Universidade Federal da Bahia
Instituto de Matemática
Curso de Pós-Graduação em Matemática
Dissertação de Mestrado

Medidas SRB para aplicações com alguma expansão

Mariana Pinheiro Gomes da Silva

Salvador-Bahia
2007

Medidas SRB para aplicações com alguma expansão

Mariana Pinheiro Gomes da Silva

Dissertação apresentada ao colegiado do curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática Pura.

Banca examinadora

Prof. Dr. Vilton Jeovan Viana Pinheiro (Orientador).

Prof. Dr. Joseph Nee Anyah Yartey.

Prof. Dr. Paulo César Rodrigues Pinto Varandas.

Mariana Pinheiro Gomes da Silva
"Medidas SRB para aplicações com alguma expansão" / Salvador-Ba, 2007.

Orientador: Prof. Dr. Vilton Jeovan Viana Pinheiro (UFBA).
Dissertação de Mestrado apresentada ao curso de Pós-graduacão em Matemática da UFBA, 59 páginas.

Palavras-Chave: Expansão não-uniforme, Ergodicidade, Medidas Invariantes.

A Deus e a meus pais.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por me sustentar nesta caminhada e a minha família, meus pais Luiz Carlos e Wanda e a meu irmão Bernardo por todo apoio carinho e compreensão imprescindíveis a esta conquista.

Agradeço também àqueles que estiveram comigo no dia-a-dia, vencendo cada obstáculo que são meus colegas de turma também conhecidos como Afarinhados.

A Bárbara (a Binha) por toda calma e paciência na resolução de cada exercício, a Kleyber (o Keu), por suas brincadeiras o os momentos de gargalhada em nosso grupo, a Elias (o Lico) por sua docilidade e sapiência, a Eliseu (o Zeu) pela sua diplomacia em resolver as 'diligências' e as aulas de dominó nos poucos momentos de folga, a Ricardo (o Ric) por seu terrorismo antes de cada prova, a Jarbas (o Binha) por seu jeito pacato e os momentos de descontração e a Yuri (a Ki), essa coreana meio cearence, pelo seu jeito meigo e cativante sempre estimulando a todos no estudo. Amo vocês!

Aos colegas da turma anterior pelo acolhimento e ajuda e de maneira muito especial aos meus queridos amigos Rosane, Ariane e Abílio. Ao apoio de José Alves e ao professor Vilton, meu orientador, por sua paciência, sua compreensão e ao seu eterno e fundamental estímulo aos alunos para que continuem estudando e para que não esmoreçam ao topar com obstáculos.

Aos professores do mestrado, sempre muito pacientes, atenciosos e dedicados e de maneira muito especial a três deles: Enaldo, José Fernandes e Paulo Ruffino porque foram mais que professores, foram amigos.

Ao LEMA (Laboratório de Ensino de Matemática) e a todos os seus professores membros porque foi lá onde tudo começou e a Lina pelo seu carinho e estímulo.

Aos funcionários do Instituto, D. Zezé e Tânia pela paciêcia e a Selma, Alan e Jomário pelo carinho e solicitude.

E a quatro pessoas muito especiais que sempre estiveram presentes, foram companheiras, amigas, irmãs e que sem elas essa conquista não teria o mesmo sabor: Fabiana, Carla, Gabriela e Cláudia. Muito obrigada por tudo.

Resumo

Neste trabalho construiremos medidas Sinai-Ruelle-Bowen (SRB) para difeomorfismos locais satisfazendo condições mais fracas que não uniformemente expansores. Também provaremos a existência de medidas invariantes absolutamente contínuas para difeomorfismos locais apenas assumindo a existência de tempos hiperbólicos para quase todo ponto da variedade com respeito a medida de Lebesgue. Para isso usaremos idéias inspiradas na dinâmica unidimensional como intervalos "nice"e componentes ergódicas para medidas não-invariantes.

Abstract

We construct SRB measures diffeomorphisms satisfying conditions far weaker than the non-uniform local expansion. We also prove the existence of an absolutely continuous invariant measure for local diffeomorphisms, only assuming the existence of hyperbolic times for Lebesgue almost every point of the manifold. We will use ideas coming from the one dimensional dynamics like "nice"interval and ergodic components for non invariant measures.

Conteúdo

Introdução

Em [5], Alves-Bonatti-Viana, provaram a existência de medidas invariantes absolutamente contínuas para uma aplicação f não-*flat* definida em uma variedade compacta Riemanniana M de dimensão $d \geq 1$ com volume normalizado chamado medida de Lebesgue onde o controle de distorção foi dado pela condição de recorrência lenta ao conjunto crítico e foi assumido que

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \log(\| (Df(f^j(x)))^{-1} \|^{-1}) \geq \lambda > 0$$

para Lebesgue quase todo ponto $x \in M$.

Isto é, para provar a existência de tais medidas foi preciso garantir que para quase todo ponto da variedade M existisse $n_0 = n_0(x)$ tal que $\| Df(f^j(x)) \|^{-1} \leq e^{\lambda n}, \forall j \geq n_0$. Este resultado foi obtido por Alves-Araújo em [8] sob a hipótese adicional do primeiro tempo hiperbólico ser integrável com respeito à medida de Lebesgue.

Em [14], Pinheiro, usando técnicas diferentes e sem a condição adicional de integrabilidade do primeiro tempo hiperbólico, garantiu a existência destas medidas. Ele apenas exige que para Lebesgue quase todo ponto $x \in M$ tenhamos

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \log(\| Df(f^j(x)^{-1}) \|^{-1}) \geq \lambda > 0.$$

Assim, é preciso somente garantir que exista $n \in \mathbb{N}$ tal que a partir do n-ésimo iterado a aplicação f expanda em alguns momentos em Lebesgue quase todo ponto da variedade compacta M. Neste trabalho provaremos a existência de medidas invariantes absolutamente contínuas para uma aplicação f exigindo apenas a existência de um primeiro tempo hiperbólico para Lebesgue quase todo ponto $x \in M$ mas usando novos resultados e técnicas de [13]. Com isto, pretendemos abordar algumas idéias dos trabalhos citados acima evitando algumas dificuldades técnicas que algumas vezes obscurecem estas idéias. Chamamos atenção que mostraremos a existência de medidas invariantes absolutamente contínuas as quais, por sua vez, são medidas SRB ou medidas físicas.

Para isto, seguimos o seguinte roteiro. Construímos em uma bola topológica da variedade M uma aplicação Markoviana induzida com boas propriedades de expansão e distorção. Por teoremas clássicos da Teoria Ergódica Infinita, mostramos que esta aplicação induzida tem uma medida invariante absolutamente contínua com respeito a medida de Lebesgue. Em seguida provamos a integrabilidade do tempo de indução (neste caso, tempo de retorno). Com isto, conseguimos projetar a medida invariante com respeito à aplicação induzida em uma medida invariante com respeito à aplicação original. Além disto, esta medida projetada é absolutamente contínua com respeito a medida de Lebesgue.

Este trabalho foi dividido em quatro capítulos. No primeiro deles, enunciamos os teoremas que nos permitirão provar a existência destas medidas, definimos os tempos hiperbólicos e estudamos as suas principais propriedades. Os tempos hiperbólicos foram introduzidos por Alves-Bonatti-Viana em [5] e rapidamente se tornaram ferramenta básica no estudo da hiperbolicidade não (necessariamente) uniforme.

O capítulo 2 é dedicado ao estudo as componentes ergódicas em qualquer dimensão para medidas não (necessariamente) invariantes. São apresentados critérios para garantir a decomposição da variedade em um número finito de componentes ergódicas e ainda a existência de um atrator gordo (com medida positiva) em cada uma delas. Estas informações são importantes para mostrar a integrabilidade do tempo de retorno. O conceito de ergodicidade para medidas não invariantes surgiu na dinâmica unidimensional (ver, [1, 2, 11, 16, 17]). Em [13] este conceito é aplicado e estudado no contexto multidimensional.

O capítulo 3 é dedicado ao estudo dos conjuntos aninhados (*nested sets*). Estes conjuntos foram introduzidos em [13] e facilitam enormemente as partições de Markov. Estas partições por sua vez, são a base para a construção da aplicação induzida acima citada.

No capítulo 4, congregamos os elementos desenvolvidos nos capítulos anteriores de maneira a provar a existência de medida invariante absolutamente contínua. Neste capítulo construímos a aplicação induzida Markoviana, mostramos a integrabilidade do tempo de retorno e finalmente obtemos a medida invariante para a aplicação original.

Capítulo 1

Teoremas

Neste capítulo enunciaremos os principais teoremas e proposições que nos permitirão concluir a existência de medidas ergódicas invariantes absolutamente contínuas para um difeomorfismo C^2 f na variedade M de dimensão $d \geq 1$ apenas admitindo a existência de um primeiro tempo hiperbólico para Lebesgue quase todo ponto $x \in M$.

Seja então M uma variedade compacta Riemanniana de dimensão $d \geq 1$ e Leb o volume normalizado de M que chamaremos de medida de Lebesgue.

Teorema 1.1 *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo local C^2. Se f (ou algum iterado fixo) satisfaz:*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log(\| Df(f^i(x))^{-1} \|)^{-1} \geq \lambda > 0.$$

para Leb-q.t.p $x \in M$ então existe uma coleção finita de medidas ergódicas invariantes absolutamente contínuas tal que Lebesgue quase todo ponto de M pertence à bacia de uma destas medidas.

Chamamos atenção que a *bacia* de alguma medida invariante ν é o conjunto $\mathcal{B}(\nu)$ dos pontos $x \in M$ tal que a medida delta de Dirac ao longo da órbita converge na topologia fraca estrela, isto é,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \phi(f^j(x)) = \int \phi d\nu, \quad \forall \phi \in C^0(M).$$

O Teorema 1.1 é de fato uma consequência do teorema principal abaixo que garante a existência de uma estrutura markoviana local com integrabilidade da função tempo. Uma estrutura markoviana em uma bola topológica $B \subset M$ consiste em uma partição enumerável $\mathcal{P}$ (mod 0) por abertos desta bola B com $Leb(\partial P) = 0, \forall P \in \mathcal{P}$ e para cada $x \in \cup_{P \in \mathcal{P}} P$ existe uma função tempo associada $x \mapsto R(x) \in \mathbb{N}$, constante em cada $P \in \mathcal{P}$ e uma aplicação induzida $F(x) = f^{R(x)}(x)$ definida em quase todo ponto da bola B. Cada elemento desta partição é enviado por F difeomorficamente em uma bola B. Pode-se provar que F tem medida invariante absolutamente contínua ν. Além disso, desde que R seja Leb-integrável também pode-se provar que existe medida f-invariante finita absolutamente contínua.

Teorema 1.2 (Principal) *Toda aplicação satisfazendo as hipóteses do Teorema* 1.1 *tem estrutura markoviana local com integrabilidade da função tempo.*

Uma aplicação $f : M \to M$ é chamada *não-uniformemente expansora* se ela (ou algum iterado) satisfaz para Leb-q.t.p $x \in M$ a seguinte condição:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log(\|(Df(f^i(x)))^{-1}\|) \leq -\lambda < 0.$$

ou equivalentemente satisfaz,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log(\|Df(f^i(x))^{-1}\|)^{-1} \geq \lambda > 0.$$

Teorema 1.3 *Um difeomorfismo local C^2 é não-uniformemente expansor se e somente se satisfaz as hipóteses do Teorema* 1.1.

Teorema 1.4 *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo local C^2 em uma variedade compacta M. Se a função primeiro tempo hiperbólico é definida para Leb-q.t.p $x \in M$ então f é uma aplicação não-uniformemente expansora.*

1.1 Aplicações não-uniformemente expansoras

Definição 1.1 (σ-Tempo hiperbólico) *Dado $\sigma < 1$, dizemos que n é um σ-tempo hiperbólico para um ponto $x \in M$ se para todo $1 \leq k \leq n$,*

$$\prod_{i=n-k}^{n-1} \| Df(f^i(x))^{-1} \| \leq \sigma^k$$

Denotaremos o conjunto dos pontos de M tal que $n \in \mathbb{N}$ é σ-tempo hiperbólico por $H_n(\sigma)$.

