Universidade Federal da Bahia
Instituto de Matemática
Curso de Pós-graduação em Matemática
Dissertação de Mestrado

Ergodicidade de Aplicações Unimodais

Maria Eliana Santana da Cruz Silva

Salvador-Bahia
Janeiro 2003

Ergodicidade de Aplicações Unimodais

Maria Eliana Santana da Cruz Silva

Dissertação apresentada ao colegiado do curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Vilton Jeovan Viana Pinheiro (Orientador)

Prof. Dr. Ézio de Araújo Costa

Prof. Dr. José Ferreira Alves

da Cruz Silva, M. E.
"Ergodicidade de Aplicações S-unimodais" / Maria Eliana Santana da Cruz Silva. Salvador-Ba, 2003.

Orientador: Dr. Vilton Jeovan Viana Pinheiro (UFBA).
Dissertação de Mestrado apresentada ao curso de Pós-graduacão em Matemática da UFBA, 30 páginas.

Palavras-Chave: Dinâmica unidimensional, Aplicações unimodais, Família quadrática e Hiperbolicidade.

A Deus, a meus pais, irmãos e amigos.

"Sempre me pareceu estranho que todos aqueles que estudam seriamente esta ciência acabam tomados de uma espécie de paixão pela mesma. Em verdade, o que proporciona o máximo de prazer não é o conhecimento e sim a aprendizagem, não é a posse mas a aquisição, não é a presença mas o ato de atingir a meta."

Carl Friedrich Gauss.

Agradecimentos

A Deus, agradeço-Te o dom da vida e a capacidade de chegar até aqui, sabendo que por qualquer caminho que sigamos teremos a Tua mão estendida sobre nós.

Aos meus pais, Humberto Máximo da Cruz e Elza Santana da Cruz, a quem é indispensável dedicar essa vitória, pois, vocês são simplesmente o começo de tudo, companheiros de todas as horas, o meu sonho, a minha alegria e o mais singelo amor! Para sempre, meus agradecimentos. Agradeço também aos meus familiares por todo apoio e ajuda.

A todos os professores responsáveis por essa jornada, sempre dispostos a ajudar, em especial, aos professores Ézio Araújo Costa (UFBA), José Ferreira Alves (Faculdade de Ciências do Porto), os quais compuseram a Banca Examinadora e que verificaram com tanto zelo esta dissertação. Ensinar é uma questão de dedicação, de amor, um dom: algo tão nobre que faz do professor um sábio. Por isso a minha gratidão e o meu carinho ao professor Vilton Jeovan Viana Pinheiro, pela orientação, conhecimento transmitido e experiência gratificante.

Aos meus colegas de trabalho pela colaboração e incentivo e a todos os colegas e funcionários do Instituto de Matemática da UFBA.

Aos amigos: Ana Lúcia Pinheiro Lima, Ariadne Pereira, Azly Santana, Alex Ramos, Calitéia Souza, Cleide Peixoto, Cláudio Vivas, Eronildo Souza, Graci Baqueiro, Gilmar Veiga, Jorge Serva, Juceli Brito, Luciana Barreto, Luiz Roque de Jesus, Luiz Sérgio Cavalcanti, Maria de Fátima Leal, Maridete Cunha, Maurício Brandão, Odete Amanda Martinez, Patrícia de Souza, Paulo Henrique do Nascimento, Stela Maria Azevedo e Ribeiro, os quais, de alguma forma, contribuíram no desenvolvimento de todo o curso de pós graduação, em especial, àqueles que se tornaram grandes amigos. Aos amigos que não foram citados.

Resumo

Tratamos das aplicações S-unimodais, em particular, estudamos a família quadrática ou logística. Fizemos um estudo sobre estruturas hiperbólicas e provamos que um conjunto hiperbólico expansor possui medida de Lebesgue total ou zero. Provamos ainda que toda aplicação S-unimodal não-*flat*, infinitamente renormalizável é ergódica com respeito à medida de Lebesgue e, conseqüentemente, possui um único atrator.

Abstract

We treated of S-unimodais applications, in matter, studied the quadratic or logistics family. We made a study on hyperbolic structures and we proved that a hyperbolic expansor group have total or zero Lebesgue measure. We proved although all non-flat S-unimodal application, infinitely renormalizable, is ergordic with regard to the Lebesgue measure and, consequently, it has a single atrator.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

A família de aplicações quadráticas foi um dos objetos mais estudados na última década. Isto se deve em parte à simplicidade da expressão e a complexidade da dinâmica gerada por essas aplicações. A família quadrática ou logística serve de modelo para o estudo uma grande gama de outras dinâmicas. Além disso, generalizações como as aplicações de Hénon aparecem no desdobramento de tangências homoclínicas.

Com os resultados acumulados nas décadas de 80 e 90 sabemos hoje, de maneira bastante completa, quais são as dinâmicas freqüentes e os atratores típicos das aplicações da família quadrática. De fato, com o trabalho de Lyubich, onde culminaram todos esses esforços, sabemos que para quase todo parâmetro, no sentido de Lebesgue, teremos uma dinâmica hiperbólica ou estocástica.

Nesse trabalho estaremos mais interessados no estudo do número de atratores que uma aplicação unimodal pode ter. Verificaremos que não só para aplicações logísticas mas também para toda aplicação S-unimodal não-flat teremos sempre um único atrator. Para tanto, provaremos que se a aplicação em questão não possuir órbita periódica atratora, então ela será ergódica com respeito à medida de Lebesgue. Já que as bacias de atratores são conjuntos invariantes de medida positiva, a ergodicidade destas aplicações implicará na existência de único atrator. Por outro lado, segue da Schwarziana negativa que quando uma destas aplicações tiver uma órbita periódica, então esta órbita será seu único atrator. Assim, com a presença ou não de órbita periódica, estas aplicações possuem sempre um único atrator.

Capítulo 1

Aplicações S-unimodais

Seja $f : I \to I$ uma aplicação de classe $C^k, k \geq 3$, $I \subset \mathbb{R}$. A **derivada de Schwarz** ou **Schwarziana** de f em um ponto $x \in I$, denotada por $Sf(x)$, é definida por:

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2 ; f'(x) \neq 0.$$

Uma propriedade fundamental da Schwarziana é a permanência do sinal. Isto é, se duas funções com Schwarziana de mesmo sinal, então a composição destas preservará o sinal da Schwarziana. De fato, aplicando a regra da cadeia, verificamos que

$$S(f(g(x))) = Sf(g(x))(g'(x)))^2 + Sg(x)$$

de modo que se supormos $Sf < 0$ e $Sg < 0$, teremos $S(f(g(x)) < 0$. Uma conseqüência imediata é que $Sf < 0$ implica $Sf^n < 0$, para todo $n > 1$.

Uma outra propriedade importante da Schwarziana é que se uma função $f : I \to \mathbb{R}$, I intervalo de $\mathbb{R}$, tem Schwarziana negativa então, cada órbita periódica atratora de f atrai um ponto crítico ou de dobra (ver definição abaixo) de f ou um ponto do bordo de I. Esta demonstração é bastante simples e pode ser encontrada em [D].

Duas aplicações $F : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ e $G : \mathbb{Y} \to \mathbb{Y}$ são ditas **conjugadas** (que denotaremos por $F \sim G$), ou topologicamente equivalentes, se existe um homeomorfismo $h : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ tal que

$F \circ h = h \circ G$, ou seja, tal que o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{X} & \xrightarrow{F} & \mathbb{X} \\ h\downarrow & & \downarrow h \\ \mathbb{Y} & \xrightarrow{G} & \mathbb{Y} \end{array}$$

Veja que se F e G são conjugadas por h, $F \circ h = h \circ G$, então $\overbrace{F \circ \ldots \circ F}^{n\ vezes} \circ h = F^n \circ h = h \circ G^n = \overbrace{G \circ \ldots \circ G}^{n\ vezes} \circ h$ para todo $n \geq 0$. Como a órbita de um ponto p sob a ação da aplicação F, que denotaremos por $\mathcal{O}_F(p)$ ou mais simplesmente por $\mathcal{O}(p)$, é o conjunto dos iterados de F aplicados em p, ou seja, $\mathcal{O}_F(p) = \{F^n(x) \parallel n \geq 0\}$, e como a dinâmica gerada por F é justamente o conjunto das órbitas geradas pela ação de F, temos que uma conjugação leva órbitas gerada por F em órbitas de G e, Conseqüentemente, aplicações conjugadas têm dinâmicas equivalentes.

Um ponto $c \in \mathbb{R}$ é dito **ponto de dobra** de uma função real f se for um máximo ou mínimo local de f e pertencer ao interior do domínio desta função. Considere uma f função contínua definida num intervalo que possui exatamente um ponto de dobra. Podemos fazer uma conjugação e colocarmos este ponto de dobra como um máximo. De fato, a aplicação $h(x) = -x$ é uma conjugação entre f e $h \circ f \circ h$, que transforma um mínimo de f em máximo de $h \circ f \circ h$. Sendo assim, sem perda de generalidade, definiremos uma função ou aplicação **unimodal** como uma função contínua definida num intervalo que possui exatamente um ponto de dobra e este ponto é um máximo.

Suponha que f seja uma aplicação C^3 e unimodal. Seja $c \in \mathbb{R}$ o ponto crítico ou de dobra de f. Não é difícil verificar que se $Sf(x) < 0$, para todo $x \neq c$, então f tem no máximo dois pontos fixos. Quando f não tiver pontos fixos, então todo ponto será atraído pelo $-\infty$ ou sairá do domínio da f (caso o domínio da f seja um subintervalo próprio de $\mathbb{R}$), isto é, ou para cada $x \in \mathrm{Dom}(f)$ $\exists$ n tal que $f^n(x) \notin \mathrm{Dom}(f)$ ou $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = -\infty$ para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$. Assim, se f não tiver pontos fixos sua dinâmica será trivial. Pode-se verificar que, para que f tenha uma dinâmica não trivial é necessário que exista um ponto fixo[1]. Além disso, este ponto fixo possui um **simétrico dinâmico**, com respeito ao ponto de dobra da f, ou seja, existe $p < c < p^* \in \mathrm{Dom}(f)$ tais que $p = f(p) = f(p^*)$. Veja que com uma mudança de coordenadas

[1] $p \in \mathbb{R}$ tal que $f(p) = p$

(conjugação) podemos supor que $p = 0$ e $p^* = 1$. De fato, basta considerar a conjugação $h(x) = \frac{x-p}{p^*-p}$ entre f e $g = h \circ f \circ h^{-1}$. Veja que $g(0) = 0 = g(1)$. Desta maneira, sem perda de generalidade, vamos nos restringir ao estudo de unimodais tais que $f(0) = 0 = f(1)$.

