Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática - IM
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PGMAT
Dissertação de Mestrado

# Hipersuperfícies em formas espaciais satisfazendo a condição $L_k(x) = Ax$

Luiz Alberto de Oliveira Silva

**Salvador-Bahia**
Setembro de 2011

# Hipersuperfícies em formas espaciais satisfazendo a condição $L_k(x) = Ax$

Luiz Alberto de Oliveira Silva

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientador:** Prof. Dr. José Nelson Bastos Barbosa.

**Salvador-Bahia**

Setembro de 2011

Silva, Luiz Alberto de Oliveira.

Hipersuperfícies em formas espaciais satisfazendo a condição $L_k(x) = Ax$/ Luiz Alberto de Oliveira Silva. – Salvador: UFBA, 2011.

51 f.

Orientador: Prof. Dr. José N. Bastos Barbosa.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2011.

Referências bibliográficas.

1. Geometria Riemanniana. 2. Hipersuperfície. I.Barbosa, José N. Bastos. II. Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática. III. Título.

CDU : 514.764.2

# Hipersuperfícies em formas espaciais satisfazendo a condição $L_k(x) = Ax$


Luiz Alberto de Oliveira Silva


Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 23 de setembro de 2011.

## Banca examinadora:

Prof. Dr. José Nelson Bastos Barbosa (Orientador)
UFBA

Prof. Dr. Enaldo Silva Vergasta
UFBA

Prof. Dr. Marcos Petrúcio de Almeida Cavalcante
UFAL

*Meus pais, meus irmãos e a Milena.*

# Agradecimentos

A minha mãe Veralúcia por incentivar meus estudos, a meu pai Antônio, meus irmãos e a minha companheira Milena pelo carinho em todos os momentos.

Agradeço também aos meus colegas da pós-graduação. Aos colaboradores deste trabalho como Dimi Rangel, Marcus Morro, Fellipe Leite, Rodrigo Von Flach, Teófilo Nascimento, Thiago Nunes e Renivaldo Sena.

Um agradecimento em especial ao professor José Nelson pela sua orientação e escolha do tema e aos demais professores do Instituto de Matemática.

*"Matemáticos são máquinas de transformar café em teoremas".*

(Alfréd Rényi)

# Resumo

Este trabalho trata de hipersuperfícies na esfera $\mathbb{S}^{n+1}$ ou no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$, cujo vetor posição $x$ satisfaz a condição $L_k x = Ax$, onde $L_k$ é o operador linearizado da $(k+1)$-ésima curvatura média da hipersuperfície para um $k = 0, 1, ..., n-1$ fixado e $A \in \mathbb{R}^{(n+2)\times(n+2)}$ é uma matriz constante auto-adjunta. Para cada $k$, tem-se que as únicas hipersuperfícies que satisfazem as condições acima são: aquelas que possuem a $(k+1)$-ésima curvatura média nula e $k$-ésima curvatura média constante ou uma parte aberta do toro de Clifford $(\mathbb{S}^m(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^{n-m}(r) \subset \mathbb{S}^{n+1}$ com $0 < r < 1)$ ou uma parte aberta do cilindro hiperbólico $(\mathbb{H}^m(-\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{S}^{n-m}(r) \subset \mathbb{H}^{n+1}$ com $r > 0)$.

**Palavras-chave:** Hipersuperfícies; $k$-ésima Curvatura Média; Operador Linearizado.

# Abstract

This work deals with hypersurfaces either in the sphere $\mathbb{S}^{n+1}$ or in the hyperbolic space $\mathbb{H}^{n+1}$ whose position vector $x$ satisfies the condition $L_k x = Ax$ where $L_k$ is the linearized operator of the $(k+1)$-th mean curvature of the hypersurfaces for a fixed $k = 0, 1, ..., n-1$ and $A \in \mathbb{R}^{(n+2)\times(n+2)}$ is a self-adjoint constant matrix. For each $k$, it follows that the only hypersurfaces which satisfy the condition above are: those that have the $(k+1)$-th mean curvature zero and $k$-th mean curvature constant or an open piece of the Clifford's torus ($\mathbb{S}^m(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^{n-m}(r) \subset \mathbb{S}^{n+1}$ with $0 < r < 1$) or an open piece of the hyperbolic cylinder ($\mathbb{H}^m(-\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{S}^{n-m}(r) \subset \mathbb{H}^{n+1}$ with $r > 0$).

**Keywords:** Hypersurfaces; $k$-th Mean Curvature; Linearized Operator.

# Sumário

# Introdução

Em 1966, Takahashi [Tak66] mostrou que as únicas subvariedades $n$-dimensionais isometricamente imersas no espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+m}$, cujas funções coordenadas são autovalores do operador Laplaciano associado a algum autovalor $\lambda$, ou são subvariedades mínimas em $\mathbb{R}^{n+m}$ (com $\lambda = 0$) ou são subvariedades em uma hiperesfera redonda $\mathbb{S}^{n+m-1} \subset \mathbb{R}^{n+m}$ (com $\lambda = \frac{n}{r^2} > 0$). Em particular, quando a codimensão é $m = 1$, o teorema de Takahashi afirma que se $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ é uma hipersuperfície imersa no espaço euclidiano e $\triangle$ denota seu operador Laplaciano (com respeito a métrica induzida), então a imersão satisfaz a condição $\triangle x + \lambda x = 0$ para alguma constante real $\lambda$ se, e somente se, $M$ é mínima com $\lambda = 0$ ou $M$ é uma parte aberta da hiperesfera redonda de raio $r = \sqrt{\frac{n}{\lambda}}$ centrada na origem de $\mathbb{R}^{n+1}$ com $\lambda > 0$.

Como uma extensão do teorema de Takahashi, Garay [Gar90] estudou hipersuperfícies no espaço euclidiano cujas funções coordenadas são autovalores do operador Laplaciano, mas não necessariamente associado ao mesmo autovalor. Para ser mais específico, Garay [Gar90] considerou hipersuperfícies em $\mathbb{R}^{n+1}$ satisfazendo $\triangle x = Ax$ (com respeito ao mesmo sistema de coordenadas ortonormal), onde $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ é uma matriz diagonal constante. Em 1990, ele provou que as únicas tais hipersuperfícies são mínimas em $\mathbb{R}^{n+1}$, parte aberta da hiperesfera redonda ou parte aberta dos cilindros esféricos generalizados.

Baseado nisto, Dillen [DPV90] considerou superfícies em $\mathbb{R}^3$ cuja imersão satisfaz a condição $\triangle x = Ax + b$, onde $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ é uma matriz constante e $b \in \mathbb{R}^3$ é um vetor constante. Em 1990, ele provou que as únicas tais superfícies são mínimas, partes abertas da esfera redonda ou partes abertas de cilindros circulares. Em 1991, o resultado de Dillen foi generalizado em $\mathbb{R}^{n+1}$, por Hasanis e Vlachos [HVl92], Chen e Petrovic [CPe91].

O operador Laplaciano $\triangle$ pode ser visto como o primeiro de uma sequência de operadores $L_0 = \triangle, L_1, ..., L_{n-1}$, onde $L_k$ representa o operador linearizado da $(k+1)$-ésima curvatura média da hipersuperfície. Estes operadores $L_k : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ são definidos por $L_k(f) = tr(P_k \circ \nabla^2 f)$, onde $f$ é uma função diferenciável em $M$, $P_k$ é a $k$-ésima transformação de Newton associada à segunda forma fundamental da hipersuperfície e $\nabla^2 f$ é a hessiana de $f$.

Em 2006, Alías e Gürbüz [AGu06] estenderam a classificação para hipersuperfícies em $\mathbb{R}^{n+1}$ satisfazendo $\triangle x = Ax+b$. Eles classificaram hipersuperfícies no espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ satisfazendo a condição $L_k x = Ax + b$, provando que as únicas tais hipersuperfícies são as que têm a $(k+1)$-ésima curvatura média zero, uma parte aberta da hiperesfera redonda ou uma parte aberta do cilindro esférico reto generalizado. Em 2010, Alías e Kashani [AKa10] mostraram o seguinte teorema, que é o resultado principal desta dissertação.

**Teorema:** Seja $x : M^n \to M_c^{n+1} \subset \mathbb{R}_q^{n+2}$ uma hipersuperfície orientável imersa onde $M_c^{n+1}$ é a esfera euclidiana $\mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ se $c = 1$ ou o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1} \subset \mathbb{R}_1^{n+2}$ se $c = -1$. Se $L_k$ é o operador linearizado da $(k+1)$-ésima curvatura média de $M$, para algum $k = 0, 1, 2, ..., n-1$ fixado, então a imersão satisfaz a condição $L_k x = Ax$ para alguma matriz constante auto-adjunta $A \in \mathbb{R}^{(n+2)\times(n+2)}$ se, e somente se, é uma das seguintes hipersuperfícies:

**(1)** uma hipersuperfície com a $(k+1)$-ésima curvatura média zero e a $k$-ésima curvatura média constante;

**(2)** uma parte aberta do Toro de Clifford, $\mathbb{S}^m(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^{n-m}(r) \subset \mathbb{S}^{n+1}$, $0 < r < 1$, se $c = 1$;

**(3)** uma parte aberta do cilindro hiperbólico, $\mathbb{H}^m(-\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{S}^{n-m}(r) \subset \mathbb{H}^{n+1}$, $r > 0$, se $c = -1$.

Esta dissertação é dividida em quatro capítulos. No capítulo 1, trataremos de conceitos básicos que serão utilizados nas demonstrações de alguns resultados.

No capítulo 2, apresentaremos as definições das transformações de Newton (os operadores $P_k$) e dos operadores linearizados ($L_k$), bem como algumas propriedades e expressões.

Descreveremos, no capítulo 3, as hipersuperfícies $x : M^n \to M_c^{n+1} \subset \mathbb{R}_q^{n+2}$ orientáveis imersas em $M_c^{n+1}$ satisfazendo a condição $L_k x = Ax$, onde $L_k$ é o operador linearizado da $(k+1)$-ésima curvatura média de $M$ para algum $k = 0, 1, ..., n-1$ fixado e $A \in \mathbb{R}^{(n+2)\times(n+2)}$ é alguma matriz constante auto-adjunta.

Finalmente, no capítulo 4, apresentaremos a demonstração do teorema principal.

# Capítulo 1

# A esfera e o espaço hiperbólico

Neste capítulo apresentaremos as variedades que serão os espaços ambientes das hipersuperfícies tratadas neste trabalho.

## 1.1 A esfera

A *esfera unitária* é definido por $\mathbb{S}^n = \{x = (x_0, ..., x_{n+1}); |x| = 1\}$. Denotaremos $S_\eta : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ o *operador de Weingarten.*

**Proposição 1.1.** *A segunda forma fundamental de $\mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é dada por $S_\eta = Id$. Além disso, a curvatura seccional de $\mathbb{S}^n$ é constante e igual a 1.*

*Demonstração.* Sejam $x \in \mathbb{S}^n$, $\{b_1, ..., b_n\}$ uma base de $T_x\mathbb{S}^n$ e $\eta = -x \in (T_x\mathbb{S}^n)^\perp$. Considere o campo normal $N$ a $\mathbb{S}^n$ dado por $N(p) = -p$. Como $N(x) = -\eta$ e $\langle N, N\rangle_p = 1$, $\forall p \in \mathbb{S}^n$, temos que

$$\langle S_\eta(b_i), b_j\rangle = \langle -(\overline{\nabla}_{b_i} N)^T, b_j\rangle = \langle (-\overline{\nabla}_{b_i} N), b_j\rangle.$$

Para um vetor arbitrário $v \in T_x\mathbb{S}^n$, vamos calcular $(\overline{\nabla}_v N)(x)$. Como,

$$N(p) = -p = -\sum_{i=1}^{n} p_i e_i$$

temos que as coordenadas de $N(p)$ na base canônica $\{e_0, ..., e_n\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ são dadas por $N_i(p) = -p_i$.

Sejam $v \in T_x\mathbb{S}^n$ e $\alpha : ]-\epsilon, \epsilon[ \to \mathbb{S}^n$ uma curva regular em $\mathbb{S}^n$ tais que $\alpha(t) = (\alpha_0(t), ...\alpha_n(t))$, $\alpha(0) = x$ e $\alpha'(0) = v$. Portanto,

$$v(N_k)(x) = \tfrac{d}{dt}(N_k \circ \alpha)(t)|_{t=0} = \tfrac{d}{dt} N_k(\alpha(t))|_{t=0} = \tfrac{d}{dt}(-\alpha_k(t))|_{t=0} = -\alpha_k'(0).$$

Usando a expressão da conexão e sabendo que $\Gamma_{ij}^k(\mathbb{R}^{n+1}) = 0$, teremos:

$$\begin{aligned}
(\overline{\nabla}_v N)(x) &= \sum_{k=0}^{n}\{v(N_k)(x) + \sum_{i,j} v_i N_j(x)\Gamma_{ij}^k(x)\}e_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} v(N_k)(x)e_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} -\alpha_k'(0)e_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} -v_k e_k \\
&= -v.
\end{aligned}$$

Portanto $S_\eta(b_i) = -\overline{\nabla}_{b_i}N = b_i \Rightarrow S_\eta = Id$. Daí,

$$\begin{aligned}
\langle\langle S_\eta(X), Y\rangle\eta, \eta\rangle &= \langle S_\eta(X), Y\rangle\langle\eta, \eta\rangle \\
&= \langle S_\eta(X), Y\rangle \\
&= \langle B(X, Y), \eta\rangle.
\end{aligned}$$

Logo $B(X, Y) = \langle S_\eta(X), Y\rangle\eta = \langle X, Y\rangle\eta = \eta\langle X, Y\rangle$. Usando a fórmula de Gauss e tomando $\{X, Y\}$ ortonormal,

$$K(X, Y) - \overline{K}(X, Y) = \langle B(X, X), B(Y, Y)\rangle - \langle B(X, Y), B(X, Y)\rangle$$

onde $K$ é a curvatura seccional de $\mathbb{S}^n$ e $\overline{K}$ é a curvatura seccional de $\mathbb{R}^{n+1}$. Como $\overline{K}(X, Y) = 0$ e $B(X, Y) = \eta(X, Y)$, temos,

$$K(X, Y) = \langle\eta\langle X, X\rangle, \eta\langle Y, Y\rangle\rangle - \langle\eta\langle X, Y\rangle, \eta\langle X, Y\rangle\rangle = 1.$$

□

Já sabemos que $\mathbb{S}^n$ é uma variedade compacta, daí segue diretamente do teorema de Hopf e Rinow que $\mathbb{S}^n$ é completa.

## 1.2 O espaço hiperbólico

**Definição 1.2.** *O espaço de Lorentz $\mathbb{R}_1^{n+1}$ é o espaço euclidiano $(n+1)$-dimensional com a métrica de Lorentz dada por*

$$(p, q) = -p_0q_0 + p_1q_1 + ... + p_nq_n$$

*onde $p = (p_0, ..., p_n)$ e $(q_0, ..., q_n)$.*

Descrevemos o espaço hipebólico $\mathbb{H}^n$ que é uma hipersuperfície do Espaço de Lorentz $\mathbb{R}_1^{n+1}$, ou seja, o espaço $\mathbb{R}^{n+1}$ munido com a métrica semi-Riemanniana que definiremos da seguinte maneira.

Seja $Q : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ uma forma quadrática dada por $Q(x_0, ...x_n) = -x_0^2 + x_1^2 + ... + x_n^2$ e $\mathbb{R}_1^{n+1}$ o espaço $\mathbb{R}^{n+1}$ com a métrica pseudo-Riemanniana $(.,.)$ induzida por $Q$. Então teremos:

$$(u,v) = \tfrac{1}{2}\{Q(u+v) - Q(u) - Q(v)\}$$

Observe que para $x = (x_0, ..., x_n)$, segue da expressão acima que $(x,x) = Q(x)$.

