. Na família quadrática ocorrem, além destes tipos, a bifurcação transcritical no exato momento em que  $r = \frac{1}{4}$ , ilustrando a “morte” de dois pontos fixos, um atrator e outro repulsor.

Observe que uma reta vertical passando sobre o diagrama de bifurcações teremos a localização dos pontos fixos de  $f_r$  em seu domínio, para cada  $r$ , e que sucessivas bifurcações de duplo período determinam ‘janelas’ de periodicidade (ver Figura A.1.1).

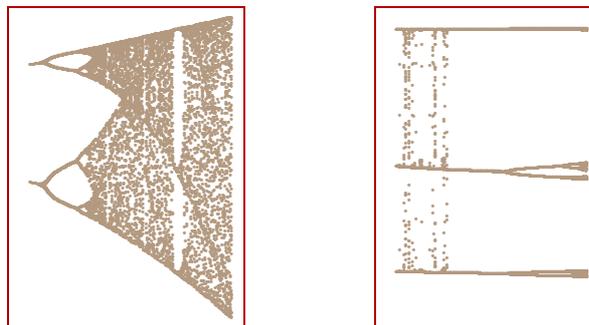


Figura A.3: Janelas do diagrama de bifurcações

Devido ao Teorema de Sharkovskii [14](41-44), podemos determinar quais são os períodos que implicam em outros, ou seja, podemos usá-lo para mostrar que pontos com certos períodos não existem.

## A.2 Aplicações quadráticas em $\mathbb{C}$

Aqui, estaremos interessados em estudar, de forma sucinta, o comportamento dinâmico dos pontos  $z \in \mathbb{C}$  para aplicações  $f_c(z) = z^2 + c$ . Portanto, faremos um breve resumo sobre a estrutura dos conjuntos de Julia para estas aplicações, à medida que mudamos os valores do parâmetro  $c$ . Para concretizarmos estas idéias apresentemos, primeiramente, alguns resultados.

**A.11. PROPOSIÇÃO.** A aplicação  $f(z) = az^2 + bz + c$ ,  $a \neq 0$ ,  $z \in \mathbb{C}$  e  $a + b \neq 0$ , é topologicamente conjugada a uma aplicação da família  $f_r(z) = 4rz(1 - z)$ , para algum  $r \in \mathbb{C}$ .

**Prova.** Devemos mostrar que existe um homeomorfismo  $h$ , tal que

$$h \circ f(z) = f_r \circ h(z), \text{ ou seja, } h(az^2 + bz + c) = 4rh(z)(1 - h(z)).$$

Suponha  $h(z) = mz + n$ ,  $m \neq 0$ . Então,

$$\begin{aligned} h(az^2 + bz + c) &= m(az^2 + bz + c) + n \\ &= amz^2 + bmz + mc + n \\ 4rh(z)(1 - h(z)) &= 4r(mz + n)(1 - mz - n) \\ &= -4rmz^2 + 4rm(1 - 2n)z + 4rn(1 - n). \end{aligned}$$

Portanto,

$$amz^2 + bmz + mc + n = -4rmz^2 + 4rm(1 - 2n)z + 4rn(1 - n).$$

Assim, chegamos ao sistema de equações:

$$\begin{cases} am = -4rm \\ bm = 4rm(1 - 2n) \\ cm + n = 4rn(1 - n) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = -\frac{a}{4} \\ n = \frac{a+b}{2a} \\ m = -\frac{(a+b)(2+a-b)}{4ac} \end{cases}$$

Logo,  $h(z) = -\frac{(a+b)(2+a-b)}{4ac}z + \frac{a+b}{2a}$  que é, claramente, um homeomorfismo.  $\square$

No caso em que  $a + b = 0$ , obtemos uma conjugação entre as aplicações  $f_r$  e  $f$  através do homeomorfismo  $h(z) = \frac{z-p}{p'-p}$ , onde  $p$  e  $p'$  são os zeros da aplicação  $f$ .

