Universidade Federal da Bahia
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Dissertação de Mestrado

Finitude das Álgebras de Rees associadas a filtrações monomiais

Manuela da Silva Souza

Salvador-Bahia
Fevereiro de 2009

Finitude das Álgebras de Rees associadas a filtrações monomiais

Manuela da Silva Souza

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Eduardo Nogueira Bahiano.

Salvador-Bahia

Fevereiro de 2009

Souza, Manuela da Silva.

Finitude das Álgebras de Rees associadas a filtrações monomiais / Manuela da Silva Souza. – Salvador, 2009.

45 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Eduardo Nogueira Bahiano.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2009.

Referências bibliográficas.

1. Álgebra. 2. Anéis (Álgebra). 3. Anéis comutativos. I. Bahiano, Carlos Eduardo Nogueira. II. Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática. III. Título.

CDD - 512.4

Finitude das Álgebras de Rees associadas a filtrações monomiais

Manuela da Silva Souza

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática, em 06 de fevereiro de 2009.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Carlos Eduardo Nogueira Bahiano (Orientador)
UFBA

Prof. Dr. José Fernandes Silva Andrade
UFBA

Prof. Dr. Paulo Roberto Brumatti
UNICAMP

À minha mãe.

Aquele que toma a realidade e faz um sonho é um artista. Também será um artista aquele que do sonho fizer a realidade.

(Malba Tahan)

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por iluminar a minha vida e por me dar força e empenho na conduta dos meus estudos.

Aos meus pais, meus irmãos e minha madrinha, pelo afeto, carinho e compreensão em todos os momentos.

Ao meu amado Teles (Meu Bem), meu companheiro e cúmplice, por tornar a minha vida mais feliz e colorida.

A meu orientador, meu "teacher" Bahiano, pela disponibilidade, pela paciência e por puxar as minhas orelhas, sempre que necessário.

Aos professores Zé Fernandes e Paulo Brumatti, pelas sugestões feitas a dissertação, em especial, a Zé Fernandes, um conselheiro sábio, pelo exemplo de vida.

Ao professor Enaldo, pelo incentivo, pelo carinho e principalmente pela generosidade.

A toda equipe do Laborátorio de ensino de matemática da UFBA (LEMA-UFBA), em especial, à professora Lina e à Fabiana, pelo aprendizado e por todos os nossos momentos juntos.

À professora Cecília, por ter me ensinado a olhar a matemática com outros olhos, ainda no tempo da escola, e pela torcida.

Às "super-poderosas", Fa, Liu e Vanessinha, sinônimos de amizade e companherismo, pela parceria acadêmica durante esses 6 anos e por tornar essa caminhada mais suave e alegre.

Às minhas amigas da época do Serravalle, Mag e Edilene e a Ísis, pelo carinho e por entender os momentos que não pude estar presente.

A João Paulo (JP), pelo apoio com o latex.

Aos meus colegas de turma, Tiago e Luide, e a todos os familiares, amigos, professores e funcionários do IM-UFBA que contribuiram de forma direta ou indireta nesta conquista ou que torceram por mim.

Para finalizar, à CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho mostra-se que as Álgebras de Rees associadas a certas filtrações, em particular, a filtração simbólica associada a ideais monomiais, são finitamente geradas. Além disso, apresenta-se um estudo introdutório sobre as álgebras de cobertura de vértices associadas a grafos simples e mostra-se que essas álgebras configuram um caso particular das Álgebras de Rees simbólicas associadas a ideais monomiais.

Palavras-chave: Álgebras de Rees; Ideais monomiais; Cone racional; Anéis de semigrupo; Potências simbólicas.

Abstract

In this work we deal with Rees algebras associated to some filtrations, in particular, we show that those associated with symbolics filtrations related to monomials ideals are finitely generated. The vertex cover algebras associated to simple graph are introduced and also presented as a particular case of symbolic Rees algebras of monomial ideals.

Keywords: Rees Algebras; Monomial Ideals; Rational cone; Semigroup rings; Symbolic Powers.

Sumário

Introdução

Nas últimas quatro décadas, o estudo detalhado de certas álgebras (anéis) especiais ganharam muito impulso em álgebra comutativa devido a relação mais profunda dessa área com a geometria algébrica, a combinatória e a computação. É o caso das Álgebras de Rees associadas a uma filtração. Formalmente, se $\mathbb{B}$ é um anel comutativo com unidade e $\Im = \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma filtração multiplicativa de ideais em $\mathbb{B}$, a *Álgebra de Rees associada a* $\Im$ é a $\mathbb{B}-$álgebra $R_{\Im}(\mathbb{B}) = \bigoplus_{n\geq 0} I_n t^n$. Essas álgebras foram introduzidas pelo matemático inglês David Rees para provar o lema de Artin-Rees (1956) sobre filtrações de módulos.

Se considerarmos $R_{\Im}(\mathbb{B})$ como uma subálgebra de $\mathbb{B}[t]$ surge naturalmente a pergunta: Uma vez que $\mathbb{B}[t]$ é uma $\mathbb{B}-$álgebra finitamente gerada, $R_{\Im}(\mathbb{B})$ possui geração finita? Em geral, a resposta é não. Um contra exemplo foi encontrado, por exemplo, por Nagata em [10]. Diante da resposta negativa, buscam-se hipóteses razoáveis com o intuito de encontrar uma resposta positiva que possa ser generalizada em função de características e invariantes dos ideais da filtração, já que para um mesmo anel $\mathbb{B}$, a depender da escolha da $\Im$, $R_{\Im}(\mathbb{B})$ pode ter ou não geração finita.

A noção de potência simbólica foi introduzida por W. Krull na decáda de 30 (do século passado). Trata-se de um objeto extremamente natural em álgebra comutativa, cujo primeiro significado geométrico foi dado por Oscar Zariski. Cerca de 20 anos depois, Hochester chamou a atenção para o comportamento peculiar desses objetos quando se considerava o caso de certos ideais primos. Paralelamente, vários pesquisadores deram início ao estudo abstrato das filtrações simbólicas, isto é, filtrações dadas pelas potências silmbólicas de um mesmo ideal, introduzindo formalmente a Álgebra de Rees simbólica. No caso particular em que o ideal é primo em um anel noetheriano, em 1985 Cowsik questionou se a Álgebra de Rees simbólica associada seria sempre finitamente gerada. P. Roberts foi o primeiro a encontrar um contra-exemplo para essa conjectura baseado no contra-exemplo de Nagata citado no parágrafo acima. Em 1988, graças ao trabalho de Lyubeznik – *On arithmetical rank of monomial ideals* – sabe-se que a Álgebra de Rees simbólica de ideais monomiais gerados por monômios livres de quadrado tem tipo de geração finita (veja [8]). Tal resultado foi estendido para qualquer ideal monomial com o trabalho de Herzog, Takayuki e Trung, publicado em 2007, intitulado *Symbolic Powers* *of monomial ideals and vertex cover algebras* (ver ref. [6]), e esse mesmo artigo motivou o presente trabalho.

Os objetos de estudo desta dissertação são as álgebras de Rees associadas a certas filtrações monomiais, em particular, a filtração simbólica. Nosso principal objetivo é mostrar que as Álgebras de Rees simbólicas de ideais monomiais de $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_r]$, $\mathbb{K}$ um corpo, são finitamente geradas.

A leitura deste texto pressupõe, naturalmente, conhecimentos sobre a teoria de anéis, módulos e álgebras. Definições e resultados dessa natureza podem ser encontrados por exemplo em [1] ou [13]. É possível que um leitor principiante considere a leitura dessas referências um tanto difíceis. Se tal acontecer, o leitor pode trocá-las por [7].

A dissertação esta dividida em três capítulos. No primeiro capítulo aborda-se as ferramentas, conceitos e resultados necessários para a compreensão dos capítulos seguintes. O capítulo 2 trata dos semigrupos afins finitamente gerados e da relação que existe entre o fato da interseção de uma coleção finita deles ainda ser finitamente gerada e as Álgebras de Rees associadas a $\Im = \{{J_1}^n \cap {J_2}^n \cap \ldots \cap {J_s}^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, no qual $\{J_1, J_2, \ldots, J_s\}$ é uma coleção de ideais monomiais, ser também finitamente geradas. No último capítulo, mostra-se o resultado principal desta dissertação, apresenta-se um estudo introdutório sobre as álgebras de cobertura de vértices associadas a grafos simples e mostra-se que o número de coberturas de vértices indecomponíveis associadas a esses grafos é finito. A dissertação contém ainda um exemplo em que os geradores das estruturas estudadas são explicitamente calculados.

Destacamos que, para os fins deste trabalho, anéis serão sempre anéis comutativos com unidade (não nula!).

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo faremos uma breve discussão de alguns conceitos e resultados que serão muito úteis nesta dissertação. O capítulo está organizado em 5 seções cujos títulos são palavras chaves deste trabalho. As seções 1.1, 1.3 e 1.4 consistem, respectivamente, dos seguintes tópicos de álgebra comutativa: ideais monomiais, potências simbólicas e Álgebras de Rees. A leitura desta parte pode ser dispensada ou apenas usada para eventuais consultas, caso o leitor tenha feito um curso de álgebra comutativa. A seção 1.2 aborda um pouco sobre os anéis de semigrupos e a última seção, cones racionais, trata de um tópico de análise convexa de muita utilidade neste contexto e grande apelo intuitivo.

Lembrando mais uma vez, sempre que usarmos o termo anel estaremos nos referindo a anel comutativo com unidade.

1.1 Ideais monomiais

Seja $p \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_r]$, $\mathbb{K}$ corpo. Da teoria elementar de anéis, sabemos que se cada termo de p pertence a um ideal I então $p \in I$. No entanto, a recíproca pode não ser verdadeira, mesmo quando p encontra-se em sua forma normal (sem parcelas redundantes). Nesta seção, estudaremos uma classe especial de ideais, os ideais monomiais, em que a recíproca é sempre válida, desde que p esteja em sua forma normal. Além disso, por se tratar de uma importantíssima ferramenta neste trabalho, caracterizaremos a decomposição primária desses ideais.

Denote $X^\alpha := {x_1}^{\alpha_1} \ldots {x_r}^{\alpha_r}$ com $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_r) \in \mathbb{N}^r$.

1.1.1 Definição e propriedades

Definição 1.1.1. *Seja $I \subset \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_r]$ um ideal. Dizemos que I é um ideal monomial se $I = \langle \{X^\alpha;\ \alpha \in \Lambda \subset \mathbb{N}^r\} \rangle$, para algum $\Lambda \subset \mathbb{N}^r$ não vazio, ou seja, I é gerado por uma coleção não vazia de monômios.*

Lema 1.1.2. *Seja I um ideal monomial gerado por $\{X^\alpha;\ \alpha \in \Lambda \subset \mathbb{N}^r\}$. Dado f pertencente a $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_r]$ em sua forma normal então $f \in I$ se, e somente se, cada termo de f é divisível por algum X^α.*

Demonstração. Se $f \in I$ então $f = \sum_{i=1}^{s} g_i X^{\alpha(i)}$ com $g_i \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_r]$ e $\alpha(i) \in \Lambda$. Escrevendo cada g_i como soma de termos e distribuindo os produtos, encontramos que cada termo $a_\beta X^\beta$ de f com $a_\beta \neq 0$ tem $\beta = \alpha(i) + \gamma$ para algum $\alpha(i) \in \Lambda$ e $\gamma \in \mathbb{N}^r$.

A recíproca é imediata.

□

Note que pelo teorema da base de Hilbert (ver [1]), $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_r]$, $\mathbb{K}$ um corpo, é um anel noetheriano, ou seja, se I é um ideal de $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_r]$ então existe um conjunto finito de polinômios que geram I. Em particular, se I é um ideal monomial, pelo lema 1.1.2 é possível verificar facilmente que I é gerado por uma coleção finita de monômios, mais precisamente, pela coleção de monômios associados aos termos dos polinômios geradores.

O teorema a seguir apresenta uma demonstração alternativa para este resultado.

Teorema 1.1.3. *Se $I = \langle\{X^\alpha;\ \alpha \in \Lambda \subset \mathbb{N}^r\}\rangle$ então $\exists\ \alpha(1), \ldots, \alpha(k) \in \Lambda$ tais que $I = \langle X^{\alpha(1)}, \ldots, X^{\alpha(k)}\rangle$. Em outras palavras, todo ideal monomial é gerado por uma coleção finita de monômios.*

Demonstração. Vamos mostrar essa afirmação por indução no número de variáveis.

Se $r = 1$ então I é gerado por $x_1^{a_1}, x_1^{a_2}, \ldots$ com $a_i \in \Lambda \subset \mathbb{N}$.

Seja $\alpha = \min\{a_i;\ a_i \in \Lambda\}$. Então x_1^α divide todos os outros geradores de I. Logo, $I = \langle x_1^\alpha\rangle$.

Suponha a afirmação válida para $r \geq 1$ e denote a variável x_{r+1} por y. Observe que todo monômio de $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_r, y]$ pode ser escrito da forma $X^\beta y^m$ com $\beta \in \mathbb{N}^r$ e $m \in \mathbb{N}$.

Seja $\overline{I} = \langle\{X^\beta;\ X^\beta y^m \in I \text{ para algum } m \in \mathbb{N}\}\rangle$. Por construção, $\overline{I}$ é um ideal monomial de $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_r]$. Assim, por hipótese de indução, $\overline{I}$ é gerado por uma lista finita de monômios, isto é:

$$\overline{I} = \langle X^{\beta(1)}, \ldots, X^{\beta(s)}\rangle. \tag{1.1}$$

Consequentemente, $\exists\ m(1), m(2), \ldots, m(s) \in \mathbb{N}$ tais que $X^{\beta(i)} y^{m(i)} \in I,\ i \in \{1, 2, \ldots, s\}$. Tomando $m_0 = \max\{m(1), m(2), \ldots, m(s)\}$ temos que

$$X^{\beta(i)} y^{m_o} \in I,\ \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, s\}. \tag{1.2}$$

Por outro lado, para cada $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq m_0$, considere $I_k = \langle\{X^\beta;\ X^\beta y^k \in I\}\rangle$. Mais uma vez, usando a hipótese de indução, para cada k temos:

$$I_k = \langle X^{\beta_k(1)}, \ldots, X^{\beta_k(t_k)}\rangle. \tag{1.3}$$

Pela definição de I_k,

$$X^{\beta_k(j)}y^k \in I,\ j \in \{1, 2, \ldots, t_k\}. \tag{1.4}$$

Defina

$$G_1 = \langle\{X^{\beta(i)}y^{m_o},\ 1 \leq i \leq s\}\rangle \quad \text{e} \quad G_2 = \langle\{X^{\beta_k(j)}y^k, 0 \leq k \leq m_0,\ 1 \leq j \leq t_k\}\rangle.$$

Afirmamos que $I = \langle\{G_1 \cup G_2\}\rangle$.

Com efeito, de 1.2 e 1.4 é imediato que $I \supset \langle\{G_1 \cup G_2\}\rangle$.

Seja $X^\beta y^m \in I$.

Se $m \geq m_0$, como $X^\beta \in \overline{I}$, por 1.1 e pelo lema 1.1.2, X^β é divisível por $X^{\beta(i)}$ para algum i. Assim, $X^\beta y^m$ é divisível por $X^{\beta(i)}y_0^m$, o que conclui esse caso.

Se $m < m_0$ então $X^\beta \in I_m$. Usando 1.4 e o lema 1.1.2 temos que X^β é divisível por $X^{\beta_m(j)}$ para algum j. Portanto, $X^\beta y^m$ é divisível por $X^{\beta_m(j)}y^m$ e isso conclui a prova.

□

Fazendo uso do teorema anterior é possível verificar, sem muita dificuldade, que o produto, a interseção e o radical de ideais monomiais são também ideais monomiais.

1.1.2 Decomposição primária

Uma decomposição primária de um ideal I em um anel $\mathbb{A}$ é uma expressão de I como interseção de um número finito de ideais primários. A decomposição primária nos permite reduzir, em certo sentido, o estudo de um ideal arbitrário ao estudo de ideais primários. Vale ressaltar que uma decomposição primária de um ideal I em um anel qualquer pode não existir. No entanto, se I é um ideal em um anel de polinômios com coeficientes em um corpo, ou mais geralmente, se I é um ideal em um anel noetheriano, pelo teorema de Lasker-Noether (ref. [13]), I tem uma decomposição primária.

Definição 1.1.4. *Seja I um ideal e $I = \bigcap_{i=1}^{s} Q_i$ uma decomposição primária de I em que Q_i é P_i-primário. $\bigcap_{i=1}^{s} Q_i$ é dita uma decomposição primária minimal ou reduzida de I, se satisfizer as seguintes condições:*

(i) *Para todo $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$, $Q_i \not\supset \bigcap_{j=1,\, j\neq i}^{s} Q_j$;*

(ii) *Se $i \neq j$ então $P_i \neq P_j$, ou seja, os primos associados aos ideais primários da decomposição são dois a dois disjuntos.*

Observação 1.1.5. *Toda decomposição primária pode ser reduzida a uma decomposição primária minimal. Esse processo consiste na eliminação dos primários que já contém a* *interseção dos outros presentes na decomposição e observando-se que interseção de dois ideais $P-$primários é também $P-$primário.*

Exemplo 1.1.6. *Seja $I = (x^2, xy)$ um ideal de $\mathbb{K}[x, y]$.*

$$I = (x) \cap (y - cx, x^2) \text{ é uma decomposição primária minimal, } \forall\, c \in \mathbb{K}$$

cujos primos associados são $\sqrt{(x)} = (x)$ e $\sqrt{(y - cx, x^2)} = (x, y)$.