Em particular, se n é um σ-tempo hiperbólico para x, então $Df^{-k}(f^n(x))$ é uma contração para todo $1 \leq k \leq n$:

$$\| Df^{-k}(f^n(x)) \| \leq \prod_{i=n-k}^{n-1} \| Df(f^i(x))^{-1} \| \leq \sigma^k.$$

Lema 1.1 (Pliss) *Dado $A \geq c_2 > c_1 > 0$, tome $\theta_0 = \dfrac{(c_2 - c_1)}{(A - c_1)}$. Então, dada qualquer sequência de números reais $a_1, \ldots a_N$ tais que:*

$$\sum_{j=1}^{N} a_j \geq c_2 N \ \ e \ \ a_j \leq A, \text{ para todo } 1 \leq j \leq N.$$

existem $l > \theta_0 N$ e $1 < n_1 < \ldots < n_l \leq N$ tais que:

$$\sum_{j=n+1}^{n_i} a_j \geq c_1(n_i - n), \text{ para todo } 0 \leq n < n_i \text{ e } i = 1, \ldots, l.$$

Demonstração: Defina $S(n) = \sum_{j=1}^{n}(a_j - c_1)$ para cada $1 \leq n \leq N$ e também $S(0) = 0$. Seja $1 < n_1 < \ldots < n_l \leq N$ a sequência máxima tal que $S(n) \leq S(n_i)$ para todo $0 \leq n < n_i$ e $i = 1, \ldots, l$. Observe que l não pode ser zero já que $S(N) > S(0)$. Além disso, a definição de $S(n)$ significa que:

$$\sum_{j=n+1}^{n_i} a_j \geq c_1(n_i - n), \text{ para todo } 0 \leq n < n_i \text{ e } i = 1, \ldots, l.$$

De fato,

$$S(n_i) \geq S(n), \forall 0 \leq n < n_i$$

$$\Longrightarrow \sum_{j=1}^{n_i}(a_j - c_1) \geq \sum_{j=1}^{n}(a_j - c_1)$$

$$\Longrightarrow \left(\sum_{j=1}^{n_i} a_j\right) - n_i c_1 \geq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right) - n c_1$$

$$\Longrightarrow \left(\sum_{j=1}^{n_i} a_j\right) - \left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right) \geq n_i c_1 - n c_1$$

$$\sum_{j=n+1}^{n_i} a_j \geq c_1(n_i - n).$$

Então, falta provar que $l > \theta_0 N$. Fazemos esta demonstração nas quatro afirmações abaixo.

Afirmação 1.1 *Por definição,* $S(n_i - 1) < S(n_{i-1})$.

De fato, por construção temos que para $n_{i-1} < n_i$, define-se uma sequência máxima tal que $S(n_{i-1}) \leq S(n_i)$.

Suponha que $S(n_{i-1}) < S(n_i - 1)$, logo teremos $S(n_i) \leq S(n_i - 1)$ pois n_i é o elemento seguinte a n_{i-1} para o qual a sequência máxima está bem definida. Daí, $n_i < n_i - 1$. Contradição pois $n_i > 1, \forall 1 \leq j \leq N$.

Afirmação 1.2 $S(n_i) < S(n_{i-1}) + (A - c_1)$.

De fato, por definição,

$$S(n) = \sum_{j=1}^{n}(a_j - c_1) \quad e \quad a_j \leq A, \forall 1 \leq j \leq N.$$

Assim,

$$\begin{aligned} S(n_i) &= \sum_{j=1}^{n_i}(a_j - c_1) &=& \sum_{j=1}^{n_i-1}(a_j - c_1) + (a_{n_i} - c_1) \\ && =& S(n_i - 1) + a_{n_i} - c_1 \\ && <& S(n_{i-1}) + (a_{n_i} - c_1) \\ && <& S(n_{i-1}) + (A - c_1) \end{aligned}$$

para cada $1 < i \leq l$.

Afirmação 1.3 $S(n_1) \leq A - c_1$

De fato,

- $n_1 = 1$, $S(n_1) = S(1) = a_1 - c_1 < A - c_1$
- $n_1 > 1$,

Por construção n_i são elementos tais que $S(n) \leq S(n_i)$ para $0 \leq n < n_i$ e $i = 1, 2, \ldots, l$. Em particular, para $i = 1$ temos $S(n) \leq S(n_1)$ para $0 \leq n < n_1$, ou seja, n_1 é o primeiro elemento da sequência máxima tal que $S(n_1) \geq 0$ e para os $n < n_1$ temos $S(n) < 0$. Assim,

$$S(n_1) = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{(a_1 - c_1)}_{S(1)<0} + (a_2 - c_1)}_{S(2)<0} + (a_3 - c_1)}_{S(3)<0} + \ldots + (a_{n_1-1} - c_1)}_{S(n_1-1)<0} + \underbrace{(a_{n_1} - c_1)}_{\leq A - c_1}$$

Logo, $S(n_1) < A - c_1$.

Afirmação 1.4 $S(n_l) \geq S(N) \geq N(c_2 - c_1)$.

De fato, $S(n_l) \geq S(N)$ pois se $S(N) > S(n_l)$, N seria o último termo da sequência máxima, então teríamos $n_l = N$ o que implicaria em $S(N) = S(n_l)$. Contradição. E, $S(N) \geq N(c_2 - c_1)$ pois:

$$
\begin{aligned}
S(N) &= \sum_{j=1}^{N}(a_j - c_1) &&= (a_1 - c_1) + (a_2 - c_1) + \ldots + (a_N - c_1) \\
& &&= \left(\sum_{j=1}^{N} a_j\right) - Nc_1 \\
& &&\geq Nc_2 - Nc_1 \\
& &&= N(c_2 - c_1).
\end{aligned}
$$

E, finalmente teremos:

$$N(c_2 - c_1) \leq S(n_l) = \sum_{i=2}^{l}(S(n_i) - S(n_{i-1})) + S(n_1) < l(A - c_1).$$

De fato, como $S(n_i) - S(n_{i-1}) < A - c_1$ então,

$$S(n_l) = \sum_{i=2}^{l}(S(n_i) - S(n_{i-1})) + S(n_l) < (l-1)(A - c_1) + (A - c_1) = l(A - c_1).$$

Assim, $N(c_2 - c_1) < l(A - c_1) \Rightarrow l > N\frac{(c_2 - c_1)}{(A - c_1)} = N\theta_0$.

$\blacksquare$

Proposição 1.1 *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo local C^2. Dado $\lambda > 0$ existe $\theta > 0$, dependendo apenas de f e λ, tal que:*

$$\sharp\{1 \leq \jmath \leq n; x \in H_\jmath(e^{-\lambda/2})\} \geq \theta n$$

sempre que $\sum_{i=0}^{n-1} \log; Df(f^i(x)))^{-1} \|^{-1} > \lambda n$.

Isto é, se $\sum_{i=0}^{n-1} \log \| Df(f(f^i))^{-1} \|^{-1} > \lambda n$, existe $\theta > 0$, dependendo apenas de f e λ, tal que para $n \geq 1$ existem $(\mathrm{e}^{-\lambda/2})$-tempos hiperbólicos $1 \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_l \leq n$ para x onde $l \geq \theta n$.

Demonstração: Sejam $x \in M$ e $n \geq 1$ tais que tenhamos:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \log \| Df(f^i(x))^{-1} \|^{-1} > \lambda.$$

Considere $a_i = -\log \| Df(f^{i-1}(x))^{-1} \|$ onde $0 \leq i \leq n$.

Logo, por hipótese,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} -\log \| Df(f^{i-1}(x))^{-1} \| = \sum_{i=0}^{n-1} \log \| Df(f^i(x))^{-1} \|^{-1} > \lambda n. \quad (1.1)$$

Tomando $A = sup\{\left| \log \| (Df(x))^{-1} \| \right|; x \in M\}$, teremos $\forall 1 \leq i \leq n$,

$$a_i = \log \| Df(f^{i-1}(x))^{-1} \|^{-1} \leq sup\{\left| \log \| (Df(x))^{-1} \| \right|; x \in M\} = A. \quad (1.2)$$

Assim, para $A = sup\{\left| \log \| (Df(x))^{-1} \| \right|; x \in M\}$, $c_2 = \lambda$, $c_1 = \frac{\lambda}{2}$ e pelas desigualdades (1.1) e (1.2) temos:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \leq c_2 n \quad \text{e} \quad a_i \leq A, \ \forall 0 \leq i \leq n-1.$$

Então, pelo lema anterior, existem $1 < n_1 < \ldots < n_l \leq n$ com $l > \theta n$ tal que para todo $0 \leq n \leq n_j$ e $j = 1, \ldots, l$, temos:

$$\sum_{i=n+1}^{n_j} \log \| Df(f^{i-1}(x))^{-1} \|^{-1} \geq \frac{\lambda}{2}(n_j - n). \quad (1.3)$$

Agora vamos mostrar que os tempos n_j tais que $j = 1, \ldots, l$ são ($e^{-\lambda/2}$)-tempos hiperbólicos para x. De fato, pela desigualdade (1.3) para cada $j = 1, \ldots, l$ temos:

$$\begin{aligned}
\log \| Df(x)^{-1} \|^{-1} + \ldots + \log \| Df(f^{n_j}(x))^{-1} \|^{-1} &\geq \tfrac{\lambda}{2} n_j + \ldots + \tfrac{\lambda}{2}(n_j - (n_j - 1)) \\
&= \tfrac{\lambda}{2} n_j + \tfrac{\lambda}{2}(n_j - 1) + \ldots + \tfrac{\lambda}{2} \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{n_j} \tfrac{\lambda}{2} k.
\end{aligned}$$

Logo, da desigualdade anterior, concluímos:

$$\| Df(x)^{-1} \|^{-1} \| Df(f(x))^{-1} \|^{-1} \dots \| Df(f^{n_j}(x))^{-1} \|^{-1} \geq \mathrm{e}^{\sum_{k=1}^{n_j} \frac{\lambda}{2} k}$$

$$\prod_{k=0}^{n_j} \| Df(f^k(x))^{-1} \|^{-1} \geq \prod_{k=1}^{n_j} \mathrm{e}^{\frac{\lambda}{2} k}$$

$$\prod_{k=0}^{n_j} \| Df(f^k(x))^{-1} \| \leq \prod_{k=1}^{n_j} \mathrm{e}^{\frac{-\lambda}{2} k} < \mathrm{e}^{\frac{-\lambda}{2}}.$$

■

Corolário 1.1 *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo local C^2. Dado $\lambda > 0$,, existe $\theta > 0$ dependendo apenas de f e λ, tal que se $A \subset M$ satisfaz* $\limsup_n \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log \| Df(f^i(x))^{-1} \|^{-1} > \lambda$ *para Leb-q.t.p $x \in A$ então*

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sharp\{1 \leq \jmath \leq n; x \in H_\jmath(e^{-\lambda/2})\} \geq \theta \tag{1.4}$$

para Leb-q.t.p $x \in A$.

Proposição 1.2 *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo local C^2. Dado $\sigma < 1$, existe δ_1 e $\rho > 0$ dependendo apenas de σ e da aplicação f, tal que para qualquer $x \in M$ e $n \geq 1$ um σ-tempo hiperbólico para x existe uma vizinhança $V_n(x)$ de x com as seguintes propriedades:*

(1) f^n manda $V_n(x)$ difeomorficamente na bola $B_{\delta_1}(f^n(x))$.

(2) $dist_{f^{n-k}(V_n(x))}(f^{n-k}(p), f^{n-k}(q)) \leq \sigma^{\frac{k}{2}}.dist_{f^n(V_n(x))}(f^n(p), f^n(q)), \forall p, q \in V_n(x)$ e $1 \leq k \leq n$.

(3) $\log \left| \frac{detDf^n(p)}{detDf^n(q)} \right| \leq \rho.dist_{f^n(V_n(x))}(f^n(p), f^n(q)), \forall p, q \in V_n(x)$.

Demonstração: Para provar os itens (1) e (2), considere a seguinte afirmação:

Afirmação 1.5 *Existe $\delta > 0$ tal que:*

$$\| Df(y)^{-1} \| < \sigma^{-1/2} \| Df(x)^{-1} \|, \forall y \in B_\delta(x).$$

Demonstração da Afirmação: Considere a função $g : M \ni x \mapsto \log \|Df(x)^{-1}\|$. Claramente g é contínua. Para todo $\epsilon > 0$, em particular, para todo $0 < \epsilon < \log \sigma^{-1/2}$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|g(x) - g(y)\| < \epsilon.$$

Portanto, $\forall y \in B_\delta(x)$, temos:

$$\begin{aligned}
\left| \log \| Df(y)^{-1} \| - \log \| Df(x)^{-1} \| \right| &< \epsilon \\
\log \frac{\| Df(y)^{-1} \|}{\| Df(x)^{-1} \|} &< \epsilon \\
&< \mathrm{e}^{\epsilon} \| Df(x)^{-1} \| < \sigma^{-1/2} \| Df(x)^{-1} \| .
\end{aligned}$$

Finalmente obtemos:

$$\| Df(y)^{-1} \| < \sigma^{-1/2} \| Df(x)^{-1} \|, \quad \forall y \in B_\delta(x). \tag{1.5}$$

□

Como n é σ-tempo hiperbólico para x então para todo $1 \leq k \leq n$,

$$\prod_{j=n-k}^{n-1} \| Df(f^j(x))^{-1} \| < \sigma^k.$$

Logo,

$$\| Df(f^{n-1}(x))^{-1} \| < \sigma \tag{1.6}$$

Considere agora a bola $B_{\delta_1}(f^n(x))$ onde n é tempo hiperbólico para x. Então, por (1.5) e (1.6) temos:

$$\| Df(y)^{-1} \| < \sigma^{-1/2} \| Df(f^{n-1}(x))^{-1} \| < \sigma^{-1/2}.\sigma = \sigma^{1/2}, \quad \forall y \in B_{\delta_1 \sigma^{1/2}}(f^{n-1}(x)).$$

Isto é, f é uma $\sigma^{1/2}$-contração para trás da bola de raio δ_1 centrada em $f^n(x)$.