Com o resultado obtido na Proposição A.11 observamos que o conjunto  $\{f_r\}$  contém todos os representantes das classes de equivalência, via conjugação topológica, onde o estudo da dinâmica de qualquer aplicação quadrática em  $\mathbb{C}$  se resume ao desta família, para algum  $r \in \mathbb{C}$ , em particular, às aplicações da família

$$\begin{aligned} f_c : \mathcal{I}_c &\rightarrow \mathbb{R}, & \mathcal{I}_c &\subset \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 + c \end{aligned} \tag{A.4}$$

### A.2.1 O conjunto de Mandelbrot

Uma família de aplicações quadráticas  $\{f_c\}_{c \in \mathbb{C}}$ , que pode ser representada por aplicações  $f_c(z) = z^2 + c$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , exibe uma vasta quantidade de fenômenos. A estrutura dos conjuntos de Julia ( $\mathcal{J}_{f_c}$ ) é facilmente entendida se construirmos o conjunto de Mandelbrot, uma espécie de diagrama de bifurcações para  $f_c$ . Este conjunto, de configuração altamente complicada, está contida numa bola de raio dois e possui uma cardióide principal que é cercada de figuras circulares, as quais denominaremos *brotos*. Estes brotos, por sua vez, estão cercados por outros brotos, e assim sucessivamente. Não obstante, estes brotos vem cercados de linhas cada vez mais finas que carregam cópias miniaturizadas do conjunto de Mandelbrot.

**A.12. DEFINIÇÃO.** *Definimos o conjunto de Mandelbrot como sendo o conjunto dos parâmetros  $c$  tais que  $\mathcal{J}_{f_c}$  é conexo.*

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} ; \mathcal{J}_{f_c} \text{ é conexo}\}. \quad (\text{A.5})$$

Certas regiões deste conjunto caracterizam a periodicidade da órbita periódica atratora. Para  $f_c$  sabemos da existência do 0 como único ponto crítico, portanto, existe, no máximo, uma única órbita periódica atratora uma vez que  $f_c$  possui derivada de Schwarz negativa e ponto crítico não flat. De fato, se  $c \notin \mathcal{M}$  (ver Definição A.12), temos que  $f_c^n(0) \rightarrow \infty$  e qualquer outro ponto de  $\mathbb{C}$  está na bacia de atração do infinito, exceto os pontos de um conjunto de Julia, de medida nula e Cantor. Para valores  $c \in \mathcal{M}$  o conjunto de Julia é conexo e é constatada a existência de órbita periódica atratora. Certas regiões em  $\mathcal{M}$  determinam o período de  $f_c$ . Por exemplo, a região delimitada por  $\rho(\theta) = \frac{1}{2}e^{i\theta} - \frac{1}{4}e^{2i\theta}$ , cardióide principal do conjunto  $\mathcal{M}$  (ver Figura A.4). Nesta região  $f_c$  possui único ponto fixo atrator, ver Proposição A.17. A figura A.4 ilustra regiões onde  $f_c$  possui órbita periódica atratora indicada pelo respectivo número. Para maiores detalhes ver [15]. Em 1985, Douady e Hubbard [21] mostraram que  $\mathcal{M}$  é constituído dos valores do parâmetro  $c$  para os quais a órbita do ponto crítico é limitada, é um subconjunto conexo, compacto, cujo bordo é um conjunto de bifurcações e o interior de  $\mathcal{M}$  é uma união enumerável de discos.

A Definição A.12 é apropriada para análise da estrutura do conjunto de Julia, porém, não se adequa a propósitos computacionais. Com o intuito de definirmos  $\mathcal{M}$ , para aplicações  $f_c(z) = z^2 + c$ , de maneira conveniente a estes propósitos, devemos tomar conhecimento sobre a atuação da aplicação  $f_c$  sobre curvas diferenciáveis. Inicialmente, observemos que a pré-imagem de  $f_c$  possui dois valores distintos, o qual chamaremos de *ramos*, ou seja,  $f_c^{-1}(z) = \pm\sqrt{z-c}$ ,  $z \neq c$ . Logo, se tomarmos um pequeno aberto  $U \not\ni c$ ,  $f_c^{-1}(U)$  possuirá duas partes, cada uma das quais a aplicação  $f_c$  é bijetiva e