Isso mostra que a decomposição minimal pode não ser única.

O próximo teorema mostrará que os primos associados às componentes primárias da decomposição de I, são unicamente determinados. O ponto importante é que determinar tais primos não depende da decomposição minimal; depende apenas de uma propriedade intrínseca ao ideal.

Teorema 1.1.7. *Seja $I = \bigcap_{i=1}^{s} Q_i$ uma decomposição primária minimal de I em que P_i é o radical de Q_i. Um ideal $P \in \operatorname{Spec}(\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_r])$ é igual a algum P_i se, e somente se, $\exists\, c \notin I$ tal que $P = \sqrt{(I : c)}$.*

Demonstração. Seja $P \in \operatorname{Spec}(\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_r])$ tal que $P = P_j$ para algum j. Como a decomposição é minimal, $\exists\, c \in \bigcap_{i=1,\, i\neq j}^{s} Q_i$ tal que $c \notin Q_j$. Assim,

$$(I : c) = (\bigcap_{i=1}^{s} Q_i : c) = \bigcap_{i=1}^{s} (Q_i : c) = \left[\bigcap_{i=1,\, i\neq j}^{s} (Q_i : c) \right] \cap (Q_j : c) = (Q_j : c).$$

Portanto, $\sqrt{(I : c)} = \sqrt{(Q_j : c)} = P_j = P$.

Reciprocamente, suponha que para algum $c \notin I$, $\sqrt{(I : c)} = P$.

Como $(I : c) = \bigcap_{i=1}^{s} (Q_i : c)$ então

$$P = \sqrt{(I : c)} = \bigcap_{i=1}^{s} \sqrt{(Q_i : c)} = \bigcap_{c \notin Q_i} P_i.$$

Logo, $P = P_i$ para algum i.

□

O conjunto dos primos associados às componentes primárias da decomposição minimal de I é chamado de conjunto dos primos associados de I ou simplesmente, primos de I e é denotado por $\operatorname{Ass}(I)$.

Um primo associado de I que não contém nenhum outro primo de I é chamado de primo mínimo; caso contrário, é dito primo imerso. O conjunto de todos os primos mínimos de I é denotado por $\operatorname{Min}(I)$.

Note que no exemplo 1.1.6 a não unicidade da decomposição minimal ocorre devido a componente primária associada ao primo imerso de I. De maneira geral, as componentes primárias associadas aos primos mínimos de uma decomposição primária são unicamente determinadas (veja ref. [1]).

Observação 1.1.8. *Se* $\widetilde{P} \in \operatorname{Spec}(\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_r])$ *e* $\widetilde{P} \supset I$ *então* $\widetilde{P} \supset P$ *para algum* $P \in \operatorname{Ass}(I)$ *(veja ref. [1]).*

Observação 1.1.9. $\operatorname{Min}(I) \subset \operatorname{Ass}(I^n),\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

De agora diante, para simplificar a notação, uma decomposição primária minimal de um ideal I será escrita da seguinte forma:

$$I = \bigcap_{P \in \operatorname{Ass}(I)} Q(P) \quad \text{em que} \quad Q(P) \text{ é } P\text{-primário.}$$

O lema a seguir auxiliará a demostração do teorema que caracterizará uma decomposição primária de um ideal monomial.

Lema 1.1.10. *Seja* $J \subset \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_r]$ *um ideal gerado por monômios. Se* $X^\alpha,\ X^\beta$ *são monômios tais que* $\operatorname{MDC}(X^\alpha,\ X^\beta) = 1$ *então*

$$(X^\alpha X^\beta,\ J) = (X^\alpha,\ J) \cap (X^\beta,\ J).$$

Demonstração. Note que $(X^\alpha X^\beta,\ J) \subset (X^\alpha,\ J) \cap (X^\beta,\ J)$.

Reciprocamente, seja $f \in (X^\alpha,\ J) \cap (X^\beta,\ J)$. Então,

$$f = g_1 X^\alpha + h_1 = g_2 X^\beta + h_2 \text{ com } h_1,\ h_2 \in J \text{ e } g_1,\ g_2 \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_r].$$

Sem perda da generalidade, podemos supor que g_1 e g_2 estão em suas formas normais e que todos os seus termos não pertencem a J.

Se $g_1 X^\alpha \in J$ temos que $f \in J \subset (X^\alpha X^\beta,\ J)$. Caso contrário, existe um termo $a_i X^{\gamma(i)} X^\alpha$ de $g_1 X^\alpha$ que não pertence a J. Como

$$g_1 X^\alpha = g_2 X^\beta + h_2 - h_1 \in (X^\beta,\ J),$$

temos necessariamente que $X^{\gamma(i)} X^\alpha \in (X^\beta)$. Uma vez que $\operatorname{MDC}(X^\alpha,\ X^\beta) = 1$ temos que $X^\beta \mid X^{\gamma(i)}$. Repetindo o argumento em todos os termos de $g_1 X^\alpha$ que não pertencem a J obtemos

$$g_1 X^\alpha \in (X^\alpha X^\beta,\ J).$$

Portanto, $f \in (X^\alpha X^\beta,\ J)$.

□

Teorema 1.1.11. *Se I é um ideal monomial então existe uma decomposição primária $I = \bigcap_{i=1}^{s} Q_i$ em que cada Q_i é um ideal monomial gerado por potências de variáveis. Em particular, os primos associados de I são gerados por subconjuntos de variáveis.*

Demonstração. Seja $I = (X^{\alpha(1)}, \ldots, X^{\alpha(k)})$ em que $\{X^{\alpha(1)}, \ldots, X^{\alpha(k)}\}$ é um conjunto mínimo de geradores de I.

Provaremos por indução no número de geradores que existe tal decomposicão primária.

Re-enumerando os índices das variáveis, se necessário, podemos supor

$$X^{\alpha(1)} = {x_1}^{\alpha_1(1)} \ldots {x_t}^{\alpha_t(1)} \quad \text{com} \quad t \leq r.$$

Se $k = 1$ então $I = (X^{\alpha(1)})$. Usando recursivamente o lema 1.1.10 temos:

$$I = ({x_1}^{\alpha_1(1)}) \cap \ldots \cap ({x_t}^{\alpha_t(1)}).$$

Defina $J = (X^{\alpha(2)}, \ldots, X^{\alpha(k)})$. Por conseguinte, $I = (X^{\alpha(1)}, J)$. Usando novamente o lema 1.1.10 de forma recursiva temos:

$$I = ({x_1}^{\alpha_1(1)}, J) \cap \ldots \cap ({x_t}^{\alpha_t(1)}, J).$$

Como um número de geradores de J é $k-1$, por hipótese de indução, J tem uma decomposição primária $J = \bigcap_{i=1}^{u} \widetilde{Q_i}$ em que cada $\widetilde{Q_i}$ é gerado por potências de variáveis.

Portanto, para cada $j \in \{1, \ldots, t\}$,

$$({x_j}^{\alpha_j(1)}, J) = ({x_j}^{\alpha_j(1)}, \bigcap_{i=1}^{u} \widetilde{Q_i}) = \bigcap_{i=1}^{u} ({x_j}^{\alpha_j(1)}, \widetilde{Q_i})$$

o que conclui a indução.

Além disso, sabe-se que os primos associados são os radicais dos ideais primários de uma decomposição primária. Assim, é imediato que o radical de um ideal primário descrito como acima, é gerado por um subconjunto de variáveis.

□

Observação 1.1.12. *A decomposição primária dada acima pode não ser minimal. Por exemplo, $I = (x^2, xy, y^2) \subset \mathbb{K}[x, y]$ é um ideal $(x, y)-$primário. Consequentemente, sua decomposição minimal é dada por ele próprio. Desta forma, nenhuma decomposição primária cujas componentes são geradas por potências de variáveis é minimal.*

1.2 Anéis de semigrupos

Nesta seção, definiremos os anéis de semigrupos afins. Comecemos relembrando o conceito de monóide para a partir daí, definirmos semigrupo afim.

Definição 1.2.1. *Seja $\mathbb{E}$ um conjunto não vazio onde está definida uma operação*

$$* : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \longmapsto \mathbb{E}.$$

Dizemos que o par $(\mathbb{E}, *)$ é um monóide se as seguintes propriedades são satisfeitas:

- $a * (b * c) = (a * b) * c, \forall\, a, b, c \in \mathbb{E}$ *(associatividade)*
- $\exists\, e \in \mathbb{E}$ *tal que* $a * e = e * a = a, \forall\, a \in \mathbb{E}$ *(existência do elemento neutro)*

A fim de simplificar a notação, usaremos $\mathbb{E}$ em lugar de $(\mathbb{E}, *)$ quando não houver possibilidade de ambiguidade para *.

Exemplo 1.2.2. $\mathbb{N}$ *é um monóide com a operação usual de soma.*

Exemplo 1.2.3. *Todo grupo é um monóide.*

Exemplo 1.2.4. $(\mathbb{Z}^r, +)$ *é um monóide.*

Definição 1.2.5. *Seja $\mathbb{E}$ um monóide e H um subconjunto de $\mathbb{E}$. Dizemos que H é um submonóide de $\mathbb{E}$ se H é ele próprio um monóide com a mesma operação de $\mathbb{E}$.*

Definição 1.2.6. *Dizemos que H é um semigrupo afim, se H é um submonóide de $(\mathbb{Z}^r, +)$.*

Exemplo 1.2.7. $\mathbb{N}^r$ *é um semigrupo afim.*

O próximo exemplo mostra que nem todo semigrupo afim é finitamente gerado. A posteriori (Cap.2) mostraremos uma condição suficiente e necessária para que isso ocorra.

Exemplo 1.2.8. *Seja $H = \{(i, j) \in \mathbb{N}; ij \neq 0$ ou $(i, j) = (0, 0)\}$.*
H é um semigrupo afim de $\mathbb{Z}^2$ que não é finitamente gerado.

De fato, sejam $h_1 = (i_1, j_1), h_2 = (i_2, j_2) \in H$. Note que se

$$i_1 j_1 + i_1 j_2 + i_2 j_1 + i_2 j_2 = 0$$

então $i_1 j_1 = 0$ e $i_2 j_2 = 0$ o que equivale a dizer que $h_1 = h_2 = (0, 0) \in H$ ou seja $h_1 + h_2 \in H$.

Suponhamos por absurdo que H fosse finitamente gerado:

$$H = \langle (i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots, (i_m, j_m) \rangle \text{ com } (i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots, (i_m, j_m) \in H - \{(0, 0)\}.$$

Considere o elemento $(i,j) = (1, \max\{j_1, j_2, \ldots, j_m\} + 1) \in H$. Consequentemente, $\exists\ n_1, n_2, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$ tais que

$$(1, \max\{j_1, j_2, \ldots, j_m\} + 1) = n_1(i_1, j_1) + n_2(i_2, j_2) + \cdots + n_m(i_m, j_m).$$

Assim, determinar $n_1, n_2, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$ se resume a resolver o sistema,

$$\begin{cases} n_1 i_1 + n_2 i_2 + \cdots + n_m i_m = 1 \\ n_1 j_1 + n_2 j_2 + \cdots + n_m j_m = \max\{j_1, j_2, \ldots, j_m\} + 1. \end{cases}$$

Da primeira equação, $\exists!\ r \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tal que

$$n_r i_r = 1 \Rightarrow n_r = 1 \quad \text{e} \quad n_k = 0 \text{ para } k \neq r.$$

Portanto, aplicando esse resultado na segunda equação temos $\max\{j_1, j_2, \ldots, j_m\} + 1 = j_r$ o que é um absurdo.

Logo, H não é um semigrupo afim finitamente gerado.

Definição 1.2.9. *Sejam $\mathbb{A}$ um anel e H um semigrupo afim. Definimos*

$$\mathbb{A}[H] := \{f : H^r \longrightarrow \mathbb{A}\ ;\ f \text{ tem suporte finito}\}.$$

em que o suporte de uma função f é o conjunto de elementos $h \in H^r$ tais que $f(h) \neq 0$.

Dados f e $g \in \mathbb{A}[H]$, definindo-se a soma em $\mathbb{A}[H]$ por:

$$\begin{array}{rcl} [f+g] : H^r & \longrightarrow & \mathbb{A} \\ h & \longmapsto & [f+g](h) = f(h) + g(h) \end{array}$$

e o produto por:

$$\begin{array}{rcl} [f.\, g] : H^r & \longrightarrow & \mathbb{A} \\ h & \longmapsto & [f.\, g](h) = \displaystyle\sum_{v+w=h} f(v)g(w) \end{array}$$

é possível verificar que, com as operações acima, $\mathbb{A}[H]$ é um anel.

Também podemos definir um produto de elementos de $\mathbb{A}$ por elementos de $\mathbb{A}[H]$ da seguinte forma:

$$\begin{array}{rcl} [a.f] : H^r & \longrightarrow & \mathbb{A} \\ h & \longmapsto & [a.f](h) = af(h) \end{array}$$

Novamente é fácil verificar que $\mathbb{A}[H]$ é um $\mathbb{A}-$módulo. Mais ainda, $\mathbb{A}[H]$ é uma álgebra sobre $\mathbb{A}$.

Se $\mathbb{K}$ é um corpo, $\mathbb{K}[H]$ é chamado anel de semigrupo.

Toda função $f \in \mathbb{A}[H]$ pode ser escrita de forma única, a menos de ordem entre as parcelas, como uma soma finita de termos, isto é, funções cujo suporte é unitário. Se $m \in \mathbb{A}[H]$ é um termo, com $m(h) = m(h_1, \ldots, h_r) = a$ podemos utilizar a notação $ax_1^{h_1}x_2^{h_2}\ldots x_r^{h_r}$ para representar m.

Note que $\mathbb{K}[H]$ é uma subálgebra do anel de polinômios de Laurent $\mathbb{K}[x_1, {x_1}^{-1}, x_2, {x_2}^{-1}, \ldots, x_r, {x_r}^{-1}]$ gerada por $\{x_1^{h_1}x_2^{h_2}\ldots x_r^{h_r}\}_{h\in H}$. Se $H = \mathbb{N}^r$ então $\mathbb{K}[H]$ é o anel polinômios em r variáveis sobre $\mathbb{K}$.

Note ainda que se $\Lambda \subset \mathbb{N}^r$ é não vazio e I é um ideal monomial em $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_r]$ gerado por $\{X^\alpha;\ \alpha \in \Lambda\}$, pelo lema 1.1.2, é possível verificar facilmente que

$$I \cong \mathbb{K}[H] \text{ em que } H = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \in \mathbb{N}^r\ ;\ x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_r^{\alpha_r} \in I\} \cup \{0\}.$$

1.3 Potências simbólicas

A formação do anel de frações e o processo de localização associado são uma das mais importantes ferramentas usadas em álgebra comutativa. Apesar da riqueza deste tema, para sermos objetivos, nesta seção daremos apenas a definição e propriedades do anel de frações necessárias para definir potência simbólica.

Seja $\mathbb{A}$ um anel, S um sistema multiplicativo de $\mathbb{A}$, isto é, $S \subset \mathbb{A}$ é tal que $1 \in S$, $0 \notin S$ e S é fechado com respeito ao produto de seus elementos.

Considere a relação de equivalência $\sim$ no conjunto $\mathbb{A} \times S$ dada por

$$(a, s) \sim (b, t) \Leftrightarrow (at - bs)u = 0 \text{ para algum u} \in S.$$

Note que se $\mathbb{A}$ é um domínio de integridade $(a, s) \sim (b, t) \Leftrightarrow at = bs$.

Defina $S^{-1}\mathbb{A} := \dfrac{\mathbb{A} \times S}{\sim}$ e denote cada classe de equivalência $(a, s) := \dfrac{a}{s}$.

Dados $\dfrac{a}{s}, \dfrac{b}{t} \in S^{-1}\mathbb{A}$ se considerarmos a soma e o produto dados por:

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st} \quad \text{e} \quad \frac{a}{s}\frac{b}{t} = \frac{ab}{st};$$

temos que $S^{-1}\mathbb{A}$ é um anel o qual denominamos de anel de frações de $\mathbb{A}$ em S.

Quando $S = \mathbb{A} - P$ e P é um ideal primo, denotaremos $S^{-1}\mathbb{A}$ por $\mathbb{A}_P$.

É possível verificar facilmente que

$$\begin{aligned} \varphi : A &\longrightarrow S^{-1}\mathbb{A} \\ x &\longmapsto = \frac{x}{1} \end{aligned}$$

é um homomorfismo de anéis com unidade em que o núcleo é o conjunto dos elementos cujos anuladores interceptam S.

Se $\mathbb{A}$ é um domínio de integridade e $S = \mathbb{A} - \{0\}$ então o anel de frações é um corpo, o qual denominamos de corpo de frações de $\mathbb{A}$. Em particular, se $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$ e $S = \mathbb{Z} - \{0\}$ então $S^{-1}\mathbb{Z} = \mathbb{Q}$.