Consequentemente, existe uma vizinhança V_{n-1} de $f^{n-1}(x)$ contida na bola $B_{\delta_1 \sigma^{1/2}}(f^{n-1}(x))$ que é levada difeomorficamente na bola de raio δ_1 centrada em $f^n(x)$.

Agora, dado qualquer $j > 1$, podemos supor que construímos uma vizinhança V_{n-j+1} de $f^{n-j+1}(x)$ tal que a restrição de $f^{j-1}(x)$ a V_{n-j+1} é um difeomorfismo na bola de raio δ_1 centrada em $f^n(x)$ com

$$\| Df(f^i(z))^{-1} \| < \sigma^{-1/2} \| Df(f^{n-(j-1)+i}(x))^{-1} \| \tag{1.7}$$

para todo z em V_{n-j+1} e $0 \leq i < j$. Então, por (1.5) e pela hipótese que n é tempo hiperbólico para x,

$$\begin{aligned}
\| Df^j(x)^{-1} \| \leq \prod_{i=0}^{j-1} \| Df(f^i(z))^{-1} \| &\leq \prod_{i=0}^{j-1} \sigma^{-1/2} \| Df(f^{n-j+i}(x))^{-1} \| \\
&\leq \sigma^{-1/2} \prod_{i=0}^{j-1} \| Df(f^{n-j+i}(x))^{-1} \| \\
&\leq \sigma^{-1/2}.\sigma^{j/2} = \sigma^{(j-1)/2} \\
&< \sigma^{j/2}
\end{aligned}$$

para todo z em V_{n-j+1} e $0 \leq i < j$.

Agora, para provar o item (2), construiremos o ramo inverso de f^j na bola de raio δ_1 centrada em $f^n(x)$ pelo levantamento de geodésicas do seguinte modo. De fato, $f^{-j}(\gamma)$ contém uma componente conexa γ_{n-j} que é uma curva começando em $f^{n-j}(x)$.

Como γ_{n-j} está contida na bola de raio $\delta_1\sigma^{j/2}$ então a derivada em qualquer ponto desta curva é uma $\sigma^{j/2}$-contração para trás. Isto significa que o comprimento desta curva é menor que $\delta_1\sigma^{j/2}$. Logo, esta curva está inteiramente contida na bola $B_{\delta_1\sigma^{j/2}}(f^{n-j}(x))$. Isto prova que este levantamento está bem definido em toda geodésica γ. Portanto, temos um ramo bem definido de f^{-j} na bola de raio δ_1 centrada em $f^n(x)$.

Chamemos de V_{n-j} a imagem deste ramo inverso. Por construção, $V_{n-j} \subset B_{\delta_1\sigma^{j/2}}(f^{n-j}(x))$ e sua imagem por f coincide com V_{n-j+1}. Então, recuperamos a indução suposta em (1.7) para pontos em V_{n-j} e tempos $0 \leq i \leq j$. Deste modo, construiremos vizinhanças V_{n-j} de $f^{n-j}(x)$ para todo $1 \leq j \leq n$. Assim,tomando $V_n(x) = V_0$, concluímos:

$$\text{dist}_{f^{n-k}(V_n(x))}(f^{n-k}(p), f^{n-k}(q)) \leq \sigma^{\frac{k}{2}}.\text{dist}_{f^n(V_n(x))}(f^n(p), f^n(q)),$$

para todos $p, q \in V_n(x)$ e $\forall 1 \leq k \leq n$.

Para provar o item (3),considere a função:

$$\begin{array}{rccl} h: & M & \rightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ & x & \mapsto & \log \mid detDf(x) \mid \end{array}$$

Claramente, h é C^1. Como M é uma variedade compacta, então h é Lipschitziana e portanto uniformemente contínua. Logo, existe uma constante $c > 0$ tal que para $p, q \in V_n(x)$, temos:

$$\left|\log \left|\frac{detDf(p)}{detDf(q)}\right|\right| = \left|\log \mid detDf(p) \mid - \log \mid detDf(q) \mid\right| \leq c \mid p - q \mid < c.dist_{V_n(x)}(p, q)$$

Em particular,

$$\left|\log \left|\frac{detDf(f^j(p))}{detDf(f^j(q))}\right|\right| \leq c \mid f^j(p) - f^j(q) \mid < c.dist_{f^j(V_n(x))}(f^j(p), f^j(q)), \quad \forall 1 \leq j \leq n.$$

Daí, $\left|\dfrac{detDf^n(p)}{detDf^n(q)}\right| = \left|\displaystyle\prod_{j=0}^{n-1} \frac{detDf(f^j(p))}{detDf(f^j(q))}\right| \leq \displaystyle\prod_{j=0}^{n-1} \left|\frac{detDf(f^j(p))}{detDf(f^j(q))}\right|$

$$\begin{aligned}
\log \left|\frac{detDf^n(p)}{detDf^n(q)}\right| &\leq \log \left(\prod_{j=0}^{n-1} \left|\frac{detDf(f^j(p))}{detDf(f^j(q))}\right|\right) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \log \left|\frac{detDf(f^j(p))}{detDf(f^j(q))}\right| \\
&\leq c \sum_{j=0}^{n-1} \mid f^j(p) - f^j(q) \mid \\
&= c. \sum_{j=0}^{n-1} dist_{f^j(V_n(x))}(f^j(p), f^j(q)) \\
&= c\left[dist_{V_n(x)}(p, q) + \ldots + dist_{f^{n-1}(V_n(x))}(f^{n-1}(p), f^{n-1}(q))\right] \\
&\leq c.\left[\sigma^{n/2} + \sigma^{(n-1)/2} + \ldots + \sigma^{1/2}\right].dist_{f^n(V_n(x))}(f^n(p), f^n(q)) \\
&= c.\left[\tfrac{\sigma^{1/2}(\sigma^{n/2}-1)}{\sigma^{1/2}-1}\right].dist_{f^n(V_n(x))}(f^n(p), f^n(q)).
\end{aligned}$$

Como $\sum_{j=1}^{n} \sigma^{j/2} \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \sigma^{j/2} < +\infty$ pois $\sigma < 1$ então basta tomarmos

$\rho = \sum_{j=1}^{+\infty} \sigma^{j/2}$ para concluir o item 3.

■

Capítulo 2

Componentes Ergódicas

A idéia inicial de componente ergódica foi dada dinâmica unidimensional. A decomposição de um intervalo em componentes ergódicas com respeito a medida de Lebesgue já é bem conhecida para aplicações multimodais em dimensão 1. (ver [1, 2, 10, 11, 16, 17]). Neste capítulo, definiremos as componentes ergódicas de uma variedade M de dimensão $d \geq 1$ e mostraremos que é possível decompor tal variedade em um número finito de componentes ergódicas. Além disto, mostraremos a existência de um atrator gordo em cada uma delas.

Um subconjunto $U \subset M$ será chamado de conjunto invariante com respeito a aplicação $f : M \to M$ se $f^{-1}(U) = U$ e será chamado de positivamente invariante se $f(U) \subset U$.

Definição 2.1 (Componente Ergódica) *Um conjunto invariante $\mathcal{U} \subset M$ com medida de Lebesgue positiva será chamado de componente ergódica de M se não admitir qualquer subconjunto próprio invariante com medida de Lebesgue positiva, isto é, se $A \subset \mathcal{U}$ é invariante então $Leb(A) = 0$ ou $Leb(\mathcal{U} \setminus A) = 0$.*

Definição 2.2 (Órbita de um ponto) *Chamamos de órbita do ponto $x \in M$ o conjunto $O(x) = \{f^n(x); x \in \mathbb{Z}\}$ e chamamos de órbita positiva ou órbita futura de um ponto $x \in M$ o conjunto $O^+(x) = \{f^n(x); n \in \mathbb{N}\}$.*

Definição 2.3 (Omega limite) *Definimos como omega limite de um ponto $x \in M$ e denotamos por $\omega(x)$ o conjunto $\omega(x) = \{p \in M; \exists n_j$ sequência com $n_j \to +\infty$*

tal que $f^{n_j}(x) \to p\}$, *isto é,* $\omega(x)$ *é o conjunto dos pontos de acumulação da órbita futura de* x.

Definição 2.4 (Conjunto Atrator [9]) *Um conjunto compacto positivamente invariante* $\mathcal{A}$ *será chamado de atrator se a sua bacia de atração* $\mathcal{B}_f(\mathcal{A}) = \{x \in M; \omega(x) \subset \mathcal{A}\}$ *tem medida de Lebesgue positiva.*

Definição 2.5 (Partição) *Seja* $\mathcal{P}$ *uma coleção de conjuntos com medida de Lebesgue positiva mas com bordo de medida zero, isto é,* $Leb(\partial P) = 0, \forall P \in \mathcal{P}$. *Tal coleção é chamada de partição de M se cobrir a variedade M em quase todo ponto, isto é,* $Leb(M \setminus \cup_{P\in\mathcal{P}} P) = 0$ *e* $P \cap Q \subset \partial P \cap \partial Q, \forall \mathcal{P} \ni P \neq Q \in \mathcal{P}$.

Proposição 2.1 *Dada uma componente ergódica* $\mathcal{U} \subset M$, *existe um único atrator* $\mathcal{A}$ *que atrai quase todo ponto de* $\mathcal{U}$. *Além disso, exceto num conjunto de medida zero, a componente ergódica e a bacia do atrator* $\mathcal{A}$ *são iguais e* $\omega(x) = \mathcal{A}$ *para quase todo ponto de* $\mathcal{U}$.

Demonstração: Por indução construiremos uma sequência de partições $\mathcal{P}_j$ de M. Seja $\mathcal{P}_1$ uma partição finita formada por conjuntos compactos de M e suponha que a coleção $\mathcal{P}_{n-1}$ está bem construída.

Considere para cada $P \in \mathcal{P}_{n-1}$ o conjunto $U_P = \{x \in U; \omega(x) \cap P \neq \emptyset\}$. Como $\mathcal{U}$ é uma componente ergódica e $f^{-1}(U_P) = U_P$, já que, $\omega(x) = \omega(f(x)), \forall x$ então ou $\text{Leb}(U_P) = 0$ ou $\text{Leb}(U \setminus U_P) = 0$.

Seja $\mathcal{P}_n$ um refinamento de $\mathcal{P}_{n-1}$ formada pela coleção finita de conjuntos compactos tais que dado qualquer $P \in \mathcal{P}_{n-1}$, os elementos Q de $\mathcal{P}_n$ contidos em P são escolhidos da seguinte forma: se $Leb(U_P) = 0$ tomamos $Q = P$, caso contrário, se particiona P por conjuntos $Q \in \mathcal{P}_n$ de modo que $0 < \text{diam}(Q) < \frac{1}{2}\text{diam}(P)$.

Considere para cada $n \in \mathbb{N}$,

$\mathcal{P}_n^* = \{P \in \mathcal{P}_n; U \setminus U_P$ é um conjunto de medida de zero $\}$ e $K_n = \bigcup_{P\in\mathcal{P}_n^*} \overline{P}$.

Como $K_1 \supset \ldots \supset K_n \supset \ldots$ é uma sequência encaixante de compactos não vazios então $\mathcal{A} = \bigcap_n K_n$ é também um conjunto compacto não vazio.

Por construção, para quase todo ponto $x \in U$ e $\forall n \in \mathbb{N}$, $\omega(x) \subset K_n$ e $\omega(x) \cap P \neq \emptyset, \forall P \in \mathcal{P}_n^*$. Além disso, como $\text{diam}(P) < \frac{1}{2^n}\text{diam}(M), \ \forall P \in \mathcal{P}_n^*$, temos $\omega(x) \subset K_n \subset \overline{B_{2^{-n}}(\mathcal{A})} = \{p \in M; dist(p, \mathcal{A}) \leq 2^{-n}\}$. Assim, $\omega(x) = \mathcal{A}$ para Leb-q.t.p $x \in U$.

■

Sejam $U \subset M$ um conjunto positivamente invariante. Considere para cada $x \in U$ um subconjunto $\mathcal{H}(x) \subset O^+(x)$ onde $\mathcal{H}(x) = \{f^j(x); x \in H_j(\sigma)\}$.

Seja a coleção $\mathcal{H} = (\mathcal{H}(x))_{x\in U}$. Denotemos por $U^{\mathcal{H}} \subset U$ o conjunto $U^{\mathcal{H}} = \{x \in U; \sharp\{j \in \mathbb{N}; x \in H_j(\sigma)\} = +\infty\}$. Defina para cada $x \in U^{\mathcal{H}}$ o conjunto $\omega_{\mathcal{H}}(x)$ dos pontos de acumulação de $\mathcal{H}(x)$, isto é, o conjunto dos pontos $p \in M$ tal que existe uma sequência $n_j \to +\infty$ satisfazendo $\mathcal{H} \ni f^{n_j}(x) \to p$ quando $j \to +\infty$. Veja que $\omega_{\mathcal{H}}(x)$ é um conjunto não-vazio mas não necessariamente positivamente invariante.