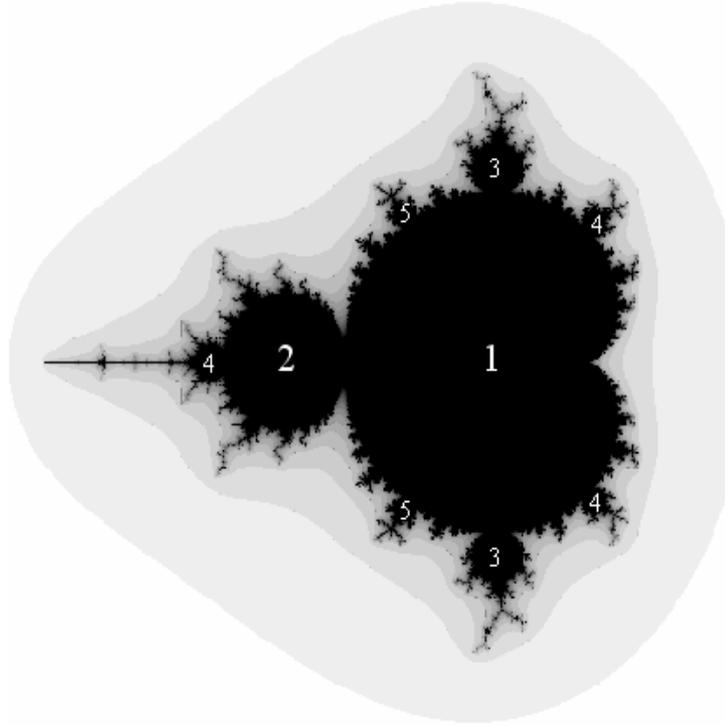


Figura A.4: O conjunto de Mandelbrot.

diferenciável em  $U$ . Nos referiremos por *volta*, uma curva  $C \in \mathbb{C}$  simples (que não se auto intersecta), fechada e diferenciável, e por *oito* uma curva  $C \in \mathbb{C}$ , com apenas um ponto de interseção, fechada e diferenciável.

**A.13.** LEMA ([15]). *Seja  $C \in \mathbb{C}$  uma volta. Se  $c$  está no interior de  $C$ , então  $f_c^{-1}(C)$  é uma volta e  $f_c^{-1}(\text{int}(C)) = \text{int}(f_c^{-1}(C))$ .*

**A.14.** LEMA ([15]). *Seja  $C \in \mathbb{C}$  uma volta. Se  $c \in C$ , então  $f_c^{-1}(C)$  é um oito e  $f_c^{-1}(\text{int}(C))$  é o interior de duas voltas.*

**A.15.** TEOREMA.

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} : \{f_c^n(0)\}_{n \geq 1} \text{ é limitado}\}. \quad (\text{A.6})$$

**Prova.** (1)  $\{f_c^n(0)\}_{n \geq 1}$  é limitado  $\Rightarrow \mathcal{J}_{f_c}$  é conexo.

Como  $\{f_c^n(0)\}_{n \geq 1}$  é limitado, então existe um círculo  $C \in \mathbb{C}$  tal que todos os pontos desta família são elementos de  $\text{int}(C)$ ,  $f_c^{-1}(C) \subset \text{int}(C)$  e, para todo ponto  $z \in \mathbb{C} \setminus (C \cup \text{int}(C))$ ,  $f_c^n(z) \rightarrow \infty$ . Uma vez que  $c = f_c(0) \in \text{int}(C)$ , temos pelo Lema A.13 que  $f_c^{-1}(C)$  é uma volta contida em  $\text{int}(C)$ . Da mesma forma,  $f_c(c) = f_c^2(0) \in \text{int}(C)$  e  $f_c^{-1}(\text{int}(C)) \subset \text{int}(f_c^{-1}(C))$ , portanto  $c \in \text{int}(f_c^{-1}(C))$ . Assim,  $f_c^2(C)$  é uma volta contida em  $f_c^{-1}(C)$ . Procedendo desta forma, podemos concluir que