Sejam I um ideal de A e J um ideal de $S^{-1}\mathbb{A}$,

$$J^c := \varphi^{-1}(J) = \{x \in A;\ \varphi(x) \in J\}$$

$$I^e := \langle \varphi(I) \rangle = \{\sum_{i=0}^{c} y_i\varphi(x_i);\ x_i \in I,\ y_i \in S^{-1}\mathbb{A} \text{ e } c \in \mathbb{N}\}.$$

Os conjuntos J^c e I^e são, respectivamente, ideais de $\mathbb{A}$ e $S^{-1}\mathbb{A}$ e

$$I \subset (I^c)^e,\ J \supset (J^c)^e.$$

Além disso, é possível ver sem muita dificuldade que

$$I^e = \{\frac{x}{s} \in S^{-1}\mathbb{A};\ x \in I,\ s \in S\}.$$

Na próxima proposição encontram-se listadas algumas propriedades que serão necessárias mais tarde.

Proposição 1.3.1. *Sejam $I_1, I_2, \ldots, I_n$ ideais quaisquer de $\mathbb{A}$ e Q um ideal $P-$primário. Então as seguintes propriedades são satisfeitas:*

(a) $(\bigcap_{k=1}^{n} I_k)^{ec} = \bigcap_{k=1}^{n} {I_k}^{ec}$

(b) $P \cap S = \emptyset \Rightarrow Q^{ec} = Q$

(c) $P \cap S \neq \emptyset \Rightarrow Q^{ec} = \mathbb{A}$

Demonstração. **(a)** Basta mostrar para $k = 2$ e observar que o caso geral segue por indução.

Claramente $(I_1 \cap I_2)^{ec} \subset {I_1}^{ec} \cap {I_2}^{ec}$.

Reciprocamente, se $z \in {I_1}^{ec} \cap {I_2}^{ec} = ({I_1}^e \cap {I_2}^e)^c$ então $\dfrac{z}{1} \in {I_1}^e \cap {I_2}^e$. Desta forma,

$$\frac{z}{1} = \frac{x}{s} = \frac{y}{t} \text{ em que } x \in I_1,\ y \in I_2 \text{ e } s,\ t \in S.$$

Da segunda igualdade, $v(tx - sy) = 0$ para algum $v \in S$. Consequentemente, $vtx = vsy \in I_1 \cap I_2$.

Assim, $\dfrac{z}{1} = \dfrac{x}{s} = \dfrac{vtx}{vts} \in (I_1 \cap I_2)^e$, ou seja, $z \in (I_1 \cap I_2)^{ec}$.

(b) Como $Q^{ec} \supset Q$, resta apenas mostrar que $Q^{ec} \subset Q$.

Se $f \in Q^{ec}$ então $\exists\, x \in Q$ e $s \in S$ tais que $\dfrac{f}{1} = \dfrac{x}{s}$. Por sua vez, a última igualdade implica que $t(x - sf) = 0$ para algum $t \in S$, ou seja, $tsf = tx \in Q$. Como $ts \in S$ então $ts \notin P$, portanto, $f \in Q$ pois, Q é P- primário.

(c) Se $s \in P \cap S$ então $s^n \in Q \cap S$ para algum $n > 0$ e portanto $\dfrac{s^n}{1} \in Q^e$. Logo, $Q^e = S^{-1}\mathbb{A}$ o que implica em $Q^{ec} = \mathbb{A}$.

$\square$

A definição dada a seguir de potência simbólica para anéis de polinômios é a usual em anéis noetherianos, embora existam outros ideais que também são chamados de potência simbólica.

Definição 1.3.2. *Dado um ideal $I \subset \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_r]$ e $n \in \mathbb{N}$. A n-ésima potência simbólica ordinária de I é definida como sendo o ideal*

$$I^{(n)} := (I^n)^{ec} \quad \text{em que} \quad S = \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_r] - \bigcup_{P \in \mathrm{Min}(I)} P.$$

Para simplificar, chamaremos $I^{(n)}$ apenas de n-ésima potência simbólica de I.

O próximo teorema dará uma condição equivalente para potência simbólica muito usada e que será muito útil neste contexto.

Teorema 1.3.3. *Seja I um ideal de $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_r]$ e $I^n = \bigcap_{P \in \mathrm{Ass}(I^n)} Q(P)$ uma decomposição primária de I^n. Então:*

$$I^{(n)} = \bigcap_{P \in \mathrm{Min}(I)} Q(P).$$

Demonstração. Note que, em virtude da proposição 1.3.1, segue que

$$(I^n)^{ec} = \Big(\bigcap_{P \in \mathrm{Ass}(I^n)} Q(P)\Big)^{ec} = \bigcap_{P \in \mathrm{Ass}(I^n)} Q(P)^{ec}.$$

Por outro lado, como

$$P \cap S = \emptyset \;\Leftrightarrow\; P \subset \bigcup_{P \in \mathrm{Min}(I)} P$$

$$P \subset \bigcup_{P \in \mathrm{Min}(I)} P \;\Leftrightarrow\; P \in \mathrm{Min}(I)$$

temos $P \cap S = \emptyset$ equivale a $P \in \mathrm{Min}(I)$.

Consequentemente, temos:

$$\begin{aligned} Q(P)^{ec} &= Q(P), \text{ se } P \in \mathrm{Min}(I) \\ Q(P)^{ec} &= \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_r], \text{ caso contrário.} \end{aligned}$$

Logo, pela observação 1.1.9, $I^{(n)} = \bigcap_{P \in \mathrm{Min}(I)} Q(P)$.

$\square$

1.4 Álgebras de Rees

Nesta seção, introduziremos o principal conceito deste trabalho: as Álgebras de Rees. Para entendermos melhor essas álgebras, falaremos um pouco sobre uma classe de anéis que, assim como o anel de polinômios, admite uma decomposição de seus elementos em componentes homogêneas. Essa classe de anéis é tratada formalmente na próxima definição.

Um anel $\mathbb{A}$ é dito $\mathbb{N}-$graduado se podemos escrever

$$\mathbb{A} = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{N}} A_\lambda$$

em que cada A_λ é um subgrupo de $\mathbb{A}$ e $A_i A_j \subset A_{i+j}$, $\forall\, i, j \in \mathbb{N}$.

Observe que como cada A_λ é um A_0-módulo então $\mathbb{A}$ é uma A_0-álgebra.

Os elementos $f \in A_\lambda$ são ditos homogêneos de grau λ. Um ideal homogêneo em $\mathbb{A}$ é um ideal que admite um conjunto de geradores composto por elementos homogêneos.

Note que a soma de elementos homogêneos de graus diferentes não é um elemento homogêneo. Assim, ideais homogêneos contém elementos não homogêneos.

Se $\mathbb{A}$ é um anel $\mathbb{N}-$graduado então todo elemento $f \in A$, não nulo, é escrito de forma única como

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + \cdots$$

com $f_j \in A_j$ e $f_j \neq 0$ somente para um número finito de índices. Em outras palavras, f é escrito de forma única como soma de um número finito de elementos homogêneos. Cada f_j é chamada de componente homogênea de f em grau j.

Observação 1.4.1. *É possível verificar que I é um ideal homogêneo se, e somente se,*

$$f \in I \;\Rightarrow\; f_j \in I,\ \forall\, j.$$

Exemplo 1.4.2. *De imediato temos que o anel de polinômios $\mathbb{S} = \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_r]$ é um anel $\mathbb{N}-$graduado através do grau total, isto é,*

$$\mathbb{S} = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{N}} S_\lambda$$

em que S_λ é o espaço vetorial dos polinômios homogêneos de grau λ.

Deste ponto até o final da seção, iremos nos restringir a definir e a apresentar alguns resultados sobre um tipo especial de anéis graduados: as Álgebras de Rees.

Definição 1.4.3. *Seja $\mathbb{B}$ um anel. Dizemos que uma família de ideais $\Im = \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{B}$ é uma filtração multiplicativa se $I_0 = \mathbb{B}$; $I_{n+1} \subset I_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ e $I_j I_k \subset I_{j+k}$, $\forall\, j, k \in \mathbb{N}$.*

Definição 1.4.4. *Seja $\Im = \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma filtração multiplicativa de ideais em $\mathbb{B}$. A $\mathbb{B}-$álgebra*

$$R_{\Im}(\mathbb{B}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} I_n t^n = \mathbb{B} \oplus I_1 t \oplus I_2 t^2 \oplus \cdots$$

é chamada Álgebra de Rees associada a $\Im$.

O ideal $\bigoplus_{n=1}^{\infty} I_n t^n$ é denominado de ideal irrelevante.

Observe que $R_{\Im}(\mathbb{B})$ é uma $\mathbb{B}-$álgebra finitamente gerada se, e somente se, o ideal irrelevante é finitamente gerado. Ironicamente, é o ideal irrelevante que determina a noetherianidade da Álgebra de Rees, desde que $\mathbb{B}$ seja noetheriano. Em virtude desta observação, apresentar um conjunto finito de geradores G para o ideal irrelevante é equivalente a dizer que $G \cup \{1_{\mathbb{B}}\}$ é um conjunto de geradores da $\mathbb{B}-$álgebra $R_{\Im}(\mathbb{B})$. Por esse motivo, sempre que apresentarmos um conjunto de geradores para $R_{\Im}(\mathbb{B})$ omitiremos o 1.

A filtração multiplicativa $\Im = \{I^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é chamada de filtração I-ádica. Neste caso, $R_{\Im}(\mathbb{B})$ é denominada *Álgebra de Rees de I ou Álgebra de Rees ordinária associada a I* e é denotada por $R_I(\mathbb{B})$.

Proposição 1.4.5. *Sejam $\mathbb{S} = \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_r]$, $\Im = \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma filtração de $\mathbb{S}$ e $R_{\Im}(\mathbb{S})$ a Álgebra de Rees associada a $\Im$. Então, existe um conjunto de geradores da forma $g_n t^n$ com $g_n \in I_n$. Em particular, se para todo n, I_n é um ideal homogêneo (resp. monomial) é possível tomar $g_n \in I_n$ homogêneo (resp. monômio).*

Demonstração. Seja G_n um conjunto de geradores de I_n. Defina

$$\widetilde{G}_n = \{g t^n \ ; \ g \in G_n\}.$$

É imediato que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{G}_n$ é um conjunto de geradores de $R_{\Im}(\mathbb{S})$. Em particular, se cada I_n é homogêneo (resp. monomial) então G_n pode ser escolhido de tal forma a ser composto por elementos homogêneos (resp. monomiais).

□

A Álgebra de Rees $R_{\Im}(\mathbb{S})$ é uma *álgebra monomial* se ela pode ser gerada por um conjunto de monômios de $\mathbb{S}[t] = \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_r, t]$. Pela proposição anterior, se $\Im$ é uma filtração monomial, ou seja, I_n é um ideal monomial $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $R_{\Im}(\mathbb{S})$ é uma álgebra monomial.

Usando os mesmos argumentos da demonstração do lema 1.1.2, é possível verificar facilmente que se $R_{\Im}(\mathbb{S})$ é uma álgebra monomial, $ft^n \in R_{\Im}(\mathbb{S})$ se, e somente se, para cada termo não nulo f_s de f tem-se que $f_s t^n$ pertence a $R_{\Im}(\mathbb{S})$. Consequentemente, temos $R_{\Im}(\mathbb{S}) \cong \mathbb{K}[H]$ em que

$$\begin{aligned} H &= \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}) \in \mathbb{N}^{r+1}; x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_r^{\alpha_r} t^{\alpha_{r+1}} \in R_{\Im}(\mathbb{S})\} \cup \{0\} \\ &= \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}) \in \mathbb{N}^{r+1}; x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_r^{\alpha_r} \in I_{\alpha_{r+1}}\} \cup \{0\}. \end{aligned}$$

De forma geral, toda álgebra monomial pode ser vista como um anel de semigrupo.

O seguinte teorema dá uma classe de exemplos de Álgebras de Rees finitamente geradas.

Teorema 1.4.6. *Se $\mathbb{B}$ é um anel noetheriano e $I \subset \mathbb{B}$ é um ideal então a Álgebra de Rees ordinária associada a I é uma $\mathbb{B}-$álgebra finitamente gerada.*

Demonstração. Vamos mostrar que se $I = \langle g_1, g_2, \ldots, g_s \rangle$ então

$$R_I(\mathbb{B}) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n t^n = \langle g_1 t, g_2 t, \ldots, g_s t \rangle$$

ou equivalentemente que

$$\begin{array}{rcl} \Psi : \mathbb{B}[x_1, x_2, \ldots, x_s] & \longrightarrow & R_I(\mathbb{B}) \\ x_i & \longmapsto & g_i t, \quad \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, s\} \end{array}$$

é um epimorfismo de $\mathbb{B}-$álgebras.

Claramente, Ψ é um homomorfismo. Resta mostrar que Ψ é sobrejetiva.

Seja $gt^n \in I^n t^n,\ g \in I^n$. Neste caso,

$$g = \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_s = n} a_{\alpha_1 \cdots \alpha_s} {g_1}^{\alpha_1} \cdots {g_s}^{\alpha_s} \quad \text{com} \quad a_{\alpha_1 \ldots \alpha_s} \in \mathbb{B}.$$

Considere $h = \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_s = n} a_{\alpha_1 \cdots \alpha_s} {x_1}^{\alpha_1} \cdots {x_s}^{\alpha_s} \in \mathbb{B}[x_1, x_2, \ldots, x_s]$. Temos:

$$\Psi(h) = h(g_1 t, \ldots, g_s t) = \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_s = n} a_{\alpha_1 \cdots \alpha_r} g_1 t^{\alpha_1} \cdots g_s t^{\alpha_s} = gt^n.$$

Como todo elemento de $R_I(\mathbb{B})$ é escrito como soma de um número finito de componentes homogêneas temos que Ψ é sobrejetiva.

□

1.5 Cone racional

Nesta seção, trataremos de alguns conceitos e resultados clássicos de análise convexa indispensáveis neste trabalho. Nosso objetivo aqui é: definir cone racional, mostrar que todo cone racional é um cone finitamente gerado e exibir uma versão do Teorema de Carathéodory para cones racionais. Em benefício da concisão do texto, alguns resultados apresentados nesta seção não serão demonstrados. O leitor interessado pode encontrar tais demonstrações em [11].

Um subconjunto não vazio D do $\mathbb{R}^n$ é chamado *cone* se é fechado para combinações lineares com coeficientes reais não negativos, isto é,

$$ax + by \in D \quad \text{sempre que} \quad x,\ y \in D \text{ e } a,\ b \geq 0.$$

Uma face de um cone D é um subconjunto convexo D' de D tal que todo segmento em D com um ponto interior em D' esta completamente contido em D'.

Se $V \subset \mathbb{R}^n$ é não vazio, o conjunto

$$\mathbb{R}_+V = \{\sum_{i=0}^{c} a_i v_i; a_i \in \mathbb{R}_+, v_i \in V \text{ e } c \in \mathbb{N}\}$$

é obviamente o menor cone contendo V, ou equivalentemente, é o cone gerado por V.

O cone $\mathbb{R}_+V$ é dito um poliedral convexo do subespaço $\mathbb{R}V$ do $\mathbb{R}^n$, se pode ser expresso como uma interseção finita de semi-espaços fechados de $\mathbb{R}V$ passando pela origem, ou seja, $\exists\, \omega_1, \ldots, \omega_t \in \mathbb{R}^n$, $\omega_i \neq 0$ tais que

$$\mathbb{R}_+V = {V_1}^+ \cap {V_2}^+ \cap \ldots \cap {V_t}^+ \text{ em que } {V_i}^+ = \{v \in \mathbb{R}V; \langle\langle \omega_i, v\rangle\rangle \geq 0\}$$

em que $\langle\langle \omega, v\rangle\rangle$ denota o produto interno canônico de ω por v.

Enunciaremos agora um resultado que afirma que $\mathbb{R}_+V$ é um poliedral convexo se, e somente se, $\mathbb{R}_+V$ é um cone finitamente gerado.

Teorema 1.5.1. *Seja $V \subset \mathbb{R}^n$, não vazio. São equivalentes:*

(a) *$\mathbb{R}_+V$ é a interseção finita de semi-espaços fechados de $\mathbb{R}V$ passando pela origem;*

(b) *$\mathbb{R}_+V$ tem um número finito de faces;*

(c) *$\exists v_1, \ldots, v_s \in V$ tais que $\mathbb{R}_+V = \mathbb{R}_+\{v_1, \ldots, v_s\}$, isto é, $\mathbb{R}_+V$ é um cone finitamente gerado.*

Demonstração. Veja [11].

Definição 1.5.2. *Seja $V \subset \mathbb{R}^n$, não vazio. O conjunto*

$$\mathbb{Q}_+V = \{\sum_{i=0}^{d} c_i v_i \ ; \ c_i \in \mathbb{Q}_+, v_i \in V \text{ e } d \in \mathbb{N}\}$$

é um cone racional, se existem $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m \in \mathbb{R}^n, \omega_i \neq 0$ tais que

$$\mathbb{Q}_+V = {V_1}^+ \cap {V_2}^+ \cap \ldots \cap {V_m}^+ \text{ em que } {V_i}^+ = \{v \in \mathbb{Q}V \ ; \ \langle\langle \omega_i, v\rangle\rangle \geq 0\}$$

é um semi-espaço fechado de $\mathbb{Q}V$ passando pela origem.