Dizemos que $x \in M$ tem *frequência positiva* de tempos hiperbólicos se:

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sharp\{1 \le j \le n; x \in H_j(x)\} > 0$$

para cada $x \in U$.

Observação 2.1 *Definimos o conjunto dos pontos de U como o conjunto dos pontos que tem frequência positiva usando o* lim sup *ao invés de* lim inf *como é definida geralmente a frequência positiva a um conjunto. Ressaltamos porém que de fato precisamos apenas garantir a frequência positiva em média a um conjunto, isto é, precisamos apenas assegurar que os pontos visitarão o conjunto $\mathcal{H}$ em alguns momentos.*

Caso $x \in U^{\mathcal{H}}$, defina o conjunto $\omega_{+,\mathcal{H}}(x)$ dos pontos de M que são frequentemente visitados por imagens hiperbólicas de x, como os pontos $p \in M$ tal que $\limsup_n \frac{1}{n}\sharp\{1 \le j \le n; f^j(x) \in \mathcal{H}(x) \cap V\} > 0$ para toda vizinhança V de p.

Lema 2.1 *Seja U uma componente ergódica, tome $\mathcal{A}$ o atrator associado a U e $\mathcal{H} = (\mathcal{H}(x))_{x\in U^{\mathcal{H}}}$. Existe um conjunto compacto $\mathcal{A}_{\mathcal{H}} \subset \mathcal{A}$ tal que $\omega_{\mathcal{H}}(x) = \mathcal{A}_{\mathcal{H}}$ para Leb-q.t.p $x \in U$. Além disso, se $\mathcal{H}$ tem frequência positiva então existe também um conjunto compacto $\mathcal{A}_{+,\mathcal{H}} \subset \mathcal{A}_{\mathcal{H}}$ tal que $\omega_{+,\mathcal{H}}(x) = \mathcal{A}_{+,\mathcal{H}}$ para Leb-q.t.p $x \in U$.*

Demonstração: A prova deste lema é semelhante a prova da Proposição 2.1. Construiremos uma sequência de partições $\mathcal{P}_j$ de M. Tome $\mathcal{P}_1$ qualquer partição finita de M e suponha que a partição $\mathcal{P}_{n-1}$ foi de fato bem construída. Dado um ponto $x \in U$ e um conjunto $K \subset M$, denote a $\mathcal{H}$-frequência de visita de x a K por

$$\phi_K(x) = \limsup_n \frac{1}{n}\sharp\{0 \leq j < n; f^j(x) \in K \cap \mathcal{H}(x)\}.$$

Tome, para cada $P \in \mathcal{P}_{n-1}$ o conjunto $U_P = \{x \in U; \phi_P(x) > 0\}$. Logo, pela definição de ϕ_K usando *limsup* teremos que ou $\phi_K(x) > 0$ ou $\phi_{M\setminus K}(x) > 0$ e portando $Leb(U \setminus U_P) = 0$ ou $Leb(U_P) = 0$ respectivamente. Tome $\mathcal{P}_n$ qualquer refinamento de $\mathcal{P}_{n-1}$ satisfazendo as seguintes condições:

Dado qualquer $P \in \mathcal{P}_{n-1}$, os elementos Q de $\mathcal{P}_n$ contidos em P são escolhidos da seguinte forma: se $Leb(U_P) = 0$, tomamos $P = Q$, caso contrário, se particiona P por conjuntos $Q \in \mathcal{P}_n$ de modo que $0 <$diam$(Q) < \frac{1}{2}$diam(P). Considere para cada $n \in \mathbb{N}$ o conjunto $\mathcal{P}_n^* = \{P \in \mathcal{P}_n; Leb(U \setminus U_P) = 0\}$ e $K_n = \cup_{P\in\mathcal{P}_n^*}\overline{P}$. Como $K_1 \supset K_2 \supset \ldots \supset K_n \supset \ldots$ é uma sequência encaixante de compactos não vazios (pela definição de U_P), $\forall n \in \mathbb{N}$, então o conjunto $\mathcal{A}_{\mathcal{H}} = \cap_n K_n$ é também compacto não vazio.

Pela construção de $\mathcal{P}_n^*$, para quase todo ponto $x \in U$, $\forall P \in \mathcal{P}_n^*$ e $\forall n \in \mathbb{N}$ temos que $\phi_P(x) > 0$. Portanto $\omega_{\mathcal{H}}(x) = \omega_{\mathcal{H}}(f(x)) \subset K_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\omega_{\mathcal{H}}(x) \cap P \neq \emptyset, \forall P \in \mathcal{P}_n^*$.

Como, para cada $P \in \mathcal{P}_n^*$,

$$\text{diam}(P) < \frac{1}{2}\text{diam}(P_1) < \frac{1}{2^2}\text{diam}(P_2) < \ldots < \frac{1}{2^n}\text{diam}(P_n) < \frac{1}{2^n}\text{diam}(M)$$

então $\omega_{\mathcal{H}}(x) \subset \mathcal{K}_n \subset \overline{B_{2^{-n}}(\mathcal{A}_{\mathcal{H}})} = \{p \in M; dist(p, \mathcal{A}_{\mathcal{H}}) \leq 2^{-n}\}$.

Isso implica que $\omega_{\mathcal{H}}(x) = \mathcal{A}_{\mathcal{H}}(x)$ para *Leb*-q.t.p $x \in U$.

Para provar que existe $\mathcal{A}_{+,\mathcal{H}} \subset \mathcal{A}_{\mathcal{H}}$ tal que $\omega_{+,\mathcal{H}}(x) = \mathcal{A}_{+,\mathcal{H}}$ para *Leb*-q.t.p $x \in U$ basta trocar na prova acima, $\omega_{\mathcal{H}}(x)$ por $\omega_{+,\mathcal{H}}(x)$ observando que $\omega_{+,\mathcal{H}}(x) = \omega_{+,\mathcal{H}}(f(x))$ e que todo ponto de $\mathcal{A}_{+,\mathcal{H}} = \cap_n \mathcal{K}_n$ é acumulado pela sequência $\{f^n(x); n \in \mathbb{N}$ e $f^n(x) \in \mathcal{H}(x)\}$ para quase todo ponto de U. Então $\mathcal{A}_{+,\mathcal{H}} \subset \mathcal{A}_{\mathcal{H}} \subset \mathcal{A}$.

Além disso, se B é um conjunto aberto com $B \cap \mathcal{A}_{+,\mathcal{H}} \neq \emptyset$ então para n grande teremos algum elemento $P \in \mathcal{P}_n^*$ contido em B. E ainda, por construção, vale:

$\limsup_n \frac{1}{n}\sharp\{0 \leq j < n; f^j(x) \in B \cap \mathcal{H}(x)\} \geq$

$$\geq \limsup_n \frac{1}{n}\sharp\{0 \leq j < n \parallel f^j(x) \in P \cap \mathcal{H}(x)\} > 0.$$

■

Proposição 2.2 *Se existe algum $\delta > 0$ tal que todo conjunto positivamente invariante ou tem medida de Lebesgue zero ou tem medida de Lebesgue maior que*

δ então M pode ser decomposta em um número finito de componentes ergódicas. Além disso, o atrator associado a cada componente ergódica tem medida de Lebesgue positiva.

Demonstração: Seja $W \subset M$ qualquer subconjunto invariante de M (por exemplo, $W = M$) com medida de Lebesgue positiva e tome $\mathcal{F}(W)$ a coleção de todos os conjuntos positivamente invariantes $U \in W$ com medida de Lebesgue positiva, isto é,

$$\mathcal{F}(W) = \{U \subset W; f(U) \subseteq U \text{ e } Leb(U) > 0\}$$

Note que $\mathcal{F}(W) \neq \emptyset$ porque $W \in \mathcal{F}(W)$.

Considere a inclusão (mod 0) como uma ordem parcial em $\mathcal{F}(W)$ e seja $\Gamma \subset \mathcal{F}(W)$ um subconjunto totalmente ordenado de $\mathcal{F}(W)$.

Afirmação 2.1 *Existe algum $\xi \subset \Gamma$ tal que $\gamma \supset \bigcap_{n\geq 0} f^n(\xi)$(mod 0), $\forall \gamma \in \Gamma$.*

Demonstração da Afirmação: Escolha qualquer conjunto inicial $\gamma_0 \in \Gamma$. Então, $Leb(\gamma_0 \backslash \gamma) \leq \delta \, \forall \gamma \in \Gamma$ ou existe algum $\gamma_0 \supset \gamma_1 \in \Gamma$ tal que $Leb(\gamma_0 \backslash \gamma_1) > \delta$. Assumindo que existe tal γ_1 teremos uma sequência máxima finita $\gamma_0 \supset \gamma_1 \supset \ldots \supset \gamma_s$ com $Leb(\gamma_k \setminus \gamma_{k+1}) > \delta \; \forall k$ (porque $Leb(M) < +\infty$). Logo existe algum $\xi = \gamma_s$ tal que $Leb(\xi \setminus \gamma) \leq \delta$, $\forall \gamma \in \Gamma$.

Consequentemente, dado qualquer $\gamma \subset \xi$ tal que $\gamma \in \Gamma$, para quase todo ponto $x \in \xi \setminus \gamma$ teremos $f^n(x) \in \gamma$ para todo n grande (caso contrário, $\xi \setminus \gamma$ conterá algum subconjunto invariante U com $0 < Leb(U) \leq Leb(\xi \setminus \gamma) \leq \delta$). Então, $\bigcap_n f^n(\xi) \subset \gamma$ (mod 0), provando o afirmado.

□

É claro que $\zeta = \bigcap_n f^n(\xi)$ é um conjunto positivamente invariante e tem medida de Lebesgue positiva (caso contrário, como $f^k(\xi) = \bigcap_{n=0}^k f^n(\xi) \searrow \zeta$, teríamos $0 <$ Leb$(f^k(\xi)) < \delta$ para algum k grande, mas isto é impossível pois $f^k(\xi)$ é um conjunto positivamente invariante).

Então, $\zeta \in \mathcal{F}(W)$ e $\gamma \leq \zeta$, $\forall \gamma \in \Gamma$ (Pela ordem parcial em $\mathcal{F}(W)$). Pelo Lema de Zorn[1] existe um elemento maximal $\rho \in \mathcal{F}(W)$. Seja $U_1 = \bigcup_n f^{-n}(\rho)$.

Afirmação 2.2 *U_1 é uma componente ergódica.*

[1]Todo conjunto parcialmente ordenado não vazio em que toda cadeia - subconjunto totalmente ordenado - tem um limitante superior, contém ao menos um elemento maximal.

Demonstração da Afirmação: Seja $A \subset U_1$ com $f^{-1}(A) = A$ e $Leb(A) > 0$.

Se $Leb(A \cap \rho) = 0$ então $Leb(A \cap f^{-n}(\rho)) = Leb(f^{-n}(A) \cap f^{-n}(\rho)) = Leb(f^{-n}(A \cap \rho))$=0 pois é a pré-imagem de um conjunto de medida zero. Assim, $Leb(A \cap U_1) = 0$. Absurdo. Logo, $Leb(A \cap \rho) > 0$.

Como $f^{-1}(A) = A$ temos $A = f(A)$ e assim $f(A \cap \rho) \subset f(A) \cap f(\rho) \subset (A \cap \rho)$. Logo, $A \cap \rho$ é positivamente invariante e $Leb(A \cap \rho) > 0$. Pela maximalidade de ρ, segue que $A \cap \rho = \rho$ (mod 0).

Portanto, $A \supset \cup f^{-n}(A \cap \rho) = \cup f^{-n}(\rho) = U_1$ (mod 0), ou seja, $Leb(U_1 \setminus A) = 0$.

□

Como $M \setminus U_1$ é um conjunto invariante, então ou tem medida de Lebesgue zero ou podemos usar o argumento acima e obter uma nova componente ergódica U_2 dentro de $M \setminus U_1$.

Indutivamente, podemos construir uma coleção de componentes ergódicas $U_1, \ldots, U_r$ sempre que Leb$(M \setminus U_1 \cup \ldots \cup U_r) > 0$. Mas como Leb$(U_j) > \delta$, $\forall j$ este processo irá parar, já que $Leb(M) < +\infty$ e então obteremos a decomposição de M em componentes ergódicas como desejávamos.

Segue do Lema 2.1 que cada componente ergódica $U \subset M$ é a bacia de algum atrator $\mathcal{A}$. Suponhamos que $Leb(\mathcal{A}) = 0$. Então, podemos escolher uma vizinhança aberta V de $\mathcal{A}$ tal que $Leb(V) < \delta$ e um inteiro n_0 onde para $U' = \{x \in U; f^n(x) \in V, \forall n \geq n_0\}$ tenhamos $Leb(U') > 0$.

Como U' é positivamente invariante, $f^{n_0}(U')$ é um conjunto positivamente invariante com $0 < Leb(f^{n_0}(U')) < Leb(V) < \delta$, contradizendo a hipótese. Portanto, $Leb(\mathcal{A}) > 0$.