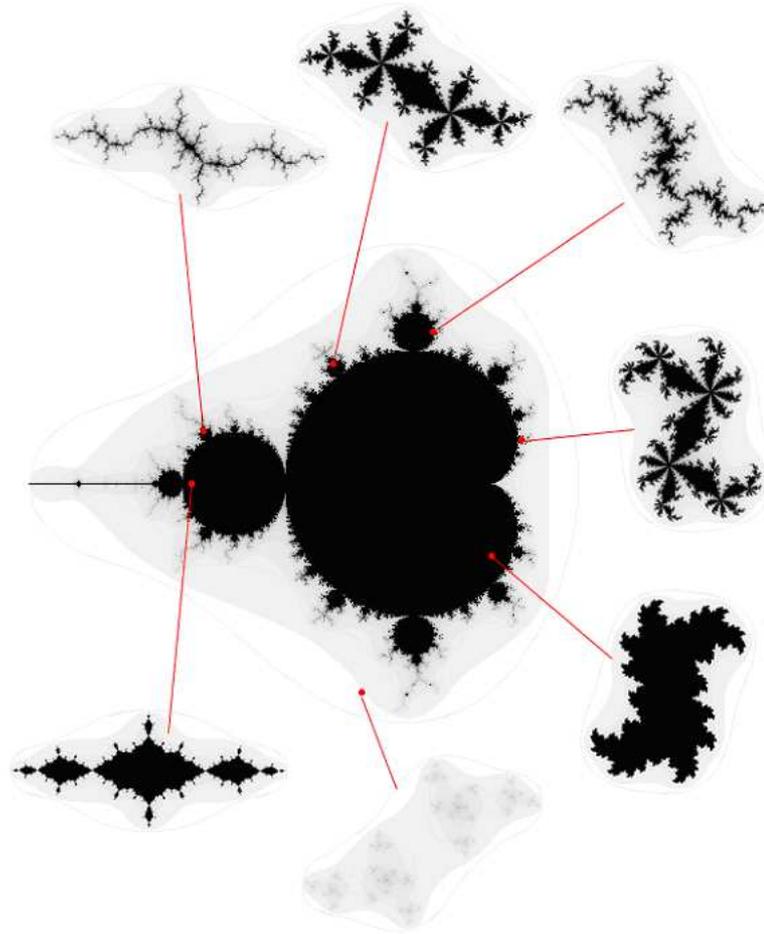


Figura A.5: O conjunto de Mandelbrot e os conjuntos Julia

$\{f_c^n(C)\}$  consiste de uma seqüência de voltas onde cada uma está contida no interior da volta que a precede. Denotemos por  $K$  o conjunto fechado dos pontos que estão sobre ou no interior das voltas  $\{f_c^n(C)\}, \forall n$ . Se  $z \in \mathbb{C} \setminus K$  para algum  $n_0$ ,  $f_c^n(z) \rightarrow \infty$ . Denotemos por

$$\mathcal{B}_{f_c}(\infty) = \mathbb{C} \setminus K = \{z : f_c^n(z) \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty\}.$$

Pelo Lema 1.30 temos que  $\mathcal{J}_{f_c} = \partial(\mathbb{C} \setminus K) = \partial K$ . Mas  $K$  é a interseção de uma seqüência decrescente de conjuntos fechados simplesmente conexos, isto é, conjuntos conexos que possuem complemento conexo. Portanto,  $\mathcal{J}_{f_c}$  é conexo.

(2)  $\{f_c^n(0)\}_{n \geq 1}$  é não limitado  $\Rightarrow \mathcal{J}_{f_c}$  é não conexo.

Tomemos  $C$  um círculo suficientemente grande tal que  $f_c^{-1}(C) \subset \text{int}(C)$ , para todo  $z \in \mathbb{C} \setminus (C \cup \text{int}(C))$ ,  $f_c^n(z) \rightarrow \infty$  e  $f_c^{p-1}(c) = f_c^p(0) \in C$  com  $f_c^n(0) \in \text{int}(C)$  se  $n < p$  e  $f_c^n(0) \in \mathbb{C} \setminus (C \cup \text{int}(C))$  se  $n > p$ . Observemos que na primeira parte da demonstração, construímos uma seqüência de voltas  $\{f_c^{-n}(C)\}$ , cada uma das quais estavam contidas no interior da volta

que a precedia. Contudo, o argumento falha na volta  $f_c^{1-p}(C)$ , pois  $c \in f_c^{1-p}(C)$  e, portanto, o Lema A.13 não se aplica. Pelo Lema A.14 temos que  $E = f_c^{-p}(C)$  é uma figura na forma de oito no interior da volta  $f_c^{1-p}(C)$ , com  $f_c$  uma aplicação que toma valores no interior de cada parte de  $E$  e leva em  $f_c^{1-p}(C)$ . O conjunto de Julia  $\mathcal{J}_{f_c} \subset E$ , uma vez que os outros pontos tendem ao infinito. Uma vez que  $\mathcal{J}_{f_c}$  é invariante sob  $f_c^{-1}$ , suas partes devem estar contidas em cada volta de  $E$ . Um absurdo, pois  $E$  desconecta  $\mathcal{J}_{f_c}$ .  $\square$

A Proposição A.16 comprova que o conjunto de Mandelbrot para  $f_c(z)$  está contido numa circunferência de raio 2.