DEFINIÇÃO 1.1. *Uma aplicação unimodal f é dita S-unimodal se for C^3 e tiver Schwarziana negativa. Mais precisamente, $Sf(x) < 0, \forall x \neq c$, onde c é o único ponto de dobra de f. Em c teremos $\lim_{x \to c} Sf(x) = -\infty$. Além disto, vamos exigir que se f é S-unimodal, então* $\mathrm{Dom}(f) \supset [0,1]$ *e* $f(0) = 0 = f(1)$. *Em particular, o ponto crítico de uma aplicação S-unimodal pertencerá ao intervalo* $(0,1)$.

Segue da definição 1.1 e das observações feitas acima o seguinte resultado.

PROPOSIÇÃO 1.1. *Toda a aplicação S-unimodal tem no máximo uma órbita periódica atratora.*

Neste trabalho trataremos somente de aplicações unimodais com dobras não degeneradas, que são chamadas de *não-flat*. Mais precisamente, um ponto $c \in \mathbb{R}$, ponto de dobra de uma aplicação f, é dito não-*flat* se existe um difeomorfismo local ξ, com $\xi(c) = 0$, tal que, $f(x) = \pm|\xi(x)|^\alpha + f(c)$, para algum $\alpha \geq 1$. Diremos que uma aplicação unimodal é não-*flat* se seu ponto de dobra for não-*flat*.

1.1 A família quadrática

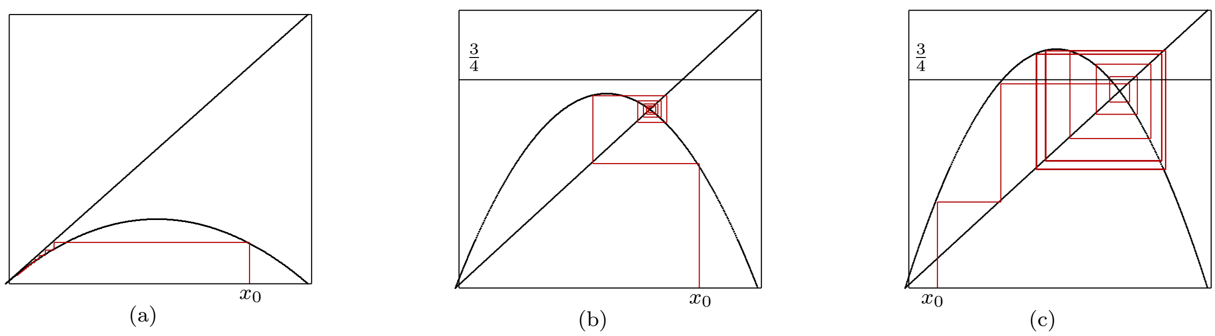

Figura 1.1: Aplicações quadráticas fazendo-se variar o parâmetro t.

A família de aplicações quadráticas ou logísticas é uma família de funções reais definidas pela expressão $f(x) = 4tx(1-x)$, onde $t \in (0, +\infty)$ é o parâmetro. Derivando as aplicações desta família, é fácil ver que o ponto crítico $c = 1/2$ é o único ponto de dobra de f e que $f(0) = 0 = f(1)$, qualquer que seja o parâmetro $t > 0$. Como $4tx(1-x) = f(1/2) - |\xi(x)|^2$, onde $\xi(x) = 4\sqrt{t} \cdot (x - 1/2)$ é óbvio que estas funções são não-*flat*. Além disto, as aplicações da família logística têm Schwarziana negativa. De fato,

$$\begin{aligned} Sf(x) &= \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2 \\ &= \frac{0}{-8tx+4t} - \frac{3}{2}\left(\frac{-8t}{-8tx+4t}\right)^2 \\ &= -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{x-1/2}\right)^2 \Rightarrow Sf < 0, \forall t, x \in \mathbb{R} \setminus \{1/2\}. \end{aligned}$$

Em resumo, a família quadrática é uma família de aplicações S-unimodais não-*flat*.

1.2 Estruturas Hiperbólicas

Um conjunto U é dito **positivamente invariante** por uma aplicação f se $f(U) \subset U$. Em particular, a órbita de um ponto de um conjunto positivamente invariante está contida neste conjunto. Se um conjunto compacto positivamente invariante apresentar expansão ou contração uniforme, ao longo das órbitas de seus pontos, este conjunto é chamado hiperbólico. Mais precisamente, um conjunto compacto e positivamente invariante $K \subset \mathrm{Dom}(f) \subset \mathbb{R}$ é dito **hiperbólico** se existirem constantes $C > 0$ e $0 \leq \lambda \neq 1$ tais que ou $|(f^n)'(x)| < C\lambda^n < 1\ \forall n > 0$ ou $|(f^n)'(x)| > C\lambda^n > 1\ \forall n > 0$. No primeiro caso ($\lambda < 1$) o conjunto é dito **contrator** e no segundo ($\lambda > 1$) é dito **expansor**. Vamos agora estudar um pouco os conjuntos invariantes das aplicações da família quadrática ou logística que estão afastados do ponto crítico.

Primeiro vamos considerar o caso em que o parâmetro é grande, maior que um. Veja que o parâmetro é igual ao valor crítico, isto é, a imagem do valor crítico. Não é difícil verificar que todos pontos fora do intervalo $[0, 1]$ são atraídos pelo menos infinito. Em particular, o ponto crítico será atraído. Como os bordos do intervalo $[0, 1]$ vão para o zero, que é ponto fixo repulsor, temos pelo observado no início deste capítulo, que essas aplicações não possuirão órbita periódica atratora, já que o ponto fixo e o ponto crítico obviamente não serão atraídos por nenhuma órbita periódica atratora. Por continuidade, existirá uma vizinhança do ponto crítico, cuja imagem cairá fora do intervalo $[0,1]$ e logo será atraída pelo menos infinito. Assim, o conjunto dos pontos que não serão atraídos para o menos infinito serão justamente os pontos do intervalo $[0,1]$ que nunca se aproximarão de uma vizinhança do ponto crítico. Seguem do Teorema 1.1, enunciado mais a frente, que tal conjunto é um conjunto uniformemente expansor e do Teorema 1.2, que provaremos mais adiante, que ele tem medida de Lebesgue zero. Temos assim que somente dentro de um conjunto de medida zero, que está contido no intervalo $[0,1]$, poderemos encontrar conjuntos invariantes não triviais (conjuntos que não estejam na bacia de atração do $-\infty$). Claro que o conjunto dos pontos que não saem do intervalo $[0,1]$ é um conjunto maximal invariante, ou seja, todo ponto cuja órbita nunca sai de uma vizinhança pequena do intervalo $[0,1]$, pertence a este conjunto.

Pode-se provar que a dinâmica de f, restrita ao conjunto dos pontos que não são atraídos pelo $-\infty$, é conjugada à dinâmica do Shift (ver definição e detalhes no anexo). Ou seja, denotando $\Delta = \{x \in \mathbb{R} \parallel \mathcal{O}_f(x) \subset [0,1]\}$, onde $f(x) = 4tx(1-x)$, $t > 1$, $\mathcal{O}_f(x)$ a órbita positiva de x gerada por f e $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ a função Shift, teremos um homeomorfismo ψ entre Δ (que é um conjunto de Cantor) e o conjunto Σ $(= \{0,1\}^{\mathbb{N}})$ que faz o diagrama abaixo comutar.

$$\begin{tikzcd} \Delta \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\psi"'] & \Delta \arrow[d, "\psi"] \\ \Sigma \arrow[r, "G"] & \Sigma \end{tikzcd}$$

Vamos aproveitar o momento para introduzir a noção de intervalos *nice*. Sejam p e p^* as pré-imagens de 1, respectivamente a esquerda e a direita de $c = 1/2$, ou seja, $f(p) = f(p^*) = 1$ e $p < c < p^*$. Claro que se um iterado de um ponto $x \in [0,1]$ cair em (p,p^*) então $p \notin \Delta$. De fato, $\Delta = \{x \in [0,1] \parallel \mathcal{O}(p) \cap (p,p^*) = \emptyset\}$. Uma propriedade fundamental do intervalo acima é que os iterados de seu bordo não o intersectam. Motivado pelo intervalo (p,p^*), consideraremos a seguinte definição.

Definição 1.2. *Chamaremos um intervalo aberto $J = (a,b)$ de um* **intervalo nice** *da aplicação unimodal f se $\mathcal{O}(\partial J) \cap J = \emptyset$, isto é, $\mathcal{O}(a) \cap J = \emptyset = \mathcal{O}(b) \cap J$. Em adição, vamos pedir que um intervalo nice seja sempre* **dinamicamente simétrico** *com respeito ao ponto de dobra c, isto é, $a < c < b$ e $f(a) = f(b)$. O conjunto dos intervalos nice de uma aplicação unimodal f será denotado por $\mathcal{N} = \mathcal{N}_f$ e denotaremos os pontos de órbitas limitadas que nunca entram em $J \in \mathcal{N}$ por $\Delta_J = \{x \in [0,1] \parallel \mathcal{O}(x) \cap J = \emptyset\}$. Observe que se J é nice então $(\partial J) \subset \Delta_J$.*

Figura 1.2: Iterações de f onde J é *nice*

PROPOSIÇÃO 1.2. *Seja f uma aplicação unimodal de classe C^1. Se $J \in \mathcal{N}$ então Δ_J é um conjunto compacto positivamente invariante.*

Demonstração. Como $\mathcal{O}(f(x)) \subset \mathcal{O}(x)$ segue que se $x \in \Delta_J$, então $\mathcal{O}(f(x)) \cap J \subset \mathcal{O}(x) \cap J = \emptyset$, e logo $f(x) \in \Delta_J$. Assim concluímos que Δ_J é positivamente invariante.

Vamos agora verificar que Δ_J é compacto. Realmente, se $p \in [0,1] \setminus \Delta_J$, então existe $n \geq 0$ tal que $f^n(p) \in J$ e como J é um aberto e f^n é contínua, $\forall n$, segue que $f^{-n}(J)$ é aberto. Como $p \in f^{-n}(J)$, temos uma vizinha de p que é levada por f^n dentro de J e, Conseqüentemente, toda esta vizinhança está contida em $[0,1] \setminus \Delta_J$, o que prova que $[0,1] \setminus \Delta_J$ é aberto e que Δ_J e fechado. Como $\Delta \subset [0,1]$ segue que Δ_J é também limitado, logo compacto. $\square$

Enunciaremos abaixo um teorema que é fundamental para mostrarmos a expansividade em regiões afastadas do ponto crítico. Como conseqüência deste teorema, sempre que uma aplicação unimodal C^2 não tiver órbita periódica atratora, então para todo intervalo *nice* J teremos que Δ_J será um conjunto expansor.