O *espaço hiperbólico* é definido como $\mathbb{H}^n = \{x = (x_0, ..., x_n); (x,x) = -1, x_0 > 0\}$.

Geometricamente $Q(x) = -1$ é um hiperbolóide de duas folhas e $\mathbb{H}^n$ é a folha contida no semi-espaço $x_0 > 0$. Como $\mathbb{H}^n$ é uma componente conexa da pré-imagem de $-1$ por $Q$, então $\mathbb{H}^n$ é uma hipersuperfície de $\mathbb{R}_1^{n+1}$.

**Proposição 1.3.** *Segundo a métrica de Lorentz, o vetor $\eta = x$ é ortogonal ao espaço tangente $T_x\mathbb{H}^n$, para todo $x \in \mathbb{H}^n$.*

*Demonstração.* Sejam $v \in T_x\mathbb{H}^n$ e $\alpha : ]-\epsilon, \epsilon[ \to \mathbb{H}^n$ uma curva regular em $\mathbb{H}^n$ tal que $\alpha(0) = x$ e $\alpha'(x) = v$. Assim $\alpha(t) = (x_0(t), ..., x_n(t))$, com $x_0(t) > 0$. Logo, $Q(\alpha(t)) = (\alpha(t), \alpha(t)) = -1$. Então:

$$\begin{aligned}
Q(\alpha(t)) &= -x_0(t)^2 + x_1(t)^2 + ... + x_n(t)^2 = -1 \\
&\Rightarrow -2x_0(t)x_0'(t) + 2x_1(t)x_1'(t) + ... + 2x_n(t)x_n'(t) = 0 \\
&\Rightarrow -x_0(t)x_0'(t) + x_1(t)x_1'(t) + ... + x_n(t)x_n'(t) = 0 \\
&\Rightarrow (\alpha(t), \alpha'(t)) = 0, \forall t \in ]-\epsilon, \epsilon[ \\
&\Rightarrow (\alpha(0), \alpha'(0)) = 0 \\
&\Rightarrow (x, v) = 0 \\
&\Rightarrow x \perp v \\
&\Rightarrow \eta \perp v.
\end{aligned}$$

□

**Proposição 1.4.** $(\eta, \eta) = -1$.

*Demonstração.* $(\eta, \eta) = (x, x) = Q(x) = -1$.

□

**Proposição 1.5.** *$\beta = \{b_0, ...b_n\}$, com $b_0 = \eta$, $(b_i, b_j) = \delta_{ij}$ para $i, j = 1, ...n$ e $(b_i, b_0) = 0$, para $i = 1, ..., n$ é uma base de $\mathbb{R}_1^{n+1}$.*

*Demonstração.* Para ver que $\beta$ é uma base de $\mathbb{R}_1^{n+1}$, basta ver que $\mathbb{R}_1^{n+1} = [\eta] \oplus T_x\mathbb{H}^n$.

□

**Proposição 1.6.** *A métrica induzida por* $\mathbb{R}_1^{n+1}$ *em* $\mathbb{H}^n$ *é Riemanniana.*

*Demonstração.* O índice da forma quadrática independe da base escolhida. Escolhendo a base canônica $\{e_0, ...e_n\} \in \mathbb{R}_1^{n+1}$, vemos que o índice de $Q$ é igual a 1. Como $Q(\eta) = (\eta, \eta) = -1$, temos que $Q(e_i) > 0, \forall i = 1, ...n$. Portanto $Q|_{T_x\mathbb{H}^n}$ é positiva definida.

Assim, a métrica induzida por $\mathbb{R}_1^{n+1}$ em $\mathbb{H}^n$ é Riemanniana.

□

**Proposição 1.7.** *A segunda forma fundamental de* $\mathbb{H}^n \hookrightarrow \mathbb{R}_1^{n+1}$ *é dada por* $S_\eta = -Id$. *Além disso, a curvatura seccional de* $\mathbb{H}^n$ *é constante e igual a* $-1$.

*Demonstração.* Sejam $x \in \mathbb{H}^n$, $\{b_1, ..., b_n\}$ uma base de $T_x\mathbb{H}^n$ e $\eta = x \in (T_x\mathbb{H}^n)^\perp$. Considere o campo normal $N$ a $\mathbb{H}^n$ dado por $N(p) = p$. Visto que $N(x) = \eta$ e $(N, N)_p = -1$, $\forall p \in \mathbb{H}^n$, temos que

$$(S_\eta(b_i), b_j) = (-(\overline{\nabla}_{b_i}N)^T, b_j) = ((-\overline{\nabla}_{b_i}N), b_j).$$

Para um vetor arbitrário $v \in T_x\mathbb{H}^n$, vamos calcular $(\overline{\nabla}_v N)(x)$. Como,

$$N(p) = p = \textstyle\sum_{i=1}^n p_i e_i$$

temos que as coordenadas de $N(p)$ na base canônica $\{e_0, ..., e_n\}$ de $\mathbb{R}_1^{n+1}$ são dadas por $N_i(p) = p_i$.

Sejam $v \in T_x\mathbb{H}^n$ e $\alpha : ]-\epsilon, \epsilon[ \to \mathbb{H}^n$ uma curva regular em $\mathbb{H}^n$ tais que $\alpha(t) = (\alpha_0(t), ...\alpha_n(t))$, $\alpha(0) = x$ e $\alpha'(0) = v$. Portanto,

$$v(N_k)(x) = \tfrac{d}{dt}(N_k \circ \alpha)(t)|_{t=0} = \tfrac{d}{dt}N_k(\alpha(t))|_{t=0} = \tfrac{d}{dt}(\alpha_k(t))|_{t=0} = \alpha_k'(0).$$

Usando a expressão da conexão e sabendo que $\Gamma_{ij}^k(\mathbb{R}_1^{n+1}) = \Gamma_{ij}^k(\mathbb{R}^{n+1}) = 0$, teremos:

$$\begin{aligned}
(\overline{\nabla}_v N)(x) &= \sum_{k=0}^n \{v(N_k)(x) + \sum_{i,j} v_i N_j(x)\Gamma_{ij}^k(x)\}e_k \\
&= \sum_{k=0}^n v(N_k)(x)e_k \\
&= \sum_{k=0}^n \alpha_k'(0)e_k \\
&= \sum_{k=0}^n v_k e_k \\
&= v.
\end{aligned}$$

Portanto $S_\eta(b_i) = -\overline{\nabla}_{b_i}N = -b_i \Rightarrow S_\eta = -Id$. Daí,

$$\begin{aligned}(-(S_\eta(X),Y)\eta,\eta) &= -(S_\eta(X),Y)(\eta,\eta)\\ &= (S_\eta(X),Y)\\ &= (B(X,Y),\eta).\end{aligned}$$

Logo $B(X,Y) = -(S_\eta(X),Y)\eta = (X,Y)\eta = \eta(X,Y)$. Usando a fórmula de Gauss e tomando $\{X,Y\}$ ortonormal,

$$K(X,Y) - \overline{K}(X,Y) = (B(X,X),B(Y,Y)) - (B(X,Y),B(X,Y))$$

onde $K$ é a curvatura seccional de $\mathbb{H}^n$ e $\overline{K}$ é a curvatura seccional de $\mathbb{R}^{n+1}_1$. Como $\overline{K}(X,Y) = 0$ e $B(X,Y) = \eta(X,Y)$, temos,

$$K(X,Y) = (\eta(X,X),\eta(Y,Y)) - (\eta(X,Y),\eta(X,Y)) = -1.$$

□

Denotaremos $O^1(n+1)$ o subgrupo das transformações lineares de $\mathbb{R}^{n+1}$ que preservam a métrica $(,)$ e $\hat{\mathbb{H}}^n = \{x = (x_0,...,x_n); (x,x) = -1; x_0 < 0\}$. Observe que $\hat{\mathbb{H}}^n$ é a folha contida no semi-espaço $x_0 < 0$.

**Lema 1.8.** *Seja $W \in O^1(n+1)$. Se para cada $p \in \mathbb{H}^n$ temos $W(p) \in \mathbb{H}^n$, então $W(x) \in \mathbb{H}^n$ para todo $x \in \mathbb{H}^n$.*

*Demonstração.* Se $W \in O^1(n+1)$ e $x \in \mathbb{H}^n$, então $(Wx,Wx) = (x,x) = -1$. Portanto $W(x) \in \mathbb{H}^n$ ou $W(x) \in \hat{\mathbb{H}}^n$.

Seja $p \in \mathbb{H}^n$ tal que $W(p) \in \mathbb{H}^n$. Suponha que existe $q \in \mathbb{H}^n$ tal que $W(q) \notin \mathbb{H}^n$, isto é $W(q) \in \hat{\mathbb{H}}^n$. Seja $\alpha : ]-2,2[ \to \mathbb{H}^n$ uma curva regular em $\mathbb{H}^n$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha(1) = q$. Então, $W \circ \alpha$ é uma curva em $Q^{-1}(-1)$ ligando $W(p)$ e $W(q)$.

Denote $\alpha(t) = (x_0(t),...x_n(t))$, $x_0 > 0$ e $W \circ \alpha(t) = (y_0(t),...,y_n(t))$. Temos que $W \circ \alpha$ é contínua.

Como $W(\alpha(0)) = W(p) \in \mathbb{H}^n$, claramente $y_0(0) > 0$, e o fato de $W(\alpha(1)) = W(q) \in \hat{\mathbb{H}}^n$, temos que $y_0(1) < 0$. Uma vez que $y_0$ é contínua, então existe $t' \in ]0,1[$ tal que $y_0(t') = 0$ o que implica que $W \circ \alpha(t') \notin Q(-1)$. Absurdo, pois $(W(\alpha(t')),W(\alpha(t'))) = (\alpha(t'),\alpha(t')) = -1$.

□

**Proposição 1.9.** *Se $W \in O^1(n+1)$ e $det(W) > 0$, então $W(\mathbb{H}^n) = \mathbb{H}^n$.*

*Demonstração.* Sejam $e_0 = x = (1,0,...,0) \in \mathbb{H}^n$ e $\{b_1,...,b_n\}$ base de $T_x\mathbb{H}^n$. Como $W$ preserva métrica, temos que $\{W(e_0),W(e_1)...,W(e_n)\}$ é base de $\mathbb{R}^{n+1}_1$ e pelo fato de $Q$ ser uma forma quadrática de índice 1, teremos $W(e_0)$ paralelo a $e_0$, portanto $W(e_0) = \pm e_0$.

Como $det(W) > 0$, $W(e_0) = e_0$. Pelo lema 1.8, concluímos que $W(\mathbb{H}^n) = \mathbb{H}^n$.

$\square$

Dizemos que uma variedade Riemanniana $M$ é *homogênea* se dados $p, q \in M$ existe uma isometria de $M$ que leva $p$ em $q$.

**Lema 1.10.** *Toda variedade homogênea é completa.*

*Demonstração.* Suponha que $M$ não seja completa. Então existem $p \in M$ e uma geodésica (podemos tomar normalizada, $|\gamma'| = 1$) $\gamma : [0, t_0] \to M$, com $\gamma(0) = p$, tal que $\gamma$ não pode ser estendida além de $t_0$. Escolhamos $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(p)$ seja uma bola normal e consideremos $q = \gamma(t_0 - \frac{\epsilon}{2}) \in M$. Como M é homogênea, por definição, existe uma isometria $\varphi : M \to M$ tal que $\varphi(p) = q$. Então $\varphi : M \to M$ é um difeomorfismo, $d\varphi_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}M$ é um isomorfismo e portanto existe $v \in T_pM$ tal que $d\varphi_p v = \gamma'(t_0 - \frac{\epsilon}{2})$. Observe que $||v|| = 1$, pois $\varphi$ é isometria e portanto

$$1 = \langle \gamma'(t_0 - \tfrac{\epsilon}{2}), \gamma'(t_0 - \tfrac{\epsilon}{2}) \rangle = \langle d\varphi_p v, d\varphi_p v \rangle = \langle v, v \rangle.$$

Por outro lado considere a geodésica $\alpha : [0, \epsilon[ \to M$ dada por

$$\alpha(t) = exp_p tv.$$

Concluímos que $\varphi \circ \alpha : [0, \epsilon[ \to M$ é uma geodésica, pois isometria preserva geodésica, tal que

$$(\varphi \circ \alpha)(0) = \varphi(\alpha(0)) = \varphi(p) = q = \gamma(t_0 - \tfrac{\epsilon}{2})$$

e

$$(\varphi \circ \alpha)'(0) = d\varphi_p v = \gamma'(t_0 - \tfrac{\epsilon}{2}).$$

Assim $\varphi \circ \alpha$ é uma geodésica de $M$ que coincide com $\gamma$ em $[t_0 - \frac{\epsilon}{2}[$. Por unicidade segue que $\varphi \circ \alpha = \gamma|_{[t_0 - \frac{\epsilon}{2}, t_0[}$, o que significa que podemos estender $\gamma$ além de $t_0$, o que é um absurdo. Logo $M$ é completa.

$\square$

**Proposição 1.11.** $\mathbb{H}^n$ *é completa.*

*Demonstração.* Sejam $p, q \in \mathbb{H}^n$, $\{v_1, ...v_n\}$ uma base ortonormal de $T_p\mathbb{H}^n$ e $\{w_1, ..., w_n\}$ uma base ortonormal de $T_q\mathbb{H}^n$. Considere $T : \mathbb{R}^{n+1}_1 \to \mathbb{R}^{n+1}_1$ uma transformação linear tal que $T(p) = q$ e $T(v_i) = w_i$, $i = 1, ..., n$. Como $(p, p) = (q, q) = -1$, $(v_i, v_j) = (w_1, w_j) = \delta_{ij}$ e $(p, v_i) = (q, w_i) = 0$, então existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^{n+1}_1 \to \mathbb{R}^{n+1}_1$ que preserva métrica. Visto que $p, q \in \mathbb{H}^n$ e $T(p) = q$, pelo lema 1.8, concluímos que $T(\mathbb{H}^n) = \mathbb{H}^n$. Segue que $T|_{\mathbb{H}^n}$ é isometria de $\mathbb{H}^n$. Portanto, $\mathbb{H}^n$ é homogênea. Pelo lema anterior $\mathbb{H}^n$ é completa.

$\square$

# Capítulo 2

# Operadores linearizados $(L_k)$

O objetivo deste capítulo é obter a expressão do operador linearizado.Para isto, definiremos a $k$-ésima curvatura média de uma hipersuperfície e a $k$-ésima transformação de Newton.

Para simplificar notação, denotaremos por $\mathbb{M}_c^{n+1}$, a esfera $\mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$, se $c = 1$, ou o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1} \subset \mathbb{R}_1^{n+2}$, se $c = -1$. Em alguns momentos denotaremos por $\langle .,. \rangle$, sem distinção, para a métrica euclidiana em $\mathbb{R}^{n+2}$ e para a métrica lorentziana em $\mathbb{R}_1^{n+2}$, bem como as correspondentes métricas (riemannianas) induzidas de $\mathbb{M}_c^{n+1}$ em $M$. Considere $x : M^n \to \mathbb{M}_c^{n+1} \subset \mathbb{R}_q^{n+2}$ (com $q = 0$ se $c = 1$, e $q = 1$, se $c = -1$) uma hipersuperfície orientável conexa imersa em $\mathbb{M}_c^{n+1}$ com a aplicação de Gauss $G$. Denotaremos por $\nabla^0$, $\overline{\nabla}$ e $\nabla$ as conexões riemannianas em $\mathbb{R}_q^{n+2}$, $\mathbb{M}_c^{n+1}$ e $M$, respectivamente.