O teorema a seguir é uma versão do *teorema de Carathéodory* para cones racionais. Essencialmente, esse resultado diz que um cone racional qualquer é a união de cones racionais cujos geradores são linearmente independentes.

Teorema 1.5.3 (Teorema de Carathéodory). *Sejam $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$. O cone $\mathbb{Q}_+\{v_1, \ldots, v_m\}$ é a união dos cones $\mathbb{Q}_+\{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_s}\}$ com $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_s} \in \{v_1, \ldots, v_m\}$ linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$. Em particular, se $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{Q}^n$ então $\mathbb{Q}_+\{v_1, \ldots, v_m\}$ é a união de cones racionais cujos geradores são linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$.*

Demonstração. Veja [11].

Proposição 1.5.4. *$\mathbb{Q}_+V$ é um cone racional se, e somente se, é um cone finitamente gerado.*

Demonstração. Note que $\mathbb{Q}_+\{v_1, \ldots, v_s\} = \mathbb{Q}V \cap \mathbb{R}_+\{v_1, \ldots, v_s\}$ com $\{v_1, \ldots, v_s\} \subset V$ linearmente independente.

De fato, obviamente $\mathbb{Q}_+\{v_1, \ldots, v_s\} \subset \mathbb{Q}V \cap \mathbb{R}_+\{v_1, \ldots, v_s\}$.

Reciprocamente, se $v \in \mathbb{Q}V \cap \mathbb{R}_+\{v_1, \ldots, v_s\}$ uma vez que o sistema de equação com coeficientes em $\mathbb{Q}$

$$v_1y_1 + \cdots + v_sy_s = v$$

tem única solução $(y_1, \ldots, y_r) \in \mathbb{Q}^s \cap (\mathbb{R}_+)^s$ então $(y_1, \ldots, y_r) \in (\mathbb{Q}_+)^s$, isto é,

$$v \in \mathbb{Q}_+\{v_1, \ldots, v_r\}.$$

Pelo teorema de Carathéodory, $\mathbb{Q}_+\{v_1, \ldots, v_m\} = \mathbb{Q}V \cap \mathbb{R}_+\{v_1, \ldots, v_m\}$ para quaisquer $v_1, \ldots, v_m \in V$.

O resultado segue do teorema 1.5.1.

□

Exemplo 1.5.5. *Seja $H = \{(c+d, b+d, a+b+c+d)\ ;\ a, b, c, d \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^3$.*

Note que H é um semigrupo afim gerado pelo conjunto

$$\{(0,0,1), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,1)\}.$$

Como H é um semigrupo afim, o cone racional $\mathbb{Q}_+H$ corresponde ao conjunto de pontos de $\mathbb{R}_+H$ com coordenadas racionais.

Observe que $\mathbb{Q}_+H$ tem quatro faces de dimensão 2:

$$\mathbb{Q}_+\{(0,0,1), (0,1,1)\},\ \mathbb{Q}_+\{(0,0,1), (1,0,1)\},\ \mathbb{Q}_+\{(0,1,1), (1,1,1)\}\ e\ \mathbb{Q}_+\{(1,0,1), (1,1,1)\}.$$

Além disso, $\mathbb{Q}_+H = {H_1}^+ \cap {H_2}^+ \cap {H_3}^+ \cap {H_4}^+$ *em que*

$$\begin{aligned}
{H_1}^+ &= \{v \in \mathbb{Q}H\ ;\ \langle\langle(1,0,0), v\rangle\rangle \geq 0\}\\
{H_2}^+ &= \{v \in \mathbb{Q}H\ ;\ \langle\langle(0,1,0), v\rangle\rangle \geq 0\}\\
{H_3}^+ &= \{v \in \mathbb{Q}H\ ;\ \langle\langle(0,-1,1), v\rangle\rangle \geq 0\}\\
{H_4}^+ &= \{v \in \mathbb{Q}H\ ;\ \langle\langle(-1,0,1), v\rangle\rangle \geq 0\}.
\end{aligned}$$

Note ainda que

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}_+H &= \mathbb{Q}_+\{(0,0,1),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,1)\}\\
&= \mathbb{Q}_+\{(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\} \cup \mathbb{Q}_+\{(0,0,1),(1,0,1),(1,1,1)\}\\
&= \mathbb{Q}_+\{(1,0,1),(0,0,1),(0,1,1)\} \cup \mathbb{Q}_+\{(1,0,1),(1,1,1),(0,1,1)\}
\end{aligned}$$

em que cada um dos conjuntos $\{(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}$, $\{(0,0,1),(1,0,1),(1,1,1)\}$, $\{(1,0,1),(0,0,1),(0,1,1)\}$, $\{(1,0,1),(1,1,1),(0,1,1)\}$ *é linearmente independente sobre* $\mathbb{Q}$.

A figura abaixo traz um esboço de $\mathbb{R}_+H = \mathbb{R}_+\{(0,0,1),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,1)\}$.

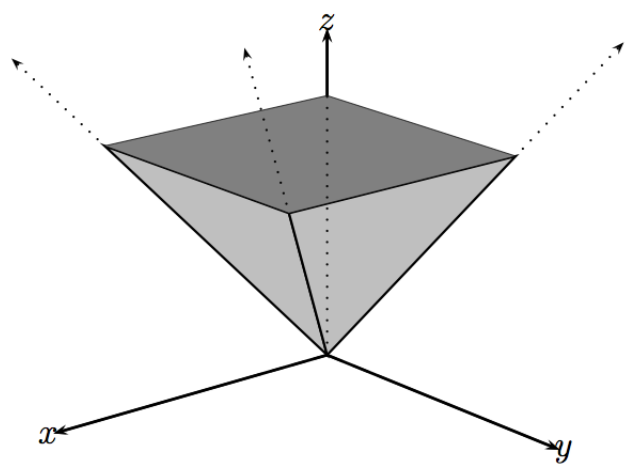

Figura 1.5.5.

Capítulo 2

Geração Finita de Semigrupos Afins

Neste capítulo, mostraremos uma condição necessária e suficiente para que um semigrupo afim seja finitamente gerado. Este resultado é um alicerce não apenas deste capítulo mas de todo este texto, pois, dele descendem quase todos os resultados a partir deste capítulo. Nosso objetivo central aqui é mostrar que a Álgebra de Rees associada a uma filtração é finitamente gerada sempre que o n-ésimo termo desta filtração é a interseção de todas as potências n-ésimas de uma coleção finita de ideais monomiais, isto é, $\Im = \{{J_1}^n \cap \ldots \cap {J_s}^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em que cada J_i é um ideal monomial.

Recomendamos ao leitor voltar ao capítulo anterior caso não esteja familiarizado com as definições de semigrupo afim e cone racional. Iniciaremos o nosso estudo com o "teorema alicerce".

Teorema 2.0.6. *Seja H um semigrupo afim. H é finitamente gerado se, e somente se, $\mathbb{Q}_+H$ é um cone racional.*

Demonstração. Se $H = \langle\{h_1, \ldots, h_k\}\rangle$ então $\mathbb{Q}_+H = \mathbb{Q}_+\{h_1, \ldots, h_k\}$. Segue da proposição 1.5.4 que $\mathbb{Q}_+H$ é um cone racional.

Reciprocamente, como $\mathbb{Q}_+H$ é um cone racional, $\mathbb{Q}_+H = \mathbb{Q}_+\{q_1, \ldots, q_m\}$ com $q_1, \ldots, q_m \in H$. Seja $\mathbb{Z}H = \{\sum_{j=0}^{c} a_j h_j; a_j \in \mathbb{Z}, h_j \in H \text{ e } c \in \mathbb{N}\}$ o menor subgrupo de $\mathbb{Z}^r$ contendo H. Observe que como $\mathbb{Z}^r$ é um grupo abeliano de posto r, definindo $s := \text{posto } \mathbb{Z}H,$ temos $s \leq r$.

Considere os cones $\mathbb{Q}_+\{q_{i_1}, \ldots, q_{i_s}\}$ em que $q_{i_1}, \ldots, q_{i_s} \in \{q_1, \ldots, q_m\} \subset H$ são linearmente independentes em $\mathbb{Q}^r$, ou equivalentemente, linearmente independentes em $\mathbb{Z}H$. Pelo teorema 1.5.3, $\mathbb{Q}_+\{q_1, \ldots, q_m\}$ é a união desses cones. Como existe apenas um número finito de cones da forma $\mathbb{Q}_+\{q_{i_1}, \ldots, q_{i_s}\}$ e $H = H \cap \mathbb{Q}_+\{q_1, \ldots, q_m\}$ é suficiente mostrar que cada semigrupo afim $H \cap \mathbb{Q}_+\{q_{i_1}, \ldots, q_{i_s}\}$ é finitamente gerado.

Para simplicar a notação, assumiremos sem perda da generalidade que $\mathbb{Q}_+H = \mathbb{Q}_+\{q_1, \ldots, q_s\}$ em que $q_1, \ldots, q_s$ são linearmente independentes.

Seja $B = \{\sum_{i=1}^{s} c_i q_i;\ 0 \leq c_i < 1\} \cap \mathbb{Z}H$. Afirmamos que:

1) $\mathbb{Z}H = \bigcup_{p\in B} L_p$ em que $L_p = p + \mathbb{Z}\{q_1, \ldots, q_s\}$

2) $L_p \cap L_{p'} = \emptyset$, se $p \neq p'$.

1) Obviamente $\mathbb{Z}H \supset \bigcup_{p\in B} L_p$.

Observe que $\mathbb{Q}H = \mathbb{Q}\{q_1, \ldots, q_s\}$. Com efeito, se $x \in \mathbb{Q}H$, $\exists\ x_1,\ x_2 \in \mathbb{Q}_+H$ tais que $x = x_1 - x_2$. Consequentemente, $x \in \mathbb{Q}\{q_1, \ldots, q_s\}$.

Seja $y \in \mathbb{Z}H$. Como $\mathbb{Z}H \subset \mathbb{Q}H$ então $y \in \mathbb{Q}H$. Assim,

$$y = \sum_{i=1}^{s} \frac{a_i}{b_i} q_i \text{ com } a_i \in \mathbb{Z} \text{ e } b_i \in \mathbb{N} - \{0\}$$

Pelo algoritmo da divisão, para cada i, $\exists\ d_i,\ r_i \in \mathbb{Z}$ tais que $a_i = b_i d_i + r_i$ com $0 \leq r_i < b_i$. Desta forma temos:

$$y = \sum_{i=1}^{s} d_i q_i + \sum_{i=1}^{s} c_i q_i \text{ com } c_i = \frac{r_i}{b_i},\ 0 \leq c_i < 1$$

Portanto, $y \in L_p$ para $p = \sum_{i=1}^{s} c_i q_i$. Logo, $\mathbb{Z}H \subset \bigcup_{p\in B} L_p$.

2) Se $x \in L_p \cap L_{p'}$,

$$x = p + \sum_{i=1}^{s} \alpha_i q_i = p' + \sum_{i=1}^{s} \beta_i q_i \text{ com } \alpha_i,\ \beta_i \in \mathbb{Z},$$

ou seja,

$$p - p' = \sum_{i=1}^{s} (\alpha_i - \beta_i) q_i \in \mathbb{Z}\{q_1, \ldots, q_s\} \text{ o que implica em } p = p'.$$

Como $H = H \cap \mathbb{Z}H$ então $H = \bigcup_{p\in B} (L_p \cap H)$ com $L_p \cap H \neq L_{p'} \cap H$ para $p \neq p'$.

Definindo $H_p := H \cap L_p$ temos que H é a união disjunta dos $H_{p's}$.

Vamos mostrar que cada H_p é finitamente gerado.

Defina

$$I_p = \langle \{x_1^{c_1} \cdots x_s^{c_s};\ (c_1, \ldots, c_s) \in \Omega_p\} \rangle$$

em que $\Omega_p = \{(c_1, \ldots, c_s) \in \mathbb{N}^s;\ p + \sum_{i=1}^{s} c_i q_i \in H_P\}$.

Pelo teorema 1.1.3, é possível extrair dentre os geradores de I_p um conjunto finito e mínimo que ainda gera I_p. Denote por $G(I_p)$ tal conjunto.

Afirmamos que todo elemento de H_p é a soma de um elemento de

$$\Lambda = \{p + \sum_{i=1}^{s} c_i q_i;\ x_1^{c_1} \cdots x_s^{c_s} \in G(I_p)\} \text{ com um elemento de } \mathbb{Z}_+\{q_1, \ldots, q_s\}.$$

De fato, seja $x \in H_p \subset H \subset \mathbb{Q}_+\{q_1, \ldots, q_r\}$.

Como $x \in H_p$ temos que $x = p + \sum_{i=1}^{s} \alpha_i q_i$ com $\alpha_i \in \mathbb{Z}$. Por outro lado, como $x \in \mathbb{Q}_+\{q_1, \ldots, q_s\}$,

$$\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^{s} \beta_j q_j, \ \beta_j \in \mathbb{Q}_+ \\ &= p' + \sum_{j=1}^{s} \lambda_j q_j, \ \lambda_j \in \mathbb{Z}_+, \ p' \in B \end{aligned}$$

Assim, repetindo argumentos já usados anteriormente temos que $p = p'$. Desta forma, se $x \in H_p$

$$x = p + \sum_{j=1}^{s} \lambda_j q_j \text{ com } p \in B, \ \lambda_j \in \mathbb{Z}_+.$$

Consequentemente, $x_1^{\lambda_1} \cdots x_s^{\lambda_s} \in I_p$. Com isso, $\exists\, x_1^{c_1} \cdots x_s^{c_s} \in G(I_p)$ tal que

$$x_1^{\lambda_1} \cdots x_s^{\lambda_s} = (x_1^{a_1} \cdots x_s^{a_s}) x_1^{c_1} \cdots x_s^{c_s} \text{ em que } a_k + c_k = \lambda_k, \ a_k, \ c_k \in \mathbb{N}, \ \forall\, k \in \{1, \ldots, s\}.$$

Portanto, $x = p + \sum_{i=1}^{s} c_i q_i + \sum_{i=1}^{s} a_i q_i$. Isso mostra que se $x \in H_p$ então x é a soma de um elemento de Λ com um elemento de $\mathbb{Z}_+\{q_1, \ldots, q_s\}$. Além disto, B é finito pois B é um conjunto limitado em $\mathbb{Z}H \subset \mathbb{Z}^r$ (note que se $\sum_{i=1}^{r} c_i q_i \in B$ então $|\sum_{i=1}^{s} c_i q_i| \leq \sum_{i=1}^{s} |q_i|$).

Logo, $G = \bigcup_{p \in B} \{p + \sum_{i=1}^{s} c_i q_i; \ x_1^{c_1} \cdots x_s^{c_s} \in G(I_p)\} \cup \{q_1, \ldots, q_s\}$ é um conjunto de geradores de H.

□

O corolário a seguir mostra que a interseção finita de semigrupos afins finitamente gerados é também um semigrupo afim que satisfaz a mesma propriedade.

Corolário 2.0.7. *Se $H_1, H_2, \ldots, H_s$ são semigrupos afins finitamente gerados então $\bigcap_{i=1}^{s} H_i$ é um semigrupo afim finitamente gerado.*

Demonstração. Seja $H = \bigcap_{i=1}^{s} H_i$. É possível verificar facilmente que H é um semigrupo afim.

Resta mostrar que H é finitamente gerado. Para isso, provaremos que $\mathbb{Q}_+H$ é um cone racional.

Afirmamos que $\mathbb{Q}_+H = \bigcap_{i=1}^{s} \mathbb{Q}_+H_i$.

De fato, como $\mathbb{Q}_+H \subset \mathbb{Q}_+H_i$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ segue que

$$\mathbb{Q}_+H \subset \bigcap_{i=1}^{s} \mathbb{Q}_+H_i.$$

Por outro lado, seja $p \in \bigcap_{i=1}^{s} \mathbb{Q}_+ H_i$. Então, para cada i fixo,

$$p = \sum_{j=1}^{m_i} c_{ij} h_{ij} \quad \text{com} \quad c_{ij} \in \mathbb{Q}_+, \ \forall\, i, j \text{ e } h_{ij} \in H_i, \ \forall\, j.$$

Como $c_{ij} \in \mathbb{Q}_+$ então $\exists\ a_{ij} \in \mathbb{N}, b_{ij} \in \mathbb{N} - \{0\}$ tais que $c_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{b_{ij}}$. Defina $n_i = MMC\{b_{i1}, \ldots, b_{im_i}\}$. Note que $n_i p \in H_i$. Tomando $n = n_1 n_2 \ldots n_s$ temos $np \in H_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, s\}$ o que equivale a dizer que $np = h \in H$. Logo, $p = \dfrac{1}{n} h \in \mathbb{Q}_+ H$, o que finaliza a prova da afirmação.

Como a interseção finita de cones racionais é um cone racional, pelo teorema 2.0.6, H é um semigrupo afim finitamente gerado.