TEOREMA 1.1. *(Mañe) Seja f definida no intervalo $f : I \to I$, $f \in C^2$, onde I, é um intervalo de $\mathbb{R}$. Seja $\mathcal{A}$ o conjunto das órbitas atratoras de f. Seja $\mathcal{B}$ as bacias locais de $\mathcal{A}$. Seja C_f o conjunto de todos os pontos críticos de f. Se U é vizinhança de C_f e $U \supset \mathcal{B}$. Então existe $C > 0$ e $\lambda > 1$ tal que:*

$$|Df^n(x)| > C\lambda^n, \forall x, \ \textit{satisfazendo} \ \left\{x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)\right\} \cap U \neq \emptyset.$$

Em particular, se $\mathcal{A} = \emptyset$ e U é uma vizinhança de C_f então $\exists$ C e λ tais que

$$\mathcal{O}(x) \cap U = \emptyset \implies |Df^n(x)| > C\lambda^n \ \forall n \geq 0.$$

Demonstração. Ver [MMS].

Já sabemos que os conjuntos Δ_J, $J \in \mathcal{N}_f$, são positivamente invariantes e compactos. Além disto, se f não tiver órbita periódica atratora ou mesmo se f tiver uma órbita periódica atratora mas J contiver sua bacia local, então Δ_J será expansor. Veremos agora que sendo Δ_J expansor, então terá medida de Lebesgue zero.

TEOREMA 1.2. *(Conjunto hiperbólico expansor tem medida de Lebesgue total ou zero). Seja $N \subset S^1$ e $f : N \to N$ uma aplicação $C^{1+\alpha}$, com $\alpha > 0$. Se $\tau \subset N$ é compacto positivamente invariante, ou seja, $f(\tau) \subset \tau$, e expansor, então $\tau = N = S^1$ (f é uma imersão no círculo) ou τ tem medida de Lebesgue igual a zero.*

Demonstração. Sejam $f : N \to N$ com N compacto, f é $C^{1+\alpha}$ com $\alpha > 0$. Como τ é hiperbólico por f, podemos, permutando f por f^n, se for necessário, assumir que, para uma vizinhança V de f teremos:

$$|Df(x)| > \lambda > 1; \forall x \in V.$$

Afirmação. Se τ contém um intervalo então $\tau = S^1$.

Prova. Seja $J \subset \tau$ um intervalo, pela invariância de $\tau, f^n(J) \subset \tau$ para todo n, f^n não tem pontos críticos em J, porque τ é hiperbólico. Conseqüentemente, se $f^n|_J$ é injetora, então $f^n(J)$ é um intervalo de tamanho, no mínimo, igual a $\lambda^n \mu(J)$, onde $\mu(J)$ é a medida de Lebesgue de J. Isto é, se $f^n|_J$ é injetiva, então $\mu(f^n(J)) > \lambda^n \mu(J)$, com $|Df^n(x)| > \lambda > 1$. Assim, se $f^n|_J$ for injetiva, $\forall\, n$, teremos $\mu(\tau) > \mu(f^n(J)) > \lambda^n \mu(J)$, $\forall\, n$ e, portanto, $\mu(\tau) = \infty$, absurdo. Desta maneira, não é valido que para todo $n \in \mathbb{N}, f^n|_J$ seja injetiva. Uma vez que f^n não tem pontos críticos, isto implica que $S^1 \supset \tau \supset f^n(J) \supset S^1$ e, logo $\tau = S^1$.

Vamos agora supor que N não contém intervalos, f é uma imersão no círculo e que τ tem medida de Lebesgue positiva. Pelo Teorema da Densidade de Lebesgue, quase todo ponto de τ é ponto de densidade. Tomando $a \in \tau$ ponto de densidade teremos

$$(i) \quad \lim_{\delta \to 0} \frac{\mu(B_\delta(a) \cap \tau)}{\mu(B_\delta(a)} = 1,$$

onde $B_\delta(a)$ é a bola de centro a e raio δ.

Seja $\varepsilon > 0$ tal que a $B_\varepsilon(x) \subset V \ \forall\ x \in \tau$. Como τ e positivamente invariante temos que $B_\varepsilon(f^n(a)) \subset V, \forall\ n \geq 0$. Se $f^m(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f^m(a)) \forall\ m \leq n$, então $\mu(f^n(B_\delta(a)) > \lambda^n \mu(B_\delta(a))$, uma vez que $|Df(x)| > \lambda > 1$, para todo $x \in V$, logo existe n_0 tal que $f^{n_0}(B_\delta(a)) \not\subset$

$B_\varepsilon(f^{n_0}(a))$. Como $f^{n_0}(a) \in f^{n_0}(B_\delta(a))$, então $f^{n_0}(B_\delta(a))$, contém pelo menos metade da $B_\varepsilon(f^{n_0})$ e, portanto, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\mu(f^n(B_\delta(a))) \geq \varepsilon$.

Tomemos o maior n tal que $f^i(B_\delta(a)) \subset V$, para todo $0 \leq i \geq n$. Afirmamos que f^n tem distorções limitadas em $B_\delta(a)$, mais precisamente, existe uma constante C_1 que não depende de δ, tal que

$$(ii) \qquad \left|\frac{Df^n(x)}{Df^n(y)}\right| < C_1; \quad \forall x, y \in B_\delta(a).$$

De fato, uma vez que f é $C^{1+\alpha}$ e a derivada de f não é zero no fecho de V. Existe $\beta > 0$ tal que a função $x \mapsto \log|Df(x)|$ é C^β em V. Mas, f é $C^\alpha, 0 < \alpha < 1$ se $|f(x) - f(y)| < K|x-y|^\alpha$. Como $\log|Df(x)|$ é C^β, existe uma constante C tal que

$$|\log|Df(x)| - \log|Df(y)|| < C|x-y|^\beta.$$

Por essa razão

$$\log\left|\frac{Df^n(x)}{Df^n(y)}\right| = \sum_{i=0}^{n}(\log|Df(f^i(x))| - \log|Df(f^i(y))|) \leq \sum_{i=0}^{n} C|f^i(x) - f^i(y)|^\beta$$

Mas como

$$\begin{aligned}
|f^n(x) - f^n(y)| &= |f(f^{n-1}(x)) - f(f^{n-1}(y))| \\
&> \lambda|f^{n-1}(x) - f^{n-1}(y)| \\
&> \lambda^2|f^{n-2}(x) - f^{n-2}(y)| \\
&> \lambda^{n-i}|f^i(x) - f^i(y)| \\
&> \lambda^{n-1}|f(x) - f(y)| \\
&> \lambda^n|x-y|
\end{aligned}$$

teremos

$$|f^n(x) - f^n(y)| > \lambda^{n-i}|f^i(x) - f^i(y)|$$

$$|f^i(x) - f^i(y)| < \frac{1}{\lambda^{n-i}}|f^n(x) - f^n(y)|$$

$$|f^i(x) - f^i(y)|^\beta < \lambda^{(i-n)\beta}|f^n(x) - f^n(y)|^\beta$$

$$\sum_{i=0}^{n} C|f^i(x) - f^i(y)|^\beta \leq \sum_{i=0}^{n-1} C\left(\frac{1}{\lambda^\beta}\right)^{n-i}|f^n(x) - f^n(y)|^\beta. \tag{1.1}$$

Como S^1 é compacto, $\exists K$ tal que $|f^n(x) - f^n(y)| < K$ e portanto, segue da equação 1.1 que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} C|f^i(x) - f^i(y)|^\beta &\leq \sum_{i=0}^{n-1} CK^\beta \left(\frac{1}{\lambda^\beta}\right)^{n-i} \\
&\leq \tilde{C} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{\lambda^\beta}\right)^{n-i} \\
&\leq \tilde{C} \left(\left(\frac{1}{\lambda^\beta}\right)^{n} + \left(\frac{1}{\lambda^\beta}\right)^{n-1} + \ldots.. + \frac{1}{\lambda^\beta} \right) \\
&\leq \tilde{C} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{\lambda^\beta}\right)^{i} \\
&\leq \tilde{C} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda^\beta}\right)^{i} \\
&\leq \tilde{C} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{\lambda^\beta}}\right) \\
&\leq \tilde{C} \frac{\lambda^\beta}{\lambda^\beta - 1}
\end{aligned}$$

o que prova a afirmação, pois $\dfrac{|Df^n(x)|}{|Df^n(y)|} \leq \rho^{\tilde{C}\frac{\lambda^\beta}{\lambda^\beta - 1}}$.

Por esta razão, existe $n \geq 0$ tal que a aplicação f^n leva difeomorficamente $B_\delta(a)$ e com distorção limitada no intervalo $J_\delta = f^n(B_\delta(a))$ de comprimento maior que ε.

Usando a invariância τ obteremos que $f^n(\tau \cap B_\delta(a)) \subset (\tau \cap J_\delta)$. De (i) e de (ii) concluímos que

$$\frac{\mu(J_\delta \cap \tau)}{\mu(J_\delta)} \geq \frac{\mu(f^n(\tau \cap B(a,\delta)))}{\mu(\delta_j)} = 1 - \frac{\mu(f^n(B(a,\delta) \setminus \tau))}{\mu(f^n(B(a,\delta)))} \geq 1 - c_1 \frac{\mu((B(a,\delta) \setminus \tau))}{\mu((B(a,\tau))} \to 1$$

quando $\delta \to 0$. Pois, cada um dos intervalos J_δ tem comprimento mínimo ε assim existe uma seqüência $\delta_n \to 0$ tal que J_{δ_n} converge para o intervalo J. Por esta razão

$$\mu(J \cap \tau) = \mu(J).$$

Então τ é um conjunto fechado, com $\tau \supset J$ e isto é uma contradição pois assumimos que J não contém intervalos. $\square$

Corolário 1.2.1. *Se f for uma aplicação unimodal C^2 e J for um intervalo nice cujo fecho não esteja contido na bacia local de uma órbita periódica atratora, então Δ_J tem medida nula.*

Demonstração. Veja que a transformação C^∞ definida por $h(x) = \exp(i \cdot g^{-1}(x))$, onde $g : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ é dada por $g(x) = x/(1 - x^2)$, leva toda a reta real $\mathbb{R}$ difeomorficamente num arco de $S^1 \subset \mathbb{C}$. Conseqüentemente, usando h como conjugação, o Teorema 1.2 acima também é válido para $N \subset \mathbb{R}$ e, em particular, para os conjuntos Δ_J que como já observamos é, neste caso, expansor. $\square$

Quando uma aplicação unimodal f for C^2 e não possuir órbita periódica atratora, então os conjuntos Δ_J contém toda estrutura hiperbólica de f. De fato, se K é um conjunto hiperbólico e f não possui órbita periódica atratora, então K é compacto, invariante e expansor. Como $(f^n)'(c) = 0, \forall\ n > 0$, temos que o ponto crítico c de f não pertence a K. Não é difícil verificar que pondo $J = f^{-1}\big((\max f(K), +\infty)\big)$ teremos que $J \in \mathcal{N}_f$ e $K \subset \Delta_J$. Assim, segue proposição abaixo que se H for a estrutura hiperbólica de f, isto é, união de todos os conjuntos hiperbólicos de f (que neste caso serão somente os expansores), então $H = \bigcup_{J \in \mathcal{N}} \Delta_J$.