**Proposição 2.1.** *As fórmulas básicas de Gauss e Weingarten para as hipersuperfícies*

$$x : M^n \to \mathbb{M}_c^{n+1} \subset \mathbb{R}_q^{n+2}$$

*são dadas por*

$$\nabla_X^0 Y = \overline{\nabla}_X Y - c\langle X, Y \rangle x = \nabla_X Y + \langle S_G X, Y \rangle G - c\langle X, Y \rangle x$$

*e*

$$S_G X = -\overline{\nabla}_X G = -\nabla_X^0 G.$$

*Para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, onde $S_G : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ é o operador de forma de $M$ com respeito a escolha da orientação $G$.*

*Demonstração.* Primeiro, consideremos $M^n \overset{x}{\hookrightarrow} M_c^{n+1} \overset{\varphi}{\hookrightarrow} \mathbb{R}_q^{n+2}$, com $\varphi(p) = p$, $\forall p \in \mathbb{M}_c^{n+1}$. Sejam $A_\eta : \mathfrak{X}(M_c^{n+1}) \to \mathfrak{X}(M_c^{n+1})$ e $S_G : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ os operadores de Weingartein das imersões $\varphi$ e $x$ respectivamente. Associamos $\alpha : \mathfrak{X}(M_c^{n+1}) \times \mathfrak{X}(M_c^{n+1}) \to \mathfrak{X}(M_c^{n+1})^\perp$ a $A_\eta$, e $B : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)^\perp$ a $S_G$. Já sabemos que $A_\eta X = cX$ e $\eta = -cx$. Visto que $\langle B(X,Y), G \rangle = \langle S_G X, Y \rangle$, segue que

$$B(X,Y) = \langle S_G X, Y\rangle G.$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned}
\langle \alpha(X,Y), \eta\rangle &= \langle A_\eta X, Y\rangle \\
&= \tfrac{1}{c}\langle \eta, \eta\rangle \langle A_\eta X, Y\rangle \\
&= \langle -c\langle X,Y\rangle x, \eta\rangle.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\nabla^0_X Y &= \overline{\nabla}_X Y + \alpha(X,Y) = \overline{\nabla}_X Y - c\langle X,Y\rangle x \\
&= \nabla_X Y + B(X,Y) - c\langle X,Y\rangle x \\
&= \nabla_X Y + \langle S_G X, Y\rangle G - c\langle X,Y\rangle x.
\end{aligned}$$

Para mostrar a segunda expressão, basta observar que

$$\begin{aligned}
\langle S_G X, Y\rangle &= \langle B(X,Y), G\rangle = \langle (\overline{\nabla}_X Y)^\perp, G\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_X Y, G\rangle = -\langle \overline{\nabla}_X G, Y\rangle
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle \nabla^0_X G, Y\rangle &= \langle \overline{\nabla}_X G + \alpha(X,G), Y\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_X G, Y\rangle
\end{aligned}$$

para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$.

□

$S_G$, que também denotaremos por $S$, define um operador linear auto-adjunto em cada plano tangente $T_pM$ e seus autovalores, denotados por $\kappa_1(p), ..., \kappa_n(p)$, são as curvaturas principais da hipersuperfície em p. Associado ao operador de Weingarten, existem $n$ invariantes algébricos dados por

$$s_k(p) = \sigma_k(\kappa_1(p), ..., \kappa_n(p)), \qquad 1 \le k \le n,$$

onde $\sigma_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função simétrica elementar em $\mathbb{R}^n$ dada por

$$\sigma_k(x_1, ..., x_n) = \sum_{i_1 < ... < i_k} x_{i_1} ... x_{i_k}.$$

Observe que o polinômio característico pode ser escrito em termos de $s_k$'s como

$$Q_S(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k s_k t^{n-k}$$

pois,

$$\begin{aligned} Q_S(t) &= det(tI - S) = (t-\kappa_1)...(t-\kappa_n) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k s_k t^{n-k}. \end{aligned}$$

A *$k$-ésima curvatura média* $H_k$ de uma hipersuperfície é definida por

$$H_k = \frac{s_k}{\binom{n}{k}}.$$

Notemos que $s_0 = H_0 = 1$ e $H_1$, $H_2$, $H_n$ são as curvaturas média, escalar e de Gauss-Kronecker, respectivamente.

**Definição 2.2.** *A $k$-ésima transformação de Newton $P_k : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ é definida indutivamente pelo operador de forma por*

$$P_0 = I \qquad e \qquad P_k = s_k I - SP_{k-1} = \binom{n}{k} H_k I - SP_{k-1},$$

*para todo $k = 1, ..., n$, onde $I$ denota a identidade em $\mathfrak{X}(M)$.*

Equivalentemente,

$$P_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j s_{k-j} S^j = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{n}{k-j} H_{k-j} S^j.$$

Em particular,

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k s_{n-k} S^k = Q_S(S) = 0.$$

A última igualdade vale pelo teorema de Cayley-Hamilton.

**Proposição 2.3.** *$P_k(p)$ é um operador linear auto-adjunto em cada espaço tangente $T_pM$ que comuta com $S(p)$.*

*Demonstração.* Faremos por indução a demonstração de que $SP_k = P_k S$. Note que $SP_0 = SI = IS = P_0 S$. Suponha que $SP_{k-1} = P_{k-1}S$. Logo

$$\begin{aligned} SP_k &= S(s_k I - SP_{k-1}) = S(s_k I - P_{k-1}S) \\ &= Ss_k - SP_{k-1}S = s_k S - SP_{k-1}S \\ &= (s_k I - SP_{k-1})S = P_k S \end{aligned}$$

Também por indução, mostremos que $P_k$ é auto-adjunta. Escolhamos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Notemos que

$$\langle P_0X, Y\rangle = \langle IX, Y\rangle = \langle X, IY\rangle = \langle X, P_0Y\rangle.$$

Suponha que $P_{k-1}$ seja auto-adjunta, ou seja

$$\langle P_{k-1}X, Y\rangle = \langle X, P_{k-1}Y\rangle$$

então

$$\begin{aligned}
\langle P_k(X), Y\rangle &= \langle (s_kI - SP_{k-1}X, Y)\rangle = \langle s_kX, Y\rangle - \langle SP_{k-1}(X), Y\rangle \\
&= \langle X, s_kY\rangle - \langle P_{k-1}(X), S(Y)\rangle \\
&= \langle X, s_kY\rangle - \langle X, P_{k-1}(S(Y))\rangle \\
&= \langle X, (s_kI - P_{k-1}S)Y\rangle \\
&= \langle X, P_k(Y)\rangle
\end{aligned}$$

□

Denotemos por

$$s_k(S_i) = s_k(\kappa_1, ..., \kappa_{i-1}, \kappa_{i+1}, ..., \kappa_n)$$

a $k$-função elementar simétrica associada a restrição $S_i$ de $S$ ao subespaço ortogonal ao autovetor correspondente $e_i$.

**Lema 2.4.** *Para cada $i = 1, ..., n$ fixado, temos*

$$s_k(S_i) = s_k - \kappa_i s_{k-1}(S_i).$$

*Demonstração.* Temos que

$$s_k(S_i) = s_k(\kappa_1, ..., \kappa_{i-1}, \kappa_{i+1}, ..., \kappa_n), \qquad s_{k-1}(S_i) = s_{k-1}(\kappa_1, ..., \kappa_{i-1}, \kappa_{i+1}, ..., \kappa_n)$$

e

$$s_k = \sum_{i_1 < ... < i_k} \kappa_{i_1} ... \kappa_{i_k}.$$

Fixado $i \in \{i_1, ..., i_k\}$, $s_k$ pode ser dividido em duas parcelas. Uma contendo $\kappa_i$ e a outra não contendo $\kappa_i$, ou seja, $s_k = J + \kappa_i L$. Claramente, $J = s_k(\kappa_1, ..., \kappa_{i-1}, \kappa_{i+1}, ..., \kappa_n) = s_k(S_i)$ e $L = s_{k-1}(\kappa_1, ..., \kappa_{i-1}, \kappa_{i+1}, ..., \kappa_n) = s_{k-1}(S_i)$. Portanto $s_k(S_i) = s_k - \kappa_i s_{k-1}(S_i)$.

□

**Proposição 2.5.** *Para cada $1 \leq k \leq n-1$, temos que $P_k(e_i) = s_k(S_i)e_i$, $1 \leq i \leq n$.*

*Demonstração.* Temos que $P_0(e_i) = I(e_i) = e_i$ e $s_0(S_i)e_i = s_0(\kappa_1, ..., \kappa_{i-1}, \kappa_{i+1}, ..., \kappa_n)e_i = e_i$, então $P_0(e_1) = s_0(S_i)e_i$. Suponha que $P_k(e_i) = s_k(S_i)e_i$. Então

$$\begin{aligned} P_{k+1}(e_i) &= s_{k+1}e_i - SP_k(e_i) = s_{k+1}e_i - S(s_k(S_i)e_i) \\ &= s_{k+1}e_i - s_k(S_i)S(e_i) = s_{k+1}e_i - s_k(S_i)\kappa_i e_i \\ &= (s_{k+1} - s_k(S_i)\kappa_i)e_i = s_{k+1}(S_i)e_i \end{aligned}$$

Portanto $P_k(e_i) = s_k(S_i)e_i$. □

Se $\{e_1, ..., e_n\}$ são autovetores de $S(p)$ com os autovalores correspondentes $\kappa_1(p)$,..., $\kappa_n(p)$ respectivamente, então eles também são autovetores de $P_k(p)$ com os autovalores correspondentes dado por:

$$\mu_{i,k}(p) = \sum_{i_1<...<i_k, i_j \neq i} \kappa_{i_1}(p)...\kappa_{i_k}(p)$$

para todo $1 \leq i \leq n$. Pois

$$\begin{aligned} P_k(e_i) &= s_k(S_i)e_i = s_k(\kappa_1, ..., \kappa_{k-1}, \kappa_{k+1}, ..., \kappa_n) \\ &= \left( \sum_{i_1<...<i_k, i_j \neq i} \kappa_{i_1}...\kappa_{i_k} \right) .e_i \end{aligned}$$

**Proposição 2.6.** *Para cada* $1 \leq k \leq n-1$, *temos*

**(a)** $tr(P_k) = \sum_{i=1}^{n} s_k(S_i) = (n-k)s_k = c_k H_k$;

**(b)** $tr(SP_k) = \sum_{i=1}^{n} \kappa_i s_k(S_i) = (k+1)s_{k+1} = c_k H_{k+1}$;

**(c)** $tr(S^2P_k) = \sum_{i=1}^{n} \kappa_i^2 s_k(S_i) = s_1 s_{k+1} - (k+2)s_{k+2} = \binom{n}{k+1}(nH_1H_{k+1} - (n-k-1)H_{k+2})$

*onde* $c_k = (n-k)\binom{n}{k} = (k+1)\binom{n}{k+1}$.

*Demonstração.*
$(a)$ Da definição de traço, segue que

$$\begin{aligned} tr(P_k) &= \sum_{i=1}^{n} \langle P_k(e_i), e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle s_k(S_i)e_i, e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} s_k(S_i). \end{aligned}$$

Lembre que $s_k(S_i) = s_k(\kappa_1, ..., \kappa_{i-1}, \kappa_{i+1}, ..., \kappa_n)$. Se $\kappa_{j_1}...\kappa_{j_k}$, com $j_1 < ... < j_k$, é um monômio de $s_k$, então ele também será um monômio de $s_k(S_i)$, com $i \notin \{j_1, ..., j_k\}$. Como temos $(n-k)$ termos, então

$$\sum_{i=1}^{n} s_k(S_i) = (n-k)s_k.$$

$(b)$ Facilmente vemos que

$$\begin{aligned} tr(SP_k) &= \sum_{i=1}^{n} \langle SP_k(e_i), e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle P_k(e_i), S(e_i) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle s_k(S_i)e_i, \kappa_i e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \kappa_i s_k(S_i). \end{aligned}$$

Além disso, sabemos ainda

$$tr(P_{k+1}) = tr(s_{k+1}I - SP_k) = tr(s_{k+1}I) - tr(SP_k).$$

Logo

$$\begin{aligned} tr(SP_k) &= tr(s_{k+1}I) - tr(P_{k+1}) \\ &= ns_{k+1} - (n-(k+1))s_{k+1} \\ &= (k+1)s_{k+1}. \end{aligned}$$

$(c)$Temos que

$$\begin{aligned} tr(S^2P_k) &= \sum_{i=1}^{n} \langle S^2P_k(e_i), e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle P_k(e_i), S^2(e_i) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle s_k(S_i)e_i, \kappa_i^2(e_i) \rangle = \sum_{i=1}^{n} \kappa_i^2 s_k(S_i). \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} tr(SP_{k+1}) &= tr(S(s_{k+1}I - SP_k)) \\ &= tr(s_{k+1}SI) - tr(S^2P_k). \end{aligned}$$

Concluímos que

$$\begin{aligned} tr(S^2P_k) &= tr(s_{k+1}SI) - tr(SP_{k+1}) \\ &= s_1s_{k+1} - (k+2)s_{k+2}. \end{aligned}$$

$\square$

**Proposição 2.7.** *$tr(P_k\nabla_X S) = \langle\nabla s_{k+1}, X\rangle = \binom{n}{k+1}\langle\nabla H_{k+1}, X\rangle$, $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$. Onde $\nabla S$ denota a diferencial covariante de $S$*

$$\nabla S(Y,X) = (\nabla_X S)Y = \nabla_X(SY) - S(\nabla_X Y),\ \ X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

*Demonstração.*

Vamos provar este resultado calculando no referencial ortonormal em $M$ que diagonaliza $S$. É importante observar que nem sempre tais estruturas existem; problemas ocorrem quando a multiplicidade das curvaturas principais mudam (também as curvaturas principais em todos os pontos não são necessariamente suaves). Por isso, trabalharemos em um subconjunto $M_0$ de $M$ que consiste em pontos em que o número de curvaturas principais distintas é localmente constante. Como bem sabemos, $M_0$ é um subconjunto aberto e denso de $M$, as curvaturas principais são funções suaves em $M_0$ e, para cada curvatura principal $\kappa$ a indicação

$$p \in M_0 \mapsto ker(S_p - \kappa(p)I) \subset T_pM$$

define uma distribuição suave. Portanto, para cada $p \in M_0$ existe um referencial ortonormal $\{E_1, ..., E_n\}$ definido na vizinhança de $p$ tal que $S(E_i) = \kappa_i E_i$, com cada $\kappa_i$ suave. Nesse caso temos

$$P_k(E_i) = \mu_{i,k}E_i$$

e

$$\begin{aligned}(\nabla_X S)E_i &= \nabla_X(SE_i) - S(\nabla_X E_i)\\ &= X(\kappa_i)E_i + \sum_{j\neq i}(\kappa_i - \kappa_j)\langle\nabla_X E_i, E_j\rangle E_j.\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}tr(P_k\nabla_X S) &= \sum_{i=1}^{n}\mu_{i,k}X(\kappa_i)\\ &= \sum_{i=1}^{n}X(\kappa_i)\sum_{i_1<...<i_k, i_j\neq i}\kappa_{i_1}...\kappa_{i_k}\\ &= X(\sum_{i_1<...<i_k}\kappa_{i_1}...\kappa_{i_k}) = X(s_{k+1})\\ &= \langle\nabla s_{k+1}, X\rangle = \langle\nabla\binom{n}{k+1}H_{k+1}, X\rangle\\ &= \binom{n}{k+1}\langle\nabla H_{k+1}, X\rangle.\end{aligned}$$

Isto prova a expressão em $M_0$ e por continuidade em $M$.