Em particular, $Leb(\mathcal{A}) > \delta$.

■

Observe que se um dado $x \in M$ tiver um número finito de tempos hiperbólicos então algum iterado deste ponto pertencerá a um conjunto de pontos em M que não tem tempo hiperbólico. Como Leb-q.t.p $x \in M$ tem tempo hiperbólico e f é um difeomorfismo local então tal conjunto terá medida nula. Assim, podemos enunciar a seguinte afirmação.

Afirmação 2.3 *Se Leb-q.t.p. $x \in M$ tem um primeiro tempo hiperbólico então Leb-q.t.p. $x \in M$ tem uma infinidade de tempos hiperbólicos.*

Proposição 2.3 *Se Leb-q.t.p. $x \in M$ tem uma infinidade de tempos hiperbólicos e se $U \subset M$ é um conjunto positivamente invariante com medida de Lebesgue positiva então existe $p \in U$ tal que a bola $B_{\delta/4}(p)$ de raio $\delta/4$ centrada em p satisfaz*

$$Leb(B_{\delta/4}(p) \cap U) = Leb(B_{\delta/4}(p)).$$

Demonstração: Seja $\rho > 0$ a constante de distorção dada pelo item (3) da Proposição 1.2, isto é,

$$\log \left| \frac{\det Df^n(x)}{\det Df^n(y)} \right| \leq \rho . dist_{f^n(V_n(p))}(f^n(x), f^n(y)), \forall x, y \in V_n(p)$$

e seja $K \subset U$ um compacto com medida de Lebesgue positiva.

Dado $\epsilon > 0$, escolha uma vizinhança aberta $V \supset K$ de K tal que $\frac{Leb(V \setminus K)}{Leb(K)} < \epsilon$.

Como quase todo ponto de U tem uma infinidade de tempos hiperbólicos, então escolha para $x \in K$ um tempo $n(x)$ tal que $V_n(x) := V_{n(x)}(x) \subset V$.

Como $n(x)$ é tempo hiperbólico para x então pela Proposição 1.2, $V_n(x)$ é levada difeomorficamente por f^n na bola $B_{\delta_1}(f^{n(x)}(x))$.

Considere para cada K,

$$W(x) = (f^{n(x)} |_{V_n(x)})^{-1}(B_{\delta_1/4}(f^{n(x)}(x)))$$

Por compacidade, $K \subset W(x_1) \cup W(x_2) \cup \ldots \cup W(x_s)$ para $x_1, x_2, \ldots, x_m \in K$ onde $s \leq m$.

Escrevendo $\{n_1, n_2 \ldots, n_s\} = \{n(x_1), \ldots, n(x_m)\}$ com $n_1 < n_2 < \ldots < n_s$, tome $\mathcal{U}_1 \subset \mathbb{N}$ como o conjunto maximal de $\{1, \ldots, m\}$ tal que se $u \in \mathcal{U}_1$ então $n(x_u) = n_1$ e $W(x_u) \cap W(x_a) = \emptyset \; \forall u \neq a \in \mathcal{U}_1$. Por indução definiremos $\mathcal{U}_j$ para $1 < j \leq s$ do seguinte modo:

Suponha que $\mathcal{U}_{j-1}$ está bem definido. Tome $\mathcal{U}_j \subset \mathbb{N}$ como o conjunto maximal de $\{1, \ldots, m\}$ tal que se $u \in \mathcal{U}_j$ então $n(x_u) = n_j, W(x_u) \cap W(x_a) = \emptyset, \forall u \neq a \in \mathcal{U}_j$ e também $W(x_u) \cap W(x_a) = \emptyset, \forall a \in \mathcal{U}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{U}_{j-1}$.

Pela maximalidade, cada $W(x_i)$ com $s \leq i \leq m$ intersecta algum $W(x_u)$ para $u \in \mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{U}_s$ e $n(x_i) \geq n(x_u)$. Então para cada $s \leq i \leq m$, tomando $u \in \mathcal{U}$ tal que $W(x_i) \cap W(x_u) \neq \emptyset$ e $n(x_i) \geq n(x_u)$, temos que:

$$f^{n(x_u)}(W(x_i) \cap W(x_u)) \neq \emptyset$$

Como $f^{n(x_u)}(W(x_i) \cap W(x_u)) \subset f^{n(x_u)}(W(x_i)) \cap f^{n_u}W(x_u))$ então,

$$f^{n(x_u)}(W(x_i)) \cap f^{n(x_u)}(W(x_u)) \neq \emptyset.$$

Isto é,

$$f^{n(x_u)}(W(x_i)) \cap B_{\delta_1/4}(f^{n(x_u)}(x_u)) \neq \emptyset$$

Pelo item (2) da Proposição 1.2, o diâmetro do conjunto $f^{n(x_u)}(W(x_i))$ é menor que $\frac{\delta_1}{2}\sigma^{n(x_u)/2} \leq \frac{\delta_1}{2}$.

De fato,

$$\begin{aligned} dist(f^{n(x_i)-n(x_u)}(p), f^{n(x_i)-n(x_u)}(q)) &\leq \sigma^{n(x_u)/2}\text{dist}(f^{n(x_i)}(p), f^{n(x_i)}(q)) \\ &\leq \sigma^{n(x_u)/2}\text{diâm}B_{\delta_1/4}(f^{n(x_i)}(x_i)) \\ &\leq \sigma^{n(x_u)/2}\frac{\delta_1}{2} \\ &< \frac{\delta_1}{2} \quad \forall p, q \in B_{\delta_1/4}(f^{n(x_i)}(x_i)) \end{aligned}$$

Como $\text{diâm}(B_{\delta_1/4}(f^{n(x_u)}(x_u))) = \frac{\delta_1}{2}$ então $f^{n(x_u)}(W(x_i)) \subset B_{\delta_1}(f^{n(x_u)}(x_u))$.

Portanto $W(x_i) \subset V(x_u)$ e $\{V(x_u)\}_{u \in \mathcal{U}}$ é uma cobertura de K.

Segue do controle de distorção a existência de uma constante $\gamma > 0$, dependendo apenas de ρ tal que $Leb(W(x)) > \gamma Leb(V(x))$, $\forall x \in K$. Então,

$$\begin{aligned} Leb(\textstyle\bigcup_{u \in \mathcal{U}} W(x_u)) &= \textstyle\sum_{u \in \mathcal{U}} Leb(W(x_u)) \\ &> \textstyle\sum_{u \in \mathcal{U}} \gamma.Leb(V(x_u)) \\ &= \gamma \textstyle\sum_{u \in \mathcal{U}} Leb(V(x_u)) \\ &\geq \gamma.Leb(\textstyle\bigcup_{u \in \mathcal{U}} V(x_u)) \\ &\geq \gamma.Leb(K) \end{aligned}$$

Tomando $\alpha = min\left\{\frac{Leb(W(x_u)\backslash K)}{Leb(W(x_u))}; u \in \mathcal{U}\right\} > 0$, teremos:

$$
\begin{aligned}
\epsilon.Leb(K) &> Leb(V \setminus K) \\
&\geq Leb(\textstyle\bigcup_{u\in\mathcal{U}} W(x_u) \setminus K) \\
&= \textstyle\sum_{u\in\mathcal{U}} Leb(W(x_u) \setminus K) \\
&\geq \alpha.Leb(\textstyle\bigcup_{u\in\mathcal{U}} W(x_u)) \\
&\geq \alpha.\gamma.Leb(K)
\end{aligned}
$$

Consequentemente,

$$\epsilon.Leb(K) > min\left\{\frac{Leb(W(x_u) \setminus K)}{Leb(W(x_u))}; u \in \mathcal{U}\right\}.\gamma.Leb(K)$$

$$min\left\{\frac{Leb(W(x_u) \setminus K)}{Leb(W(x_u))}; u \in \mathcal{U}\right\} < \frac{\epsilon}{\gamma}$$

Então existe algum $W(x_u)$ tal que $\dfrac{Leb(W(x_u) \setminus K)}{Leb(W(x_u))} < \dfrac{\epsilon}{\gamma}$.

Usando o controle de distorção e lembrando que K está contido num conjunto invariante U, podemos encontrar para cada $\epsilon_j = \frac{1}{j}$ um ponto $x_j \in K$ e uma bola aberta de raio $\delta_1/4$, $B_j = B_{\delta_1/4}(f^{n(x_j)}(x_j)) = f^{n(x_j)}(W(x_j))$ tal que:

$$\frac{Leb(B_j \cap U)}{Leb(B_j)} > 1 - \rho\sqrt{\frac{1/\gamma^2}{j}} \tag{2.1}$$

De fato, para cada $\epsilon_j = \frac{1}{j}$ existe $x_j \in K$ e uma bola aberta de raio $\frac{\delta_1}{4}$, $B_j = B_{\delta_1/4}(f^{n(x_j)}(x_j)) = f^{n(x_j)}(W(x_j))$ tal que $\frac{Leb(W(x_j)\setminus K)}{Leb(W(x_j))} < \frac{\epsilon_j}{\gamma}$

Logo,

$$\frac{Leb(W(x_j) \setminus K)}{Leb(W(x_j))}.\frac{1}{\gamma} < \frac{\epsilon_j}{\gamma}.\frac{1}{\gamma}$$

$$\frac{Leb(W(x_j) \setminus K)}{Leb(W(x_j))}\frac{Leb(V(x_j))}{Leb(W(x_j))} < \frac{1/\gamma^2}{j} \tag{2.2}$$

E,

$$\begin{aligned}\left(\frac{Leb(W(x_j) \setminus U)}{Leb(W(x_j))}\right)^2 &< \frac{Leb(W(x_j) \setminus U).Leb(V(x_j) \setminus U)}{(Leb(W(x_j)))^2} \\ &< \frac{Leb(W(x_j) \setminus K).Leb(V(x_j) \setminus K)}{(Leb(W(x_j)))^2} \\ &< \frac{Leb(W(x_j) \setminus K)}{Leb(W(x_j))}\frac{Leb(V(x_j))}{Leb(W(x_j))}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

De (2.2) e (2.3), concluímos:

$$\left(\frac{Leb(W(x_j) \setminus U)}{Leb(W(x_j))}\right)^2 < \frac{1/\gamma^2}{j}.$$

Consequentemente,

$$\left(\frac{Leb(W(x_j) \setminus U)}{Leb(W(x_j))}\right) < \sqrt{\frac{1/\gamma^2}{j}}.$$

Pelo item (2) da proposição (1.2) temos:

$$\frac{Leb(f^{n(x_j)}(W(x_j)) \setminus U)}{Leb(f^{n(x_j)}(W(x_j))} < \rho\sqrt{\frac{1/\gamma^2}{j}}.$$

Isto é,

$$\frac{Leb(B_j \setminus U)}{Leb(B_j)} < \rho\sqrt{\frac{1/\gamma^2}{j}}.$$

Logo,

$$1 - \frac{Leb(B_j \setminus U)}{Leb(B_j)} > 1 - \rho\sqrt{\frac{1/\gamma^2}{j}}$$

$$\frac{Leb(B_j) - Leb(B_j \setminus U)}{Leb(B_j)} > 1 - \rho\sqrt{\frac{1/\gamma^2}{j}}$$

$$\frac{Leb(B_j \cap U)}{Leb(B_j)} > 1 - \rho\sqrt{\frac{1/\gamma^2}{j}}.$$

Como M é uma variedade compacta, existe uma subsequência $\{\hat{B}_j\}_j$ destas bolas que acumula em alguma bola aberta B de raio $\delta_1/4$. Segue de (2.1) que $Leb(B \setminus U) = 0$.

■

Capítulo 3

Conjuntos Nested

A idéia de conjuntos Nested foi inspirada na definição de intervalo *nice* dada por Martens em [11].

Os intervalos *nice* são definidos em um intervalo aberto I tal que a órbita $\mathcal{O}^+(\partial I)$ do bordo de I não intersecta I, ou seja, $\mathcal{O}^+(\partial I) \cap I = \emptyset$. Um exemplo é o intervalo entre dois pontos consecutivos de uma órbita periódica.

A propriedade principal deste intervalo consiste no fato que suas pré-imagens não se intersectam. Mais precisamente, se I é tal que I_1 e I_2 são levados difeomorficamente por f^{n_1} e f^{n_2} respectivamente em I, então $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ ou $I_1 \subset I_2$ ou $I_2 \subset I_1$.

É fácil ver que em dimensão maior, uma definição análoga não seria aplicável.

Considere então $f : M \to M$ um difeomorfismo local C^2 e $K \subset M$. Um conjunto P será chamado de pré-imagem de ordem $n \in \mathbb{N}$ de K se f^n leva P difeomorficamente em K. Denote a ordem de P por ord(P). Seja $\mathcal{E}_n = \{V_n(x); x \in H_n(\mathrm{e}^{-\lambda}) \text{ e } f^n(V_n(x)) = K\}$ o conjunto das pré-imagens em tempo hiperbólico de K.