Proposição 1.3. *Se f é unimodal de classe C^2, então ou f tem órbita periódica atratora ou $c = \bigcap_{I \in \mathcal{N}_f} I$.*

Demonstração. Suponha que $J = \bigcap_{I \in \mathcal{N}_f} I \neq c$. Vemos que J, neste caso, é um intervalo e necessariamente *nice*. De fato, pondo $J = (a, b)$ e supondo que $\exists\ n > 0$ tal que $f^n(a) \in J$ então, por continuidade, para $I = (\alpha, \beta) \in \mathcal{N}_f$ suficientemente próximo a J teríamos $f^n(\alpha) \in J \subset I$ e isto contraria o fato de I ser *nice*.

Como Δ_J tem medida nula temos que $\mathcal{O}(f(J)) \cap J \neq \emptyset$. Seja $n > 0$ o menor inteiro tal que $f^n(J) \cap J \neq \emptyset$. Se $\partial J \cap int(f^n(J)) \neq \emptyset$ então $\exists p \in J$ tal que $f^n(p) \in \partial J$. Logo $I = f^{-1}((f(p), +\infty) \in \mathcal{N}_f$ e $I \not\subseteq J$ que é absurdo. Assim teremos $f^n(J) \subset \overline{J}$.

Temos então dois casos:

(1) $Fix(f^n|_J) \cap J = \emptyset$;

(2) $Fix(f^n|_J) \cap J \neq \emptyset$.

No primeiro caso teremos que $p = Fix(f^n|_J) \cap \partial J \neq \emptyset$ é órbita periódica atratora de f. Já no segundo caso, ou $p \in Fix(f^n|_J) \cap J$ é órbita periódica atratora de f ou é repulsora. Mas, se $p \in Fix(f^n|_J) \cap J$ for repulsora, então é fácil verificar que tomando $q = \max \mathcal{O}(p)$ teremos $I = f^{-1}((f(p), f(c))) \in \mathcal{N}_f$. Mas isto é absurdo, pois, também não é difícil ver que $\overline{I} \subset J$. $\square$

Capítulo 2

Ergodicidade

Para iniciar este capítulo, vamos definir o conceito de ergodicidade. Considere uma aplicação $f : M \to M$, onde M é um intervalo. Um subconjunto $U \subset M$ é dito *f-invariante* (ou *invariante por f*) se $f^{-1}(U) = U$. Dizemos que f é dita *ergódica* com respeito a medida de Lebesgue, se todo subconjunto f-invariante tem medida zero ou a medida de M, ou seja, $\text{Leb}(U) \in \{0, \text{Leb}(M)\}$, para todo $U \subset M$ que seja f-invariante. Observemos que aqui não estamos pedindo que a medida de Lebesgue seja invariante com respeito a f.

O resultado central deste capítulo é que toda aplicação S-unimodal, não-*flat* e infinitamente renormalizável (veremos a definição mais adiante) é ergódica com respeito a medida de Lebesgue. Para chegarmos a este resultado faremos um estudo das propriedades combinatórias dos intervalos *nice* e de suas pré-imagens. Estudaremos um pouco as aplicações de primeiro retorno á um intervalo *nice*.

Vamos assumir, em todo este capítulo, que f é uma aplicação S-unimodal, que o ponto crítico de f é um ponto $c \in (0, 1)$ e fixar $\mathcal{N}$ como sendo $\mathcal{N}_f$.

Lema 2.0.1. *Seja $I \in \mathcal{N}$ e sejam T_1 e $T_2 \subset [0, 1]$ intervalos tais que $f^{n_i} : T_i \to I$ é monótona e sobrejetora para algum $n_i \geq 0$. Se $T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$ e $n_1 \leq n_2$, então $T_2 \subset T_1$. Além disto, se $n_1 = n_2$, teremos $T_1 = T_2$.*

Demonstração. Se $T_2 \not\subset T_1$, então $\exists\ x \in \partial T_1 \cap T_2$. Logo, pondo $a = f^{n_1}(x)$, teremos $a \in f^{n_1}(\partial T_1) \cap f^{n_1}(T_2) = \partial I \cap f^{n_1}(T_2)$ e Conseqüentemente, $f^{n_2-n_1}(a) \in f^{n_2-n_1}(\partial I) \cap f^{n_2}(T_2) \subset \mathcal{O}(\partial I) \cap I$. Mas, isto contraria o fato de I ser *nice*. Temos então que $T_2 \subset T_1$. Além disto, se $n_1 = n_2$ teríamos também $T_1 \subset T_2$. Desta forma, $T_1 = T_2$. □

Dado um intervalo *nice* $I \in \mathcal{N}$ vamos denotar o **conjunto de pontos que visitam** I por C_I, isto é, $C_I = \{x \in [0,1] \parallel \mathcal{O}(x) \cap I \neq \emptyset\} = [0,1] \setminus \Delta_J$. Segue da proposição 1.2 que C_I é um aberto e do Corolário 1.2.1 que se $\bar{I}$ não estiver contido na bacia de uma órbita periódica atratora, então $\mathrm{Leb}(C_I) = 1$. Além disto, vamos provar agora que se $\{T_1, T_2, \ldots\}$ for o conjunto das componentes conexas de C_I, então para cada T_i existe um $n_i \geq 0$ tal que f^{n_i} leva T_i difeomorficamente em I.

Proposição 2.1. *Seja $J \in \mathcal{N}$ e suponha que f não tenha órbita periódica atratora . Se J é uma componente conexa de C_I, então existe um único inteiro $n = n(J) \geq 0$ tal que f^n leva J difeomorficamente em I. Além disso, $J, f(J), \ldots, f^n(J) = I$ é uma coleção disjunta aos pares de componentes conexas de C_I.*

Demonstração. Seja J uma componente conexa de C_I. Tome $n = \min\{k \geq 0 \parallel f^k(J) \cap I \neq \emptyset\}$. Já que J é uma componente conexa de $[0,1] \setminus \Delta_I$ (que é aberto) temos que J é aberto e, conseqüentemente, $\partial J \subset \Delta_I$. Veja que se $a \in J$, então $(f^n)'(a) \neq 0$, pois, $(f^n)'(a) = f'(f^{n-1}(a)) \cdot \ldots \cdot f'(f(a)) \cdot f'(a)$ e como $f^j(a) \notin I$, para todo $0 \leq j < n$, temos que $f^j(a) \neq c \in I$ e logo $f'(f^j(a)) \neq 0$, para todo $0 \leq j < n$. Desta forma $f^n|_J$ é um difeomorfismo. Vamos mostrar agora que $f^n(J) = I$. Para tanto escreva $(\alpha, \beta) = J$ e $(p, q) = I$. Como $\mathcal{O}(\partial J) = \mathcal{O}(\alpha) \cup \mathcal{O}(\beta)$ não intersecta I, pois $\partial J \subset \Delta_I$, teríamos que, se $f^n(J) \neq I$, então $f^n(\alpha)$ ou $f^n(\beta) \notin \overline{I}$, mas como $f^n(J) \cap I \neq \emptyset$ teríamos, neste caso, que $p \in f^n(J)$ ou $q \in f^n(J)$ e com isto existiria $x_0 \in J$ tal que $f^n(x_0) \in \partial I$. Pela escolha de n teríamos que $f^j(x_0) \notin I, \quad \forall 0 \leq j < n$, e por $\partial I \subset \Delta_I$ teríamos também que $f^j(x_0) \notin I, \forall\ j \geq n$. Ou seja, $x_0 \in J \cap \Delta_I$. O que é um absurdo. Desta forma, necessariamente, $f^n(J) = I$. Como $c \in I$ temos que $f^{n+1}|J$ não é um difeomorfismo, nem ao menos é monótona, e logo n é único.

Claro que, se $0 \leq j \leq n$, então $f^j(J)$ é uma componente conexa de C_I, pois $f^j(J) \cap \Delta_I = \emptyset$ e, por outro lado, $\partial(f^j(J)) = f^j(\partial J) \subset \Delta_I$. Falta agora verificar que $f^k(J) \cap f^l(J) = \emptyset, \forall\ 0 \leq k < l \leq n$. Suponha que existe $0 \leq k < l \leq n$ tais que $f^k(J) \cap f^l(J) \neq \emptyset$. Tomando $T_1 = f^l(J)$, $T_2 = f^k(J)$, $n_1 = n - l$ e $n_2 = n - k$ teremos $f^{n_1}(T_1) = I = f^{n_2}(T_2)$ e $n_1 < n_2$. Pelo Lema 2.0.1

teremos que $T_1 = f^l(J) \supset f^k(J) = T_2$ e logo $I = f^{n_1}(T_1) \supset f^{n_1}(T_2) = f^{n-(l-k)}(J)$. Mas como $f^{n-(l-k)}|J$ é difeomorfismo e $\mathcal{O}(\partial T_2) \cap I = \emptyset$, pois T_2 é uma componente conexa de C_I, teremos $f^{n_1}(T_2) = f^{n-(l-k)}(J) \supset I$. Entretanto, isto implica que $f^{n_1}(T_2) = I$ e logo $n_1 = n_2$, o que é um absurdo, pois, $n_2 > n_1$. $\square$

Dado um intervalo qualquer $L \subset [0,1]$ e um ponto $x_0 \in L$ tal que $\mathcal{O}(f(x_0)) \cap L \neq \emptyset$. O primeiro retorno de x_0 a L se dá em $f^n(x_0)$ onde $n = \min\{k > 0 \parallel f^k(x_0) \in L\}$. Podemos então definir uma **aplicação de primeiro retorno a** L, R_L, definida de $\text{Dom}(R_L) = \{x \in L \parallel \mathcal{O}(f(x)) \cap L \neq \emptyset\}$ para L. O lema abaixo garante que se I for um intervalo *nice* então quase todo ponto de I retorna a I, ou seja, que quase todo ponto de I pertence ao domínio da aplicação de retorno.