□

Associado a cada transformação de Newton $P_k$, temos um operador linear diferenciável de segunda ordem $L_k : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ definido por

$$L_k(f) = tr(P_k \circ \nabla^2 f)$$

onde $\nabla^2 f : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ denota um operador linear auto-adjunto metricamente equivalente à hessiana de $f$ e dado por

$$\langle \nabla^2 f(X), Y\rangle = \langle \nabla_X(\nabla f), Y\rangle, \qquad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Quando $k = 0$, temos

$$L_0(f) = tr(P_0 \circ \nabla^2 f) = tr(\nabla^2 f) = \triangle f$$

onde $\triangle$ denota o operador Laplaciano. Por isto, dizemos que o operador linearizado generaliza o operador laplaciano.

**Proposição 2.8.** *$L_k(fg) = (L_k f)g + f(L_k g) + 2\langle P_k(\nabla f), \nabla g\rangle$; $f, g \in C^\infty(M)$.*

*Demonstração.* Seja $\{E_1, ..., E_n\}$ um referencial ortonormal de $M$, então

$$\begin{aligned}
L_k(fg) &= tr(P_k \circ \nabla^2(fg)) = \sum_{i=1}^n \langle (P_k \circ \nabla^2(fg))E_i, E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle \nabla^2(fg)E_i, P_k(E_i)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i}(\nabla(fg)), P_k(E_i)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i}(f\nabla g + g\nabla f), P_k(E_i)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i}(f\nabla g), P_k(E_i)\rangle + \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i}(g\nabla f), P_k(E_i)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \{\langle f\nabla_{E_i}(\nabla g), P_k(E_i)\rangle + \langle E_i(f)\nabla g, P_k(E_i)\rangle\} \\
&+ \sum_{i=1}^n \{\langle g\nabla_{E_i}(\nabla f), P_k(E_i)\rangle + \langle E_i(g)\nabla f, P_k(E_i)\rangle\} \\
&= f\sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i}\nabla g, P_k(E_i)\rangle + \langle P_k(\nabla g), \sum_{i=1}^n E_i(f)E_i\rangle \\
&+ g\sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i}\nabla f, P_k(E_i)\rangle + \langle P_k(\nabla f), \sum_{i=1}^n E_i(g)E_i\rangle
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} L_k(fg) &= f\sum_{i=1}^{n}\langle\nabla^2(g)E_i, P_kE_i, P_k(E_i)\rangle + \langle P_k(\nabla g), \nabla f\rangle \\ &+ g\sum_{i=1}^{n}\langle\nabla^2(f)E_i, P_kE_i, P_k(E_i)\rangle + \langle P_k(\nabla f), \nabla g\rangle \\ &= fL_k(g) + gL_k(f) + 2\langle P_k(\nabla f), \nabla g\rangle. \end{aligned}$$

□

Seja $x : M^n \to M_c^{n+1} \subset \mathbb{R}_q^{n+2}$ uma hipersuperfíe orientável imersa em $M_c^{n+1}$. Denotemos por $G$ a aplicação de Gauss de $x$. Dado um vetor arbitrário fixado $a \in \mathbb{R}^{n+2}$, consideraremos a função coordenada $\langle a, x\rangle$ em $M$.

**Lema 2.9.** *$a = a^T + \langle a, G\rangle G + c\langle a, x\rangle x$, onde $a^T \in \mathfrak{X}(M)$ denota a componente tangencial de $a$.*

*Demonstração.* Visto que $a = a^T + D_1G + D_2x$, onde $D_1$, $D_2$ são escalares, então

$$\begin{aligned} \langle a, G\rangle &= \langle a^T + D_1G + D_2x, G\rangle \\ &= \langle a^T, G\rangle + \langle D_1G, G\rangle + \langle D_2x, G\rangle \\ &= D_1\langle G, G\rangle = D_1 \end{aligned}$$

Além disso

$$\begin{aligned} \langle a, x\rangle &= \langle a^T + \langle a, G\rangle G + D_2x, x\rangle \\ &= \langle a^T, G\rangle + \langle\langle a, G\rangle G, x\rangle + \langle D_2x, x\rangle \\ &= D_2\langle x, x\rangle = D_2c, \end{aligned}$$

o que nos dá

$$D_2 = c\langle a, x\rangle.$$

Portanto,

$$a = a^T + \langle a, G\rangle G + c\langle a, x\rangle x.$$

□

**Lema 2.10.** *$X(\langle a, x\rangle) = \langle X, a\rangle = \langle X, a^T\rangle, \forall X \in \mathfrak{X}(M)$.*

*Demonstração.* Considere $\tilde{x} : M_c^{n+1} \to M_c^{n+1}$ definido por $\tilde{x}(x) = x$. Como $\tilde{x} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_ie_i$, então

$$\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = x = \tilde{x}(x) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i(x) e_i$$

portanto $\tilde{x}_i(x) = x_i$. Temos ainda que $(d\tilde{x}_i)_x v = v_i$, onde $v = (v_1, ...v_{n+2})$, pois

$$(d\tilde{x}_i)_x v = (\tilde{x}_i \circ \alpha)'(0) = \alpha_i'(0) = v_i$$

tal que $\alpha(0) = x$, $\alpha'(0) = v$ e $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_{n+2})$.

Como $X \in \mathfrak{X}(M)$, então $X = \sum_{i=1}^{n} g_i e_i$, com $g_i \in C^\infty(M)$. Logo

$$\nabla_X^0 \tilde{x}(x) = \sum_{i=1}^{n} X(\tilde{x}_i)(x) e_i = \sum_{i=1}^{n} (d\tilde{x}_i)_x X(x) e_i = \sum_{i=1}^{n} g_i(x) e_i = X(x).$$

Portanto $\nabla_X^0 \tilde{x} = X$.

$\nabla_X^0 a = 0$, pois $a \in \mathbb{R}^{n+2}$. Então

$$\begin{aligned}
X(\langle a, x \rangle) &= \langle \nabla_X^0 a, x \rangle + \langle a, \nabla_X^0 x \rangle = \langle a, X \rangle = \langle X, a \rangle \\
&= \langle X, a^T + \langle a, G \rangle G + c\langle a, x \rangle x \rangle \\
&= \langle X, a^T \rangle + \langle X, \langle a, G \rangle G \rangle + \langle X, c\langle a, x \rangle x \rangle \\
&= \langle X, a^T \rangle.
\end{aligned}$$

□

Daí, temos que

$$\langle X, a^T \rangle = X(\langle a, x \rangle) = \langle \nabla \langle a, x \rangle, X \rangle$$

o que implica que $\nabla \langle a, x \rangle = a^T$.

**Proposição 2.11.** $\nabla_X \nabla \langle a, x \rangle = \nabla_X a^T = \langle a, G \rangle SX - c\langle a, x \rangle X$, $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$.

*Demonstração.*

$$\begin{aligned}
\nabla_X \nabla \langle a, x \rangle &= \nabla_X a^T = (\nabla_X^0 a^T)^T \\
&= \{\nabla_X^0 (a - \langle a, G \rangle G - c\langle a, x \rangle x)\}^T \\
&= \{\nabla_X^0 a - \nabla_X^0 (\langle a, G \rangle G) - \nabla_X^0 (\langle a, x \rangle x)\}^T \\
&= \{-\nabla_X^0 (\langle a, G \rangle G) - \nabla_X^0 (\langle a, x \rangle x)\}^T \\
&= \{-X\langle a, G \rangle G - \langle a, G \rangle \nabla_X^0 G - cX\langle a, x \rangle x - c\langle a, x \rangle \nabla_X^0 x\}^T \\
&= \{-\langle a, G \rangle \nabla_X^0 G - c\langle a, x \rangle X\}^T \\
&= -\langle a, G \rangle (\nabla_X^0 G)^T - c\langle a, x \rangle X
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}\nabla_X \nabla\langle a,x\rangle &= -\langle a,G\rangle(-SX)^T - c\langle a,x\rangle X\\ &= \langle a,G\rangle SX - c\langle a,x\rangle X.\end{aligned}$$

□

**Proposição 2.12.** $L_k\langle a,x\rangle = \langle a,G\rangle tr(SP_k) - c\langle a,x\rangle tr(P_k) = c_k H_{k+1}\langle a,G\rangle - cc_k H_k\langle a,x\rangle$.

*Demonstração.*

$$\begin{aligned}L_k\langle a,x\rangle &= tr(P_k\nabla^2\langle a,x\rangle) = \sum_{i=1}^{n}\langle P_k\nabla^2\langle a,x\rangle E_i, E_i\rangle\\ &= \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla^2\langle a,x\rangle E_i, P_kE_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{E_i}\nabla\langle a,x\rangle, P_kE_i\rangle\\ &= \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{E_i}a^T, P_kE_i\rangle\\ &= \sum_{i=1}^{n}\langle\langle a,G\rangle SE_i - c\langle a,x\rangle E_i, P_kE_i\rangle\\ &= \sum_{i=1}^{n}(\langle a,G\rangle\langle SE_i, P_kE_i\rangle - c\langle a,x\rangle\langle E_i, P_kE_i\rangle)\\ &= \langle a,G\rangle\sum_{i=1}^{n}\langle SE_i, P_kE_i\rangle - c\langle a,x\rangle\sum_{i=1}^{n}\langle E_i, P_kE_i\rangle\\ &= \langle a,G\rangle\sum_{i=1}^{n}\langle SP_kE_i, E_i\rangle - c\langle a,x\rangle\sum_{i=1}^{n}\langle P_kE_i, E_i\rangle\\ &= \langle a,G\rangle tr(SP_k) - c\langle a,x\rangle tr(P_k)\\ &= c_kH_{k+1}\langle a,G\rangle - cc_kH_k\langle a,x\rangle.\end{aligned}$$

□

**Corolário 2.13.** $L_kx = c_kH_{k+1}G - cc_kH_kx$.

*Demonstração.*

$$\begin{aligned}L_k\langle a,x\rangle &= c_kH_{k+1}\langle a,G\rangle - cc_kH_k\langle a,x\rangle\\ &= \langle a, c_kH_{k+1}G - cc_kH_kx\rangle\end{aligned}$$

portanto $L_kx = c_kH_{k+1}G - cc_kH_kx$.

□

# Capítulo 3

# Hipersuperfícies que satisfazem a condição $L_k x = Ax$

O objetivo deste capítulo é verificar que as hipersuperfícies com a $(k+1)$-ésima curvatura média zero e a $k$-ésima curvatura média constante, o Toro de Clifford e o cilindro hiperbólico satisfazem a equação $L_k x = Ax$, onde $x : M^n \to \mathbb{M}_c^{n+1} \subset \mathbb{R}_1^{n+2}$ é uma hipersuperfície orientável imersa tanto na esfera euclidiana $\mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ (se $c = 1$) ou no espaço hiperbólico $\mathbb{H}_1^{n+1}$ (se $c = -1$), $L_k$ é o operador linearizado da $(k+1)$-ésima curvatura média de $M$ para algum $k = 0, 1, ..., n-1$ fixado e $A \in \mathbb{R}^{(n+2)\times(n+2)}$ é alguma matriz constante auto-adjunta.

## 3.1 Hipersuperfícies com a $(k+1)$-ésima curvatura média nula e a $k$-ésima curvatura média constante

Considere uma hipersuperfície $M^n \to \mathbb{M}_c^{n+1} \subset \mathbb{R}_q^{n+2}$ orientável imersa em $\mathbb{M}_c^{n+1}$ tal que $H_k = \textit{constante}$ e $H_{k+1} = 0$. Como $L_k x = c_k H_{k+1} G - c c_k H_k x$, onde $c_k = (n-k)\binom{n}{k} = (k+1)\binom{n}{k+1}$ e $c$ é curvatura seccional, então

$$\begin{aligned}
L_k x &= -c c_k H_k (x_0, ..., x_{n+1}) = (-c c_k H_k x_0, ..., -c c_k H_k x_{n+1}) \\
&= \begin{pmatrix} -c c_k H_k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -c c_k H_k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -c c_k H_k & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -c c_k H_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \\
&= diag[-c c_k H_k, ..., -c c_k H_k] x.
\end{aligned}$$

Tomando $A = diag[-cc_kH_k, ..., -cc_kH_k]$, temos que as hipersuperfícies com $H_k = constante$ e $H_{k+1} = 0$, satisfazem a condição $L_kx = Ax$.

## 3.2 Toro de Clifford

Nesta seção, definiremos o Toro de Clifford, calcularemos suas curvaturas principais, $(k+1)$-ésima curvatura média, segunda forma fundamental e a expressão do operador linearizado da $(k+1)$-ésima curvatura média.

Para definir o toro de Clifford usaremos algumas considerações de variedade produto.

Sejam $M, N, \overline{M}, \overline{N}$ variedades Riemannianas, $f : M \to \overline{M}$ e $g : N \to \overline{N}$ imersões isométricas. Sejam $\nabla^M, \nabla^N, \overline{\nabla}^{\overline{M}}, \overline{\nabla}^{\overline{N}}$ as conexões Riemannianas de $M, N, \overline{M}, \overline{N}$ respectivamente. Considere em $M \times N$ e $\overline{M} \times \overline{N}$ as métricas produtos e a imersão isométrica $f \times g : M \times N \to \overline{M} \times \overline{N}$. Defina as conexões Riemannianas de $M \times N$ e $\overline{M} \times \overline{N}$

$$\nabla_X^{M\times N} Y = \nabla_{X_M}^M Y_M + \nabla_{X_N}^N Y_N$$

e

$$\overline{\nabla}_U^{\overline{M}\times\overline{N}} V = \overline{\nabla}_{U_{\overline{M}}}^{\overline{M}} V_{\overline{M}} + \overline{\nabla}_{U_{\overline{N}}}^{\overline{N}} V_{\overline{N}}$$

respectivamente, onde $X = (X_M, X_N) \in \mathfrak{X}(M \times N)$, $Y = (Y_M, Y_N) \in \mathfrak{X}(M \times N)$ em que $X_M, Y_M \in \mathfrak{X}(M)$ e $X_N, Y_N \in \mathfrak{X}(N)$. E $U = (U_{\overline{M}}, U_{\overline{N}}) \in \mathfrak{X}(\overline{M} \times \overline{N})$, $V = (V_{\overline{M}}, V_{\overline{N}}) \in \mathfrak{X}(\overline{M} \times \overline{N})$ em que $U_{\overline{M}}, V_{\overline{M}} \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ e $U_{\overline{N}}, V_{\overline{N}} \in \mathfrak{X}(\overline{N})$.

Sejam $B_f, B_g$ as segundas formas fundamentais de $f$ e $g$, respectivamente, com os operadores lineares auto-adjuntos associados $S_\xi^f : T_pM \to T_pM$ e $S_\mu^g : T_qN \to T_qN$ com $\xi \in \mathfrak{X}(M)^\perp$, $\mu \in \mathfrak{X}(N)^\perp$. Tome $u, v \in T_pM$ e $w, z \in T_qN$, então temos

$$\langle S_\xi^f u, v\rangle = \langle B_f(u, v), \xi\rangle \qquad \text{e} \qquad \langle S_\mu^g w, z\rangle = \langle B_g(w, z), \mu\rangle.$$

Assim a segunda forma fundamental da imersão produto $f \times g$ é dada por

$$B_{f\times g}(X, Y) = (B_f(X_M, Y_M), B_g(X_N, Y_N)).$$

Se $|\xi|^2 + |\mu|^2 = 1$, então podemos definir o campo normal e unitário a $M \times N$ por

$$\eta = (\xi, \mu)$$

portanto o operador de forma $S_\eta$ associado a $f \times g$ é dado por:

$$\begin{aligned}
\langle S_\eta X, Y\rangle &= \langle B_{f\times g}(X,Y), \eta\rangle \\
&= \langle (B_f(X_M,Y_M), B_g(X_N,Y_N)), (\xi,\mu)\rangle \\
&= \langle B_f(X_M,Y_M),\xi\rangle + \langle B_g(X_N,Y_N),\mu\rangle \\
&= \langle S^f_\xi(X_M), Y_M\rangle + \langle S^g_\mu(X_N), Y_N\rangle \\
&= |\xi|\langle S^f_{\frac{\xi}{|\xi|}}(X_M), Y_M\rangle + |\mu|\langle S^g_{\frac{\mu}{|\mu|}}(X_N), Y_N\rangle.
\end{aligned}$$

Consequentemente o operador de forma na direção normal $\eta$ é

$$\begin{aligned}
S_\eta X &= |\xi| S^f_{\frac{\xi}{|\xi|}}(X_M) + |\mu| S^g_{\frac{\mu}{|\mu|}}(X_N) \\
&= (|\xi| S^f_{\frac{\xi}{|\xi|}} \circ \pi_M(X) + |\mu| S^g_{\frac{\mu}{|\mu|}} \circ \pi_N(X))
\end{aligned}$$

onde $\pi_M$ é projeção sobre $M$ e $\pi_N$ projeção sobre $N$.