Dado $Q \in \mathcal{E}_n$ denote $f^n\mid_Q$ por f^Q e denote o ramo inverso associado a Q, $(f^n\mid_Q)^{-1}$ por f^{-Q}. Considere a coleção $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_n)_n$ de pré-imagens em tempo hiperbólico de um conjunto aberto conexo $U \subset M$. Um conjunto P será chamado de $\mathcal{E}$-pré-imagem de ordem n de $W \subset U$ se $P = f^{-Q}(W)$ para algum $Q \in \mathcal{E}_n$ e $n \in \mathbb{N}$.

Observação 3.1 *Duas pré-imagens hiperbólicas de mesma ordem de um conjunto $X \subset U$ não se intersectam.*

De fato, para $X \subset U$, sejam $P_1 = f^{-Q_1}(X)$ e $P_2 = f^{-Q_2}(X)$ onde Q_1 e $Q_2 \in \mathcal{E}_n$ tais que $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$. Como $f^n |_{Q_1 \cup Q_2}$ é um homeomorfismo entre os abertos conexos $Q_1 \cup Q_2$ e X então

$$(f^n |_{Q_1 \cup Q_2})^{-1}(f^n |_{Q_1 \cup Q_2} (Q_1 \cup Q_2)) = (f^n |_{Q_1 \cup Q_2})^{-1}(X).$$

Como $Q_1 \in \mathcal{E}_n$, temos que $f^n |_{Q_1 \cup Q_2} (Q_1) = X$.

Logo,

$$(f^n |_{Q_1 \cup Q_2})^{-1}(f^n |_{Q_1 \cup Q_2} (Q_1) \cup f^n |_{Q_1 \cup Q_2} (Q_2)) = (f^n |_{Q_1 \cup Q_2})^{-1}(f^n |_{Q_1 \cup Q_2} (Q_1)).$$

Portanto,

$$Q_1 \cup Q_2 = Q_1.$$

Como $Q_2 \neq \emptyset$, então $Q_1 = Q_2$ e consequentemente $P_1 = P_2$.

Definição 3.1 (Conjunto Nested) *Um conjunto V será chamado de $\mathcal{E}$-nested se V é um subconjunto aberto conexo de U e $\partial V \cap P = \emptyset$ para qualquer $\mathcal{E}$-pré-imagem P de V.*

Lema 3.1 *Sejam $V \subset U$ um conjunto $\mathcal{E}$-nested e P_1 e P_2 $\mathcal{E}$-pré-imagens de V.*

(i) Se $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$ então $P_1 \supset P_2$ ou $P_1 \subset P_2$.

(ii) Se $f^n(V) \not\subset V$, $\forall n \geq 1$, $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$ e $ord(P_1) < ord(P_2)$ então $P_1 \supseteq P_2$.

Demonstração:

(i) Sejam P_1 e P_2 $\mathcal{E}$-pré-imagens de V tais que $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$.

Se $P_1 = P_2$, o resultado é óbvio. Suponha então que $P_1 \neq P_2$. Pela Observação 3.1 podemos assumir que $l_1 = ord(P_1) \leq ord(P_2) = l_2$. Sejam $Q_1 \in \mathcal{E}_{l_1}$ e $Q_2 \in \mathcal{E}_{l_2}$ tais que $P_1 = f^{-Q_1}(V)$ e $P_2 = f^{-Q_2}(V)$. Como $\mathcal{E}$ é a coleção de pré-imagens em tempo hiperbólico de U então $Q = f^{l_1}(Q_2) \in \mathcal{E}_{l_2 - l_1}$ e $P = f^{l_1}(P_2) = f^{-Q}(V)$ é uma $\mathcal{E}$-pré-imagem de V.

A aplicação $f^{l_1} |_{P_1 \cup P_2}$ é um homeomorfismo entre os conjuntos abertos conexos $P_1 \cup P_2$ e $V \cup P = V \cup f^{l_1}(P_2)$. Logo, $P \cap V = f^{l_1}(P_1 \cap P_2) \neq \emptyset$. Por outro lado, $P \cap \partial V = \emptyset$ porque V é *$\mathcal{E}$-nested*. Concluimos da conexidade de P que $P \subset V$ ou $V \subset P$. Assim, usando o homeomorfismo $f^{l_1} |_{P_1 \cup P_2}$, temos que $P_2 \subset P_1$ (se $P \subset V$) ou $P_2 \supset P_1$ (se $P \supset V$).

(ii)Observe que como $f^{l_2 - l_1}(P) = V$, se $P \supset V$ (isto é, $P_2 \supset P_1$) então,

$$f^{2(l_2-l_1)}(P) = f^{(l_2-l_1)}(V) \subset f^{l_2-l_1}(P) = V.$$

mas isto é absurdo pois por hipótese $f^n(V) \not\subset V, \forall n \geq 1$.

■

Definição 3.2 (Cadeia de pré-imagens) *Uma sequência finita $\mathcal{K} = (P_0, P_1, \ldots, P_n)$ de $\mathcal{E}$-pré-imagens de um conjunto $A \subset U$ será chamado de cadeia de pré-imagens de A se:*

(1) $P_0 \cap \partial A \neq \emptyset$

(2) $0 < ord(P_0) < \ldots < ord(P_{n-1}) < ord(P_n)$*;*

(3) $P_j \cap \partial P_{j-1} \neq \emptyset, \forall 1 \leq j \leq n.$

Proposição 3.1 *Seja $A \subset U$ um conjunto aberto conexo e*

$$A^* = A \setminus \overline{\bigcup_{(P_j)_j \in cadeia(\mathcal{E})} \bigcup_j P_j} \tag{3.1}$$

onde a cadeia($\mathcal{E}$) é a coleção de todas as cadeias de $\mathcal{E}$-pré-imagens de A. Se $A^* \neq \emptyset$ então toda componente conexa de A^* é um conjunto $\mathcal{E}$-nested.

Demonstração: Observe que A^* é um subconjunto aberto de U e portanto precisamos apenas provar que $P \cap \partial A^* = \emptyset$ para toda $\mathcal{E}$-pré-imagem P de A^*. Por contradição, suponha que $\exists p \in P \cap \partial A^*$ para alguma $\mathcal{E}$-pré-imagem P de A^*. Seja $\wp = ord(P)$ e $E \in \mathcal{E}_\wp$ tal que $P = f^{-E}(A^*)$. Tomando $Q = f^{-E}(A)$, teremos $P \subset Q$. Então, como A^* e P são conjuntos abertos e assumindo que $P \cap \partial A^* \neq \emptyset$, teremos:

$$Q \cap A^* \neq \emptyset$$

Observe que $Q \cap \partial A = \emptyset$ pois caso contrário, a sequência unitária (Q) seria uma cadeia de $\mathcal{E}$-pré-imagem de A, o que contradiz (3.1).

Como $p \in \partial A^*$, para um dado $\epsilon > 0$ existe $(Q_0, \ldots, Q_n) \in cadeia(\mathcal{E})$ tal que dist$(p, \cup_{j=0}^n Q_j) < \epsilon$. Por outro lado, como $p \in P \subset Q$, tomando ϵ tão pequeno quanto se queira, $P \cap (\cup_{j=0}^n Q_j) \neq \emptyset$ e então,

$$Q_m \cap Q \supset Q_m \cap P \neq \emptyset \tag{3.2}$$

para algum $0 \leq m \leq n$.

Como $Q_0 \cup \ldots \cup Q_m$ é conexo e $Q_0 \cap (M \setminus Q) \neq \emptyset$ pois $Q \cap \partial A = \emptyset \neq Q_0 \cap \partial A$, existe $0 \leq l \leq m$ tal que $Q_l \cap \partial Q \neq \emptyset$. Temos dois casos:

(i) $ord(Q_l) \leq ord(Q)$

(ii) $ord(Q_l) > ord(Q)$

Como duas $\mathcal{E}$-pré-imagens de mesma ordem de um conjunto são disjuntas então $ord(Q_l) = ord(Q)$ se somente se $Q_l = Q$.

- Caso (i): Considere a cadeia $\mathcal{K} \in cadeia(\mathcal{E})$ dada por

$$\mathcal{K} = \begin{cases} (Q_0, \ldots, Q_l, Q), & se \quad ord(Q_l) < ord(Q) \\ (Q_0, \ldots, Q_l), & se \quad ord(Q_l) = ord(Q). \end{cases}$$

  Isto é,

$$\mathcal{K} = \begin{cases} (Q_0, \ldots, Q_l, Q), & se \quad ord(Q_l) < ord(Q) \\ (Q_0, \ldots, Q_{l-1}, Q), & se \quad ord(Q_l) = ord(Q). \end{cases}$$

  Como $Q \cap A^* \neq \emptyset$, existência da cadeia $\mathcal{K}$ é uma contradição com a definição do conjunto A^* dada em (3.1) e portanto este caso não pode ocorrer.

- Caso (ii): Considere a sequência $\mathcal{K} = (f^{\wp}(Q_l), \ldots, f^{\wp}(Q_m))$.

  Como $f^{\wp}(Q) = A$, $f^{\wp}(Q_l) \cap \partial A = f^{\wp}(Q_l \cap \partial Q) \neq \emptyset$. Além disso, para cada $l \leq j \leq m$, $f^{\wp}(Q_j)$ é uma $\mathcal{E}$-pré-imagem de A e para todo $l < j \leq m$ teremos $f^{\wp}(Q_j) \cap \partial Q_{j-1} = f^{\wp}(Q_j \cap \partial Q_{j-1}) \neq \emptyset$. Então, $\mathcal{K} \in cadeia(\mathcal{E})$. Mas como $f^{\wp}(P) = A^*$, segue de (3.2) que $f^{\wp}(Q_m) \cap A^* = f^{\wp}(Q_m \cap P) \neq \emptyset$, o que contradiz com (3.1).

  Segue do que foi visto acima que teremos $P \cap A^* = \emptyset$ para toda $\mathcal{E}$-pré-imagem P de A.

■

Dada uma cadeia $\mathcal{K} = (P_j)_j$, tome $\pi(\mathcal{K}) = \bigcup_j P_j$ e defina o diâmetro de $\mathcal{K}$ como diam($\mathcal{K}$)=diam($\bigcup_j P_j$).

Corolário 3.1 *Sejam $\epsilon > 0$ e $A \subset U$ um conjunto aberto conexo tal que $A \setminus \overline{B_\epsilon(\partial A)} \neq \emptyset$. Se toda cadeia de $\mathcal{E}$-pré-imagens de A tem diâmetro menor que ϵ então toda componante conexa de A^* dada por* (3.1) *é um conjunto $\mathcal{E}$-nested e*

$$A \setminus \overline{B_\epsilon(\partial A)} \subset A^* \subset A.$$

Demonstração: Do fato de que o diâmetro de qualquer $\mathcal{E}$-pré-imagem de A é menor que o diâmetro de A concluimos que A não está contido em nenhuma de suas $\mathcal{E}$-pré-imagens.

Tome Γ a coleção de todas as cadeias de $\mathcal{E}$-pré-imagens de A. Observe que se $\mathcal{K} = (P_j)_j \in \Gamma$ então $\pi(\mathcal{K})$ é um aberto conexo que intersecta ∂A. Além disso, como o diâmetro de $\pi(\mathcal{K})$ é menor que ϵ, temos que $\pi(\mathcal{K}) \subset B_\epsilon(\partial A)$. Então, $A^* = A \setminus \overline{\bigcup_{\mathcal{K}\in\Gamma} \pi(\mathcal{K})} \supset A \setminus \overline{B_\epsilon(\partial A)}$ é um conjunto não-vazio. Então toda componente conexa de A^* é um conjunto $\mathcal{E}$-*nested*.

■

Capítulo 4

Estrutura de Markov local, Partição e Integrabilidade da função R

4.1 Estrutura de Markov Local

Uma estrutura de Markov local para uma aplicação $f : M \to M$ é uma aplicação Markoviana uniformemente expansora por partes F induzida pela aplicação f, isto é, existe uma bola topológica B e uma função $R : B \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ chamada de função tempo de retorno que é constante nos elementos de uma partição $\mathcal{P}$ enumerável (mod 0) da bola topológica B tal que a aplicação induzida $F : B \to B$ dada por $F(x) = f^{R(x)}(x)$ é uma aplicação Markoviana expansora por partes.

Definição 4.1 (Aplicação Markoviana expansora por partes) *Seja $F : B \to B$ onde B é uma bola topológica aberta em M. F será chamada de aplicação C^2 Markoviana uniformemente expansora por partes se existir uma partição enumerável (mod 0) $\mathcal{P} = \{P_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ da bola B satisfazendo as seguintes propriedades:*

(1) P_j tem bordo com medida nula, $\forall j \in \mathbb{N}$.

(2) $\exists 0 < \kappa < 1$ tal que $\| DF^{-1}(x) \| < \kappa$, $\forall x \in P_j$ e $\forall P_j \in \mathcal{P}$.

(3) $F|_{P_j}$ *é um difeomorfismo* C^2 *na bola* B, $\forall P_j \in \mathcal{P}$.

(4) $\exists K > 0$ *tal que* $\log\left|\frac{detDF(x)}{detDF(y)}\right| \leq K.dist(F(x), F(y))$, $\forall x, y \in P_j \in \mathcal{P}$.