LEMA 2.0.2. *Se f não tem órbita periódica atratora, I é um intervalo* nice *e R é a aplicação retorno a I, então*

$$\text{Dom}(R) \textit{ é aberto e } \text{Leb}(I \setminus \text{Dom}(R)) = 0$$

Demonstração. Temos que $\text{Dom}(R) = \{x \in I \parallel \mathcal{O}(f(x)) \cap I \neq \emptyset\}$. Se $x \in \text{Dom}(R)$, então existe n tal que $f^n(x) \in I$, como I é aberto, e f contínua, temos que existe V vizinhança de x tal que $f^n(y) \in I, \forall\ y \in V$. Logo $x \in V \subset \text{Dom}(R)$, ou seja, todo ponto do $\text{Dom}(R)$ é interior e, conseqüentemente, $\text{Dom}(R)$ é aberto. Como $I \setminus \text{Dom}(R) = \{x \in I; \mathcal{O}(f(x)) \cap I = \emptyset\}$ segue que se $x \in I \setminus \text{Dom}(R)$, então $f(x) \in \Delta_I$. Logo, $I \setminus \text{Dom}(R) \subset f^{-1}(\Delta_I)$. Como f' se anula somente em um ponto, o ponto crítico, e pelo Corolário 1.2.1 temos $\text{Leb}(\Delta_I) = 0$. Segue que $\text{Leb}(f^{-1}(\Delta_I)) = 0$. $\square$

Uma propriedade interessante das aplicações unimodais sem órbitas periódicas atratoras é que o ponto crítico é acumulado pelo conjunto dos pontos periódicos da aplicação.

LEMA 2.0.3. *Se f não tem órbita periódica atratora e I é nice, então $Per(f) \cap I \neq \emptyset$.*

Demonstração. Suponhamos que $\text{Dom}(R)$, o domínio da aplicação de retorno a I, tenha somente uma componente conexa. Neste caso é necessário que $f(I) \cap \Delta_I = \emptyset$. Seja J a componente conexa de $[0,1] \setminus \Delta_I$ que contém $f(I)$ e n, o número de iterados que leva J em I, isto é, $f^n|_J$ é um difeomorfismo de J em I. Seja $A : [0,1] \to \overline{I}$ uma transformação afim que leva $[0,1]$ em $\overline{I}$, ou seja, $A(x) = (1-x)a + xb$ ou $A(x) = xa + (1-x)b$, onde $(a,b) = I$. Seja

$\hat{R} = A^{-1} \circ f^{n+1}|_{\,\overline{I}} \circ A$. Como R é conjugada com $\hat{R}$ pela aplicação A, que é um difeomorfismo, podemos estudar $\hat{R}$ no lugar de R. Assim, veremos que $\hat{R}'(x) = (f^{n+1})'(x)$ e que $\hat{R}'(x) \neq 0$ $\forall\ x \neq c$, onde c é o ponto crítico de f. Logo $\hat{R}$ é unimodal. Além disto, $S\hat{R} < 0$, pois $SA = 0$ e $S(f^{n+1}) < 0$, e $\hat{R}$ é não-*flat*. Escolhendo A tal que c seja ponto de máximo, e não de mínimo, para $\hat{R}$ teremos que $\hat{R}$ é uma aplicação S-unimodal.

É fácil ver que se $\hat{R}'(0) \leq 1$ então o zero seria um ponto fixo atrator de $\hat{R}$ e logo f teria uma órbita periódica atratora. Assim, $\hat{R}'(0) > 1$ e Conseqüentemente para todo $x_0 > 0$ suficientemente pequeno teremos $\hat{R}(x_0) > x_0$. Tomando $g(x) = \hat{R}(x) - x$ teremos $g(x_0) > 0 > g(1) = -1$. Pelo teorema do valor intermediário, $\exists\ x_1 \in (x_0, 1)$ tal que $\hat{R}(x_1) - x_1 = g(x_1) = 0$, ou seja, $\hat{R}(x_1) = x_1$. Assim $\hat{R}$ e, conseqüentemente, R, possuem um ponto fixo em $(0,1)$. Logo f tem um ponto periódico em I. (Figura 2.1).

Figura 2.1: (a) $c \notin \hat{R}(I)$ e (b) $c \in \hat{R}(I)$

Vamos agora supor que $\mathrm{Dom}(\hat{R})$ tenha mais de uma componente conexa. Tomemos então J componente conexa do $\mathrm{Dom}(\hat{R})$ tal que $c \notin J$. Logo, $\hat{R}(J) = (0,1) \supset \overline{I}$ e então $\hat{R}$ terá um ponto fixo em J. Novamente isto implica que f tem uma órbita periódica em I. $\square$

Corolário 2.0.2. *Se f não tem órbita periódica atratora, então existe seqüência $\{p_n\} \subset$ $Per(p)$ que converge para o ponto crítico c.*

Demonstração. Pela Proposição 1.3 existe uma seqüência $I_k \to c$ de intervalos *nice*. Logo, pelo lema anterior, $Per(f) \cap I_k \neq \emptyset, \forall\ k$. Segue que, existe uma seqüência $p_k \to c$ tal que $p_k \in Per(f) \cap I_k, \forall k$. $\square$

O lema de Koebe, que enunciaremos abaixo, é a ferramenta básica para o controle de distorção dos iterados de uma aplicação com Schwarziana negativa e este controle é fundamental para a prova da ergodicidade. Antes de anunciá-lo, vamos definir o que é uma **vizinhança δ-escalada** de um intervalo. Sendo $J \subset T$ dois intervalos, dizemos que T é vizinhança δ-escalada de J se as componentes conexas de $T \setminus J$, tem comprimento maior que $\delta \cdot |T|$.

Lema 2.0.4 (Lema de Koebe [MMS]). *Seja f uma aplicação com Schwarziana negativa. Considere ainda, M e T dois intervalos com $M \subset T$ contidos no domínio de f. As componentes* *de $T\backslash M$ são denotadas por L e R. Dado $\varepsilon > 0, \exists K > 0$ tal que se $f^n|_T$ é monótona e se $|f^n(T)|$ é uma vizinhança ε-escalada $|f^n(M)|$ então:*

(1) T contém uma vizinhança δ-escalada de M;

(2) $\dfrac{|Df^n(x)|}{|Df^n(y)|} \leq K, \quad \forall\ x, y \in M.$

Vamos supor que temos um intervalo *nice* $V \in \mathcal{N}$ e, para simplificar, que f não tenha órbita periódica atratora. Neste caso, com boa probabilidade $f(c) \notin \Delta_V$, pois este tem medida nula. Ou seja, o valor crítico $f(c)$ pertence a C_V. Defina então, sempre que $f(c) \in C_V$, S_V como a componente conexa de C_V que contém $f(c)$. Sempre que S_V estiver definido poderemos considerar a pré-imagem de S_V por f, isto é, considerar o intervalo aberto $\psi(V)$ definido por $\psi(V) = f^{-1}(S_V)$. Claro que $c \in \psi(V)$ e que $\psi(V)$ é dinamicamente simétrico com respeito ao ponto crítico. Além disto $\psi(V) \subset V$, caso contrário, existiria um ponto $a \in \partial V \cap \psi(V)$ e logo $f(\partial V) = f(a) \in S_V \supset C_V$, o que é absurdo.

Verifiquemos agora que $\psi(V)$ é também um intervalo *nice* de f. De fato, se $(\alpha, \beta) = \psi(V)$, então $f(\alpha) = f(\beta) \in \partial S_V$ e como S_V é componente conexa de C_V temos que $\partial S_V \subset \Delta_V$. Conseqüentemente, $\mathcal{O}(f(\partial(\psi(V)))) \cap V = \emptyset$. Mas, como $V \supset \psi(V)$ temos, em particular, que $\mathcal{O}(f(\partial(\psi(V)))) \cap \psi(V) = \emptyset$. Logo, $\mathcal{O}(\partial(\psi(V))) \cap \psi(V) = \emptyset$.

O lema que segue juntamente com o lema de *Koebe* e o "argumento do intervalo do meio" serão as armas fundamentais para a prova da ergodicidade.

Lema 2.0.5. *Se I é uma componente conexa de $C_{\psi(V)}$ que é levada difeomorficamente por f^n em $\psi(V)$, então existe um intervalo T contendo I tal que f^n leva T difeomorficamente em V.*

Demonstração. Seja $[0,1] \supset T \supset I$ o intervalo maximal tal que $f^n|_T$ é um difeomorfismo e $f^n(T) \subset V$. Como $f^n|_I$ é um difeomorfismo e $f^n(I) = \psi(V) \subset V$ temos $T \neq \emptyset$. Para provar o lema precisamos mostrar que $f^n(T) = V$. Suponha o contrário, isto é, suponha que existe $a \in \partial T$ tal que $f^n(a) \in V$. Se $f^j(a) \neq c, \forall\ 0 \leq j < n$, então, por continuidade, teríamos que se tomarmos $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno, então $(f^n)'(x) \neq 0$ e $f^n(x) \in V$, para todo $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Mas então, para $T_1 = T \cup (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ teríamos que $f^n|_{T_1}$ ainda seria um difeomorfismo e $f^n(T_1) = \psi(v) \subset V$, e isto contrariaria a maximalidade de T. Desta maneira, deve existir um $0 \leq j < n$ tal que $f^j(a) = c$. Como $j < n$ temos $f^j(I) \cap \psi(V) = \emptyset$ e assim $\exists \alpha \in \partial(\psi(I)) \cap f^j(T)$. Logo, $V \supset f^n(T) \ni f^{n-j}(\alpha)$, mas isto é absurdo, pois, como $f(\alpha) \in f(\partial(\psi(I))) \subset \partial S_V \subset \Delta_V$ temos $\mathcal{O}(f(\alpha)) \cap V = \emptyset$. $\square$

Na prova do Lema 2.0.3 nós consideramos um reescalonamento do domínio da aplicação de retorno a um intervalo. Este tipo de procedimento é chamado de renormalização. As técnicas de renormalização foram introduzidas no final da década de 70, no estudo de dinâmica unidimensional independentemente, por Coullet e Tresser e por Feigenbaum, para explicar alguns fenômenos de universalidade em bifurcações de famílias unimodais. Baseados em estudos numéricos eles conjecturaram que os fenômenos de universalidade poderiam ser explicados se o operador de renormalização, agindo em certo espaço apropriado de aplicações, tivesse um ponto fixo hiperbólico.