Considere a esfera $m$-dimensional de raio $r$, $\mathbb{S}^m(r) = \{p \in \mathbb{R}^{m+1}; |p| = r\}$, e as inclusões canônicas $f : \mathbb{S}^m(\sqrt{1-r^2}) \to \mathbb{R}^{m+1}$ e $g : \mathbb{S}^{n-m}(r) \to \mathbb{R}^{n-m+1}$. Denote por $\varphi$ o produto das imersões $\varphi = f \times g : \mathbb{S}^m(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^{n-m}(r) \to \mathbb{R}^{n+2}$. Dado um ponto $(p,q) \in \mathbb{S}^m(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^{n-m}(r)$, temos que $|(p,q)|^2 = |p|^2 + |q|^2 = (\sqrt{1-r^2})^2 + r^2 = 1$, isto é, $\mathbb{S}^m(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^{n-m}(r) \subset \mathbb{S}^{n+1}(1)$. A imagem da imersão

$$\mathbb{S}^m(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^{n-m}(r) \to \mathbb{S}^{n+1}(1)$$

é chamada de *Toro de Clifford*.

Dada uma imersão $\mathbb{S}^{n+1}(r) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ temos que a aplicação normal de Gauss na esfera de raio $r$ é dada por $G(p) = -\frac{p}{|p|}$, logo

$$S_G(v) = -(\overline{\nabla}_v G) = -dG_p(v) = \tfrac{1}{r}(v) = \tfrac{1}{r} Id$$

onde $S$ é um operador de Weingarten e $\overline{\nabla}$ é a conexão riemanniana de $\mathbb{R}^{n+2}$. Para as imersões $f : \mathbb{S}^m(\sqrt{1-r^2}) \to \mathbb{R}^{m+1}$, $g : \mathbb{S}^{n-m}(r) \to \mathbb{R}^{n-m+1}$ e $i : \mathbb{S}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+2}$, teremos os operadores de forma associados $S^f_\xi = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} Id$, $S^g_\mu = \frac{1}{r} Id$ e $S^i_G = Id$ com $\xi(p) = -\frac{p}{\sqrt{1-r^2}}$ e $\mu(q) = -\frac{q}{r}$. Considere o campo $\Gamma(p,q) = (p,q)$ normal ao Toro de Clifford mas não tangente à esfera $\mathbb{S}^{n+1}$ e o campo $G(p,q) = (-ap, bq)$ normal ao Toro de Clifford e tangente à esfera $\mathbb{S}^{n+1}$. Portanto valem as seguintes condições:

**(1)** $\langle (-ap,bq), (p,q)\rangle = 0$;

**(2)** $\langle (-ap,bq), (-ap,bq)\rangle = 1$.

De (1), temos que $-a|p|^2+b|q|^2=0$ ou $a|p|^2-b|q|^2=0$, e de (2) $a^2|p|^2+b^2|q|^2=1$. Já sabemos que $|p|=\sqrt{1-r^2}$ e $|q|=r$. Então

$$0=-a|p|^2+b|q|^2=-a(1-r^2)+br^2.$$

Logo $a=\frac{r^2}{1-r^2}b$.

Segue de (1) e (2) que

$$1=a^2|p|^2+b^2|q|^2=a^2(1-r^2)+b^2r^2$$

isto implica que

$$\tfrac{1}{r^2}=a^2\tfrac{1-r^2}{r^2}+b^2=\tfrac{r^2}{1-r^2}b^2+b^2.$$

Logo concluímos que

$$a=\tfrac{r}{\sqrt{1-r^2}} \text{ e } b=\tfrac{\sqrt{1-r^2}}{r}, \text{ para } 0<r<1.$$

Portanto o vetor normal será dado por

$$G(p,q)=(-ap,bq)=(-\tfrac{r}{\sqrt{1-r^2}}p,\tfrac{\sqrt{1-r^2}}{r}q)$$

e o operador de forma na sua direção será dado por

$$\begin{aligned}
S_G &= |\xi|S^f_{\frac{\xi}{|\xi|}}\circ\pi_{\mathbb{S}^m}+|\mu|S^g_{\frac{\mu}{|\mu|}}\circ\pi_{\mathbb{S}^{n-m}}\\
&= rS^f_{-\frac{p}{\sqrt{1-r^2}}}\circ\pi_{\mathbb{S}^m}+\sqrt{1-r^2}S^g_{\frac{q}{r}}\circ\pi_{\mathbb{S}^{n-m}}\\
&= rS^f_{-\frac{p}{\sqrt{1-r^2}}}\circ\pi_{\mathbb{S}^m}-\sqrt{1-r^2}S^g_{-\frac{q}{r}}\circ\pi_{\mathbb{S}^{n-m}}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$S_G(X,0)=r(S^f_{-\frac{p}{\sqrt{1-r^2}}})X=\tfrac{r}{\sqrt{1-r^2}}X$$

e

$$S_G(0,Y)=-\sqrt{1-r^2}(S^g_{-\frac{q}{r}})Y=-\tfrac{\sqrt{1-r^2}}{r}Y.$$

Tomando uma base ortonormal de vetores de $f\times g$ dada por

$$\{(e_0,0),...,(e_m,0),(0,h_{m+1}),...,(0,h_{n+1})\}$$

onde $\{e_i\}$ diagonaliza $S^f_\xi$ e $\{h_i\}$ diagonaliza $S^g_\mu$, temos que as curvaturas principais do Toro de Clifford são dadas por

$$\kappa_1 = ... = \kappa_m = \tfrac{r}{\sqrt{1-r^2}}$$

e

$$\kappa_{m+1} = ... = \kappa_n = -\tfrac{\sqrt{1-r^2}}{r}.$$

Já temos que a aplicação de Gauss em $M$ é

$$G(x) = (-\tfrac{r}{\sqrt{1-r^2}}x_0, ..., -\tfrac{r}{\sqrt{1-r^2}}x_m, \tfrac{\sqrt{1-r^2}}{r}x_{m+1}, ..., \tfrac{\sqrt{1-r^2}}{r}x_{n+1})$$

e as curvaturas principais são dadas por

$$\kappa_1 = ... = \kappa_m = \tfrac{r}{\sqrt{1-r^2}} \qquad \kappa_{m+1} = ... = \kappa_n = -\tfrac{\sqrt{1-r^2}}{r}.$$

Para todo $k = 1, ..., n-1$ fixado, temos que $H_k$ é constante. Como sabemos que

$$L_k x = c_k H_{k+1} G - c c_k H_k x$$

e $c = 1$, então

$$\begin{aligned} L_k x &= c_k H_{k+1}(-\tfrac{r}{\sqrt{1-r^2}}x_0, ..., -\tfrac{r}{\sqrt{1-r^2}}x_m, \tfrac{\sqrt{1-r^2}}{r}x_{m+1}, ..., \tfrac{\sqrt{1-r^2}}{r}x_{n+1}) \\ &- c_k H_k(x_0, ..., x_{n+1}) \\ &= (\nu x_0, ..., \nu x_m, \omega x_{m+1}, ..., \omega x_{n+1}) \\ &= diag[\nu, ..., \nu, \omega, ..., \omega] \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= diag[\nu, ..., \nu, \omega, ..., \omega] x \end{aligned}$$

onde,

$$\nu = -\tfrac{c_k H_{k+1} r}{\sqrt{1-r^2}} - c_k H_k$$

e

$$\omega = \tfrac{c_k H_{k+1}\sqrt{1-r^2}}{r} - c_k H_k.$$

Tomando $A = diag[\nu, ..., \nu, \omega, ..., \omega]$, temos que o Toro de Clifford ($\mathbb{S}^m(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^{n-m}(r)$, $0 < r < 1$) satisfaz a condição $L_k x = Ax$.

## 3.3 Cilindro hiperbólico

Nesta seção definiremos o cilindro hiperbólico, $\mathbb{H}^k(-\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{S}^{n-k}(r)$, que é uma hipersuperfície no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$. Calcularemos a segunda forma fundamental, as curvaturas principais, a $(k+1)$-ésima curvatura média e a expressão do operador linearizado da $(k+1)$-ésima curvatura média.

Sejam $M$, $N$, $\overline{M}$, $\overline{N}$, variedades tais que $\overline{N}$ é riemanniana e $\overline{M}$ uma variedade diferenciável com uma métrica pseudo-riemanniana $(.,.)$ induzida por uma forma quadrática $Q$. Considere as imersões isométricas $f : M \to \overline{M}$ e $g : N \to \overline{N}$, onde a métrica induzida por $f$ em $M$ é riemanniana e $Q(\xi,\xi) < 0$, $\forall \xi \in \mathfrak{X}(M)^\perp$. Considerando em $M \times N$ e em $\overline{M} \times \overline{N}$ as métricas produtos, teremos que a imersão

$$f \times g : M \times N \to \overline{M} \times \overline{N}$$

também é imersão isométrica.

Denotemos por $\overline{\nabla}^{\overline{M}}$ a conexão pseudo-riemanniana de $\overline{M}$ e por $\nabla^M$, $\nabla^N$ e $\overline{\nabla}^{\overline{N}}$ as conexões riemannianas de $M$, $N$ e $\overline{N}$ respectivamente. Portanto a conexão riemanniana de $M \times N$ é dada por

$$\nabla_X^{M\times N} Y = \nabla_{X_M}^M Y_M \times \nabla_{X_N}^N Y_N$$

e a conexão pseudo-riemanniana de $\overline{M} \times \overline{N}$ é dada por

$$\overline{\nabla}_U^{\overline{M}\times\overline{N}} V = \overline{\nabla}_{U_{\overline{M}}}^{\overline{M}} V_{\overline{M}} + \overline{\nabla}_{U_{\overline{N}}}^{\overline{N}} V_{\overline{N}}$$

onde $X = (X_M, X_N)$, $Y = (Y_M, Y_N) \in \mathfrak{X}(M \times N)$ em que $X_M, Y_M \in \mathfrak{X}(M)$ e $X_N, Y_N \in \mathfrak{X}(N)$. E $U = (U_{\overline{M}}, U_{\overline{N}}), V = (V_{\overline{M}}, V_{\overline{N}}) \in \mathfrak{X}(\overline{M} \times \overline{N})$ em que $U_{\overline{M}}, V_{\overline{M}} \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ e $U_{\overline{N}}, V_{\overline{N}} \in \mathfrak{X}(\overline{N})$.

Sejam $B_f, B_g$ as segundas formas fundamentais de $f$ e $g$, respectivamente, com os operadores lineares auto-adjuntos associados $S_\xi^f : T_pM \to T_pM$ e $S_\mu^g : T_qN \to T_qN$ com $\xi \in \mathfrak{X}(M)^\perp$, $\mu \in \mathfrak{X}(N)^\perp$. Tome $u, v \in T_pM$ e $w, z \in T_qN$, então temos:

$$\langle S_\xi^f u, v\rangle = \langle B_f(u,v), \xi\rangle \qquad \text{e} \qquad \langle S_\mu^g w, z\rangle = \langle B_g(w,z), \mu\rangle.$$

Assim a segunda forma fundamental da imersão produto $f \times g$ é dada por

$$B_{f\times g}(X,Y) = (B_f(X_M, Y_M), B_g(X_N, Y_N)).$$

Seja $\eta = (\xi, \mu)$ em $\overline{M} \times \overline{N}$ normal a $M \times N$, com $\xi$ em $\overline{M}$ normal a $M$, $\mu$ em $\overline{N}$ normal a $N$, $(\xi,\xi) + |\mu|^2 = -1$ e $(\xi,\xi) = -\rho^2$, $\rho > 0$. Vamos encontrar o operador de forma $S_\eta^{f\times g}$ associado $f \times g$. Sabemos que

$$\begin{aligned}
\langle S^{f\times g}_{\eta}X, Y\rangle &= \langle S^{f\times g}_{\eta}(X_M, X_N), (Y_M, Y_N)\rangle \\
&= \langle B_{f\times g}((X_M, X_N), (Y_M, Y_N)), \eta\rangle \\
&= \langle (B_f(X_M, Y_M), B_g(X_N, Y_N)), (\xi, \mu)\rangle \\
&= \langle B_f(X_M, Y_M), \xi\rangle + \langle B_g(X_N, Y_N), \mu\rangle \\
&= \langle S^f_{\xi}(X_M), Y_M\rangle + \langle S^g_{\mu}(X_N), Y_N\rangle \\
&= \langle \rho S^f_{\frac{\xi}{\rho}}(X_M), Y_M\rangle + \langle |\mu| S^g_{\frac{\mu}{|\mu|}}(X_N), Y_N\rangle.
\end{aligned}$$

Desta maneira, o operador de forma na direção $N$ da imersão produto $f \times g$ é

$$\begin{aligned}
S^{f\times g}_{\eta}X &= \rho S^f_{\frac{\xi}{\rho}} X_M + |\mu| S^g_{\frac{\mu}{|\mu|}} X_N \\
&= (\rho S^f_{\frac{\xi}{\rho}} \circ \pi_M + |\mu| S^g_{\frac{\mu}{|\mu|}} \circ \pi_N)X
\end{aligned}$$

onde $\pi_M$ é projeção sobre $M$ e $\pi_N$ é projeção sobre $N$.

Sejam $f$ e $g$ as inclusões canônicas $\mathbb{H}^k(-\sqrt{1+r^2}) \subset \mathbb{R}^{k+1}_1$ e $\mathbb{S}^{n-k} \subset \mathbb{R}^{n-k+1}$ respectivamente, ou seja,

$$f : \mathbb{H}^k(-\sqrt{1+r^2}) \hookrightarrow \mathbb{R}^{k+1}_1 \qquad f(p) = p$$

$$g : \mathbb{S}^{n-k}(r) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n-k+1} \qquad g(q) = q.$$

Note que $f$ é isometria, pois a métrica induzida em $\mathbb{H}^k(-\sqrt{1+r^2})$ por $\mathbb{R}^{k+1}_1$ é riemanniana.

Considere o produto das imersões

$$f \times g : \mathbb{H}^k(-\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{S}^{n-k}(r) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+2}_1.$$

Sejam $p \in \mathbb{H}^k(-\sqrt{1+r^2})$ e $q \in \mathbb{S}^{n-k}(r)$, isto é, $(p,p) = -1-r^2$ e $|q|^2 = r^2$. Assim $(p,q) \in \mathbb{H}^k(-\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{S}^{n-k}(r)$ e $((p,q),(p,q)) = (p,p) + |q|^2 = -1 - r^2 + r^2 = -1$.