O teorema seguinte assegura que toda aplicação C^2 Markoviana uniformemente expansora por partes $F : B \to B$ tem medida invariante absolutamente contínua ν cuja densidade pertence a $L^\infty(Leb)$ (ver Lema 4.4.1 de [3]). Além disso, é fácil ver que se R é ν-integrável então

$$\mu = \sum_{j=0}^{\infty} f_*^j(\nu|_{\{R>j\}})$$

é uma medida f-invariante absolutamente contínua finita. Neste caso, $\nu|_{\{R>j\}}$ denota a medida dada por $\nu|_{\{R>j\}}(A) = \nu(A \cap \{R > j\})$ e f_*^j denota o *push-forward* da medida por f^j.

Teorema 4.1 *[3, 4, 7]Se* $F : B \to B$ *é uma aplicação* C^2 *Markoviana uniformente expansora por partes então existe um conjunto finito de medidas ergódicas invariantes absolutamente contínuas tal que Leb-q.t.p* $x \in B$ *pertence à bacia de algumas destas medidas. Além disso, a densidade de cada uma destas medidas com respeito a Lebesgue é uniformemente limitada por alguma constante.*

Dizemos que uma Estrutura de Markov tem tempo integrável se R é integrável com respeito a qualquer medida F-invariante absolutamente contínua. Como consequência do Teorema 4.1, se quisermos mostrar que uma Estrutura de Markov local tem função tempo integrável precisamos apenas checar a integrabilidade de R com respeito à coleção finita de medidas ergódicas invariantes absolutamente contínuas dadas por este teorema.

4.2 Bola Nested em Tempo Hiperbólico

Lema 4.1 *Sejam* δ_1 *e* σ *dados na Proposição* 1.2. *Então existe algum* $0 < r_0 < \delta_1/2$ *tal que a componente conexa da bola nested* $B_r^*(x)$ *está bem definida para todo* $x \in U \subset M$ *e* $0 < r \leq r_0$. *Além disto, dado* $0 < \lambda < 1$ *existe* $0 < r_\lambda < r_0$ *dependendo apenas de* δ_1, σ *e* λ *tal que* $B_r^*(x) \supset B_{\lambda r}(x)$, $\forall x \in U$ *e* $\forall 0 < r \leq r_\lambda$.

Demonstração: Dado $0 < \lambda < 1$, tome $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n>n_1} \sigma^n < 1 - \lambda$.

Seja $a_x = \text{mín}\{d(x,y); y \in \cup_{j=1}^{n_1} f^{-j}(x) \setminus \{x\}\}$. Note que $a_x \neq 0$ pois $\sharp\{f^{-1}(x); x \in U\} = c < +\infty$ já que f é um difeomorfismo local.

Assim, tome $\epsilon > 0$ tal que $inf_x\{a_x\} > \epsilon$, $\forall x \in U$, $r_\lambda = \frac{1}{4}\text{mín}\{\delta_1, \epsilon\}$ e $0 < r < r_\lambda$. Note que se $j < n_1$ então $B_r(x) \cap P = \emptyset$ $\forall P$ pré-imagem de $B_r(x)$ pois $P \cap (\cup_{j=1}^{n_1} f^{-j}(x)) \neq \emptyset$ e diâm$(P) < 2r < 2.\frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2}$.

Então, toda cadeia de ϵ-pré-imagens de $B_r(x)$ começa com uma pré-imagem de ordem maior que n_1. Assim, o diâmetro de qualquer cadeia é menor que $(\sum_{n>n_1} \sigma^n)r < (1-\lambda)r$ e como uma cadeia intersecta o bordo de $B_r(x)$ então a cadeia não intersecta $B_{\lambda r}(x)$. Portanto, $B_r^*(x) \supset B_{\lambda r}(x)$.

■

Seja U uma componente ergódica da variedade M. Considere o conjunto $\mathcal{A}_{+,\mathcal{H}}$ associado a U definido no Lema 2.1. Sejam $p \in \mathcal{A}_{+,\mathcal{H}}$ e r dado como no Lema 4.1. Seja então B^* a componente conexa que contém p da bola *nested* $B_r^*(p)$ de raio r centrada em p.

Sabemos, pela expressão (1.4) do Corolário 1.1 que $\exists \theta > 0$ tal que:

$$\limsup \frac{1}{n} \sharp\{1 \leq j \leq n; x \in H_j(e^{-\frac{\lambda}{4}})\} \geq \theta > 0$$

para *Leb*-q.t.p $x \in U$.

Sabemos também, pelo provado no Lema 2.1, que para *Leb*-q.t.p $x \in U$, $\omega_{+,\mathcal{H}}(x) = \mathcal{A}_{+,\mathcal{H}}$. Isto é,

$$\limsup_n \frac{1}{n} \sharp\{1 \leq j \leq n; f^j(x) \in B^* \text{com } x \in H_j(e^{-\frac{\lambda}{4}})\} > 0. \tag{4.1}$$

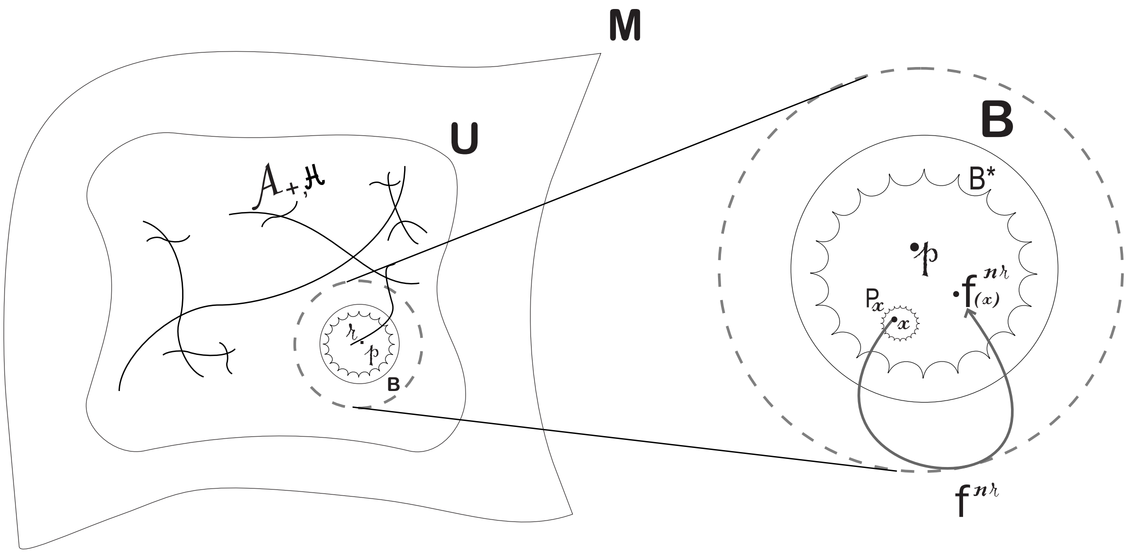
Os pontos $x \in U$ onde (4.1) ocorre serão chamados de pontos com frequência positiva de retorno a bola B^* em tempo hiperbólico que por simplicidade chamaremos de pontos de retorno hiperbólico.

4.3 Partição

A Proposição 1.2 nos assegura que se $x \in H_n(\sigma)$ então existe $V_n = V_n(x)$ tal que f^n manda V_n difeomorficamente na bola B centrada em $f^n(x)$ e de raio δ_1. E, por (4.1) temos que para Leb-q.t.p $x \in B^*$, existe $n = n(x)$ um tempo de retorno hiperbólico a B^*. Seja $U_x = (f^n|_{V_n})^{-1}(B^*)$. Assim, dado

$x \in B^*$, considere o conjunto $S(x) = \{U_x; x \in B^*\}$ das pré-imagens em tempo hiperbólico da bola B^*. Tomemos $P_x \in S(x)$ tal que $n_r(x) = n_r = ord(P_x) \leq ord(T_x)$, $\forall T_x \in S(x)$. Seja $\mathcal{P} = \{P_x; x \in B^*\}$.

Afirmamos que $\mathcal{P}$ é uma partição de B^*. De fato, para $x, y \in B^*$ com $x \neq y$ temos pela expressão (3.1), pela Observação 3.1 e pela definição de P_x que $P_x \cap P_y = \emptyset$. Por outro lado, $\cup_{x\in B^*} P_x = B^*$, isto é, $Leb(B^* \setminus \cup_{x\in B^*} P_x) = 0$ pois Leb-q.t.p $x \in B^*$ tem tempo de retorno. Defina agora, a função $R : B^* \longrightarrow \mathbb{N}$ por $R(x) = ord(P_x)$ onde $P_x \in \mathcal{P}$. Chamaremos esta função de função *tempo de indução*. Defina a aplicação $F : B^* \longrightarrow B^*$, por $F(x) = f^{R(x)}(x)$ onde B^* é a bola *nested* gerada da bola $B_r(p)$ com $p \in \mathcal{A}_{+,\mathcal{H}} \subset U$ e U é uma componente ergódica de M.



4.4 Estrutura Markoviana em B^*

Temos que F é uma aplicação Markoviana uniformemente expansora C^2 por partes. De fato, pela Definição 4.1, temos:

(1) P_x tem bordo de medida nula, já que a partição de B^* é uma partição em quase todo ponto, isto é, Leb-q.t.p. $x \in B^*$ pertence a algum elemento da partição. Logo, os elementos do bordo de cada $P_x \in \mathcal{P}$ com $x \in B^*$, formam um conjunto de medida nula.

(2) $\exists 0 < \kappa < 1$ tal que $\| DF^{-1}(x) \| < \kappa$, $\forall P_x \in \mathcal{P}$ e $x \in B^*$ pois como $R(x)$ é tempo hiperbólico para todo $x \in B^*$, basta tomarmos $\kappa \geq e^{-\lambda/2}$.

(3) $F|_{P_x}$ é um difeomorfismo C^2 na bola B^*, $\forall P_x \in \mathcal{P}$ e $x \in B^*$ pelo item (1) da Proposição 1.2.

(4) $\exists K > 0$ tal que $\log\left|\frac{detDF(p)}{detDF(q)}\right| \leq K.dist(F(p), F(q))$, $\forall p, q \in P_x$ e $P_x \in \mathcal{P}$, pois como $R(x)$ é um $e^{-\lambda/2}$-tempo hiperbólico para x então pelo item (3) da Proposição 1.2, basta tomarmos qualquer $K \geq \rho$.

O que prova a 1ª parte do teorema principal.

4.5 Integrabilidade da função R

Precisamos agora mostrar que a função R é integrável para concluir a prova do Teorema Principal.

Sejam $\mathcal{U} \subset M$ uma componente ergódica da variedade M e $H_j = H_j(e^{-\lambda/4})$ o conjunto dos pontos de $x \in M$ tais que j é um $(e^{-\lambda/4})$-tempo hiperbólico para x.

Assim, considere a coleção $\{H_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ dos subconjuntos de $\mathcal{U}$ tais que $f^j(x) \in H_{n-j}$, $\forall 0 \leq j < n$ e $\forall x \in H_n$ e seja $B^* \subset \mathcal{U}$ a componente conexa da bola *nested* $B_r^*(p)$ dada pelo Lema 4.1.

Proposição 4.1 *Para $y \in B^*$, existe $\theta > 0$ tal que:*

$$\limsup_n \frac{1}{n} \sharp\{1 \leq j \leq n; y \in H_j \; e \; f^j(y) \in B^*\} > \theta > 0 \tag{4.2}$$

Seja $F : B^* \to B^*$ uma aplicação dada por $F(x) = f^{R(x)}(x)$.

Então,

$$\liminf_n \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} R(F^j(y)) \leq \frac{1}{\theta}$$

Demonstração: Dado $n \in \mathbb{N}$, tome $\Gamma_n = \{1 \leq j \leq n; y \in H_j \; e \; f^j(y) \in B^*\}$ e $\Sigma_n = \{0 \leq j \leq n; \sum_{k=0}^{j} R(F^k(y)) \leq n\}$.

Afirmação 4.1 $\sharp\Gamma_n \leq \sharp\Sigma_n$, $\forall n \geq 0$

Demonstração da Afirmação: Observe que para $n = 0$ a desigualdade é verdadeira pois $\Gamma_0 = \emptyset$ e $\Sigma_0 = \emptyset$ já que $R(y) > 0$. Logo, $\sharp\Gamma_0 = \sharp\Sigma_0 = 0$.

Agora, por indução, suponha que $\sharp\Gamma_j \leq \sharp\Sigma_j$, $\forall 0 \leq j < n$.

Para provar que $\sharp\Gamma_n \leq \sharp\Sigma_n$, podemos considerar que $n \in \Gamma_n$ pois, se isso não ocorresse, teríamos $\sharp\Gamma_n = \sharp\Gamma_{n-1}$ e portanto $\sharp\Gamma_n = \sharp\Gamma_{n-1} \leq \sharp\Sigma_{n-1} \leq \sharp\Sigma_n$.