$\square$

Agora estamos aptos a mostrar

Teorema 2.0.8. *Sejam* $\mathbb{S} = \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_r]$, $J_1, J_2, \ldots, J_s \subset \mathbb{S}$ *ideais monomiais e* $\Im = \{\bigcap_{i=1}^{s} J_i{}^n\}_{n \in \mathbb{N}}$. *Então a Álgebra de Rees* $\bigoplus_{n \geq 0} (\bigcap_{i=1}^{s} J_i{}^n) t^n$ *é uma* $\mathbb{S}$*-álgebra finitamente gerada.*

Demonstração. Seja $A = \bigoplus_{n \geq 0} (\bigcap_{i=1}^{s} J_i^n) t^n$. Uma vez que $\Im$ é uma filtração multiplicativa, A é uma $\mathbb{S}$-álgebra.

Afirmamos que $A = \bigcap_{i=1}^{s} A_i$ em que $A_i = \bigoplus_{n=0}^{\infty} J_i^n t^n$.

De fato, se $f \in A$ então

$$f = \sum_{n=0}^{m} c_n t^n \text{ com } c_n \in \bigcap_{i=1}^{s} J_i^n$$

o que equivale a dizer que $c_n \in J_i^n$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$, ou seja, $f \in \bigcap_{i=1}^{s} A_i$.

Por outro lado, se $g \in \bigcap_{i=1}^{s} A_i$, para cada i fixo,

$$g = \sum_{n=1}^{u_i} c_{ni} t^n \text{ com } c_{ni} \in J_i^n.$$

Considerando os coeficientes nulos, quando necessário, podemos escrever:

$$g = \sum_{n=1}^{u} c_{ni} t^n \text{ em que } u = \max\{u_1, u_2, \ldots, u_s\}.$$

Como $g \in \mathbb{S}[t]$ então g é escrito de forma única como soma de partes homogêneas em t. Consequentemente c_{ni} não depende de i. Assim, definindo $c_n := c_{ni}$ para todo i temos $c_n \in \bigcap_{i=1}^{s} J_i^n$. Portanto, $g = \sum_{n=1}^{u} c_n t^n \in A$.

Logo, $A = \bigcap_{i=1}^{s} A_i$.

Como $J_1, J_2, \ldots, J_s$ são ideais monomiais, as Álgebras de Rees $A, A_1, A_2, \ldots, A_s$ são álgebras monomiais. Portanto, $A \simeq \mathbb{K}[H]$ e $A_i \simeq \mathbb{K}[H_i]$ em que $H, H_1, \ldots, H_s$ são semigrupos afins dados por:

$$H = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}) \in \mathbb{N}^{r+1}; x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_r^{\alpha_r} t^{\alpha_{r+1}} \in A\} \cup \{0\}$$

$$H_i = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}) \in \mathbb{N}^{r+1}; x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_r^{\alpha_r} t^{\alpha_{r+1}} \in A_i\} \cup \{0\}.$$

Em outras palavras, vamos tratar A e cada A_i como anéis de semigrupos afins.

Observe que para cada i, A_i é a Álgebra de Rees associada a filtração J_i-ádica. Logo, $A_i = \langle f_{i1}t, f_{i2}t, \ldots, f_{iu(i)}t \rangle$ com $J_i = \langle f_{i1}, f_{i2}, \ldots, f_{iu(i)} \rangle$ em que cada f_{ij} é um monômio.

Queremos mostrar que H_i é um semigrupo afim finitamente gerado.

A fim de simplificar a notação, considere $A_i = \langle f_1 t, f_2 t, \ldots, f_u t \rangle$ para i fixo, porém arbitrário, e escreva $f_j = x_1^{h_{j1}} x_2^{h_{j2}} \cdots x_r^{h_{jr}}$, $\forall\, j \in \{1, 2, \ldots, u\}$.

Como $f_j t \in A_i$ então $(h_{j1}, h_{j2}, \ldots, h_{jr}, 1) \in H_i$ para todo j.

Ademais, os vetores da base canônica do $\mathbb{R}^{r+1}$, $e_1, e_2, \ldots, e_r \in H_i$ tendo em vista que $x_1, x_2, \ldots, x_r \in \mathbb{S} = J_i^0 \subset A_i$.

Afirmamos que $H_i = \langle e_1, \ldots, e_n, (h_{11}, h_{12}, \ldots, h_{1r}, 1), \ldots, (h_{u1}, h_{u2}, \ldots, h_{ur}, 1) \rangle$.

De fato, se $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}) \in H_i$ então $x_1^{\alpha_1} \cdots x_r^{\alpha_r} t^{\alpha_{r+1}} \in A_i$. Por conseguinte, como $A_i = \langle f_1 t, f_2 t, \ldots, f_u t \rangle$ temos que $\exists\, c_1, \ldots, c_r, d_1, \ldots, d_u \in \mathbb{N}$ tais que

$$\begin{aligned} x_1^{\alpha_1} \cdots x_r^{\alpha_r} t^{\alpha_{r+1}} &= x_1^{c_1} \cdots x_n^{c_n} (f_1 t)^{d_1} \ldots (f_u t)^{d_u} \in A_j \\ &= x_1^{\beta_1} \cdots x_r^{\beta_r} t^{\alpha_{r+1}} \end{aligned}$$

com $\beta_k = c_k + \sum_{j=1}^{u} d_j h_{jk}$ para $k \in \{1, 2, \ldots, r\}$ e $\alpha_{r+1} = \sum_{j=1}^{u} d_j$.

Assim,

$$\begin{aligned} (\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}) &= (c_1 + \sum_{j=1}^{u} d_j h_{1j}, \ldots, c_r + \sum_{j=1}^{u} d_j h_{jr}, \sum_{j=1}^{u} d_j) \\ &= c_1 e_1 + \cdots + c_n e_n + d_1 (h_{11}, h_{12}, \ldots, h_{1r}, 1) + \\ &\quad + \cdots + d_u (h_{u1}, h_{u2}, \ldots, h_{un}, 1). \end{aligned}$$

Logo,

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}) \in \langle e_1, \ldots, e_n, (h_{11}, h_{12}, \ldots, h_{1r}, 1), \ldots, (h_{u1}, h_{u2}, \ldots, h_{ur}, 1) \rangle.$$

Por outro lado, como $A = \bigcap_{i=1}^{s} A_i$ então $H = \bigcap_{i=1}^{s} H_i$ pois,

$$\begin{aligned}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}) \in H &\Leftrightarrow x_1^{\alpha_1} \cdots x_r^{\alpha_r} t^{\alpha_{r+1}} \in A\\ x_1^{\alpha_1} \cdots x_r^{\alpha_r} t^{\alpha_{r+1}} \in A &\Leftrightarrow x_1^{\alpha_1} \cdots x_r^{\alpha_r} t^{\alpha_{r+1}} \in A_i,\ \forall\, i\\ x_1^{\alpha_1} \cdots x_r^{\alpha_r} t^{\alpha_{r+1}} \in A_i,\ \forall\, i &\Leftrightarrow (\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}) \in H_i,\ \forall\, i.\end{aligned}$$

Portanto, pelo corolário 2.0.7, $H = \bigcap_{j=1}^{r} H_j$ é um semigrupo afim finitamente gerado. Desta forma, considerando

$$H = \langle e_1, \ldots, e_r, (c_{11}, \ldots, c_{1r}, c_{1r+1}), \ldots, (c_{m1}, \ldots, c_{mr}, c_{mr+1})\rangle$$

em que $\{e_1, \ldots, e_r, (c_{11}, \ldots, c_{1r}, c_{1r+1}), \ldots, (c_{m1}, \ldots, c_{mr}, c_{mr+1})\}$ é um conjunto mínimo de geradores de H, temos:

$$A = \langle x_1^{c_{11}} \cdots x_r^{c_{1r}} t^{c_{1r+1}}, \ldots, x_1^{c_{m1}} \cdots x_r^{c_{mr}} t^{c_{mr+1}}\rangle.$$

Com efeito, seja $x_1^{\beta_1} \cdots x_r^{\beta_r} t^{\beta_{r+1}} \in A$. Então $(\beta_1, \ldots, \beta_n, \beta_{n+1}) \in H$. Se $\beta_{r+1} = 0$, nada temos a mostrar. Caso contrário, $\exists\ a_1, \ldots, a_{r+m} \in \mathbb{N}$ tais que

$$(\beta_1, \ldots, \beta_r, \beta_{r+1}) = a_1e_1 + \cdots + a_re_r + a_{r+1}(c_{11}, \ldots, c_{1r}, c_{1r+1}) + \cdots + a_{r+m}(c_{m1}, \ldots, c_{mr}, c_{mr+1}).$$

Logo,

$$x_1^{\beta_1} \cdots x_r^{\beta_r} t^{\beta_{r+1}} = x_1^{a_1} \cdots x_r^{a_r} (x_1^{c_{11}} \cdots x_r^{c_{1r}} t^{c_{1r+1}})^{a_{r+1}} \ldots (x_1^{c_{m1}} \cdots x_r^{c_{mr}} t^{c_{mr+1}})^{a_{r+m}}.$$

□

O próximo exemplo ilustrará num caso concreto os passos da demostração do teorema 2.0.8 e exibirá um conjunto de geradores para Álgebra de Rees neste caso particular.

Exemplo 2.0.9. *Sejam* $\mathbb{S} = \mathbb{K}[x, y, z]$ *e* $A = \bigoplus_{n\geq 0} [(x, y)^n \cap (y, z)^n \cap (x, z)^n] t^n \subset \mathbb{K}[x, y, z][t]$.

Note que $A = [\bigoplus_{n\geq 0} (x, y)^n t^n] \cap [\bigoplus_{n\geq 0} (y, z)^n t^n] \cap [\bigoplus_{n\geq 0} (x, z)^n t^n]$.

Sejam

$$A_1 = \bigoplus_{n\geq 0} (x, y)^n t^n,\ A_2 = \bigoplus_{n\geq 0} (y, z)^n t^n \ \text{ e } A_3 = \bigoplus_{n\geq 0} (x, z)^n t^n.$$

Temos $A_1 = \langle xt, yt\rangle$, $A_2 = \langle yt, zt\rangle$ *e* $A_3 = \langle xt, zt\rangle$.

Sabemos que é possível tratar, a menos de isomorfismo, A, A_1, A_2 *e* A_3 *como os anéis de semigrupos* $\mathbb{K}[H]$, $\mathbb{K}[H_1]$, $\mathbb{K}[H_2]$ *e* $\mathbb{K}[H_3]$ *em que*

$$\begin{aligned} H &= \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{N}^4 \ ;\ x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} z^{\alpha_3} \in (x, y)^{\alpha_4} \cap (y, z)^{\alpha_4} \cap (x, z)^{\alpha_4}\} \cup \{0\}\\ H_1 &= \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{N}^4 \ ;\ x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} z^{\alpha_3} \in (x, y)^{\alpha_4}\} \cup \{0\} = \langle e_1, e_2, e_3, e_1 + e_4, e_2 + e_4\rangle\\ H_2 &= \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{N}^4 \ ;\ x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} z^{\alpha_3} \in (y, z)^{\alpha_4}\} \cup \{0\} = \langle e_1, e_2, e_3, e_2 + e_4, e_3 + e_4\rangle\\ H_3 &= \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{N}^4 \ ;\ x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} z^{\alpha_3} \in (x, z)^{\alpha_4}\} \cup \{0\} = \langle e_1, e_2, e_3, e_1 + e_4, e_3 + e_4\rangle.\end{aligned}$$

com $e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1)$.

Como $H = H_1 \cap H_2 \cap H_3$ *então* H *é um semigrupo afim finitamente gerado.*

Afirmamos que $H = \langle e_1, e_2, e_3, e_1+e_2+e_4, e_2+e_3+e_4, e_1+e_3+e_4, e_1+e_2+e_3+2e_4 \rangle$.

Chamemos $\widehat{H} = \langle e_1, e_2, e_3, e_1+e_2+e_4, e_2+e_3+e_4, e_1+e_3+e_4, e_1+e_2+e_3+2e_4 \rangle$.

Observe que como $e_1, e_2, e_3, e_1+e_2+e_4, e_2+e_3+e_4, e_1+e_3+e_4, e_1+e_2+e_3+2e_4 \in H$ *então* $\widehat{H} \subset H$. *Resta mostrar que* $H \subset \widehat{H}$.

Seja $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in H$. *Consequentemente,* $\exists\ a_i, b_i, c_i \in \mathbb{N},\ i = 1,2,3,4,5$ *tais que*

$$\begin{aligned} \alpha &= a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4(e_1+e_4) + a_5(e_2+e_4) \\ &= (a_1+a_4, a_2+a_5, a_3, a_4+a_5) \qquad (2.1) \\ \alpha &= b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 + b_4(e_2+e_4) + b_5(e_3+e_4) \\ &= (b_1, b_2+b_4, b_3+b_5, b_4+b_5) \qquad (2.2) \\ \alpha &= c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3 + c_4(e_1+e_4) + c_5(e_3+e_4) \\ &= (c_1+c_4, c_2, c_3+c_5, c_4+c_5) \qquad (2.3) \end{aligned}$$

De 2.1, 2.2 e 2.3 temos (respectivamente):

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \geq \alpha_4 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \geq \alpha_4 \\ \alpha_1 + \alpha_3 \geq \alpha_4 \end{cases} \qquad (2.4)$$

Se $\alpha_4 = 0$ *então* $\alpha = \alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 + \alpha_3e_3 \in \widehat{H}$.

Se $\alpha_4 \geq 1$ *temos que existem pelo menos dois elementos do conjunto* $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ *não nulos. De fato, suponha que* $\alpha_i = \alpha_j = 0$ *com* $i \neq j$. *Então, por 2.4,* $\alpha_4 = 0$, *o que contradiz a nossa hipótese.*

Assim, temos duas possibilidades:

1) $\alpha_1 = 0$ *ou* $\alpha_2 = 0$ *ou* $a_3 = 0$

2) $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3 \geq 1$

Para a primeira possibilidade, observe que se $\alpha_1 = 0$, *por 2.4,* $\alpha_2 \geq \alpha_4$ *e* $\alpha_3 \geq \alpha_4$, *ou seja,* $\exists\ \alpha'_2,\ \alpha'_3 \in \mathbb{N}$ *tais que* $\alpha_2 = \alpha_4 + \alpha'_2$ *e* $\alpha_3 = \alpha_4 + \alpha'_3$. *Portanto,*

$$\alpha = (0, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (0, \alpha_4 + \alpha'_2, \alpha_4 + \alpha'_3, \alpha_4) = \alpha'_2e_2 + \alpha'_3e_3 + \alpha_4(e_2+e_3+e_4) \in \widehat{H}.$$

Os outros casos são análogos.

Para a segunda possibilidade, sejam $n_1,\ n_2,\ n_3$ *os maiores naturais que satisfazem*

$$\alpha = n_1e_1 + n_2e_2 + n_3e_3 + \widetilde{\alpha} \text{ com } \widetilde{\alpha} \in H - \{0\}.$$

Como cada n_i *é maior possível,* $\widetilde{\alpha} - e_i \notin H$, $\forall\, i \in \{1,2,3\}$ *pois, caso contrário, se por exemplo* $\widetilde{\alpha} - e_1 \in H - \{0\}$ *então* $\alpha = (n_1+1)e_1 + n_2e_2 + n_3e_3 + \widetilde{\alpha} - e_1$ *e por sua vez* n_1 *não seria máximo.*

Desta forma, assumiremos sem perda que $\alpha - e_i \notin H$, $\forall\, i \in \{1,2,3\}$, *ou seja,*

$$\begin{cases} (\alpha_1 - 1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \notin H \\ (\alpha_1, \alpha_2 - 1, \alpha_3, \alpha_4) \notin H \\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 - 1, \alpha_4) \notin H \end{cases} \tag{2.5}$$

Analisemos o caso $(\alpha_1 - 1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \notin H$ *(os outros são simétricos).*

Note que como $\alpha_2 + \alpha_3 \geq \alpha_4$ *(por 2.4) temos que* $x^{\alpha_1-1}y^{\alpha_2}z^{\alpha_3} \in (y,z)^{\alpha_4}$, *isto é,* $(\alpha_1 - 1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in H_2$. *Portanto,* $(\alpha_1 - 1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \notin H_1$ *ou* $(\alpha_1 - 1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \notin H_3$ *o que implica em*

$$\alpha_1 - 1 + \alpha_2 < \alpha_4 \ \textit{ou}\ \alpha_1 - 1 + \alpha_3 < \alpha_4 \tag{2.6}$$

Para os demais casos temos:

$$(\alpha_1, \alpha_2 - 1, \alpha_3, \alpha_4) \notin H \Rightarrow \alpha_2 - 1 + \alpha_1 < \alpha_4 \ \textit{ou}\ \alpha_2 - 1 + \alpha_3 < \alpha_4 \tag{2.7}$$

$$(\alpha_1, \alpha_2 - 1, \alpha_3, \alpha_4) \notin H \Rightarrow \alpha_3 - 1 + \alpha_1 < \alpha_4 \ \textit{ou}\ \alpha_3 - 1 + \alpha_2 < \alpha_4 \tag{2.8}$$

Assim, de 2.5, 2.6, 2.7 e 2.8 temos as seguintes possibilidades:

1) $\alpha_1 + \alpha_2 - 1 < \alpha_4, \quad \alpha_2 + \alpha_3 - 1 < \alpha_4 \quad e \quad \alpha_1 + \alpha_3 - 1 < \alpha_4$

2) $\alpha_1 + \alpha_2 - 1 < \alpha_4, \quad \alpha_2 + \alpha_3 - 1 < \alpha_4 \quad e \quad \alpha_1 + \alpha_3 - 1 \geq \alpha_4$

3) $\alpha_1 + \alpha_2 - 1 < \alpha_4, \quad \alpha_1 + \alpha_3 - 1 < \alpha_4 \quad e \quad \alpha_2 + \alpha_3 - 1 \geq \alpha_4$

4) $\alpha_2 + \alpha_3 - 1 < \alpha_4, \quad \alpha_1 + \alpha_3 - 1 < \alpha_4 \quad e \quad \alpha_1 + \alpha_2 - 1 \geq \alpha_4$

Se a primeira possibilidade ocorrer, ou seja, se

$$\alpha_1 + \alpha_2 - 1 < \alpha_4, \quad \alpha_2 + \alpha_3 - 1 < \alpha_4 \quad e \quad \alpha_1 + \alpha_3 - 1 < \alpha_4$$

então usando 2.4 temos

$$\begin{array}{lcl} \alpha_4 \leq \alpha_1 + \alpha_2 < \alpha_4 + 1 & \Rightarrow & \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_4 \\ \alpha_4 \leq \alpha_2 + \alpha_3 < \alpha_4 + 1 & \Rightarrow & \alpha_2 + \alpha_2 = \alpha_4 \\ \alpha_4 \leq \alpha_1 + \alpha_3 < \alpha_4 + 1 & \Rightarrow & \alpha_1 + \alpha_3 = \alpha_4 \end{array}$$

e concluímos que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \quad e \quad \alpha_4 = 2\alpha_1$.