**A.16. PROPOSIÇÃO.** *Seja  $f_c(z) = z^2 + c$ . Se  $|z| \geq |c|$  e  $|z| > 2$ , então  $|f_c(z)| > |z|$  e  $z \in W^s(\infty)$ .*

**Prova.**

$$\begin{aligned} |f_c(z)| &= |z^2 + c| \geq |z^2| - |c| = |z|^2 - |c| \\ &= |z| \cdot |z| - |c| \\ &> 2 \cdot |z| - |c| \\ &= |z| + |z| - |c| \\ &> |z|. \end{aligned}$$

Observemos então que para todo  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$|f_c^n(z)| = |f_c(f_c^{n-1}(z))| > |f_c^{n-1}(z)| > \cdots > |f_c(z)| > |z| > |c| > 2.$$

Conseqüentemente, se fizermos  $n$  tender a infinito,  $|f_c^n(z)| \rightarrow \infty$ .  $\square$

**A.17. PROPOSIÇÃO.** *O conjunto dos valores de parâmetros  $c$  para os quais  $f_c^n(z)$  tem um ponto fixo atrator é o interior da cardióide parametrizada por  $\rho(\theta) = \frac{1}{2}e^{i\theta} - \frac{1}{4}e^{2i\theta}$ .*

**Prova.** Por se tratar de ponto fixo atrator,  $z_0 = r \cdot e^{i\theta}$  satisfaz a desigualdade  $|Df_c(z_0)| < 1$ . Decorre disto que  $|r \cdot e^{i\theta}| < \frac{1}{2}$  e, portanto,  $|r^2 \cdot e^{2i\theta}| < \frac{1}{4}$ . Portanto, considerando a aplicação  $\xi(\theta) = r \cdot e^{i\theta} - r^2 \cdot e^{2i\theta}$ , temos  $|\xi(\theta)| < |\rho(\theta)|$ , para todo  $\theta$ .  $\square$

**A.18. PROPOSIÇÃO.** *Seja  $|c| > 2$  e suponha  $|z| \geq |c|$ . Então  $|f_c^n(z)| \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ .*

**Prova.** Considere  $|z| = r \geq |c| > 2$ . Observemos que a aplicação  $f_c$  transforma o círculo  $C_1$  de raio  $r$  e centro em 0 num círculo  $C_2$  de raio  $r^2$  e centro em  $c$ . Uma vez que  $r^2 > 2r$ ,  $C_1 \subset C_2$  e, conseqüentemente,  $|f_c(z)| > |z|, \forall z, |z| > |c|$ . Portanto,  $|f_c^n(z)| \rightarrow \infty$ .  $\square$

A inexistência de pontos periódicos para  $f_c$  em  $\{z \in \mathbb{C}; |z| > |c|\}$  faz com que estes pontos e seus iterados estejam em  $F_{f_c}$ . Além destes, qualquer outro ponto em  $\{z \in \mathbb{C}; |z| \leq |c|\}$  que eventualmente seja levado por  $f_c$  ao conjunto  $\{z \in \mathbb{C}; |z| > |c|\}$  também pertencerá a  $F_{f_c}$ . Claro que o conjunto  $\{z \in \mathbb{C}; f_c^n(z) \notin F_c\}$  é o conjunto  $\mathcal{J}_c$ .

**A.19. PROPOSIÇÃO.** *Seja  $M \subset \mathbb{R}^{2 \times 2}$  o conjunto de matrizes sob a forma  $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . A aplicação*

$$\xi : \quad M \quad \rightarrow \quad \mathbb{C}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \mapsto \alpha + \beta i, \text{ é um isomorfismo de anéis.}$$

**Prova.** Mostremos inicialmente que  $\xi$  é um homeomorfismo de anéis.

$$\begin{aligned} \xi \left( a \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\beta_1 & \alpha_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ -\beta_2 & \alpha_2 \end{bmatrix} \right) &= \xi \left( \begin{bmatrix} a\alpha_1 + \alpha_2 & a\beta_1 + \beta_2 \\ -a\beta_1 - \beta_2 & a\alpha_1 + \alpha_2 \end{bmatrix} \right) \\ &= a\alpha_1 + \alpha_2 + (a\beta_1 + \beta_2)i \\ &= a\alpha_1 + a\beta_1 i + \alpha_2 + \beta_2 i \\ &= a(\alpha_1 + \beta_1 i) + \alpha_2 + \beta_2 i \\ &= a\xi \left( \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\beta_1 & \alpha_1 \end{bmatrix} \right) + \xi \left( \begin{bmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ -\beta_2 & \alpha_2 \end{bmatrix} \right) \\ \xi \left( \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\beta_1 & \alpha_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ -\beta_2 & \alpha_2 \end{bmatrix} \right) &= \xi \left( \begin{bmatrix} \alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 & \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 \\ -(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) & \alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 \end{bmatrix} \right) \\ &= \alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)i \\ &= \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2 i + \alpha_2\beta_1 i + \beta_1\beta_2 i^2 \\ &= (\alpha_1 + \beta_1 i) \cdot (\alpha_2 + \beta_2 i) \\ &= \xi \left( \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\beta_1 & \alpha_1 \end{bmatrix} \right) \cdot \xi \left( \begin{bmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ -\beta_2 & \alpha_2 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