Seja $l = \text{máx}\{j \in \mathbb{N}; j \in \sum_{n-1}\}$ e $s = \sum_{k=0}^{\sharp\Sigma_{n-1}} R(F^k(y))$.

Como $y \in H_n$ e por definição $s \leq n-1$, temos que $T^l(y) = f^s(y) \in H_{n-s}$. Além disso, $f^s(y) \in B^*$ e $f^{n-s}(f^s(y)) = f^n(y) \in B^*$.

Assim, $R(f^s(y)) \leq n - s$ e consequentemente,

$$\sum_{k=0}^{l+1} R(F^k(y)) = \sum_{k=0}^{l} R(F^k(y)) + R(F^l(y)) \leq s + (n-s) = n$$

Portanto, $l + 1 \in \Sigma_n \setminus \Sigma_{n-1}$ e então

$$\sharp\Gamma_n = \sharp\Gamma_{n-1} + 1 \leq \sharp\Sigma_{n-1} + 1 \leq \sharp\Sigma_n$$

$\square$

Observe que se $\liminf_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} R(F^k(y)) > \frac{1}{\theta}$ então é porque existe algum $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k=0}^{n-1} R(F^k(y)) > \frac{1}{\theta}n$, $\forall n \geq n_0$.

Caso $n_0 \leq \theta n$ então $\forall j \in \mathbb{N}$ tal que $\theta n \leq j \leq n$ temos,

$$\sum_{k=0}^{j} R(T^k(y)) > \frac{1}{\theta}j = \frac{1}{\theta}.\frac{j}{n}n \geq \frac{j.n}{j} = n$$

Podemos concluir então que $\sharp\{0 \leq j \leq n; \sum_{k=0}^{j} R(F^k(y)) > n\} > n - \theta n = (1-\theta)n$ e portanto, $\sharp\{0 \leq j \leq n; \sum_{k=0}^{j} R(F^k(y)) \leq n\} \leq \theta n$, $\forall n \geq n_0$.

Assim, $\frac{1}{n}\sharp\sum_n \leq \theta$ e como

$$\begin{aligned}
\sharp\Gamma_n &= \tfrac{1}{n}\sharp\{1 \leq j \leq n; y \in H_j \; e \; f^j(x) \in B^*\} \\
&\leq \tfrac{1}{n}\sharp\{0 \leq j \leq n; \textstyle\sum_{k=0}^{j} R(F^k(y)) \leq n\} \\
&= \sharp\textstyle\sum_n
\end{aligned}$$

então temos que:

$$\liminf_n \frac{1}{n}\sharp\{1 \leq j \leq n; y \in H_j \; e \; f^j(y) \in B^*\} = \liminf_n \frac{1}{n}\sharp\Gamma_n \leq \theta$$

o que contradiz (4.2).

$\blacksquare$

Seja ν uma medida F-invariante dada pela Estrutura Markoviana em B^*. Como visto na Proposição anterior, $\liminf_n \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} R(F^j(y)) \leq \frac{1}{\theta}$ para Leb-q.t.p. $y \in B^*$.

Pelo Teorema Ergódico de Birkhoff, temos que existe $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} R(F^j(x))$ e além disto,

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} R(F^j(x)) \to \int R d\nu$$

para ν-q.t.p $x \in M$.

Logo, $\displaystyle\int R d\nu \leq \frac{1}{\theta}$. Como ν foi tomada de maneira arbitrária, podemos concluir que R é integrável com respeito a qualquer medida F-invariante absolutamente contínua.

Demonstração do Teorema 1.3. Se f é um difeomorfismo C^2 não-uniformemente expansor então existe $\lambda > 0$ tal que:

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \log \| Df(f^j(x))^{-1} \| \leq \lambda < 0$$

para Leb-q.t.p $x \in M$.

Isto é,

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \log \| Df(f^j(x))^{-1} \|^{-1} \geq \lambda > 0$$

para Leb-q.t.p $x \in M$.

Como $\displaystyle\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \log \| Df(f^j(x))^{-1} \|^{-1} \geq \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \log \| Df(f^j(x))^{-1} \|^{-1}$ então:

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \| Df(f^j(x))^{-1} \log \|^{-1} \geq \lambda$$

para Leb-q.t.p $x \in M$.

Portanto, f satisfaz as hipóteses do Teorema 1.1.

Agora, sabemos que se a aplicação $x \mapsto \log \| (Df(x))^{-1} \|$ é μ_i-integrável, $\forall \mu_i$ medida invariante absolutamente contínua então, pelo Teorema Ergódico de Birkhoff, temos para μ_i-q.t.p $x \in M$ e $\forall i$,

$$\liminf_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\log \parallel Df(f^j(x))^{-1}\parallel^{-1}=\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\log \parallel Df(f^j(x))^{-1}\parallel^{-1}$$

Assim, resta-nos mostrar que $\log \parallel (Df^{-1}) \parallel \in L^1(\mu_i)$, já que $\log \parallel (Df)^{-1}\parallel^{-1} = -\log \parallel (Df)^{-1}\parallel$ (Vide Lema a seguir).

Como Leb-q.t.p $x \in M$ pertence a bacia de alguma medida μ_i então,

$$\liminf_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\log \parallel Df(f^j(x))^{-1}\parallel^{-1}=\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\log \parallel Df(f^j(x))^{-1}\parallel^{-1}$$

para Leb-q.t.p $x \in M$.

Lema 4.2 *Se $f: M \longrightarrow M$ é um difeomofismo C^2 então* $\log \parallel (Df)^{-1} \parallel$ *é integrável com respeito a qualquer medida invariante absolutamente contínua.*

Demonstração: Em [12](ver *remark* 1.2 de [12]) foi provado que

$$-\infty < \int \log|detDf|d\mu < +\infty \tag{4.3}$$

com respeito a qualquer medida invariante absolutamente contínua μ.

Mostremos que este resultado implica na integrabilidade de $\log \parallel (Df)^{-1} \parallel$.

Temos que $|\lambda| \leq \parallel A \parallel$ para qualquer λ autovalor da matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$.

De fato, se λ é autovalor da matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ então $A = \lambda I$. Logo, $\parallel A \parallel = \parallel \lambda I \parallel \geq |\lambda| \parallel I \parallel = |\lambda|$.

Portanto, $|detA| \leq |\lambda|^m \leq \parallel A \parallel^m$ e consequentemente,

$$\log|detDf| \leq \log \parallel Df \parallel^m$$

$$\log|detDf| \leq m\log \parallel Df \parallel$$

$$\tfrac{1}{m}\log|detDf| \leq \log \parallel Df \parallel$$

Daí, pela expressão (4.3) e pelo fato que $\log \parallel Df \parallel < +\infty$, temos:

$$-\infty < \tfrac{1}{m}\int \log|detDf|d\mu \leq \int \log \parallel Df \parallel d\mu < +\infty$$

Sabemos que adj(A)A=det(A)I, $\forall A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ onde adj(A) é a matriz adjunta da A, isto é, a transposta da matriz dos cofatores [9] e I é a identidade.

Logo,

$$\| adj(Df)Df \| = \| det(Df)I \|$$

$$|detDf| \leq \| det(Df)I \| = \| adj(Df)Df \| \leq \| adj(Df) \| . \| Df \|$$

$$\frac{|det(Df)|}{\| (Df) \|} \leq \| adj(Df) \|$$

$$\log\left(\frac{|det(Df)|}{\| (Df) \|}\right) \leq \log \| adj(Df) \|$$

$$\log |det(Df)| - \log \| Df \| \leq \log \| adj(Df) \|$$

Consequentemente,

$$-\infty < \int \log \| adj(Df) \| \, d\mu$$

Como $\| adj(Df) \|$ é limitado, temos:

$$-\infty < \int \log \| adj(Df) \| \, d\mu < +\infty$$

Finalmente, de $(Df)^{-1} = \frac{1}{detDf} adj(Df)$ temos que

$$\log \| (Df)^{-1} \| = \log \| adj(Df) \| - \log(det(Df))$$

E portanto,

$$-\infty < \int \log \| (Df)^{-1} \| \, d\mu = \int \log \| adj(Df) \| \, d\mu - \int \log(det(Df)) d\mu < +\infty$$

■

Demostração do Teorema 1.4. Seja f um difeomorfismo local C^2 em uma variedade compacta M.

Suponha que exista $0 < \sigma < 1$ tal que Leb-q.t.p $x \in M$ tem um σ-tempo hiperbólico, isto é, para todo $1 \leq k \leq n$,

$\prod_{i=n-k}^{n-1} \| Df(f^i(x))^{-1} \| \leq \sigma^k$

Portanto, teremos Leb(U)=0 onde $U = M \setminus \{x \in M; x \in \cup_j H_j(\sigma)\}$.

Dado um ponto Lebesgue genérico $x \in M$, temos que $f^j(x) \notin U, \forall j \in \mathbb{N}$. Tome n_1 tal que $x \in H_{n_1}(\sigma)$ e m_1 tal que $f^{n_1}(x) \in H_{m_1}(\sigma)$.

Pelas propriedades de tempos hiperbólicos temos que $x \in H_{n_2}(\sigma)$ onde $n_2 = n_1 + m_1 > n_1$. Além disso, podemos concluir que Leb-q.t.p $x \in M$ tem uma infinidade de tempos hiperbólicos.

De fato, suponha que não, isto é, Leb-q.t.p $x \in M$ tem um número finito de tempos hiperbólicos. Então, para Leb-q.t.p $x \in M$, $\exists n_0 > 0$ tal que $f^j(x) \notin H_n$, $\forall n, j > n_0$. Logo, para Leb-q.t.p $x \in M$, $f^j(x) \in U$, $\forall j > n_0$. Portanto Leb(U)>0. Contradição.

Assim,

$$\limsup_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log \| Df(f^k(x))^{-1} \|^{-1} \geq \lambda > 0$$

para Leb-q.t.p $x \in M$.

Em virtude do Lema 2.1, temos que:

$$\limsup_n \frac{1}{n} \sharp\{1 \leq j \leq n; f^j(x) \in B^* \text{com } x \in H_j(e^{-\frac{\lambda}{4}})\} > 0$$

para Leb-q.t.p $x \in M$.

Logo, concluímos:

$$\liminf_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log(\| Df(f^j(x))^{-1} \|)^{-1} \geq \lambda > 0$$

para Leb-q.t.p $x \in M$.

$\blacksquare$

Bibliografia

[1] A. Blokh, M. Lyubich, *Ergodicity of transitive maps of the interval*, Ukrainian Math J. 41 (1989), 985 – 988.

[2] A. Blokh, M. Lyubich, *Measurable dynamics of S-unimodal maps of the interval*, Ann. Sci. École Norm. Sup. 24 (1991), 545 – 573.

[3] J. Aaronson, *An Introduction to infinite ergodic theory*, Math. Surv. Monographs, AMS, Providence R.I.US 50, (1997).

[4] J. F. Alves, *SRB measures for non-hyperbolic systems with multidimensional expansion*, Ann. Scient, Éc. Norm. Sup., 4ª série, 33 (2000), 1 – 32.

[5] J. F. Alves, C. Bonatti, M. Viana,*SRB measures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly expanding*, Invent. Math. 140 (2000), 351-398.

[6] J.F.Alves, M. Viana, *Statistical Stability for robust classes of maps with non-uniform expansion*, Ergod. Th & Dynam. Sys. 22 (2002).

[7] J. F. Alves, S. Luzzatto. V. Pinheiro, *Markov structures and decay of correlations for non-uniformly expandig dynamical systems*, Ann. I. H. Poincaré - AN 22 (2005), 817-839.

[8] J. F. Alves, V. Araújo, *Radom perturbations of nonuniformly expanding maps*, Astérisque 286 (2003), 25 – 62.

[9] J. Milnor, *Matrix Analysis*, Commun. Math. Phys 99 (1985).

[10] G. Keller, *Exponents, attractors and Hopf decompositions of interval maps*, Ergod. Th and Dynam. Sys. 10 (1990), 717 – 744.

[11] M. Martens, *Distortion results and invariant Cantor Sets os unimodal maps*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. 14 (1994), 331 – 349.

[12] P.-D. Liu, *Pesin's entropy formula for endomorphisms*. Nagoya, Math. J. 150 (1998), 197-209.

[13] V. Pinheiro, *Expanding Measures*, *preprint* 25 (2007).

[14] V.Pinheiro, *SRB measures for weakly expanding maps*, Nonlinearity (Bristol), United Kingdom 19 (2006), 1185 – 1200.

[15] R. A. Horn, C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge Univ. Press, (1990).

[16] S. V. Strien, E. Vargas, *Real bounds, ergodicity and negative Schwarzian for multimodal maps*, J. Am. Math. Soc. 17 (2004), 749 – 782.

[17] W. C. Melo, S. V. Strien, *One Dimensional Dynamics*, Springer-Velag (1993).

Universidade Federal da Bahia-UFBa
Instituto de Matemática/Deptº. de Matemática

Campus de Ondina, Av. Adhemar de Barros s/n, CEP:40170-110
http://www.pgmat.ufba.br/