Neste caso os pontos $(p,q) \in \mathbb{H}^k(-\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{S}^{n-k}(r)$ estarão no espaço hiperbólico

$$\mathbb{H}^{n+1} = \{(p,q) \in \mathbb{R}^{n+2}_1; ((p,q)(p,q)) = -1\}.$$

Para as imersões $f : \mathbb{H}^m(-\sqrt{1+r^2}) \to \mathbb{R}^{m+1}_1$, $g : \mathbb{S}^{n-m}(r) \to \mathbb{R}^{n-m+1}$ e $i : \mathbb{H}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+2}_1$, teremos os operadores de forma associados $S^f_{\xi} = -\frac{1}{\sqrt{1+r^2}} Id$, $S^g_{\mu} = \frac{1}{r} Id$ e $S^i_G = Id$ com $\xi(p) = \frac{p}{\sqrt{1+r^2}}$ e $\mu(q) = -\frac{q}{r}$. Considere o campo $\Gamma(p,q) = (p,q)$ normal a $\mathbb{H}^n$ e a $\mathbb{H}^m(-\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{S}^{n-m}(r)$. Precisamos de um campo $G(p,q) = (ap, bq)$, unitário, normal a $\mathbb{H}^m(-\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{S}^{n-m}(r)$ e tangente a $\mathbb{H}^n$, ou seja, que cumpra as condições:

**(i)** $((ap, bq), (p, q)) = 0$

**(ii)** $((ap, bq), (ap, bq)) = 1$

De $(i)$, temos que $0 = a(p,p) + b|q|^2 = -a(1+r^2) + br^2 = -a - ar^2 + br^2$, então

$$a = \frac{br^2}{1+r^2}.$$

De $(ii)$, temos que $1 = a^2(p,p) + b^2|q|^2 = -a^2(1+r^2)$

$$\Rightarrow \quad 1 = -a^2 - a^2r^2 + b^2r^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{r^2} = -\frac{a^2}{r^2} - a^2 + b^2 = -a^2(\frac{1}{r^2} + 1) + b^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{r^2} = -b^2\frac{r^2}{1+r^2} + b^2 = \frac{b^2}{1+r^2}$$

$$\Rightarrow \quad b = \frac{\sqrt{1+r^2}}{r} \qquad e \qquad a = \frac{r}{\sqrt{1+r^2}}.$$

Portanto o vetor normal será dado por:

$$G(p,q) = (\frac{r}{\sqrt{1+r^2}}p, \frac{\sqrt{1+r^2}}{r}q)$$

e o operador de forma na sua direção será dado por

$$\begin{aligned} S_G &= \rho S^f_{\frac{\xi}{\rho}} \circ \pi_M + |\mu| S^g_{\frac{\mu}{|\mu|}} \circ \pi_N \\ &= r S^f_{\frac{p}{\sqrt{1+r^2}}} \circ \pi_M + \sqrt{1+r^2} S^g_{\frac{q}{r}} \circ \pi_N \\ &= r S^f_{\frac{p}{\sqrt{1+r^2}}} \circ \pi_M - \sqrt{1+r^2} S^g_{-\frac{q}{r}} \circ \pi_N. \end{aligned}$$

Assim,

$$S_G(X,0) = -r(S^f_{\frac{p}{\sqrt{1+r^2}}})X = r(-\frac{1}{\sqrt{1+r^2}})X = -\frac{r}{\sqrt{1+r^2}}X$$

e

$$S_G(0,Y) = -\sqrt{1+r^2}(S^g_{-\frac{q}{r}})Y = -\frac{\sqrt{1+r^2}}{r}Y.$$

Tomando uma base ortonormal de vetores de $f \times g$ dada por

$$\{(e_0, 0), (e_1, 0), ..., (e_m, 0), (0, h_{m+1}), (0, h_{m+2}), ..., (0, h_{n+1})\}$$

onde $\{e_i\}$ diagonaliza $S^f_\xi$ e $\{h_i\}$ diagonaliza $S^g_\mu$, temos que as curvaturas principais do Cilindro Hiperbólico são dadas por

$$\kappa_1 = ... = \kappa_m = -\tfrac{r}{\sqrt{1+r^2}}$$

e

$$\kappa_{m+1} = ... = \kappa_n = -\tfrac{\sqrt{1+r^2}}{r}.$$

Já temos que a aplicação de Gauss em $M$ é

$$G(x) = (\tfrac{r}{\sqrt{1+r^2}}x_0, ..., \tfrac{r}{\sqrt{1+r^2}}x_m, \tfrac{\sqrt{1+r^2}}{r}x_{m+1}, ..., \tfrac{\sqrt{1+r^2}}{r}x_{n+1})$$

e as curvaturas principais são dadas por

$$\kappa_1 = ... = \kappa_m = -\tfrac{r}{\sqrt{1+r^2}} \qquad \kappa_{m+1} = ... = \kappa_n = -\tfrac{\sqrt{1+r^2}}{r}.$$

Para todo $k = 1, ..., n-1$ fixado, temos que $H_k$ é constante. Como sabemos que $L_k x = c_k H_{k+1} G - c c_k H_k x$ e $c = -1$, então

$$\begin{aligned}
L_k x &= c_k H_{k+1}(\tfrac{r}{\sqrt{1+r^2}}x_0, ..., \tfrac{r}{\sqrt{1+r^2}}x_m, \tfrac{\sqrt{1+r^2}}{r}x_{m+1}, ..., \tfrac{\sqrt{1+r^2}}{r}x_{n+1}) \\
&+ c_k H_k(x_0, ..., x_{n+1}) \\
&= (\overline{\nu}x_0, ..., \overline{\nu}x_m, \overline{\omega}x_{m+1}, ..., \overline{\omega}x_{n+1}) \\
&= diag[\overline{\nu}, ..., \overline{\nu}, \overline{\omega}, ..., \overline{\omega}] \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \\
&= diag[\overline{\nu}, ..., \overline{\nu}, \overline{\omega}, ..., \overline{\omega}]x
\end{aligned}$$

onde,

$$\overline{\nu} = \tfrac{c_k H_{k+1} r}{\sqrt{1+r^2}} + c_k H_k$$

e

$$\overline{\omega} = \tfrac{c_k H_{k+1}\sqrt{1+r^2}}{r} + c_k H_k.$$

Tomando $A = diag[\overline{\nu}, ..., \overline{\nu}, \overline{\omega}, ..., \overline{\omega}]$, temos que o Cilindro hiperbólico $(\mathbb{H}^m(-\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{S}^{n-m}(r), 0 < r)$ satisfaz a condição $L_k x = Ax$.

# Capítulo 4

# Teorema

O objetivo deste capítulo é apresentar a demonstração do teorema principal. Este classifica as hipersuperfícies $x : M^n \to M_c^{n+1} \subset \mathbb{R}_q^{n+2}$ orientáveis imersas em $M_c^{n+1}$ que satisfazem a equação $L_k x = Ax$, onde $A \in \mathbb{R}^{(n+2)\times(n+2)}$ é alguma matriz constante auto-adjunta. Para isto, introduziremos uma série de resultados auxiliares.

No final do capítulo 2 calculamos o operador $L_k$ agindo nas funções coordenadas da hipersuperfície, agora consideraremos as funções coordenadas da aplicação de Gauss $G$, que é a função $\langle a, G\rangle$ em $M$, onde $a \in \mathbb{R}^{n+2}$ é um vetor arbitrário fixado.

**Lema 4.1.** *$X(\langle a, G\rangle) = -\langle SX, a\rangle = -\langle X, S(a^T)\rangle$, $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$.*

*Demonstração.* Como $a \in \mathbb{R}^{n+2}$, sabemos que $\nabla^0_X a = 0$, logo

$$\begin{aligned}
X(\langle a, G\rangle) &= \langle \nabla^0_X a, G\rangle + \langle a, \nabla^0_X G\rangle = \langle a, \nabla^0_X G\rangle \\
&\overset{2.1}{=} \langle a, -SX\rangle = -\langle SX, a\rangle \\
&\overset{2.9}{=} -\langle SX, a^T + \langle a, G\rangle G + c\langle a, x\rangle x\rangle \\
&= -(\langle SX, a^T\rangle + \langle a, G\rangle\langle SX, G\rangle + c\langle a, x\rangle\langle SX, x\rangle) \\
&= -\langle SX, a^T\rangle \\
&= -\langle X, S(a^T)\rangle.
\end{aligned}$$

□

Daí, temos que

$$\langle \nabla\langle a, G\rangle, X\rangle = X\langle a, G\rangle = -\langle S(a^T), X\rangle = \langle -S(a^T), X\rangle$$

o que implica que

$$\nabla\langle a, G\rangle = -S(a^T). \tag{4.1}$$

**Lema 4.2.** *$\nabla_X(\nabla\langle a, G\rangle) = -\nabla_X(Sa^T) = -\nabla S(a^T, X) - S(\nabla_X a^T) = -(\nabla_X S)a^T - \langle a, G\rangle S^2 X + c\langle a, x\rangle SX$.*

*Demonstração.*

$$\begin{aligned}
\nabla_X(\nabla\langle a,G\rangle) &= \nabla_X(-Sa^T) = -\nabla_X(Sa^T)\\
&= -\nabla S(a^T,X) - S(\nabla_X a^T)\\
&= -(\nabla_X S)a^T - S(\nabla_X a^T)\\
&\overset{2.11}{=} -(\nabla_X S)a^T - S(\langle a,G\rangle SX - c\langle a,x\rangle X)\\
&= -(\nabla_X S)a^T - \langle a,G\rangle S^2X + c\langle a,x\rangle SX.
\end{aligned}$$

$\square$

**Lema 4.3.** $\nabla S(a^T,X) = \nabla S(X,a^T) = (\nabla_{a^T}S)X$.

*Demonstração.* Como $S$ é auto-adjunto, temos

$$\langle SX,a^T\rangle = \langle X,Sa^T\rangle.$$

Derivando ambos os membros,

$$\langle\nabla(SX),a^T\rangle + \langle SX,\nabla a^T\rangle = \langle\nabla X,Sa^T\rangle + \langle X,\nabla(Sa^T)\rangle.$$

Usando o fato de que

$$\langle(\nabla_X S)Z,Y\rangle = \langle\nabla_X(SZ),Y\rangle - \langle S(\nabla_X Z),Y\rangle,$$

temos

$$\langle(\nabla S)X,a^T\rangle + \langle S(\nabla X),a^T\rangle + \langle SX,\nabla a^T\rangle = \langle S\nabla X,a^T\rangle + \langle X,(\nabla S)a^T\rangle + \langle X,S(\nabla a^T)\rangle$$

o que implica que

$$\langle(\nabla S)X,a^T\rangle = \langle X,(\nabla S)a^T\rangle.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\nabla S(a^T,X) &= \langle(\nabla S)a^T,X\rangle = \langle a^T,(\nabla S)X\rangle\\
&= \langle X,(\nabla S)a^T\rangle = \nabla S(X,a^T)\\
&= (\nabla_{a^T}S)X.
\end{aligned}$$

$\square$

Na próxima proposição, daremos uma expressão do operador $L_k$ agindo nas funções coordenadas da aplicação de Gauss $G$.

**Proposição 4.4.** $L_k\langle a,G\rangle = -tr(P_k\nabla_{a^T}S) - \langle a,G\rangle tr(S^2P_k) + c\langle a,x\rangle tr(SP_k) = \binom{n}{k+1}\langle\nabla H_{k+1},a\rangle - \binom{n}{k+1}(nH_kH_{k+1} - (n-k-1)H_{k+2})\langle a,G\rangle + cc_kH_{k+1}\langle a,x\rangle$.

*Demonstração.* Seja $\{E_1, ..., E_n\}$ um referencial ortonormal de $M$, logo

$$
\begin{aligned}
L_k\langle a, G\rangle &= tr(P_k\nabla^2\langle a, G\rangle) = \sum_{i=1}^{n}\langle P_k\nabla^2\langle a, G\rangle E_i, E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla^2\langle a, G\rangle E_i, P_kE_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{E_i}\nabla\langle a, G\rangle, P_kE_i\rangle \\
&\overset{4.1}{=} \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{E_i}(-S(a^T)), P_kE_i\rangle \\
&\overset{4.2}{=} \sum_{i=1}^{n}\langle -(\nabla_{E_i}S)a^T - \langle a, G\rangle S^2E_i + c\langle a, x\rangle SE_i, P_kE_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\{-\langle(\nabla_{E_i}S)a^T, P_kE_i\rangle - \langle\langle a, G\rangle S^2E_i, P_kE_i\rangle \\
&+ \langle c\langle a, x\rangle SE_i, P_kE_i\rangle\} \\
&\overset{4.3}{=} -\sum_{i=1}^{n}\langle(\nabla_{a^T}S)E_i, P_kE_i\rangle - \langle a, G\rangle\sum_{i=1}^{n}\langle S^2E_i, P_kE_i\rangle \\
&+ c\langle a, x\rangle\sum_{i=1}^{n}\langle SE_i, P_kE_i\rangle \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\langle P_k(\nabla_{a^T}S)E_i, E_i\rangle - \langle a, G\rangle\sum_{i=1}^{n}\langle P_kS^2E_i, E_i\rangle \\
&+ c\langle a, x\rangle\sum_{i=1}^{n}\langle P_kSE_i, E_i\rangle \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\langle P_k(\nabla_{a^T}S)E_i, E_i\rangle - \langle a, G\rangle tr(P_kS^2) + c\langle a, x\rangle tr(SP_k) \\
&= -tr(P_k\nabla_{a^T}S) - \langle a, G\rangle tr(P_kS^2) + c\langle a, x\rangle tr(SP_k) \\
&= \binom{n}{k+1}\langle\nabla H_{k+1}, a\rangle - \binom{n}{k+1}(nH_kH_{k+1} - (n-k-1)H_{k+2})\langle a, G\rangle \\
&+ cc_kH_{k+1}\langle a, x\rangle.
\end{aligned}
$$

□

**Corolário 4.5.** $L_kG = \binom{n}{k+1}\nabla H_{k+1} - \binom{n}{k+1}(nH_kH_{k+1} - (n-k-1)H_{k+2})G + c(k+1)\binom{n}{k+1}H_{k+1}a$.

*Demonstração.* Temos pela proposição anterior que

$$\begin{aligned} L_k\langle a, G\rangle &= -\binom{n}{k+1}\langle \nabla H_{k+1}, a\rangle - \binom{n}{k+1}(nH_kH_{k+1} - (n-k-1)H_{k+2})\langle a, G\rangle \\ &+ cc_kH_{k+1}\langle a, x\rangle \\ &= \langle -\binom{n}{k+1}\nabla H_{k+1} - \binom{n}{k+1}(nH_kH_{k+1} - (n-k-1)H_{k+2})G \\ &+ cc_kH_{k+1}x, a\rangle \end{aligned}$$

o que implica

$$L_kG = \binom{n}{k+1}\nabla H_{k+1} - \binom{n}{k+1}(nH_kH_{k+1} - (n-k-1)H_{k+2})G + c(k+1)\binom{n}{k+1}H_{k+1}a$$

□

Assumiremos que para um $k = 1, ..., n-1$ fixado a imersão $x : M^n \to M_c^{n+1} \subset \mathbb{R}_q^{n+2}$ satisfaz a condição

$$L_kx = Ax + b \tag{4.2}$$

para uma matriz constante $A \in \mathbb{R}^{(n+2)\times(n+2)}$ e um vetor constante $b \in \mathbb{R}^{n+2}$. Como $L_kx = c_kH_{k+1}G - cc_kH_kx$, temos

$$\begin{aligned} Ax &= -b + c_kH_{k+1}G - cc_kH_kx \\ &\overset{2.9}{=} -b^T - \langle b, G\rangle G - c\langle b, x\rangle x + c_kH_{k+1}G - cc_kH_kx \\ &= -b^T + (c_kH_{k+1} - \langle b, G\rangle)G - c(c_kH_k + \langle b, x\rangle)x \end{aligned}$$

onde $b^T \in \mathfrak{X}(M)$ denota a componente tangencial de $b$. Portanto

$$Ax = -b + c_kH_{k+1}G - cc_kH_kx = -b^T + (c_kH_{k+1} - \langle b, G\rangle)G - c(c_kH_k + \langle b, x\rangle)x. \tag{4.3}$$

**Proposição 4.6.** *$AX = -c_kH_{k+1}SX - cc_kH_kX + c_k\langle \nabla H_{k+1}, X\rangle G - cc_k\langle \nabla H_k, X\rangle x$.*

*Demonstração.* Tomando a derivada covariante de ambos os membros da equação

$$Ax = -b^T + c_kH_{k+1}G - \langle b, G\rangle G - cc_kH_kx - c\langle b, x\rangle x$$

obtemos que

$$\nabla^0_X Ax = -\nabla^0_X b^T + c_k\nabla^0_X H_{k+1}G - \nabla^0_X\langle b, G\rangle G - cc_k\nabla^0_X H_kx - c\nabla^0_X\langle b, x\rangle$$

e como $\nabla^0_X Ax = AX$, temos

$$\begin{aligned} AX &= -\nabla^0_X b^T + c_k(\langle \nabla H_{k+1}, X\rangle G + H_{k+1}\nabla^0_X G) - (X(\langle b, G\rangle)G + \langle b, G\rangle\nabla^0_X G) \\ &- cc_k(\langle \nabla H_k, X\rangle x + H_k\nabla^0_X x) - c(X(\langle b, x\rangle)x + \langle b, x\rangle\nabla^0_X x). \end{aligned}$$

Pelo fato de que $\nabla^0_X x = X$ e por 4.1 e 2.1, temos

$$\begin{aligned} AX &= -\nabla^0_X b^T + c_k\langle\nabla H_{k+1}, X\rangle G - c_k H_{k+1}SX + \langle SX, b\rangle G + \langle b, G\rangle SX \\ &- cc_k\langle\nabla H_k, X\rangle x - cc_k H_k X - c\langle X, b\rangle x - c\langle b, x\rangle X \\ &\overset{2.1,2.11}{=} -c_k H_{k+1}SX - cc_k H_k X + c_k\langle\nabla H_{k+1}, X\rangle G - cc_k\langle\nabla H_k, X\rangle x. \end{aligned}$$

□

Para obter uma expressão para $H_{k+1}AG$, precisamos do seguinte resultado.