Devido aos trabalhos sobre renormalização desenvolvidos por diversos matemáticos nas décadas de 80 e 90, Lyubich, no final dos anos 90, conseguiu provar que para quase todo parâmetro (no sentido de medida de Lebesgue) da família quadrática, a dinâmica é hiperbólica ou estocástica. No caso hiperbólico teremos uma órbita periódica atratora que atrai quase todo ponto do intervalo $[0, 1]$ e os pontos deste intervalo que não são atraídos por esta órbita periódica formam um conjunto expansor. Já nos parâmetros em que a dinâmica for estocástica existe um intervalo periódico cuja órbita atrai quase todo ponto do intervalo $[0, 1]$, além disto a dinâmica restrita a esta órbita é expansora não uniforme.

Introduzamos formalmente o conceito de renormalização.

Definição 2.1. *Diremos que f é renormalizável se existir um intervalo $I \subsetneq [0, 1]$ tal que o domínio da aplicação de retorno a I for o próprio I. Neste caso, diremos que I é um intervalo de renormalização de f. A aplicação f será chamada de infinitamente renormalizável (∞-renormalizável) se existir uma coleção infinita de intervalos de renormalização distintos.*

Veja que, se I é um intervalo de renormalização para f, então existe um $m \geq 0$ tal que a aplicação de retorno a I é dada por $R_I = f^m|I$. Além disto, segue do Teorema de Mañé e do Teorema 1.2 que $c \in \overline{\bigcup_{j=0}^m f^j(I)}$, pois $\text{Leb}(\bigcup_{j=0}^m f^j(I)) > 0$. Claro que, se J pertence a órbita de I, $J \in \{I, f(I), \ldots, f^m(I)\}$, então $\mathcal{O}(\partial J) \cap J = \emptyset$. Com facilidade, verifica-se que

$c \in \bigcup_{j=0}^{m} f^j(I)$ e se I_c é o intervalo da órbita de I que contém o ponto crítico, então ele é dinamicamente simétrico com respeito ao ponto crítico. Desta forma, I_c é um intervalo *nice*. Observe que, se $s \geq 0$ é o menor natural tal que $f^s(I) \subset I_c$, então f^s leva I difeomorficamente em I_c e conjuga R_I com R_{I_c}, isto é, $R_I = (f^s|I)^{-1} \circ R_{I_c} \circ (f^s|I)$. Em resumo, se f é renormalizável com respeito a um intervalo I, podemos trocar I pelo intervalo de sua órbita que contém o ponto crítico. Este último é *nice* e também é um intercalo de renormalização de f, e do ponto de vista dinâmico a aplicação de retorno não muda. Por estas razões iremos somente estudar renormalizações com respeito a intervalos *nice*.

Devido a sua importância no estudo de aplicações unimodais vamos definir o operador de renormalização que foi aludido acima. Entretanto, queremos frisar que não usaremos o operador de renormalização na prova da ergodicidade das aplicações ∞-renormalizáveis e que somente iremos defini-lo com finalidade informativa.

Se $I \in \mathcal{N}_f$ for um intervalo de renormalização de f definiremos a **renormalização de f em relação a** I e denotaremos por $\mathcal{R}_I f$, como a aplicação $\mathcal{R}_I f : [0,1] \to [0,1]$ dada por $\mathcal{R}_I f = A^{-1} \circ R_I \circ A$, onde $A : [0,1] \to \overline{I}$ é escolhida entre as duas transformações afins que levam $[0,1]$ em $\overline{I}$ de maneira que c seja ponto de máximo, e não de mínimo para $\mathcal{R}_I f$. Desta maneira $\mathcal{R}_I f$ é também um aplicação S-unimodal (ver observações na demonstração do Lema 2.0.3).

Não é difícil constatar que, se $I \in \mathcal{N}_f$, então existe somente um número finito de intervalos de renormalização de f que contenha I. Conseqüentemente, se f for uma aplicação renormalizável existe sempre um maior intervalo de renormalização de f, ou seja, existe um intervalo $I \in \mathcal{N}_f$ que contém todos os outros intervalo de renormalização. Defini-se então o operador de renormalização $\mathcal{R}$ que leva uma aplicação unimodal renormalizável f em uma outra aplicação unimodal por $\mathcal{R}f = \mathcal{R}_I f$, onde $I \in \mathcal{N}_f$ é o maior intervalo de renormalização de f. Também não é difícil verificar que se $I_1 \supsetneq I_2$ são dois intervalos de renormalização para f, então a aplicação unimodal $\mathcal{R}_{I_1} = A^{-1} \circ R_{I_1} \circ A$ é renormalizável com respeito ao intervalo $\widetilde{I}_2 = A^{-1}(I_2)$ e que as aplicações $\mathcal{R}_{\widetilde{I}_2}(\mathcal{R}_{I_1} f)$ e $\mathcal{R}_{I_2} f$ são conjugadas. Em particular, se f for ∞-renormalizável, então $(\mathcal{R})^n f = \underbrace{\mathcal{R} \ldots \mathcal{R}}_{n \ vezes} f$ está bem definida, para todo $n > 0$.

Antes de iniciarmos a prova do resultado principal deste trabalho, vale observar que, se f for ∞-renormalizável, então $\mathcal{U} = \{I \in \mathcal{N}_f \parallel I \text{ é intervalo de renormalização de } f\}$ é formado por uma seqüência encaixada de intervalos $I_1 \supsetneqq I_2 \supsetneqq I_3 \supsetneqq \ldots$ tal que $c = \bigcap_n I_n$. De fato, se $c \neq \bigcap_n I_n$, então $J = \bigcap_n I_n$ seria um intervalo *nice* e assim, como já foi mencionado acima, teríamos somente um número finito de intervalos de renormalização contendo J, o que é uma contradição. Conseqüentemente, se f tiver uma órbita periódica atratora, então ela tem no máximo um número finito de renormalizações. Também, deve ser observado que o ponto crítico de uma aplicação unimodal ∞-renormalizável é sempre recorrente, ou seja, c é sempre um ponto de acumulação de sua órbita ($c \in \omega(c)$). Desta forma, quando f for ∞-renormalizável, teremos $c \in \mathcal{C}_I \ \forall\ I \in \mathcal{N}_f$.

Teorema 2.1. *Seja $f : [0,1] \to [0,1]$ uma aplicação S-unimodal, não-***flat**. *Se f é ∞-renormalizável, então f é ergódica com respeito a Lebesgue.*

Demonstração. Suponha que f seja ∞-renormalizável e $U \in \mathcal{N}$ um intervalo de renormalização. Logo, $f(c) \in S_U$ que é, como já foi definido, a componente conexa de C_U que contém o valor crítico. Seja $n > 0$ o inteiro tal que f^n leva S_U difeomorficamente em U e ponha $M = f(U) \subset S_V$.

Pela Proposição 2.1 teremos que $f^j(S_V) \cap f^k(S_V) = \emptyset, \forall\ 0 \leq j \neq k \leq n$ e, conseqüentemente, os elementos da coleção $\mathcal{M} = \{M, f(M), \ldots, f^n(M)\}$ são dois a dois disjuntos, pois $f^j(M) \subset f^j(S_V)$, $\forall 0 \leq j \leq n$.

Escolha $m_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $|f^{m_0}(M)| \leq |f^j(M)|$, $\forall\ 0 \leq j \leq n$. Se $f^{m_0}(M)$ possuir elementos de $\mathcal{M}$ posicionados na reta real tanto a sua esquerda quanto a sua direita, ponha $m = m_0$. Por outro lado, se acontecer do posicionamento de $f^{m_0}(M)$ na reta real $\mathbb{R}$ for o mais à esquerda da coleção $\mathcal{M}$ ou o mais à direita, então escolha $m \in \{m_0 + 1, m_0 + 2\}$ de maneira que $f^m(M)$ não seja nem o mais à esquerda nem o mais à direita da coleção $\mathcal{M}$. Claro que, $|f^{m_0+2}(M)| \leq \gamma |f^{m_0+1}(M)| \leq \gamma^2 |f^{m_0}(M)|$, onde $\gamma = \max\{|Df(x)| \parallel x \in [0,1]\}$. Desta forma, pela escolha do m, teremos $|f^m(M)| \leq \gamma^2 |f^j(M)|$, $\forall\ 0 \leq j \leq n$ e, além disto, existem elementos de $\mathcal{M}$ tanto à esquerda quanto à direita de $f^m(M)$.

Entre os elementos de $\mathcal{M}$ que ficam a esquerda de $f^m(M)$ seja $f^l(M)$ o mais próximo a $f^m(M)$. Analogamente, seja $f^r(M)$ o elemento a direita de $f^m(M)$ mais próximo. Consideremos H o intervalo máximo contendo M, para o qual $f^m(H)$ é monótona e tal que $f^m(H) \subset [f^l(M), f^r(M)]$, onde $[f^l(M), f^r(M)]$ é o fecho convexo de $f^l(M) \cup f^r(M)$, ou seja,

$[f^l(M), f^r(M)] = \{(1-t)x + ty \parallel t \in [0,1],\ x \in f^l(M) \text{ e } y \in f^r(M)\}$.

Afirmação $f^m(H) = [f^l(M), f^r(M)]$.

Prova. Sejam L e R as componentes conexas de $H \setminus M$. Suponha que H não satisfaça a propriedade acima. Neste caso o fecho do m-ésimo iterado de uma das componentes conexas de $H \setminus M$ estaria contida no interior de $[f^l(M), f^r(M)] \setminus f^m(M)$. Digamos que esta componente seja L, isto é, $f^m(\overline{L}) = \overline{f^m(L)} \subset interior\Big([f^l(M), f^r(M)] \setminus f^m(M)\Big)$. Pela maximalidade de H existe $i \in \{0, 1, \ldots .m-1\}$ tal que $c \in \partial f^i(L)$. Como $f^k(M) \cap U = \emptyset\ \forall 0 \leq k < n$ temos, em particular, que $f^i(M) \cap U = \emptyset$. Isto significa que $\overline{f^i(L)}$ contém o fecho de uma das componentes conexas de $U \setminus \{c\}$. Assim, $\overline{f^m(L)} = \overline{f^{m-i-1}(f^{i+1}(L))} \supset \overline{f^{m-i-1}(f(U))} = \overline{f^{m-i-1}(M)}$, isto é, $interior\Big([f^l(M), f^r(M)] \setminus f^m(M)\Big) \supset \overline{f^m(L)} \supset \overline{f^{m-i-1}(M)}$. De maneira análoga, mostraríamos que R contém um iterado de M. Por essa razão $[f^l(M), f^r(M)]$ conteria no mínimo quatro elementos de $\mathcal{M}$ o que é absurdo pela construção de $[f^l(M), f^r(M)]$. Assim, concluímos a prova da Afirmação.