Logo,

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1, 2\alpha_1) = \alpha_1(e_1 + e_2 + e_3 + 2e_4) \in \widehat{H}.$$

Se a segunda possibilidade ocorrer, usando os mesmos argumentos do item anterior temos que $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_4$ *e* $\alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_4$ *e portanto* $\alpha_1 = \alpha_3$*. Substituindo essas informações na desigualdade* $\alpha_1 + \alpha_3 - 1 \geq \alpha_4$ *encontramos* $\alpha_1 + \alpha_1 - 1 \geq \alpha_1 + \alpha_2$ *o que nos leva aconcluir que* $\alpha_1 > \alpha_2$ *e* $\exists\, \alpha_1' > 0$ *tal que* $\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_1'$*.*

Portanto,

$$\begin{aligned} \alpha &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \\ &= (\alpha_2 + \alpha_1', \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_1', 2\alpha_2 + \alpha_1') \\ &= (\alpha_2, \alpha_2, \alpha_2, 2\alpha_2) + (\alpha_1', 0, \alpha_1', \alpha_1') \\ &= \alpha_2(e_1 + e_2 + e_3 + 2e_4) + \alpha_1'(e_1 + e_3 + e_4) \in \widehat{H}. \end{aligned}$$

As possibilidades 3) e 4) são análogos a 2).

Assim, $H = \widehat{H} = \langle e_1, e_2, e_3, e_1+e_2+e_4, e_2+e_3+e_4, e_1+e_3+e_4, e_1+e_2+e_3+2e_4 \rangle$*.*

Logo, $A = \langle xyt, yzt, xzt, xyzt^2 \rangle$*.*

Capítulo 3

Álgebras de Rees simbólicas de ideais monomiais

Este capítulo trata das Álgebras de Rees associadas a uma filtração dada por potências simbólicas de um mesmo ideal monomial, denominadas Álgebras de Rees simbólicas de ideais monomiais. Na seção 3.1, mostraremos que tais álgebras possuem geração finita. Na seção seguinte, introduziremos o conceito de álgebra de cobertura de vértices e provaremos que essas álgebras são um caso particular das Álgebras de Rees simbólicas de ideais monomiais.

3.1 Geração finita das Álgebras de Rees simbólicas de ideais monomiais

Seja $\mathbb{S} = \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_r]$ e $I \subset \mathbb{S}$ um ideal monomial livre de quadrado. Sabemos que

$$\bigoplus_{n \geq 0} I^{(n)} t^n = \bigoplus_{n \geq 0} \Big(\bigcap_{P \in \mathrm{Min}(I)} P^n \Big) t^n$$

(posteriormente falaremos mais sobre a igualdade acima) que por sua vez é uma $\mathbb{S}-$álgebra finitamente gerada, usando o teorema 2.0.8.

O objetivo desta seção é mostrar que as Álgebras de Rees simbólicas de ideais monomiais são, de forma geral, um caso particular do teorema 2.0.8 e portanto são também finitamente geradas. O próximo lema auxiliará na demostração da proposição 3.1.3. Antes de enunciá-lo, necessitamos lembrar a seguinte definição:

Sejam $\mathbb{A}$ um anel e $\mathbb{B}$ um subanel de $\mathbb{A}$. Um elemento $x \in \mathbb{A}$ é dito ser inteiro sobre $\mathbb{B}$ se satisfaz uma equação da forma

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

em que $a_i \in \mathbb{B}$, $\forall\, i \in \{1, \dots, n\}$. Claramente, todo elemento de $\mathbb{B}$ é inteiro em $\mathbb{B}$. Se todo elemento de $\mathbb{A}$ é inteiro em $\mathbb{B}$ dizemos que $\mathbb{A}$ é inteiro em $\mathbb{B}$.

Lema 3.1.1. *Sejam $\mathbb{A}$ um anel e $\mathbb{B}$ um subanel de $\mathbb{A}$. Se $\mathbb{A}$ é inteiro em $\mathbb{B}$ e $\mathbb{A}$ é uma $\mathbb{B}-$álgebra finitamente gerada então $\mathbb{A}$ é um $\mathbb{B}-$módulo finitamente gerado.*

Demonstração. Como $\mathbb{A}$ é uma $\mathbb{B}-$álgebra finitamente gerada, $\exists\ \omega_1, \dots, \omega_k \in A$ tais que $\mathbb{A} = \mathbb{B}[\omega_1, \dots, \omega_k]$. Ademais, como $\mathbb{A}$ é inteiro em $\mathbb{B}$, ω_i é inteiro em $\mathbb{B}$ para todo i.

Afirmamos que se $\mathbb{A} = \mathbb{B}[\omega_1]$ então $\mathbb{A}$ é um $\mathbb{B}-$módulo finitamente gerado.

De fato, $\exists\ n \in \mathbb{N}$ tal que ${\omega_1}^n + a_1{\omega_1}^{n-1} + \cdots + a_n = 0$. Consequentemente,

$${\omega_1}^{n+s} = -(a_1{\omega_1}^{n+s-1} + \cdots + a_n{\omega_1}^s),\ \forall\ s \geq 0.$$

Procedendo por indução em s, podemos ver que todas as potências de ω_1 pertencem ao $\mathbb{B}-$módulo gerado por $\{1, \omega_1, \dots, {\omega_1}^{n-1}\}$. Portanto, $\mathbb{A} = \mathbb{B}[\omega_1]$ é um $B-$módulo finitamente gerado, o que conclui a afirmação.

Agora, supondo $\mathbb{B}[\omega_1, \dots, \omega_u]$ um $\mathbb{B}-$ módulo finitamente gerado para todo u tal que $1 \leq u < k$, vamos mostrar que $\mathbb{B}[\omega_1, \dots, \omega_u]$ um $\mathbb{B}-$ módulo finitamente gerado para $u = k$.

Seja $\mathbb{B}_u = \mathbb{B}[\omega_1, \dots, \omega_u]$. Então, por hipótese de indução, $\mathbb{B}_{k-1}$ é um $\mathbb{B}-$módulo finitamente gerado. Por outro lado, como ω_k é inteiro sobre $\mathbb{B}_{k-1}$ (pois $\mathbb{B} \subset \mathbb{B}_{k-1}$), $\mathbb{B}_k = \mathbb{B}_{k-1}[\omega_k]$ é um $\mathbb{B}_{k-1}-$módulo finitamente gerado.

Portanto, é possível verificar facilmente que $\mathbb{B}_k = \mathbb{B}[\omega_1, \dots, \omega_k]$ é um $\mathbb{B}-$módulo finitamente gerado.

□

Seja $\mathbb{S} = \mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_r]$ e considere $\Im = \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma filtração de ideais homogêneos de $\mathbb{S}$.

Denote por $\mathbb{A} = \bigoplus\limits_{n\geq 0} I_n t^n$ a Álgebra de Rees associada a $\Im$. Define-se

$$\mathbb{A}^{(d)} = \bigoplus_{n\geq 0} A_{nd} = \bigoplus_{n\geq 0} I_{nd}t^{nd}$$

como sendo a *d-ésima veronessiana de* $\mathbb{A}$.

É fácil ver que $\mathbb{A}^{(d)}$ é uma subálgebra de $\mathbb{A}$.

Definição 3.1.2. *Seja $\mathbb{B}$ uma $\mathbb{B}_0-$álgebra. Dizemos que $\mathbb{B}$ é uma $\mathbb{B}_0-$álgebra graduada padrão se é isomorfa ao anel quociente de $\mathbb{B}_0[x_1, x_2, \dots, x_r]$ por um ideal homogêneo.*

A proposição a seguir estabelece duas equivalências para que uma $\mathbb{S}-$álgebra seja finitamente gerada. Nesse contexto, trata-se apenas de um resultado técnico que será útil posteriomente.

Proposição 3.1.3. *São equivalentes:*

(a) $\mathbb{A}$ *é uma* $\mathbb{S}$*-álgebra finitamente gerada.*

(b) *Existe um número natural* d *tal que* $\mathbb{A}^{(d)}$ *é uma* $\mathbb{S}-$*álgebra graduada padrão.*

(c) *Existe um número natural* d *tal que* $\mathbb{A}^{(d)}$ *é uma* $\mathbb{S}-$*álgebra finitamente gerada.*

Demonstração. $(a) \Rightarrow (b)$ Como $\mathbb{A}$ é uma $\mathbb{S}-$álgebra finitamente gerada e $\Im$ é uma filtração de ideais homogêneos, pela proposição 1.4.5, $\mathbb{A} = \mathbb{S}[f_1t^{c_1}, \ldots, f_mt^{c_m}]$ em que $f_i \in I_{c_i}$ é um elemento homogêneo, $\forall\, i \in \{1, \ldots, m\}$. Seja $c = \mathrm{MMC}\{c_1, \ldots, c_m\}$.

Defina $\mathbb{B} = \mathbb{S}[g_1, \ldots, g_m]$ com $g_i = f_i^{\frac{c}{c_i}}t^c$. Note que $\mathbb{B}$ é um subanel de $\mathbb{A}$.

Além disso,

$$\mathbb{B} = \bigoplus_{j\geq 0} B_j$$

com $B_j = \langle\{u_{\alpha_1\cdots\alpha_m}g_1{}^{\alpha_1}\cdots g_m{}^{\alpha_m}\ ;\ |\alpha| := \sum_{i=1}^{m}\alpha_i = j\ ,\ u_{\alpha_1\cdots\alpha_m} \in \mathbb{S}\}\rangle$, $\forall\, j > 0$ e $B_0 = \mathbb{S}$.

Observe que como $f_i^{\frac{c}{c_i}} \subset (I_{c_i})^{\frac{c}{c_i}} \subset I_c$ então $g_i \in A_c$, $\forall\, i$.

Consequentemente, $u_{\alpha_1\cdots\alpha_m}g_1{}^{\alpha_1}\cdots g_m{}^{\alpha_m} \in (A_c)^j \subset A_{jc}$, ou seja, $B_j \subset A_{jc}$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, como $f_it^{c_i}$ é um elemento inteiro em $\mathbb{B}$ (pois é raiz do polinômio $p(x) = x^{\frac{c}{c_i}} - g_i$) para todo i, e $\mathbb{A}$ é em particular uma $\mathbb{B}-$álgebra finitamente gerada, pelo lema 3.1.1 temos que $\mathbb{A}$ é um $\mathbb{B}-$módulo finitamente gerado. Por sua vez, como $\mathbb{B}$ é noetheriano (pois é imagem homomórfica do anel de polinômios em m variáveis sobre $\mathbb{S}$) então $\mathbb{A}^{(c)}$ é também um $\mathbb{B}-$módulo finitamente gerado.

Seja $\{a_k \in A_{s_kc}\,;\, k = 1, \ldots, \theta\}$ um conjunto de geradores de $\mathbb{A}^{(c)}$ como $\mathbb{B}-$módulo e considere $d = sc$ em que $s = \max\{s_1, \ldots, s_\theta\}$.

Afirmamos que $A_{jd} = A_d{}^j$, $\forall\, j \geq 0$.

Com efeito, para $j = 0$ ou $j = 1$ é trivial. Suponha a afirmação válida para todo $j \geq 1$ e mostremos que a mesma é válida para $j + 1$.

Para isso, note que $B_jA_{kc} = A_{(j+k)c}$, $\forall\, j \geq 0$ e $k \geq s$.

De fato, como $B_j \subset A_{jc}$ tem-se $B_jA_{kc} \subset A_{jc}A_{kc} \subset A_{(j+k)c}$. Reciprocamente, considere $f \in A_{(j+k)c} \subset A^{(c)}$. Então

$$f = ht^{(j+k)c} = \sum_{\lambda} b_\lambda a_\lambda \quad \text{com} \quad h \in I_{(j+k)c},\ b_\lambda \in B \text{ e } a_\lambda \in A_{s_\lambda c}.$$

Observe que, $k \geq s \geq s_\lambda$. Além disso, o grau em t de b_λ é $(j + k)c - s_\lambda c$, para todo λ.

Fixado λ, para simplificar a notação, escreva

$$\begin{aligned} b_\lambda &= \sum_{|\alpha|=(j+k)-s_\lambda} u_{\alpha_1\cdots\alpha_m} {g_1}^{\alpha_1}\cdots {g_m}^{\alpha_m} \\ &= \sum_{|\alpha|=(j+k)-s_\lambda} u_{\alpha_1\cdots\alpha_m} ({f_1}^{\frac{c}{c_1}})^{\alpha_1}\cdots ({f_m}^{\frac{c}{c_m}})^{\alpha_m} t^{(j+k)c-s_\lambda} \qquad \text{e} \\ a_\lambda &= \widetilde{a}_\lambda t^{s_\lambda} \text{ com } \widetilde{a}_\lambda \in I_{s_\lambda c} \end{aligned}$$

Desta forma, é suficiente mostrar que

$$\widetilde{a}_\lambda u_{\alpha_1\cdots\alpha_m} ({f_1}^{\frac{c}{c_1}})^{\alpha_1}\cdots ({f_m}^{\frac{c}{c_m}})^{\alpha_m} t^{(j+k)c} \in B_j A_{kc}$$

com $|\alpha| = (j+k) - s_\lambda$.

Como $\alpha \in \mathbb{N}^m$ e $|\alpha| = j + (k - s_\lambda)$ então $\exists\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{N}^m$ tais que $\alpha = \beta + \gamma$ em que $|\beta| = j$ e $|\gamma| = k - s_\lambda$.

Portanto, $\widetilde{a}_\lambda u_{\alpha_1\cdots\alpha_m} ({f_1}^{\frac{c}{c_1}})^{\alpha_1}\cdots ({f_m}^{\frac{c}{c_m}})^{\alpha_m} t^{(j+k)c}$

$$\begin{aligned} &= [u_{\alpha_1\cdots\alpha_m} ({f_1}^{\frac{c}{c_1}})^{\beta_1}\cdots ({f_m}^{\frac{c}{c_m}})^{\beta_m} t^{jc}][\widetilde{a}_\lambda ({f_1}^{\frac{c}{c_1}})^{\gamma_1}\cdots ({f_m}^{\frac{c}{c_m}})^{\gamma_m} t^{kc}] \\ &= [u_{\alpha_1\cdots\alpha_m} {g_1}^{\beta_1}\cdots {g_m}^{\beta_m}][\widetilde{a}_\lambda ({f_1}^{\frac{c}{c_1}})^{\gamma_1}\cdots ({f_m}^{\frac{c}{c_m}})^{\gamma_m} t^{kc}] \in B_j A_{kc} \end{aligned}$$

pois, $\widetilde{a}_\lambda \in I_{s_\lambda c}$ e para cada i, $({f_i}^{\frac{c}{c_i}})^{\gamma_i} \in {I_c}^{\gamma_i} \subset I_{c\gamma_i}$.

Com isso, concluímos que $B_j A_{kc} = A_{(j+k)c},\ \forall\ j \geq 0$ e $k \geq s$. Em particular, trocando j por js e k por ks temos

$$B_{js}A_{kd} = B_{js}A_{ksc} = A_{(js+ks)c} = A_{(j+k)d},\ \forall\ j,\ k \geq 0.$$

Note ainda que $B_j B_{\widehat{j}} = B_{j+\widehat{j}},\ \forall\ j,\ \widehat{j} \geq 0$.

Assim,

$$A_{(j+1)d} = B_{js}A_d = B_s(B_{(j-1)s}A_d) = B_s A_{jd} = B_s {A_d}^j \subset A_{sc}{A_d}^j = A_d {A_d}^j \subset {A_d}^{j+1}.$$

Como a outra inclusão é óbvia, concluímos a afirmação.