**Lema 4.7.** $L_k(L_k x) = -c_k\binom{n}{k+1}H_{k+1}\nabla H_{k+1} - 2c_k(SP_k)(\nabla H_{k+1}) - 2cc_k P_k(\nabla H_k)$ $- c_k(\binom{n}{k+1}H_{k+1}(nH_1H_{k+1}) - (n-k-1)H_{k+2} + cc_kH_kH_{k+1} - L_kH_{k+1})G + c_k(cc_kH_{k+1}^2 + c_kH_k^2 - cL_kH_k)x.$

*Demonstração.* Para provar o lema, basta mostrar que

$$\begin{aligned} L_k(L_k(\langle a, x\rangle)) &= -c_k\binom{n}{k+1}H_{k+1}\langle\nabla H_{k+1}, a\rangle \\ &- 2c_k\langle(SP_k)(\nabla H_{k+1}), a\rangle - 2cc_k\langle P_k(\nabla H_k), a\rangle \\ &- c_k(\binom{n}{k+1}H_{k+1}(nH_1H_{k+1}) - (n-k-1)H_{k+2} \\ &+ cc_kH_kH_{k+1} - L_kH_{k+1})\langle a, G\rangle \\ &+ c_k(cc_kH_{k+1}^2 + c_kH_k^2 - cL_kH_k)\langle a, x\rangle. \end{aligned}$$

Por 2.12, temos que

$$\begin{aligned} L_k(L_k(\langle a, x\rangle)) &= L_k(c_kH_{k+1}\langle a, G\rangle - cc_kH_k\langle a, x\rangle) \\ &= \underbrace{c_kL_k(H_{k+1}\langle a, G\rangle)}_{(I)} - \underbrace{cc_kL_k(H_k\langle a, x\rangle)}_{(II)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (I) &= c_k\{(L_kH_{k+1})\langle a, G\rangle + H_{k+1}L_k\langle a, G\rangle + 2\langle P_k(\nabla H_{k+1}), \nabla\langle a, G\rangle\rangle\} \\ &\overset{4.4}{=} c_k\{L_kH_{k+1}\langle a, G\rangle + H_{k+1}(-(\binom{n}{k+1}\langle\nabla H_{k+1}, a\rangle - (\binom{n}{k+1}(nH_1H_{k+1} \\ &- (n-k-1)H_{k+2})\langle a, G\rangle \\ &+ cc_kH_{k+1}\langle a, x\rangle) + 2\langle P_k(\nabla H_{k+1}), -S(a^T)\rangle\} \\ &= c_kL_kH_{k+1}\langle a, G\rangle - c_k(\binom{n}{k+1}H_{k+1}\langle\nabla H_{k+1}(nH_1H_{k+1} - (n-k-1)H_{k+2})\langle a, G\rangle \\ &+ cc_k^2H_{k+1}^2\langle a, x\rangle - 2c_k\langle(SP_k)(\nabla H_{k+1}), a^T\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (II) &= cc_k\{L_k(H_k)\langle a, x\rangle + H_kL_k\langle a, x\rangle + 2\langle P_k(\nabla H_k), \nabla\langle a, x\rangle\rangle\} \\ &\overset{2.12}{=} cc_kL_k(H_k)\langle a, x\rangle + cc_kH_k(c_kH_{k+1}\langle a, G\rangle - cc_kH_k\langle a, x\rangle) + 2cc_k\langle P_k(\nabla H_k), a^T\rangle \end{aligned}$$

Sabendo que $\langle(SP_k)(\nabla H_{k+1}), a^T\rangle = \langle(SP_k)(\nabla H_{k+1}), a\rangle$ e fazendo $(I) - (II)$ encontramos o resultado desejado.

□

**Proposição 4.8.** $H_{k+1}AG = -\binom{n}{k+1}H_{k+1}\nabla H_{k+1} - 2(SP_k)(\nabla H_{k+1}) - 2cP_k(\nabla H_k)$ $-(\binom{n}{k+1}H_{k+1}(nH_1H_{k+1}-(n-k-1)H_{k+2})+cc_kH_kH_{k+1}-L_kH_{k+1})G+(cc_kH_{k+1}^2+c_kH_k^2-cL_kH_k)x + cH_kAx.$

*Demonstração.* Basta mostrar que

$$H_{k+1}AG = \tfrac{1}{c_k}(L_k(L_kx)) + cH_kAx.$$

Temos que

$$\begin{aligned} L_k(L_kx) &= L_k(Ax+b) = L_k(Ax) + L_k(b) = L_k(Ax) \\ &\overset{2.13}{=} c_kH_{k+1}AG - cc_kH_kAx \\ &= c_k(H_{k+1}AG - cH_kAx) \end{aligned}$$

o que implica que

$$H_{k+1}AG = \tfrac{1}{c_k}(L_k(L_kx)) + cH_kAx.$$

□

Temos ainda uma outra expressão para $H_{k+1}AG$ que será dada na próxima proposição.

**Proposição 4.9.** $H_{k+1}AG = -\binom{n}{k+1}H_{k+1}\nabla H_{k+1} - 2(SP_k)(\nabla H_{k+1}) - 2cP_k(\nabla H_k) - cH_kb^T$ $-(\binom{n}{k+1}H_{k+1}(nH_1H_{k+1} - (n-k-1)H_{k+2}) + cH_k\langle b, G\rangle - L_kH_{k+1})G$ $+(cc_kH_{k+1}^2 - H_k\langle b, x\rangle - cL_kH_k)x.$

*Demonstração.* Temos que

$$
\begin{aligned}
H_{k+1}AG \stackrel{4.8}{=} & -\binom{n}{k+1}H_{k+1}\nabla H_{k+1} - 2(SP_k)(\nabla H_{k+1}) - 2cP_k(\nabla H_k) \\
- & \left(\binom{n}{k+1}H_{k+1}(nH_1H_{k+1} - (n-k-1)H_{k+2}) + cc_kH_kH_{k+1} - L_kH_{k+1}\right)G \\
+ & (cc_kH_{k+1}^2 + c_kH_k^2 - cL_kH_k)x + cH_kAx \\
= & -\binom{n}{k+1}H_{k+1}\nabla H_{k+1} - 2(SP_k)(\nabla H_{k+1}) - 2cP_k(\nabla H_k) \\
- & \left(\binom{n}{k+1}H_{k+1}(nH_1H_{k+1} - (n-k-1)H_{k+2}) + cc_kH_kH_{k+1} - L_kH_{k+1}\right)G \\
+ & (cc_kH_{k+1}^2 + c_kH_k^2 - cL_kH_k)x \\
+ & cH_k(-b^T + (c_kH_{k+1} - \langle b, G\rangle)G - c(c_kH_k + \langle b, x\rangle)x) \\
= & -\binom{n}{k+1}H_{k+1}\nabla H_{k+1} - 2(SP_k)(\nabla H_{k+1}) - 2cP_k(\nabla H_k) - cH_kb^T \\
- & \left(\binom{n}{k+1}H_{k+1}(nH_1H_{k+1} - (n-k-1)H_{k+2}) + cc_kH_kH_{k+1}\right. \\
- & \left. cc_kH_kH_{k+1} + cH_k\langle b, G\rangle - L_kH_{k+1}\right)G \\
+ & (cc_kH_{k+1}^2 + c_kH_k^2 - cL_kH_k - c^2c_kH_k^2 - c^2H_k\langle b, x\rangle)x \\
= & -\binom{n}{k+1}H_{k+1}\nabla H_{k+1} - 2(SP_k)(\nabla H_{k+1}) - 2cP_k(\nabla H_k) - cH_kb^T \\
- & \left(\binom{n}{k+1}H_{k+1}(nH_1H_{k+1} - (n-k-1)H_{k+2}) + cH_k\langle b, G\rangle - L_kH_{k+1}\right)G \\
+ & (cc_kH_{k+1}^2 - H_k\langle b, x\rangle - cL_kH_k)x
\end{aligned}
$$

□

O endomorfismo determinado por $A$ é sempre auto-adjunto quando restrito ao espaço tangente da hipersuperfície, isto é,

$$\langle AX, Y\rangle = \langle X, AY\rangle, \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{4.4}$$

De fato por 4.6, temos que

$$
\begin{aligned}
\langle AX, Y\rangle = & -c_kH_{k+1}\langle SX, Y\rangle - cc_kH_k\langle X, Y\rangle + c_k\langle \nabla H_{k+1}, X\rangle\langle G, Y\rangle \\
- & cc_k\langle \nabla H_k, X\rangle\langle x, Y\rangle \\
= & -c_kH_{k+1}\langle X, SY\rangle - cc_kH_k\langle X, Y\rangle + c_k\langle \nabla H_{k+1}, Y\rangle\langle X, G\rangle \\
- & cc_k\langle \nabla H_k, Y\rangle\langle X, x\rangle \\
= & \langle X, -c_kH_{k+1}SY - cc_kH_kY + c_k\langle \nabla H_{k+1}, Y\rangle G - cc_k\langle \nabla H_k, Y\rangle x\rangle \\
= & \langle X, AY\rangle.
\end{aligned}
$$

Portanto $A$ é auto-adjunto se, e somente se,

$$\langle AX, x\rangle = \langle X, Ax\rangle, \qquad \forall X \in \mathfrak{X}(M) \tag{4.5}$$

$$\langle AX, G\rangle = \langle X, AG\rangle, \qquad \forall X \in \mathfrak{X}(M) \tag{4.6}$$

$$\langle AG, x\rangle = \langle G, Ax\rangle. \tag{4.7}$$

De fato, basta lembrar que dado um vetor arbitrário fixado $a \in \mathbb{R}^{n+2}$, pode ser escrito como

$$a = a^T + \langle a, G\rangle G + c\langle a, x\rangle x$$

e daí a equivalência é imediata.

**Lema 4.10.** $\langle AX, x\rangle = \langle X, Ax\rangle$ *é equivalente a*

$$\nabla\langle b, x\rangle = b^T = c_k \nabla H_k. \tag{4.8}$$

*Demonstração.* Por 4.3 e 4.6, temos que

$$\langle AX, x\rangle = \langle X, Ax\rangle \Leftrightarrow -cc_k\langle \nabla H_k, X\rangle\langle x, x\rangle = -\langle b^T, X\rangle$$

como $\langle x, x\rangle = c$, $c^2 = 1$, então

$$\begin{aligned}\langle AX, x\rangle = \langle X, Ax\rangle \quad &\Leftrightarrow \quad \langle c_k\nabla H_k, X\rangle = \langle b^T, X\rangle \\ &\Leftrightarrow \quad c_k \nabla H_k = b^T.\end{aligned}$$

□

Note que $\nabla\langle b, x\rangle = c_k\nabla H_k$ implica que $\langle b, x\rangle - c_k H_k$ é constante em $M$.

**Proposição 4.11.** *Nos pontos onde* $H_{k+1} \neq 0$, $\langle AX, G\rangle = \langle X, AG\rangle$ *é equivalente a*

$$\frac{2}{H_{k+1}}(SP_k)(\nabla H_{k+1}) + (k+2)\binom{n}{k+1}\nabla H_{k+1} = -\frac{c}{H_{k+1}}(2P_k(\nabla H_k) + c_k H_k \nabla H_k). \tag{4.9}$$

*Demonstração.* Usando 4.6 e 4.8, obtemos que $\langle AX, G\rangle = \langle X, AG\rangle$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \langle c_k\langle \nabla H_{k+1}, X\rangle G, G\rangle = \tfrac{1}{H_{k+1}}\langle X, -\tbinom{n}{k+1}H_{k+1}\nabla H_{k+1} - 2(SP_k)(\nabla H_{k+1}) \\
&- \quad 2cP_k(\nabla H_k) - cH_k b^T\rangle \\
&\overset{4.8}{\Leftrightarrow} \quad c_k\langle \nabla H_{k+1}, X\rangle H_{k+1} = \langle X, -\tbinom{n}{k+1}H_{k+1}\nabla H_{k+1} - 2(SP_k)(\nabla H_{k+1}) \\
&- \quad 2cP_k(\nabla H_k) - cc_k H_k \nabla H_k\rangle \\
&\Leftrightarrow \quad c_k H_{k+1}\nabla H_{k+1} = -\tbinom{n}{k+1}H_{k+1}\nabla H_{k+1} - 2(SP_k)(\nabla H_{k+1}) \\
&- \quad 2cP_k(\nabla H_k) - cc_k H_k \nabla H_k \\
&\Leftrightarrow \quad \tfrac{2}{H_{k+1}}(SP_k)(\nabla H_{k+1}) + \tbinom{n}{k+1}\nabla H_{k+1} + (k+1)\tbinom{n}{k+1}\nabla H_{k+1} \\
&= \quad -\tfrac{c}{H_{k+1}}(2P_k(\nabla H_k) + c_k H_k \nabla H_k) \\
&\Leftrightarrow \quad \tfrac{2}{H_{k+1}}(SP_k)(\nabla H_{k+1}) + (k+2)\tbinom{n}{k+1}\nabla H_{k+1} \\
&= \quad -\tfrac{c}{H_{k+1}}(2P_k(\nabla H_k) + c_k H_k \nabla H_k).
\end{aligned}$$

□

**Proposição 4.12.** $L_kH_k = \frac{1}{c_k}L_k\langle b, x\rangle = H_{k+1}\langle b, G\rangle - cH_k\langle b, x\rangle$.