Como $\gamma^2|f^r(M)| \geq |f^m(M)| \leq \gamma^2|f^l(M)|$ temos que $f^m(H)$ é uma vizinhança γ^2-escalada de $f^m(M)$. Pelo Lema de Koebe, existe uma constante $\delta_0 > 0$ dependendo unicamente de γ tal que H contém a vizinhança δ_0-escalada de M. Como o ponto crítico é não *flat*, existe uma constante $\delta > 0$ tal que $H' = f^{-1}(M)$ contém a vizinhança δ-escalada de U. Esta constante $\delta > 0$ depende somente de γ e da ordem da criticalidade de f.

Dado J uma componente de C_U e $k \geq 0$ o inteiro tal que f^k leva difeomorficamente J em U, tome T como intervalo máximo contendo J tal que $f^k|_T$ é monótona e $f^k(T) \subset H'$, onde $H' = f^{-1}(H)$.

Afirmação que $f^k(T) = H'$.

Prova. Como T é o intervalo máximo contendo J, tal que $f^k|_T$ é monótona, consideremos L' e R' componentes de $T \setminus J$ e fixemos uma delas, por exemplo L'. Pela maximalidade de T, existe $0 \leq j < k$, tal que $c \in \partial f^j(L')$ como $j < k$ temos que $f^j(J) \cap U = \emptyset$, portanto, $f^j(L')$ contém uma componente de $U \setminus \{c\}$. Conseqüentemente, $f^{j+1}(L') \supset M$ e $f^{k-(j+1)}(f^{j+1}(L')) \supset f^{k-j-1}(M)$, isto é,

$$f^k(L') \supset f^{k-j-1}(M).$$

Suponhamos, por contradição, que $\overline{f^k(L')} \subset H'$. Então, como $f^k(L') \supset f^{k-j-1}(M)$ e f^{m+1} é monótona sobre cada componente de $H' \setminus \{c\}$ temos que $f^{m+1}|f^{k-j-1}(M)$ é monótona. Conseqüentemente, f^{k-j-1} é monótona dado que $f^{k+m-j}|_M$ é monótona. Como U é um intervalo de renormalização e f não tem órbita periódica atratora temos, necessariamente, que $c \in R_U(U) = f^n(M)$, isto implica que $k + m - j \leq n$. Além disso, se $f^{j+1}(L') \supset M$, então $f^k(L') \supset f^{k-j-1}(M)$. Segue que

$$f^k(L') \subset \overline{f^k(L')} \subset H' \Rightarrow \overline{f^{k-j-1}(M)} \subset H' \text{ e } \overline{f^{k-j}} \subset H.$$

Assim, $f^m(\overline{f^{k-j}(M)}) \subset f^m(H) = [f^l(M), f^r(M)]$, isto é, $f^{m+k-j}(M) \subset [f^l(M), f^r(M]$. Mas isto significa que $[f^l(M), f^r(M)]$ contém no mínimo quatro intervalos da forma $f^i(M)$ com $i \leq n$ o que é absurdo. Provamos então que $f^k(T) \supset H'$ e deste modo temos que $f^k(T) = H'$. Com isto, concluímos a prova desta segunda afirmação.

Mostramos portanto que $\exists\ \delta > 0$ tal que para todo intervalo de renormalização $U \in \mathcal{N}$ e cada intervalo J componente conexa de C_U temos um intervalo T tal que se $n \geq 0$ é o inteiro tal que f^n leva J difeomorficamente em U, então f^n leva T difeomorficamente numa vizinhança δ-escalada de U, isto é, $f^n(T) = H'$.

Segue então do Lema de Koebe que $\exists\ K > 0$ tal que para todo intervalo de renormalização $U \in \mathcal{N}$ e cada intervalo J componente conexa de C_U, teremos um inteiro $n \geq 0$ que f^n leva J difeomorficamente em U com distorção limitada por K, isto é,

$$\frac{1}{K} < \frac{|Df^n(x)|}{|Df^n(y)|} < K \ \forall\ x \text{ e } y\ \in J.$$

Suponhamos que existam dois conjuntos X e $Y \subset [0,1]$ invariantes, isto é, $f^{-1}(X) = X$ e $f^{-1}(Y) = Y$, e ambos com medida de Lebesgue positiva.

Seja $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$ uma seqüência encaixada de intervalos de renormalização tal que $\bigcap_j I_j = \{c\}$. Como $\mathrm{Leb}(\Delta_{I_j}) = 0,\ \forall\ j$, pelo Corolário 1.2.1, temos que $\mathrm{Leb}(\bigcup_j \Delta I_j) = 0$ e, conseqüentemente, quase todo ponto $x \in X$ não pertence a $\bigcup_j \Delta I_j$. Por outro lado, pelo teorema da densidade de Lebesgue, quase todo ponto $x \in X$ é ponto de densidade do conjunto X, ou seja,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathrm{Leb}(B_\varepsilon(x) \cap X)}{\mathrm{Leb}(B_\varepsilon(x))} = 1$$

e desta maneira podemos escolher um ponto de densidade $x \in X$ que não pertence a $\bigcup_j \Delta I_j$.

Como $C_{I_j} = [0,1] \setminus \Delta_{I_j}$, podemos fixar um ponto de densidade $x \in X$ tal que $x \in C_{I_j}$ $\forall j \geq 1$. Denotemos a componente conexa de C_{I_j} que contém x por $J_j \subset C_{I_j}$.

Como X é invariante por f temos $f^n(X \cap J) = I_n \cap X$, onde I_n é uma seqüência de intervalos que acumulam no ponto crítico e $X \subset J_n \subset [0,1]$. Como $|I_n|$ é uma seqüência de intervalos, pelo princípio da contração temos que *se U_n e I_n são seqüências de intervalos com $|I_n| \to 0$ e tal que algum iterado f^{k_n} de f leva $|U_n|$ em I_n, então $|U_n| \to 0$*. Por essa razão, como $|I_n| \to 0$ e, $\exists s$ tal que $f^s(J_n) = I_n$ temos que $|J_n| \to 0$.

Além disso,

$$1 \sim \frac{\text{Leb}(X \cap J_n)}{\text{Leb}(J_n)}$$

e

$$\frac{\text{Leb}f^n(X \cap J_n)}{\text{Leb}f^n(J_n)} = \frac{\text{Leb}(I_n \cap X)}{\text{Leb}(I_n)}.$$

Como $\dfrac{\text{Leb}(X \cap J_n)}{\text{Leb}(J_n)} \sim 1$, então $\dfrac{\text{Leb}(X^c \cap J_n)}{\text{Leb}(J_n)} \sim 0$.

O Teorema da mudança de variável que nos diz que: *se $h : U \to V$, um difeomorfismo de classe C^1 entre os abertos $U, V \subset \mathbb{R}^m$, $X \subset U$ um compacto J-mensurável e $f : h(X) \to \mathbb{R}$ uma função integrável, então $f \circ h : X \to \mathbb{R}$ é integrável e*

$$\int_{h(X)} f(y)dy = \int_X f(h(x)) \cdot |\det(h'(x))|\, dx.$$

Veja que como $f^s|_{J_n}$ é difeomorfismo, temos que

$$f^s(X^c \cap J_n) = X^c \cap f^s(J_n),$$

pois, $f^s(X^c) = X^c$ e $f^s(J_n) = I_n$.

Assim,

$$|f^s(X^c \cap J_n)| = \int_{x \in f^s(X^c \cap J_n)} dx = \int_{x \in (X^c \cap J_n)} |Df^s(x)| dx \qquad (*)$$

Por outro lado, $\dfrac{|I_n|}{|J_n|} = \dfrac{|f^s(J_n)|}{|J_n|}$, mas $J_n = (a, b)$. Portanto,

$$f^s(J_n) = (f^s(a), f^s(b)) \ \text{ e } \ |f^s(J_n)| = |f^s(a) - f^s(b)|.$$

Assim,

$$\frac{|f^s(J_n)|}{|J_n|} = \frac{|f^s(a) - f^s(b)|}{|a-b|}.$$

Pelo teorema do valor médio, existe $y \in (a, b)$ tal que

$$|Df^s(y)| = \frac{|f^s(a) - f^s(b)|}{|a-b|}.$$

Logo,

$$\frac{|I_n|}{|J_n|} = \frac{|f^s(J_n)|}{|J_n|} = |Df^s(y)|.$$

Por essa razão, a equação $(*)$ pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
|f^s(X^c \cap J_n)| &= \int_{x \in f^s(X^c \cap J_n)} dx \\
&= \int_{x \in (X^c \cap J_n)} |Df^s(x)| dx &\quad (2.1)\\
&\leq \int_{x \in (X^c \cap J_n)} K.\frac{|I_n|}{|J_n|} dx \\
&= K\frac{|I_n|}{|J_n|} \int_{x \in (X^c \cap J_n)} &\quad (2.2)\\
&= K\frac{|I_n|}{|J_n|} |X^c \cap J_n|,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
|f^s(X^c \cap I_n)| &\leq K\frac{|I_n|}{|J_n|}.|X^c \cap I_n| \\
\frac{|f^s(X^c \cap J_n)|}{|I_n|} &\leq \frac{K}{|J_n|}.|X^c \cap I_n| < K\varepsilon
\end{aligned}$$

como ε é muito pequeno temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{|X^c \cap I_n|}{|I_n|} &= \frac{|f^s(X^c \cap J_n|}{|I_n|} \\
&\leq K\frac{|X^c \cap I_n|}{|J_n|} < K\varepsilon \sim K.0 \sim 0
\end{aligned}$$

isto significa que:

$$\frac{\text{Leb}(X^c \cap I_n)}{\text{Leb}(I_n)} \sim 0$$

e, portanto,

$$\frac{\text{Leb}(X \cap I_n)}{\text{Leb}(I_n)} \sim 1 \quad (i).$$

Como $Y \subset [0,1]$ está nas mesmas condições de X, isto é, invariante com Leb > 0, então para quase todo ponto $y \in Y$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\text{Leb}(B_\varepsilon(y) \cap X)}{\text{Leb}(B_\varepsilon(y))} \sim 1.$$

Procedendo, de maneira análoga, obtemos também que

$$\frac{\text{Leb}(Y \cap I_n)}{\text{Leb}(I_n)} \sim 1 \qquad (ii).$$

Observando (i) e (ii), notamos que por (i) I_n é quase todo repleto de X e por (ii) I_n é também quase todo repleto de Y. Assim, (i) e (ii) não podem ocorrer ao mesmo tempo uma vez que X e Y são distintos. Logo, $X = Y$. Conseqüentemente, quase todo ponto de $[0,1]$ é ponto de densidade de X. Então quase todo ponto de $[0,1] \in X$, ou seja , Leb$(X) = 1$. Logo f é ergódica. $\square$