Para finalizar a demonstração, considere o homomorfismo de $\mathbb{S}-$álgebras induzido por

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{S}[y_1,\ldots,y_l] &\longmapsto \mathbb{A}^{(d)} \\ y_i &\longmapsto \widetilde{p}_i = \widetilde{q}_i t^d \quad \text{com} \quad \widetilde{q}_i \in I_d \end{aligned}$$

em que $\{\widetilde{p}_1,\ldots,\widetilde{p}_l\}$ é um conjunto de geradores homogêneos de A_d como $\mathbb{S}-$módulo.

Se mostrarmos que φ é um epimorfismo de $\mathbb{S}-$álgebras cujo núcleo é um ideal homogêneo, obtemos o desejado. Com efeito, claramente φ é um homomorfismo. Se $\widetilde{f} \in \mathbb{A}^{(d)}$ então

$$\widetilde{f} = \widetilde{f}_0 + \widetilde{f}_1 + \cdots + \widetilde{f}_n \text{ com } \widetilde{f}_j \in A_{jd}.$$

Para cada j fixo, $j \geq 1$, como $A_{jd} = {A_d}^j$,

$$\widetilde{f_j} = \sum_{\lambda} v_{\lambda_1 \cdots \lambda_l} \widetilde{p_1}^{\lambda_1} \cdots \widetilde{p_l}^{\lambda_l}, \quad |\lambda| = j.$$

Assim, tomando $\widetilde{g_0} = \widetilde{f_0}$ e $\widetilde{g_j} = \sum_{\lambda} v_{\lambda_1 \cdots \lambda_l} {y_1}^{\lambda_1} \cdots {y_l}^{\lambda_l}$ para $1 \leq j \leq n$ em $\mathbb{S}[y_1, \ldots, y_l]$ tem-se $\varphi(\widetilde{g_j}) = \widetilde{f_j}$ para todo j. Logo, φ é sobrejetiva.

Seja $p \in \mathbb{S}[y_1, \ldots, y_l]$ tal que $\varphi(p) = 0$. Escreva

$$p = p_0 + p_1 + \cdots + p_n$$

em que p_j é um polinômio homogêneo de grau j, em $\mathbb{S}[y_1, \ldots, y_l]$, isto é,

$$p_j = \sum_{|\lambda_j| = j} \omega_{\lambda_{1j} \cdots \lambda_{lj}} {y_1}^{\lambda_{1j}} \cdots {y_l}^{\lambda_{lj}} \text{ para } 1 \leq j \leq n \text{ em que } \lambda_j = (\lambda_{1j}, \ldots, \lambda_{lj}) \text{ e } p_0 \in \mathbb{S}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 0 = \varphi(p) &= \varphi(p_0) + \varphi(p_1) + \cdots + \varphi(p_n) \\ &= p_0 + (\sum_{|\lambda_1| = 1} \omega_{\lambda_{11} \cdots \lambda_{l1}} \widetilde{q_1}^{\lambda_{11}} \cdots \widetilde{q_l}^{\lambda_{l1}}) t^d + \cdots + (\sum_{|\lambda_l| = l} \omega_{\lambda_{1l} \cdots \lambda_{ll}} \widetilde{q_1}^{\lambda_{1n}} \cdots \widetilde{q_l}^{\lambda_{ln}}) t^{nd}, \end{aligned}$$

ou seja, $0 = (\sum_{|\lambda_j| = j} \omega_{\lambda_{1j} \cdots \lambda_{lj}} \widetilde{q_1}^{\lambda_{1j}} \cdots \widetilde{q_l}^{\lambda_{lj}}) t^{jd} = \varphi(p_j)$ para todo j tal que $1 \leq j \leq n$ e $p_0 = \varphi(p_0) = 0$. Portanto, $p_j \in \mathrm{Nuc}(\varphi)$, $\forall\, j$. Logo, pela observação 1.4.1, $\mathrm{Nuc}(\varphi)$ é um ideal homogêneo.

$(b) \Rightarrow (c)$ É imediato.

$(c) \Rightarrow (a)$ Para cada $j \in \{0, \ldots, d-1\}$, defina

$$\mathbb{A}^{(d;j)} := \bigoplus_{n \geq 0} A_{nd+j}.$$

Note que $\mathbb{A}^{(d;j)}$ é um $\mathbb{A}^{(d)}-$módulo. Com efeito, basta ver que $A_{id} A_{nd+j} \subset A_{(i+n)d+j}$ para todo $i,\ n \geq 0$.

Seja

$$\begin{aligned} \psi_n : A_{nd+j} &\longrightarrow \mathbb{A}^{(d)} \\ h_n t^{nd+j} &\longmapsto h_n t^{nd}, \quad h_n \in I_{nd+j} \subset I_{nd}. \end{aligned}$$

Se $\psi_n(h_n t^{nd+j}) = \psi_n(\widetilde{h}_n t^{nd+j})$ então $h_n t^{nd} = \widetilde{h}_n t^{nd}$, isto é, $h_n = \widetilde{h}_n$. Portanto, ψ_n é um homomorfismo injetor, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Consequentemente, definindo

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{A}^{(d;j)} &\longmapsto \mathbb{A}^{(d)} \\ h_0 t^d + h_1 t^{d+j} + \cdots + h_k t^{kd+j} &\longmapsto h_0 + \psi_1(h_1 t^{d+j}) + \cdots + \psi_k(h_k t^{kd+j}). \end{aligned}$$

temos que ψ é um homomorfismo injetor de $\mathbb{A}^{(d)}-$módulos.

Assim, $\mathbb{A}^{(d;j)}$ é isomorfo a um submódulo de $\mathbb{A}^{(d)}$ (como $\mathbb{A}^{(d)}-$módulo) que é, em particular, um ideal de $\mathbb{A}^{(d)}$. Consequentemente, como $\mathbb{A}^{(d)}$ é uma $\mathbb{S}-$álgebra finitamente gerada, $\mathbb{A}^{(d;j)}$ é um (ideal) submódulo de $A^{(d)}$ finitamente gerado, $\forall\, j \in \{0, \cdots, d-1\}$.

Portanto, $\mathbb{A} = \bigoplus_{j=0}^{d-1} \mathbb{A}^{(d;j)}$ é um $\mathbb{A}^{(d)}-$módulo é finitamente gerado, o que é suficiente para concluir a prova.

□

Definição 3.1.4. *Sejam $I, J \subset \mathbb{S}$ ideais homogêneos. A n-ésima potência simbólica de I com respeito a J é o ideal dado por*

$$I^n : J^\infty = \{f \in \mathbb{S};\ fJ^k \subset I^n \text{ para algum } k \in \mathbb{N}\}$$

Note se $J \subset \sqrt{I^n}$, como $J \subset \mathbb{S}$ e $\mathbb{S}$ é um anel noetheriano, então $\exists\, k \in \mathbb{N}$ tal que $J^k \subset (\sqrt{I^n})^k \subset I^n$ (ver ref. [13]). Portanto, neste caso, $I^n : J^\infty = \mathbb{S}$.

Se $J \not\subset \sqrt{I^n}$ então

$$I^n : J^\infty = \bigcap_{P \in \mathrm{Ass}(I^n),\ J \not\subset P} Q(P)$$

em que $I^n = \bigcap_{P \in \mathrm{Ass}(I^n)} Q(P)$ é uma decomposição primária de I^n.

Com efeito, se $f \in I^n : J^\infty$ então $fJ^k \subset I^n$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Consequentemente, como $I^n = \bigcap_{P \in \mathrm{Ass}(I^n)} Q(P)$, em particular,

$$fJ^k \subset Q(P), \text{ para todo } P \in \mathrm{Ass}(I^n) \text{ tal que } J \not\subset P.$$

Para cada P tal que $J \not\subset P$, $\exists g_P \in J$ tal que $(g_P)^k \notin P$. Como $f(g_P)^k \in Q(P)$ concluímos que $f \in Q(P)$, $\forall\, P \in \mathrm{Ass}(I^n)$ tal que $J \not\subset P$, ou seja,

$$f \in \bigcap_{P \in \mathrm{Ass}(I^n),\ J \not\subset P} Q(P).$$

Reciprocamente, para cada $P \in \mathrm{Ass}(I^n)$, como $P \subset \mathbb{S}$ e $\mathbb{S}$ é um anel noetheriano, existe $k(P) \in \mathbb{N}$ tal que $P^{k(P)} \subset Q(P)$. Tomando $k = \max\{k(P);\ J \subset P\}$ temos que $P^k \subset Q(P)$ para todo $P \in \mathrm{Ass}(I^n)$ com $J \subset P$. Então, $J^k \subset P^k \subset Q(P)$ para todo $P \in \mathrm{Ass}(I^n)$ tal que $J \subset P$, isto é,

$$J^k \subset \bigcap_{P \in \mathrm{Ass}(I^n),\ J \subset P} Q(P).$$

Assim, se $g \in \bigcap_{P \in \mathrm{Ass}(I^n),\ J \not\subset P} Q(P)$ então $gJ^k \subset I^n$. Logo, $g \in I^n : J^\infty$.

A Álgebra de Rees simbólica de I com respeito a J é definido como sendo a $\mathbb{S}-$álgebra graduada

$$\bigoplus_{n\geq 0}(I^n : J^\infty)t^n.$$

Mostraremos que para ideais monomiais esta álgebra é finitamente gerada. Comecemos enunciando um lema que nos será útil.

Lema 3.1.5. *Sejam I, J ideais monomiais de $\mathbb{S}$, $\mathcal{A} = \{P \in \operatorname{Ass}(I);\ J \not\subset P\}$ e $P_1, P_2, \ldots, P_u$ elementos máximos de $\mathcal{A}$ (com respeito a inclusão). Se $\operatorname{Ass}(I : J^\infty) = \operatorname{Ass}(I^n : J^\infty)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $I = \bigcap_{P\in\operatorname{Ass}(I)} Q(P)$ é uma decomposição primária de I. Então*

$$(I^n : J^\infty) = \bigcap_{i=1}^{u} {Q_i}^n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

com $Q_i := \bigcap_{P\in\operatorname{Ass}(I),\ P\subset P_i} Q(P)$ para todo $i = 1, 2, \ldots, u$.

Demonstração. Dado $n \in \mathbb{N}$, seja $I^n : J^\infty = \bigcap_{P\in\operatorname{Ass}(I^n:J^\infty)} Q_n(P)$ uma decomposição primária de $I^n : J^\infty$. Uma vez que $\operatorname{Ass}(I : J^\infty) = \operatorname{Ass}(I^n : J^\infty)$,

$$I^n : J^\infty = \bigcap_{P\in\operatorname{Ass}(I:J^\infty)} Q_n(P).$$

Defina $Q_{n,i} := \bigcap_{P\in\operatorname{Ass}(I:J^\infty),\ P\subset P_i} Q_n(P)$. Observe que $\mathcal{A} = \operatorname{Ass}(I : J^\infty)$. Assim, como $P_1, P_2, \ldots, P_r$ são elementos máximos de $\mathcal{A}$ temos:

$$(I^n : J^\infty) = \bigcap_{i=1}^{u} Q_{n,i}.$$

Resta mostrar que $Q_{n,i} = {Q_i}^n$, $\forall\, i \in \{1, \ldots, u\}$.

Renomeando as variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_r$, se necessário, assuma $P_i = (x_1, x_2, \ldots, x_s)$ em que $s \leq r$ (pela proposição 1.1.11 os primos asssociados de I são gerados por subconjuntos de variáveis).

Seja $R = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]_{P_i} = \mathbb{K}(x_{s+1}, \ldots, x_r)[x_1, \ldots, x_s]$.

Para cada monômio $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r]$, denote por f^* o divisor de f, de maior grau possível, envolvendo apenas as variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_s$. É imediato que $(fg)^* = f^*g^*$ para f, g monômios. Afirmamos que:

1) $Q_i = I^{ec} = (f^*)_{f\in I,\ f \text{ monômio}}$

2) $Q_{n,i} = (I^n)^{ec} = (g^*)_{g\in I^n,\ g \text{ monômio}}$

1) Note que

$$I^{ec} = \bigcap_{P \in \mathrm{Ass}(I)} (Q(P))^{ec} = \bigcap_{P \in \mathrm{Ass}(I),\, P \subset P_i} Q(P)^{ec} = \bigcap_{P \in \mathrm{Ass}(I),\, P \subset P_i} Q(P) = Q_i.$$

Seja $f^* \in (f^*)_{f \in I,\, f \text{ monômio}}$. Consequentemente, $\exists\ t \in \mathbb{K}[x_{s+1}, \ldots, x_r]$ tal que

$$f = tf^* \in I, \text{ ou seja, } \frac{f^*}{1} = \frac{f}{t} \in I^e.$$

Portanto, $f^* \in I^{ec}$ e por sua vez $(f^*)_{f \in I,\, f \text{ monômio}} \subset I^{ec}$.

Reciprocamente, como I^{ec} é um ideal monomial (pois, $Q_i = I^{ec}$), é suficiente provar que todo monômio de I^{ec} está em $(f^*)_{f \in I,\, f \text{ monômio}}$.

Seja $p \in I^{ec}$, p monômio. Então,

$$\frac{p}{1} = \frac{f}{s} \text{ com } f \in I \text{ e } s \in \mathbb{K}[x_{s+1}, \ldots, x_r],$$

o que implica em, $sp = f \in I$. Como I é um ideal monomial, considerando c como sendo o coeficiente do termo líder de sp, o monômio

$$h := \frac{\text{termo líder}(sp)}{c} = \frac{\text{termo líder}(s)p}{c} \in I.$$

Por conseguinte, $h^* = p^* \in (f^*)_{f \in I,\, f \text{ monômio}}$. Logo, como $p^*|p$ temos que $p \in (f^*)_{f \in I,\, f \text{ monômio}}$.

2) É análogo à demonstração anterior.

Portanto, como todo monômio g^* com $g \in I^n$ pode ser escrito como produto de n elementos da forma f^* com $f \in I$, isto é, se $g = f^n$ com $f \in I$ tem-se $g^* = (f^*)^n$, então $Q_{n,i} = {Q_i}^n$.

□

Teorema 3.1.6. *Sejam $I, J \subset \mathbb{S}$ ideais monomiais. Então $\mathbb{A} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} (I^n : J^\infty)t^n$ é uma $\mathbb{S}-$álgebra finitamente gerada.*

Demonstração. Pela proposição 3.1.3, é suficiente mostrar que

$$\mathbb{A}^{(d)} = \bigoplus_{n \geq 0} (I^{dn} : J^\infty)t^n$$

é uma $\mathbb{S}-$álgebra finitamente gerada para algum $d \in \mathbb{N}$.

Afirmamos que $\exists\ d \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{Ass}(\widetilde{I} : J^\infty) = \mathrm{Ass}(\widetilde{I}^n : J^\infty)$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ com $\widetilde{I} = I^d$.

Com efeito, como $\exists\ d \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{Ass}(I^d) = \mathrm{Ass}(I^n)$, $\forall\ n \geq d$ (ver ref.[3]), em particular, $\mathrm{Ass}(I^d) = \mathrm{Ass}(I^{dn})$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ass}(I^{dn} : J^\infty) &= \{P \in \mathrm{Ass}(I^{dn}); J \not\subset P\} \\ &= \{P \in \mathrm{Ass}(I^d); J \not\subset P\} \\ &= \mathrm{Ass}(I^d : J^\infty). \end{aligned}$$

Definindo $\widetilde{I} := I^d$, obtemos o desejado.

Como $\widetilde{I}$ é um ideal monomial, considerando os $Q_i's$ como no lema 3.1.5 temos:

$$\mathbb{A}^{(d)} = \bigoplus_{n \geq 0} (\widetilde{I}^n : J^\infty) t^n = \bigoplus_{n \geq 0} (\bigcap_{i=1}^{u} {Q_i}^n) t^n$$

em que os $Q_i's$ são ideais monomiais (pois, cada Q_i é uma interseção finita de ideais monomiais).

Logo, pelo teorema 2.0.8, $\mathbb{A}^{(d)}$ é uma $\mathbb{S}-$álgebra finitamente gerada.

□

Corolário 3.1.7. *Se $I \subset \mathbb{S}$ é um ideal monomial então $\bigoplus_{n \geq 0} I^{(n)} t^n$ é uma $\mathbb{S}-$álgebra finitamente gerada.*

Demonstração. Seja $\bigcap_{P \in \text{Ass}(I^n)} Q(P)$ uma decomposição primária de I^n.

Se $\text{Ass}(I^n) = \text{Min}(I)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então

$$I^{(n)} = \bigcap_{P \in \text{Min}(I)} Q(P) = \bigcap_{P \in \text{Ass}(I^n)} Q(P) = I^n, \ \forall \, n \in \mathbb{N}$$

e neste caso a tese segue do teorema 1.4.6.

Se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\text{Ass}(I^n) \neq \text{Min}(I)$ então

$$I^{(n)} = I^n : J^\infty \text{ com } J = \bigcap_{P \in \text{Ass}^*(I) \setminus \text{Min}(I)} P,$$

em que $\text{Ass}^*(I) = \bigcup_{n \geq 0} \text{Ass}(I^n)$ (note que $\text{Ass}^*(I)$ é um conjunto finito por [3]). Com efeito, como $I^n : J^\infty = \bigcap_{P \in \text{Ass}(I),\, J \not\subset P} Q(P)$ definindo $D = \{\widetilde{P} \in \text{Ass}(I^n);\ J \not\subset \widetilde{P}\}$ é suficiente mostrar que $D = \text{Min}(I)$.