Observemos que  $\xi$  é injetiva, pois

$$\ker(\xi) = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \in M \mid \xi \left( \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \right) = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\text{De fato, } \xi \left( \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \right) = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta i = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0.$$

$\xi$  é uma aplicação sobrejetiva, pois, pelo Teorema do núcleo e da imagem [7],

$$\dim \Im(\xi) + \dim \ker(\xi) = \dim \mathbb{C}.$$

Como  $\dim \ker(\xi) = 0$ , temos  $\dim \Im(\xi) = \dim \mathbb{C}$ .  $\square$

### A.3 A família quadrática em $\mathcal{A}_2$

Por ser a logística uma família bastante conhecida e estudada em  $\mathbb{R}$  e em  $\mathbb{C}$ , estudemos-a no espaço das matrizes quadradas de ordem 2. Consideremos  $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^{2 \times 2}$  um subconjunto tal que se  $A \in \mathbb{K}$ , todo autovalor de  $A$  possui módulo entre 0 e 1 e a família de aplicações  $f_r : \mathcal{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por  $f_r(x) = 4rx(1-x)$ . De forma induzida, obtemos a família de aplicações

$$\begin{aligned} f_r : \mathbb{K} &\rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2} \\ X &\mapsto 4tX(I-X). \end{aligned}$$

De acordo com o que já foi visto, temos que os pontos fixos de  $f_r$  são da forma  $\begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix}$ , com  $f_r(p_1) = p_1$ ,  $f_r(p_2) = p_2$  e  $p_1 = p_2 = \frac{4r-1}{4}$  ou, se  $p_1 \neq p_2$ , pelo menos um elemento da diagonal principal é zero e o outro da forma  $\frac{4r-1}{4r}$ . Ocorre ainda, eventualmente, o ponto fixo  $\begin{bmatrix} p & 1 \\ 0 & p \end{bmatrix}$  se  $f_r(p) = p$  e  $Df_r(p) = 1$ . Os pontos periódicos de período  $n$  são da forma  $\begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix}$ , com  $n = \text{mmc}(n_1, n_2)$ , ou da forma  $\begin{bmatrix} p & 1 \\ 0 & p \end{bmatrix}$  se, e somente se,  $f_r^n(p) = p$  e  $Df_r^n(p) = 1$ .

A dinâmica de uma matriz  $A \sim J$ , portanto, é regida pelo seus autovalores e pela lei de  $f_r$  para algum  $r$ . Analisemos os casos:

$$- A \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Pelo resultado obtido na Proposição 3.2, a órbita de  $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$  pode ser classificada com base nos valores do parâmetro  $r$  da seguinte forma:

$$(a) \text{ Para } r \in \left(0, \frac{1}{4}\right) \text{ e } \forall \lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1], \mathcal{O} \left( \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \right) \text{ tende a } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (b) Para  $r \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1+\sqrt{6}}{4}\right]$  e  $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$ ,  $\mathcal{O} \left( \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \right)$  tende a um dos elementos do conjunto  $Per_n(f_r) = \left\{ \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p_2 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p_2 & 0 \\ 0 & p_1 \end{bmatrix} \right\}$ .
- (c) Para  $r \in \left[\frac{1+\sqrt{6}}{4}, 1\right)$  e  $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$ ,  $\mathcal{O} \left( \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \right)$  ou é periódica, ou está na bacia de atração de alguma órbita periódica atratora, ou é recorrente.
- (d) Para  $r \in \left[1, \frac{2+\sqrt{5}}{4}\right)$ , o conjunto dos pontos que permanecem em  $K$  é um conjunto de Cantor minimal atrator.
- (e) Para  $r \in \left(\frac{2+\sqrt{5}}{4}, +\infty\right)$  não existem órbitas periódicas atradoras e, conseqüentemente, a órbita de todo elemento  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  diverge.