Apêndice A

Anexo

A.0.1 Shift

Seja $\mathbb{X}$ um espaço topológico. Denotemos por $\Sigma(X)$ o conjunto das seqüências $\psi : \mathbb{Z} \to \mathbb{X}$ e $\Sigma^+(\mathbb{X})$ o conjunto das seqüências $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{X}$ providos da topologia produto, isto é, a topologia gerada, no caso de $\Sigma(X)$, pela base de abertos

$$\{\ldots \mathbb{X} \times \mathbb{X} \times A_{n_0} \times \ldots \times A_{n_1} \times \mathbb{X} \times \mathbb{X} \ldots \| A_j \text{ é aberto de } \mathbb{X}\}.$$

Já para o $\Sigma^+(\mathbb{X})$ a base é

$$\{A_0 \times \ldots \times A_n \times \mathbb{X} \times \mathbb{X} \ldots \| A_j \text{ é aberto de } \mathbb{X}\}.$$

Quando $\mathbb{X}$ é um conjunto finito com n elementos simplificamos a notação escrevendo $\Sigma(\mathbb{X}) = \Sigma_n$, $\Sigma^+(\mathbb{X}) = \Sigma_n^+$ e identificamos $\mathbb{X}$ como o conjunto $\{1, \ldots, n\}$ provido da topologia discreta. O *shift* $\sigma : \Sigma(\mathbb{X}) \to \Sigma(\mathbb{X})$ é a transformação contínua definida por $(\sigma\psi)(n) = \psi(n+1)$.

Pode-se mostrar que se $\mathbb{X}$ é um espaço métrico compacto então a topologia de $\Sigma(\mathbb{X})$ ou de $\Sigma^+(\mathbb{X})$ é a mesma que topologia gerada pela a distância

$$d(\alpha, \beta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2^{|n|}} d_{\mathbb{X}}(\alpha(n), \beta(n))$$

em $\Sigma(\mathbb{X})$ ou

$$d(\alpha,\beta)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{|n|}}d_{\mathbb{X}}(\alpha(n),\beta(n))$$

em $\Sigma^+(\mathbb{X})$, onde $d_{\mathbb{X}}$ é a distância em $\mathbb{X}$.

Observe que dois pontos, digamos α e $\beta\in\Sigma_{\mathbb{X}}^+$, estão próximos se $d(\alpha,\beta)$ for pequeno e isto só acontece quando existe um $k>0$ suficientemente grande tal que $\alpha(j)=\beta(j)$, $\forall\ 0\leq j<k$. De fato, assumindo $k=\min\{j\geq 0 \parallel \alpha(j)\neq\beta(j)\}$ temos $\dfrac{d_{\mathbb{X}}(\alpha(k),\beta(k))}{2^k}\leq d(\alpha,\beta)\leq\dfrac{\mathrm{diam}(\mathbb{X})}{2^{k-1}}$, onde $\mathrm{diam}(\mathbb{X})$ é o diâmetro de $\mathbb{X}$ (que é compacto), ou seja, $\mathrm{diam}(\mathbb{X})=\sup\{d_{\mathbb{X}}(x,y)\parallel x \text{ e } y\in\mathbb{X}\}$.

Proposição A.1. *Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é dada por $f(x)=4tx(1-x)$ com $t>1$, então $f|_\Lambda$ é conjugada a $\sigma:\Sigma_2^+\to\Sigma_2^+$, onde $\Lambda=\{x\in[0,1]\parallel\mathcal{O}_f(x)\subset[0,1]\}$*

Demonstração. Segue do teorema de Mañe que Λ é um conjunto expansor para f. Logo, existem $C>0$ e $\lambda>1$ tais que $Df^n(x)>C\lambda^n$, para todo $n>0$ e todo $x\in\lambda$.

Veja que $f^{-1}([0,1])$ é a união disjunta de dois intervalos fechados. Sejam $0=a_1<b_1<a_2<b_2<=1$ os pontos do bordo de $f^{-1}([0,1])$, isto é, $f^{-1}([0,1])=I_1\cup I_2$, onde $I_k=[a_k,b_k]$ e $k=1,2$.

O itinerário dos pontos de Λ é a aplicação $\gamma:\Lambda\to\Sigma_2^+$ definida da seguinte maneira. Dado $x\in\Lambda$ temos que para cada $j\geq 0$ $f^j(x)$ pertence a algum I_k. Assim, defina o valor de $\gamma(x)$ no ponto j por

$$(\gamma(x))(j)=\begin{cases}1 \text{ se } f^j(x)\in I_1\\ 2 \text{ se } f^j(x)\in I_2\end{cases}$$

Temos então que $f^j(x)\in I_{(\lambda(x))(j)}\ \forall\ j\in\mathbb{N}$.

Vamos agora definir uma aplicação de Σ_2^+ para Λ. Observe que ${f_k}^{-1}$ leva o intervalo $[0,1]$ difeomorficamente no intervalo I_k. Além disto, como $f^s\circ({f_{i_0}}^{-1}\circ\ldots\circ{f_{i_s}}^{-1})(x)=x$ temos $|D({f_{i_0}}^{-1}\circ\ldots\circ{f_{i_s}}^{-1})(x)|<C^{-1}\lambda^{-s}\ \forall\ x\in[0,1]$. Desta maneira, dados quaisquer $i_0,\ldots,i_s\in\{1,\ldots,n\}$ teremos que $I_{i_0,\ldots,i_s}={f_{i_0}}^{-1}\circ\ldots\circ{f_{i_s}}^{-1}([0,1])$ é um intervalo de comprimento menor que $C^{-1}\lambda^{-s}$ e com a propriedade que se $x\in I_{i_0,\ldots,i_s}$ então $x\in I_{i_0}$, $f(x)\in I_{i_1}$, $\ldots$,$f^s(x)\in I_{i_s}$. Dado $\theta\in\Sigma_2^+$ teremos $I_{\theta(0)}\supset I_{\theta(0),\theta(1)}\supset I_{\theta(0),\theta(1),\theta(2)}\supset I_{\theta(0),\ldots,\theta(s)}$ e $|I_{\theta(0),\ldots,\theta(s)}|<C^{-1}\lambda^{-s}\longrightarrow 0$,

quando $s \to +\infty$. Conseqüentemente $\bigcap_{s=0}^{\infty} I_{\theta(0),\dots,\theta(s)}$ define um único ponto $x_\theta \in [0,1]$. Como $f^s(x_\theta) \in I_{\theta(s)}$ $\forall$ s temos não so que $x_\theta \in \Lambda$ como também que $\gamma(x_\theta) = \theta$. Por outro lado como é fácil verificar que γ é injetiva segue que $\Sigma_2^+ \ni \theta \mapsto x_\theta \in \Lambda$ é de fato a inversa de γ.

A continuidade de γ é clara pois pontos próximos tem os primeiros trechos de seus itinerários coincidentes, ou seja, $(\gamma(x))(0) = (\gamma(y))(0), \dots, (\gamma(x))(k) = (\gamma(y))(k)$ para k grande. Também é fácil ver que se α e $\beta \in \Sigma_2^+$ são próximos, ou seja, existe um k grande tal que $\alpha(0) = \beta(0), \dots, \alpha(k) = \beta(k)$, então x_α e $x_\beta \in I_{\alpha(0),\dots,\alpha(k)}$ e logo x_α é próximo a x_β, de fato, $|x_\alpha - x_\beta| < C^{-1}\lambda^{-k}$. Assim, a continuidade de γ^{-1} também está assegurada. Em resumo, γ é um homeomorfismo entre Γ e Σ_2^+.

Segue da definição de γ que $(\gamma(f(x)))(j) = (\gamma(x))(j+1)$, ou seja, $\gamma \circ f(x) = \sigma \circ \gamma(x)$. Assim, concluímos que γ é uma conjugação entre $f|_\Lambda$ e $\sigma : \Sigma_2^+ \to \Sigma_2^+$ $\square$

Referências Bibliográficas

[BL1] A. M. Blokh & M. Ju. Lyubich. Attractores of maps of the interval. *Func. Anal. and Appl. 21* (1987) 32-46.

[BL2] A. M. Blokh & M. Ju. Lyubich. Measurable dynamics of S-unimodal maps of the interval. *Preprint.*, 1990/2 at SUNY.

[D] R.L. Devaney.An Introduction to Chaotic Diynamical Systems. Adilson Wesley, Menlo Park (l986).

[G] J. Guckenheimer. Limit sets of S-unimodal maps with zero ent ropy. *Comm: Math. Phys. 110* (1987) 133-160.

[GuJ] J. Guckenheimer & S. Johnson. Distortion of S-unimodal maps. *Ann. Math. 132* (1) (1990). 71-131.

[H] F. Hofbauer. The structure of piecewise monotonic transformations. *Ergod. Ph & Dynam. Sys. 1* (1981),150-178.

[JS] M. Jacobson & G. Swiatek. Metric properties of non-renormalizable S-unimodal maps. IHES *Preprint.* 1991.

[K] G. Keller. Exponents, attractors and Hops decompositions for interval maps.*Ergod. Th. & Dynam. Sys. 10* (1990), 717-744.

[L] M. Lyubich The quadratic Family as a qualitatively Sovable Model of Chaos. *Notices of the AMS Vol 47, number 9.*

[M] M. Martens. Distortion results and invariant Cantor sets of unimodal maps. *Theory Dynam. Systems, 14(2),1994.*

[MMS] M. Martens, W. de Melo & F. van Strien. Julia-Fatou-Sullivan the ory for real one-dimensioal *dynamics. Acta Math. 168* (1992), 273-318.

[MS] W. de Melo, S. van Strien. One-dimensional dynamics.*Springer Verlag, Berlin, 1993*

[Mi] M. Misiurewicz. Absolutely continuous measures for certain maps of the interval. *Publ. Math.* IHES 53 (1981), 17-51.

[Mr] J. Milnor. On the concept of attractor. *Commun. Math. Phys. 99* (1985), 177-195.

[P] V. Pinheiro. Combinatorial properties and distortion control for unimodal.maps. *Teses de doutorado Série F-127/2000.*

Universidade Federal da Bahia-UFBa
Instituto de Matemática/Depto. de Matemática

Campus de Ondina, Av. Adhemar de Barros s/n, CEP:40170-110
www.im.ufba.br/hpinst/mestrado