Se $\widetilde{P} \in \text{Ass}(I^n) \subset \text{Ass}^*(I)$ e $\widetilde{P} \notin \text{Min}(I)$ então $\widetilde{P} \notin D$.

Por outro lado, se $\widetilde{P} \in \text{Min}(I)$ e $J \subset \widetilde{P}$ então $\exists \, P \in \text{Ass}(I^n) \setminus \text{Min}(I)$ (para algum $n \in \mathbb{N}$) tal que $P \subset \widetilde{P}$. Consequentemente, $I^n \subset P \subset \widetilde{P}$ o que equivale a $I \subset P \subset \widetilde{P}$. Assim, pela observação 1.1.9, $\exists \, \widehat{P} \in \text{Ass}(I)$ tal que $\widehat{P} \subset P \subset \widetilde{P}$. Como $\widetilde{P} \in \text{Min}(I)$ tem-se $P = \widetilde{P}$, o que é um absurdo. Neste caso, o resultado segue do teorema 3.1.6.

□

O corolário anterior mostra que as Álgebras de Rees simbólicas de ideais monomiais são finitamente geradas, mas não dá informações sobre os geradores dessas álgebras. O exemplo a seguir explicitará um conjunto de geradores em um caso particular.

Exemplo 3.1.8. *Seja $I = (xy, yz, xz) \subset \mathbb{K}[x, y, z]$ um ideal monomial e*

$$I = (x, y) \cap (y, z) \cap (x, z)$$

uma decomposição primária de I. Como I é gerado por monômios livres de quadrado,

$$I^{(n)} = (x,y)^{(n)} \cap (y,z)^{(n)} \cap (x,z)^{(n)}.$$

Além disso, $(x,y)^{(n)} = (x,y)^n$, $(y,z)^{(n)} = (y,z)^n$ e $(x,z)^{(n)} = (x,z)^n$ pois (x,y), (y,z) e (x,z) são ideais gerados por subconjuntos de variáveis.

Assim,

$$\bigoplus_{n\geq 0} I^{(n)}t^n = \bigoplus_{n\geq 0}[(x,y)^n \cap (y,z)^n \cap (y,z)^n]t^n = \langle xyt, yzt, xzt, xyzt\rangle$$

como foi visto no exemplo 2.0.9.

De forma geral, se I é um ideal radical de um anel noetheriano $\mathbb{A}$,

$$I^{(n)} = \bigcap_{P\in \mathrm{Min}(I)} P^{(n)}.$$

Além disso, se P é gerado por uma sequência regular então $P^{(n)} = P^n$. No caso particular que I é um ideal de $\mathbb{S}$ gerado por monômios livres de quadrado,

$$I^{(n)} = \bigcap_{P\in \mathrm{Min}(I)} P^{n}.$$

O leitor interessado pode encontrar tais resultados em [3].

3.2 Álgebras de cobertura de vértices

Nesta seção estudaremos as coberturas de vértices associadas a grafos simples. Mostraremos que para cada grafo simples existe apenas um número finito de coberturas de vértices indecomponíveis. A estratégia usada será traduzir esse problema combinatório para um problema algébrico, mais precisamente, ao estudo do tipo de geração das Álgebras de Rees simbólicas de ideais monomiais.

Dado um conjunto finito $[r] := \{1,\ldots,r\}$, um *grafo simples* G de vértices em $[r]$ é um par $G = ([r], E(G))$ em que $E(G)$ é uma coleção de subconjuntos $\{i,j\}$ com $i \neq j$ de $[r]$ chamados arestas.

Um subconjunto $C \subset [r]$ é chamado uma cobertura de vértices de G se para toda aresta $\{i,j\}$ de G, $i \in C$ ou $j \in C$.

Exemplo 3.2.1. *$G = ([3], E(G))$ em que $E(G) = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$ é um grafo simples chamado triângulo.*

$C_1 = \{1,2\}$, $C_2 = \{2,3\}$, $C_3 = \{1,3\}$ e $C_4 = \{1,2,3\}$ são todas as coberturas de vértices de G.

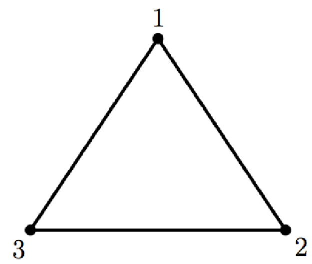

Figura 3.2.1: Grafo do triângulo.

Um subconjunto $C \subset [n]$ pode ser identificado com um $(0,1)-$vetor $a_C \in \mathbb{N}^r$ dado por

$$a_C(i) = \begin{cases} 1, & \text{se } i \in C \\ 0, & \text{se } i \notin C \end{cases}$$

em que $a_C(i)$ denota a i-ésima coordenada do vetor $a_C \in \mathbb{N}^r$.

Claramente um $(0,1)-$vetor $a_C \in \mathbb{N}^r$ corresponde a uma cobertura de vértices de G se, e somente se, $a_C(i) + a_C(j) \geq 1$, $\forall \{i,j\} \in E(G)$.

De modo geral, chamaremos um vetor $a = (a_1, \ldots, a_r) \in \mathbb{N}^r$ de uma *cobertura de vértice de G de ordem k* se $a_i + a_j \geq k$, $\forall \{i,j\} \in E(G)$.

Uma cobertura de vértice ordinária corresponde segundo a nossa definição a um $(0,1)-$vetor que é uma cobertura de vértice de ordem 1.

Dizemos que uma cobertura de vértice a de grau k é decomponível se existem coberturas de vértice b e $c \neq a$ de graus i e j respectivamente tais que $a = b+c$ e $k = i+j$. Caso contrário, a é dita indecomponível.

Exemplo 3.2.2. *Seja G o grafo do triângulo. Então $a = (1,1,1)$ é uma cobertura de vértices de ordem 2 indecomponível. De fato, se $a = b + c$ com $b, c \neq a$ temos:*

$$a = (1,0,0) + (0,1,1) \quad ou \quad a = (0,1,0) + (1,0,1) \quad ou \quad a = (0,0,1) + (1,1,0).$$

Em qualquer uma das possibilidades, a ordem de b é 0 e a ordem de c é 1.

Seja $A(G)$ uma subálgebra de $\mathbb{S}[t]$ gerada pelo conjunto

$$\{{x_1}^{a_1} \cdots {x_r}^{a_r} t^k \,;\, a = (a_1, \ldots, a_r) \in \mathbb{N}^r \text{ é uma cobertura de vértice de G de ordem } k\}.$$

Note que

$$A(G) = \bigoplus_{k \geq 0} A_k(G)$$

em que $A_0(G) = \mathbb{S}$ e $A_k(G)$ é um $\mathbb{S}-$módulo gerado por

$$\{{x_1}^{a_1} \cdots {x_r}^{a_r} t^k \,;\, a \text{ é uma cobertura de vértice de ordem k}\}.$$

Com efeito, se $a = (a_1, \ldots, a_r)$ é uma cobertura de vértice de ordem k e $b = (b_1, \ldots, b_r)$ é uma cobertura de vértice de ordem l então como

$$(x_1{}^{a_1} \cdots x_r{}^{a_r} t^k)(x_1{}^{b_1} \cdots x_r{}^{b_r} t^l) = x_1{}^{a_1+b_1} \cdots x_r{}^{a_r+b_r} t^{k+l}$$

em que $(a_i + b_i) + (a_j + b_j) = (a_i + a_j) + (b_i + b_j) \geq k + l$ para todo $\{i, j\} \in E(G)$ temos que $a + b$ é uma cobertura de vértice de ordem $k + l$.

Logo, $A_k(G)A_l(G) \subset A_{k+l}(G)$.

Assim, $A(G)$ é uma $\mathbb{S}-$álgebra graduada a qual denominamos de *álgebra de cobertura de vértices.*

Defina

$$I^*(G) := \bigcap_{\{i,j\} \in E(G)} P_{i,j}$$

em que $P_{i,j}$ é o ideal primo gerado pelas variáveis x_i e x_j.

Proposição 3.2.3. *Seja G um grafo simples no conjunto de vértices $[r]$. Então $A(G)$ é a álgebra de Rees simbólica do ideal $I^*(G)$. Em particular, $A(G)$ é uma $\mathbb{S}-$álgebra finitamente gerada.*

Demonstração. Note que $A_k(G) = I^*(G)^{(k)} t^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

De fato, como

$$\begin{aligned}
x_1{}^{a_1} \ldots x_r{}^{a_r} t^k \in A_k(G) \quad &\Leftrightarrow \quad a_i + a_j \geq k, \ \forall \{i, j\} \in E(G) \\
a_i + a_j \geq k, \ \forall \{i, j\} \in E(G) \quad &\Leftrightarrow \quad x_1{}^{a_1} \ldots x_r{}^{a_r} \in P_{i,j}{}^k, \ \forall \{i, j\} \in E(G) \\
x_1{}^{a_1} \ldots x_r{}^{a_r} \in P_{i,j}{}^k, \ \forall \{i, j\} \in E(G) \quad &\Leftrightarrow \quad x_1{}^{a_1} \ldots x_r{}^{a_r} \in \bigcap_{\{i,j\} \in E(G)} P_{i,j}{}^k.
\end{aligned}$$

e $P_{i,j}$ é gerado por um subconjunto de variáveis temos que $x_1{}^{a_1} \ldots x_r{}^{a_r} t^k \in A_k(G)$, o que equivale a dizer que

$$x_1{}^{a_1} \ldots x_r{}^{a_r} \in \bigcap_{\{i,j\} \in E(G)} P_{i,j}{}^k = \bigcap_{\{i,j\} \in E(G)} P_{i,j}{}^{(k)} = I^*(G)^{(k)}.$$

Portanto, pelo corolário 3.1.7, $A(G)$ é uma $\mathbb{S}-$álgebra finitamente gerada.

□

Seja $a = (a_1, \ldots, a_r)$ uma cobertura de vértices de ordem k. Por definição, a é uma cobertura de vértices decomponível se existem b e c coberturas de vétices disjuntas de a de ordens i e j respectivamente tais que $a = b + c$ e $k = i + j$. Do ponto de vista algébrico, a é uma cobertura de vértices decomponível se, e somente se,

$$x_1{}^{a_1} \cdots x_r{}^{a_r} t^k = (x_1{}^{b_1} \cdots x_r{}^{b_r} t^i)(x_1{}^{c_1} \cdots x_r{}^{c_r} t^j)$$

com $x_1{}^{b_1} \cdots x_r{}^{b_r} t^i \in A_i(G)$ e $x_1{}^{c_1} \cdots x_r{}^{c_r} t^j \in A_j(G)$, $b, \ c \neq a$.

É fácil ver que cada cobertura de vértice de G indecomponível de ordem > 0 está associada de forma biunívoca a um gerador monomial mínimo da $\mathbb{S}-$álgebra $A(G)$, ou seja, a um monômio que gera a $\mathbb{S}-$álgebra $A(G)$ e não é escrito como produto de dois elementos de $A(G)$ diferentes de 1. Além disso, o conjunto formado pelos geradores monomiais mínimos de $A(G)$ é unicamente determinado. Com efeito, se existissem dois conjuntos disjuntos com essa propriedade, teriamos um elemento que pertenceria a apenas um deles, mas que seria produto de elementos diferentes de 1 do outro, o que é impossível. Ademais, as coberturas de vértices indecomponíveis de ordem 0 são apenas o vetor nulo e os vetores da base canônica $e_1, \ldots, e_r \in \mathbb{N}^r$. De fato, se $a = (a_1, \ldots, a_r)$ é uma cobertura de vétices de ordem 0,

$$\begin{aligned} a &= a_1e_1 + \cdots + a_re_r \\ &= \underbrace{e_1 + \cdots + e_1}_{a_1-vezes} + \cdots + \underbrace{e_r + \cdots + e_r}_{a_r-vezes} \end{aligned}$$

em que cada e_i é uma cobertura de vétices de ordem 0.

Portanto, pelo lema 3.2.3, como $A(G)$ é uma $\mathbb{S}-$álgebra finitamente gerada, existe apenas um número finito de coberturas de vértices de G indecomponíveis.

Exemplo 3.2.4. *Seja G o grafo do triângulo. Neste caso,*

$$A(G) = \bigoplus_{n\geq 0} I^*(G)^{(n)}t^n \quad \text{em que} \quad I^*(G) = (x,y) \cap (y,z) \cap (x,z).$$

Pelo exemplo 3.1.8, $A(G) = \langle xyt, yzt, xzt, xyzt\rangle$. Note que xyt, yzt, xzt e $xyzt$ são geradores mínimos de $A(G)$. Com efeito, se escrevermos esses elementos como produto de dois outros diferentes de 1 temos as seguintes possibilidades:

$$\begin{aligned} xyt &= x(yt) = y(xt) = (xy)t \\ yzt &= y(zt) = z(yt) = (yz)t \\ xzt &= x(zt) = z(xt) = (xz)t \\ xyzt^2 &= x(yzt^2) = y(xzt^2) = z(yzt^2) = xy(zt^2) = yz(xt^2) = xz(yt^2) = xyz(t^2) \end{aligned}$$

Como $I^*(G)^{(n)}t^n = (x,y)^n \cap (y,z)^n \cap (x,z)^n t^n$ (veja o exemplo 3.1.8), é possível verificar facilmente que em nenhum dos casos os dois fatores pertencem simultaneamente a $A(G)$.

Logo, $(1,1,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,1)$ e $(1,1,1)$ são as únicas coberturas de vértices indecomponíveis de ordem > 0 do grafo do triângulo sendo que as três primeiras são de ordem 1 e a última de ordem 2.

Note que no exemplo anterior o grau máximo (em t) dos geradores mínimos da álgebra de cobertura de vértices associada ao grafo do triângulo é 2. De forma geral, 2 é uma cota superior para o grau dos geradores mínimos de $A(G)$ (veja [6]).

O conceito de cobertura de vértices pode ser facilmente estendida para complexos simpliciais pesados. Um peso em um complexo simplicial Δ é uma função ω que associa a cada faceta de Δ um número natural. Assim, a álgebra de cobertura de vértices $A(\Delta, \omega)$ é definida de forma similar ao caso do grafo (descrito nessa seção), além de ser também finitamente gerada. Em adição, $A(\Delta, \omega)$ é normal e Cohen-Macaulay. Esses conceitos e resultados podem ser encontrados em [6].

Conclusão

Embora esta dissertação mostre que as Álgebras de Rees simbólicas de ideais monomiais tem tipo de geração finita, ela não fornece informações sobre esses geradores.

No caso particular em que os ideais monomiais são gerados por monômios livres de quadrado, em 2004, Bahiano em [2] estabeleceu uma quota superior para o tipo de geração das Álgebras de Rees associadas a esses ideais. Esse mesmo trabalho nos motivou a adaptar para a nossa linguagem um exemplo, originalmente tratado em [2], de uma Álgebra de Rees simbólica em que um conjunto de geradores é explicitado.

Para o caso em que os ideais monomiais são quaisquer, ainda não existe uma cota superior para o tipo de geração nem outro tipo de informação sobre os geradores.

Outra questão que surgiu naturalmente ao longo deste trabalho é se a interseção finita de álgebras finitamente geradas é sempre finitamente gerada. Essa pergunta tem como motivação o fato de mostrarmos neste texto que, em particular, a resposta é positiva, se a interseção é dada por um número finito de Álgebras de Rees ordinárias associadas a ideais monomiais. Se essa conjectura for verdadeira, isso fornecerá uma nova demonstração para o caso acima, mais simples que a apresentada no segundo capítulo desta dissertação.

Referências Bibliográficas

[1] ATIYAH, M. F.; MACDONALD, I. G. *Introduction to Commutative Algebra*, University of Oxford. Reading: Addison-Wesley, 1969.

[2] BAHIANO, C. E. N. Symbolic Powers of edge ideals, *Journal of Algebra*, v. **273**, p. 517-537, 2004.

[3] BRODMANN, M. Asymptotic stability of Ass(M/I^nM), *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. **74**, p. 16-18, 1979.

[4] BRUNS, W.; HERZOG, J. *Cohen-Macaulay rings*, Cambridge: Cambridge University Press, 1998.

[5] EISENBUD, D. *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, Berlin: Springer-Verlag, 1994. (Graduate Texts in Mathematics, **150**)

[6] HERZOG, J. ; HIBI, T. ; TRUNG, N. V. Symbolic powers of monomial ideals and vertex cover algebras, *Advances in Mathematics*, v. **210**, p. 304-322, 2007.

[7] HUNGERFORD, T. W. ; *Algebra*, New York: Springer-Verlag, 1980.

[8] LYUBEZNIK, G. ; On the arithmrankof monomial ideals, *Journal of Algebra*, v. **112**, p. 86-89, 1988.

[9] MATSUMURA, H. *Commutative ring theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

[10] NAGATA, M. On the fourteenth problem of Hilbert. In: PROCEEDINGS OF THE INTERNATIONAL CONGRESS OF MATHEMATICIANS, London, 1958. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1960. p. 459-462.

[11] ROCKAFELLAR, R. T. *Convex Analysis*. Princeton: Princeton University Press, 1970.

[12] VILLARREAL, R. H. *Monomial Algebras*. New York: Marcel Dekker, 2001.

[13] ZARISKI, O. ; SAMUEL, P., *Commutative Algebra*, vol. **1**. New York: Springer-Verlag, 1958.