$$- A \sim \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

Como ja foi dito, a Proposição A.19 nos garante a existência de uma conjugação entre as as aplicações  $f_r \in \mathcal{A}_2$  restrita a  $M$  e  $f_c \in \mathcal{A}_1$ . Assim, com a existência de órbita periódica atratora em  $f_r$ , a dinâmica dos pontos do sistema se limita aos casos:  $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$  ou é atraída por esta órbita periódica ( $|Df^n(\alpha + \beta i)| \rightarrow 0$ ) ou está na bacia estável de atração do infinito. A ausência de atratores faz com que a maioria dos pontos no sistema estejam na bacia estável do infinito, a menos de um conjunto de Julia.

# Bibliografia

- [1] Robinson, C. – ‘*Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics and Chaos*’ (1999), CRC Press LLC, Florida.
- [2] Aligood, K. T., Sauer, T. and Yorke, J. A. – ‘*CHAOS: An introduction to Dynamical Systems*’ (1996), Springer-Verlag, New York, Inc.
- [3] de Melo, W. and van Strien, S. J. – ‘*One-Dimensional Dynamics*’ (1993), Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin.
- [4] Mandelbrot, B. – ‘*Objectos Fractais: Forma, Acaso e Dimensão*’ (1991), 1ª edição, Gradiva, Lisboa.
- [5] Devaney, R. L. – ‘*An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*’ (1986), Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc. California.
- [6] Mañé, R. – ‘*Introdução à Teoria Ergódica*’ (1983), IMPA, CNPq.
- [7] Hoffman, K. and Kunze, R. – ‘*Álgebra Linear*’ (1979), 2ª. edição, Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro.
- [8] Palis, J. e Melo, W. – ‘*Introdução aos sistemas dinâmicos*’ (1978), IMPA, CNPq.
- [9] Andronov, A. and Pontryagin, L. – ‘*Systèmes Grossiers*’ (1937), Dokl. Akad Nauk. USRR, 14: 247-251.
- [10] Lyubich, M. – ‘*Almost any real quadratic map is either regular or stochastic*’ (1997), preprint, IMS at Stony Brook, to appear in Ann. of Math.
- [11] Milnor, J. – ‘*On the Concept of Attractor*’ (1985), Springer-Verlag, Commun. Math. Phys. 99, 177-195.

- 
- [12] Lyubich, M., Martens, M. and Nowicki, T. – ‘*Dynamics of quadratic polynomials, III. Parapuzzle and SBR measure*’ (2000), Astérisque 261 (173-200); Géométrie Complexe et Systèmes Dynamiques, volume in honor of Adrien Douady’s 60th birthday.
- [13] Martens, M. and Nowicki, T. – ‘*Invariant measures for Lebesgue typical quadratic maps*’ (2000), Astérisque 261 (239-252); Géométrie Complexe et Systèmes Dynamiques, volume in honor of Adrien Douady’s 60th birthday.
- [14] Holmgren, R. A. – ‘*A first course in discrete dynamical systems*’ (1994), Springer-Verlag New York Inc.
- [15] Falconer, K. J. – ‘*Fractal Geometry: Mathematical Foundations and applications*’ (1990), John Wiley & Sons, Chichester.
- [16] Lima, E. L. – ‘*Curso de Análise vol.1*’ (2002), IMPA (Projeto Euclides), 10<sup>a</sup> edição, Rio de Janeiro.
- [17] Lima, E. L. – ‘*Curso de Análise vol.2*’ (1999), IMPA (Projeto Euclides), 5<sup>a</sup> edição, Rio de Janeiro.
- [18] Lima, E. L. – ‘*Espaços Métricos*’ (1977), IMPA (Projeto Euclides), Rio de Janeiro.
- [19] Neto, A. L. – ‘*Funções de uma variável complexa*’ (1980), IMPA (Projeto Euclides), 2<sup>a</sup> edição, Rio de Janeiro.
- [20] Carleson, L. and Gamelin, T. W. – ‘*Complex Dynamics*’ (1993), Springer-Verlag, New York, Inc.
- [21] Douady, A. and Hubbard, J. H. – ‘*On the dynamics of polynomial-like maps*’ (1985), Ann. Sc. Éc. Norm. Sup., v. 18 (287-343).

# Índice Remissivo

- $C(\mathcal{U})$  - conjunto das aplicações contínuas em um aberto  $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ , 6
- $S^{m-1}$ , 21
- $A(\mathcal{U})$  - conjunto das aplicações holomorfas definidas em um aberto  $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ , 6
- $\mathcal{A}_m$  - o conjunto das aplicações definidas por séries de potências de matrizes a coeficientes reais, 25
- $\mathbb{C}$  - conjunto dos números complexos, 5
- $\mathcal{J}_f$ , 15
- $\mathcal{J}_f^\circ$ , 15
- $\mathbb{R}^{m \times m}$  - conjunto de todas as  $m \times m$  matrizes quadradas com entradas reais, 21
- $\mathbb{R}[z]$  - conjunto dos polinômios em  $\mathbb{C}$  a coeficientes reais, 35
- $\mathcal{B}_f(\mathbb{Y})$  - bacia de atração de  $\mathbb{Y}$ , 2
- $\mathfrak{F}$ , 46
- $\mathfrak{I}$ , 46
- $\mathfrak{S}$ , 47
- $\mathcal{C}_f$  - o conjunto de todos os pontos críticos de uma aplicação  $f$ , 39
- $m$ -ciclo, 1
- órbita, 1
  - periódica, 1
  - positiva, 1
  - pré, 1
- aplicação
  - caótica em um conjunto, 4
  - conforme, 13
  - de Möebius, 13
  - de primeiro retorno, 46
  - de recobrimento, 13
  - infinitamente renormalizável, 46
  - racional, 13
  - renormalizável, 46
  - renormalização, 46
  - univalente, 13
- aplicações
  - estocásticas, 47
  - família normal de, 13
  - regulares, 47
- atrator minimal, 2
- bacia de atração, 2
- bifurcação
  - valor de, 47
- cobertura universal, 13
- conjunto
  - de Julia, 15
  - de Mandelbrot, 50
  - equicontínuo, 11
  - estável, 3
  - instável local, 3
  - localmente limitado, 11
  - minimal, 3
  - normal, 12
  - perfeito, 18

- relativamente compacto, 11
- uniformemente equicontínuo, 11
- convergência
  - pontual, 5
  - uniforme, 5
  - uniforme em compactos, 5
- dependência sensível das condições iniciais, 4
- derivada
  - de Schwarz, 36
- Diagrama de bifurcações, 47
- dinâmico
  - simétrico, 41
- dinâmicos
  - sistemas, v
- disco de convergência, 24
- espaço
  - de recobrimento, 13
- estruturalmente estável, 2
- Fórmula de Hadamard, 25
- família
  - dinâmica da, 36
  - logística, 40
  - normal em um ponto, 15
  - uniformemente limitada, 12
- fibra, 28
- folha, 28
- forma diferencial
  - complexa de grau 1, 9
  - exata, 9
  - fechada, 9
- hiperbólico
  - repulsor, 38
- Homografia, 13
- intervalo(s)
  - errantes, 37
  - lacuna de um, 45
  - pré-encaixante(s), 45
- invariante, 2
  - negativamente, 1
  - positivamente, 1
- matriz(es)
  - jacobiana, 26
  - semelhante(s), 21
  - singular, 21
- número de Feigenbaum, 44
- omega limite, 2
- ponto
  - $\ell$ -modal, 36
  - crítico, 36
  - de dobra, 36
  - de sela, 3
  - excepcional, 17
  - fixo, 1
  - não degenerado, 36
  - não-*flat*, 36
  - periódico, 1
  - recorrente, 3
  - uni-modal, 36
- Princípio do mínimo, 37
- série, 23
  - convergente, 23
  - divergente, 23
  - soma da, 23
- série de potências, 23
- seqüência

localmente limitada, 13  
uniformemente limitada, 13

**Teorema**

Arzelá-Ascoli, 11  
Cauchy-Goursart, 10  
da hiperbolicidade de Mañé, 39  
da Uniformização de Riemann, 14  
de Guckenheimer, 37  
de Morera, 10  
Fundamental da Álgebra, 15  
Montel, 12, 14

**topologicamente**

conjugada, 2  
transitiva, 4

Universidade Federal da Bahia-UFBA  
Instituto de Matemática/Depto. de Matemática

---

Campus de Ondina, Av. Adhemar de Barros s/n, CEP:40170-110  
[www.im.ufba.br/hpinst/mestrado](http://www.im.ufba.br/hpinst/mestrado)