*Demonstração.* De 4.8, temos que

$$L_k(\nabla\langle b, x\rangle) = L_k(c_k\nabla H_k)$$

isto implica que

$$L_k(\nabla\langle b, x\rangle) = c_kL_k(\nabla H_k)$$

logo

$$L_k\langle b, x\rangle = c_kL_kH_k$$

portanto

$$L_kH_k = \frac{1}{c_k}L_k\langle b, x\rangle \overset{2.12}{=} H_{k+1}\langle b, G\rangle - cH_k\langle b, x\rangle.$$

□

Observe que

$$\langle Ax, x\rangle = -\langle b, x\rangle - c_kH_k. \tag{4.10}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\langle Ax, x\rangle &\overset{4.3}{=} \langle -b + c_kH_kG - cc_kH_kx, x\rangle \\
&= -\langle b, x\rangle - c^2c_KH_k \\
&= -\langle b, x\rangle - c_KH_k.
\end{aligned}$$

**Proposição 4.13.** $H_{k+1}\langle AG, x\rangle = c_kH_{k+1}^2 + cc_kH_k^2 - L_kH_k + cH_k\langle Ax, x\rangle = c_kH_{k+1}^2 - H_{k+1}\langle b, G\rangle = H_{k+1}^2\langle G, Ax\rangle$.

*Demonstração.* Temos que $H_{k+1}\langle AG, x\rangle = \langle H_{k+1}AG, x\rangle$, usando 4.8, temos que

$$\begin{aligned}
H_{k+1}\langle AG, x\rangle &= \langle (cc_kH_{k+1}^2 + c_kH_k^2 - cL_kH_k)x + cH_kAx, x\rangle \\
&= c_kH_{k+1}^2 + cc_kH_k^2 - L_kH_k + cH_k\langle Ax, x\rangle \\
&\overset{4.12,4.10}{=} c_kH_{k+1}^2 + cc_kH_k^2 - H_{k+1}\langle b, G\rangle + cH_k\langle b, x\rangle + cH_k(-\langle b, x\rangle - c_kH_k) \\
&= c_kH_{k+1}^2 - H_{k+1}\langle b, G\rangle \\
&\overset{4.3}{=} H_{k+1}(c_kH_{k+1} - \langle -Ax + c_kH_{k+1}G - cc_kH_kx, G\rangle) \\
&= H_{k+1}(c_kH_{k+1} + \langle Ax, G\rangle - c_kH_{k+1}) \\
&= H_{k+1}\langle G, Ax\rangle.
\end{aligned}$$

□

Portanto nos pontos onde $H_{k+1} \neq 0$, 4.5 e 4.6 implicam 4.7.

Para mostrar o teorema principal, precisaremos de um forte resultado que será dado no lema seguinte.

**Lema 4.14.** *Seja $x : M^n \to M_c^{n+1} \subset \mathbb{R}_q^{n+2}$ uma hipersuperfície orientável satisfazendo a condição $L_k x = Ax + b$ para alguma matriz constante auto-adjunta $A \in \mathbb{R}^{(n+2)\times(n+2)}$ e algum vetor constante $b \in \mathbb{R}^{n+2}$. Então $H_k$ é constante se, e somente se, $H_{k+1}$ é constante.*

*Demonstração.* Assuma que $H_k$ seja constante e considere o conjunto aberto

$$\mathcal{U} = \{p \in M : \nabla H_{k+1}^2(p) \neq 0\}.$$

Nosso objetivo é mostrar que $\mathcal{U}$ é vazio. Suponha que $\mathcal{U}$ não seja vazio. Como $H_k$ é constante, então $\nabla H_k = 0$. Logo por 4.9 temos que

$$\tfrac{2}{H_{k+1}}(SP_{k+1})(\nabla H_{k+1}) + (k+2)\tbinom{n}{k+1}\nabla H_{k+1} = 0 \qquad \text{em} \qquad \mathcal{U}.$$

Equivalentemente

$$(SP_{k+1})(\nabla H_{k+1}) = -\frac{k+2}{2}\tbinom{n}{k+1} H_{k+1}\nabla H_{k+1}. \tag{4.11}$$

Se $k = n-1$, 4.11 reduz-se a

$$(SP_{n-1})(\nabla H_n) = -\frac{n+1}{2} H_n \nabla H_n, \tag{4.12}$$

mas também sabemos que $P_n = 0$ e $P_n = s_n I - SP_{n-1} = H_n I - SP_{n-1}$, logo

$$SP_{n-1} = H_n I$$

o que implica

$$(SP_{n-1})(\nabla H_n) = H_n(\nabla H_n). \tag{4.13}$$

De 4.12 e 4.13 temos que

$$H_n(\nabla H_n) = -\tfrac{n+1}{2} H_n(\nabla H_n)$$

o que implica

$$H_n \nabla H_n = 0$$

logo $H_n$ é constante em $\mathcal{U}$, que é uma contradição.

Suponha que $1 \leq k \leq n-2$ (e $n \geq 3$ necessariamente). Considere $\{E_1, ..., E_n\}$ um referencial ortonormal local tal que $SE_i = \kappa_i E_i$ para cada $i = 1, ..., n$. Portanto

$$P_{k+1}E_i = \mu_{i,k+1}E_i$$

com

$$\mu_{i,k+1} = \sum_{j=0}^{k+1}(-1)^j \binom{n}{k+1-j} H_{k+1-j}\kappa_i^j = \sum_{i_1<...<i_k, i_j\neq i} \kappa_{i_1}...\kappa_{i_{k+1}}. \tag{4.14}$$

**Afirmação 4.15.** *Para $k \leq n-2$ 4.11 é equivalente a*

$$P_{k+1}(\nabla H_{k+1}) = \frac{k+4}{2}\binom{n}{k+1}H_{k+1}\nabla H_{k+1} \quad em \quad \mathcal{U}. \tag{4.15}$$

De fato, $(SP_{k+1})(\nabla H_{k+1}) = -\frac{k+2}{2}\binom{n}{k+1}H_{k+1}\nabla H_{k+1}$

$$\Leftrightarrow \quad \binom{n}{k+1}H_{k+1}\nabla H_{k+1} - (SP_k)(\nabla H_{k+1})$$

$$= \quad \binom{n}{k+1}H_{k+1}\nabla H_{k+1} + \tfrac{k+2}{2}\binom{n}{k+1}H_{k+1}\nabla H_{k+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad P_{k+1}(\nabla H_{k+1}) = \tfrac{k+4}{2}\binom{n}{k+1}H_{k+1}\nabla H_{k+1}.$$

**Afirmação 4.16.** *4.15 é equivalente a*

$$\langle \nabla H_{k+1}, E_i\rangle(\mu_{i,k+1} - \tfrac{k+4}{2})\binom{n}{k+1}H_{k+1}) = 0 \qquad em\, \mathcal{U} \quad \forall i = 1,...,n.$$

De fato, escreva $\nabla H_{k+1} = \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla H_{k+1}, E_i\rangle E_i$, então 4.15

$$\Leftrightarrow \quad P_{k+1}(\sum_{i=1}^{n}\langle \nabla H_{k+1}, E_i\rangle E_i) = \frac{k+4}{2}\binom{n}{k+1}H_{k+1}(\sum_{i=1}^{n}\langle \nabla H_{k+1}, E_i\rangle E_i)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla H_{k+1}, E_i\rangle P_{k+1}E_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{k+4}{2}\binom{n}{k+1}H_{k+1}\langle \nabla H_{k+1}, E_i\rangle E_i$$

$$\Leftrightarrow \quad \langle \nabla H_{k+1}, E_i\rangle \mu_{i,k+1} = \tfrac{k+4}{2}\binom{n}{k+1}H_{k+1}\langle \nabla H_{k+1}, E_i\rangle$$

$$\Leftrightarrow \quad \langle \nabla H_{k+1}, E_i\rangle(\mu_{i,k+1} - \tfrac{k+4}{2})\binom{n}{k+1}H_{k+1}) = 0.$$

Portanto, para cada $i$ tal que $\langle \nabla H_{k+1}, E_i\rangle \neq 0$ em $\mathcal{U}$, temos que

$$\mu_{i,k+1} = \frac{k+4}{2}\binom{n}{k+1}H_{k+1}. \tag{4.16}$$

Isto implica que $\langle \nabla H_{k+1}, E_i\rangle = 0$ necessariamente para algum $i$. Se não, teríamos para todo $i = 1,...,n$ que

$$(n-k-1)\binom{n}{k+1}H_{k+1} = tr(P_{k+1}) = \sum_{i=1}^{n}\mu_{i,k+1} \overset{4.16}{=} \frac{n(k+4)}{2}\binom{n}{k+1}H_{k+1}$$

como $(n-k-1) \neq \frac{n(k+4)}{2}$, temos que $H_{k+1} = 0$ em $\mathcal{U}$, que é uma contradição.

Portanto, rearrumando o referencial ortonormal local se necessário, podemos assumir que para $1 \leq m < n$, temos $\langle \nabla H_{k+1}, E_i\rangle \neq 0$ para $i = 1,...,m$, $\langle \nabla H_{k+1}, E_i\rangle = 0$

para $i = m+1, ..., n$ e $\kappa_1 < ... < \kappa_m$. Em particular, $\nabla H_{k+1}$ é uma direção principal de $S$ se, e somente se $m = 1$. De 4.16 sabemos que

$$\mu_{1,k+1} = ... = \mu_{m,k+1} = \tfrac{k+4}{2}\tbinom{n}{k+1}H_{k+1} \neq 0 \quad \text{em} \quad \mathcal{U}.$$

Por 4.14 temos que $\kappa_1 < ... < \kappa_m$ são raízes distintas da seguinte equação polinomial de grau $k+1$

$$Q(t) = \tfrac{k+4}{2}\tbinom{n}{k+1}H_{k+1}$$

onde $Q(t)$ é o polinômio $Q(t) = \sum_{j=0}^{k+1}(-1)^j\tbinom{n}{k+1-j}H_{k+1-j}t^j$. Em particular $m \leq k+1$.

Por outtro lado, cada $\kappa_i$ é também raiz do polinômio característico de $S$ que pode ser escrito como

$$Q_S(t) = (-1)^{k+1}t^{n-k-1}Q(t) + \sum_{j=k+2}^{n}(-1)^j\tbinom{n}{j}H_jt^{n-j}$$

pois,

$$\begin{aligned} Q_S(t) &= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\tbinom{n}{j}H_jt^{n-j} \\ &= \sum_{j=0}^{k+1}(-1)^j\tbinom{n}{j}H_jt^{n-j} + \sum_{j=k+2}^{n}(-1)^j\tbinom{n}{j}H_jt^{n-j} \\ &= (-1)^{k+1}t^{n-k-1}Q(t) + \sum_{j=k+2}^{n}(-1)^j\tbinom{n}{j}H_jt^{n-j} \end{aligned}$$

Portanto, $\kappa_1 < ... < \kappa_m$ também são raízes reais da seguinte equação polinomial de grau $n-k-1$

$$(-1)^{k+1}\tfrac{k+4}{2}\tbinom{n}{k+1}H_{k+1}t^{n-k-1} + \sum_{j=k+2}^{n}(-1)^j\tbinom{n}{j}H_jt^{n-j} = 0$$

em particular, $m \leq n-k-1$.

Por indução em $m$, é fácil ver que

$$\mu_{1,k+1} = ... = \mu_{m,k+1} = \sum_{m<i_1<...<i_{k+1}}\kappa_{i_1}...\kappa_{i_{k+1}}$$

Como $H_k$ é constante, então 4.6 reduz-se a

$$AX = -c_kH_{k+1}SX - cc_kH_kX + c_k\langle\nabla H_{k+1}, X\rangle G$$

o que implica que para todo $m+1 \leq i \leq n$, temos

$$\begin{aligned} AE_i &= -c_k H_{k+1} SE_i - cc_k H_k E_i + c_k \langle \nabla H_{k+1}, E_i \rangle G \\ &= -c_k H_{k+1} \kappa_i E_i - cc_k H_k E_i \\ &= -c_k (H_{k+1}\kappa_i - cH_k) E_i \end{aligned}$$

Portanto todo $-c_k(H_{k+1}\kappa_i - cH_k)$ com $i = m+1, ..., n$ é um autovalor constante $\alpha_i$ da matriz $A$. Então

$$\begin{aligned} \tfrac{k+4}{2}\tbinom{n}{k+1} H_{k+1} &= \sum_{m<i_1<...<i_{k+1}} \kappa_{i_1}...\kappa_{i_{k+1}} \\ &= \tfrac{(-1)^{k+2}}{c_k^{k+1} H_{k+1}^{k+1}} \sum_{m<i_1<...<i_{k+1}} (\alpha_{i_1} - cc_k H_k)...(\alpha_{i_{k+1}} - cc_k H_k) \end{aligned}$$

em $\mathcal{U}$. Isto implica que $H_{k+1}$ é constante, que é uma contradição com a definição de $\mathcal{U}$.

Para mostrar a recíproca, assuma que $H_{k+1}$ que é constante e considere o conjunto aberto

$$\mathcal{V} = \{p \in M : \nabla H_k^2(p) \neq 0\}.$$

Nosso objetivo é mostrar que $\mathcal{V}$ é vazio. Primeiro considere o caso em que $H_{k+1} = 0$. Suponha que $\mathcal{V}$ é não vazio.

**Afirmação 4.17.** *4.9 reduz-se a*

$$-2cP_k(\nabla H_k) - cc_k H_k \nabla H_k - -cH_k \langle b, G\rangle G = 0.$$

De fato, como $H_{k+1} = 0$ e $\nabla H_{k+1} = 0$, 4.9 reduz-se a

$$\begin{aligned} 0 &= -2cP_k(\nabla H_k) - cH_k b^T + cH_K \langle b, G\rangle G - H_k \langle b, x\rangle x - cL_k H_k x \\ &\overset{4.8,4.12}{=} -2cP_k(\nabla H_k) - cH_k(c_k \nabla H_k) + cH_K \langle b, G\rangle G - H_k \langle b, x\rangle x \\ &- c(H_{k+1}\langle b, G\rangle - cH_k \langle b, x\rangle) x \\ &= -2cP_k(\nabla H_k) - cc_k H_k \nabla H_k + cH_K \langle b, G\rangle G - H_k \langle b, x\rangle x + H_k \langle b, x\rangle x \\ &= -2cP_k(\nabla H_k) - cc_k H_k \nabla H_k + cH_K \langle b, G\rangle G. \end{aligned}$$

Portanto $\langle b, G\rangle = 0$ em $\mathcal{V}$.

**Afirmação 4.18.** *$\langle AG, x\rangle = \langle G, Ax\rangle = 0$.*

De fato,

$$\langle AG, x\rangle \overset{4.7}{=} \langle G, Ax\rangle \overset{4.3}{=} \langle G, -b + c_k H_{k+1} G - cc_k H_k x\rangle = 0.$$

**Afirmação 4.19.** *$\langle AG, X\rangle = \langle G, AX\rangle = 0$, $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$.*

De fato,

$$\begin{aligned}
\langle AG, X\rangle &\overset{4.6}{=} \langle G, AX\rangle\\
&\overset{4.6}{=} \langle G, -c_kH_{k+1}SX - cc_kH_kX + c_k\langle\nabla H_{k+1}, X\rangle G - cc_k\langle\nabla H_k, X\rangle x\rangle\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Como a imersão tem codimensão um, logo $AG = \lambda G$ o que implica

$$\langle AG, G\rangle = \langle\lambda G, G\rangle = \lambda.$$

Portanto $AG = \langle AG, G\rangle G$, isto é, G é autovetor de $A$ com autovalor correspondente $\lambda = \langle AG, G\rangle$. Como $H_{k+1} = 0$, então

$$AX \overset{4.6}{=} -cc_kH_kX - cc_k\langle\nabla H_k, X\rangle x,$$

$$AG = \lambda G$$

e

$$\begin{aligned}
Ax &= -b^T - \langle b, G\rangle G - cc_kH_kx - c\langle b, x\rangle x\\
&\overset{4.8}{=} -c_k\nabla H_k - c(c_kH_k + \langle b, x\rangle).
\end{aligned}$$

Logo

$$Ax = -c_k\nabla H_k - c(2c_kH_k + \alpha)x$$

onde $\alpha = \langle b, x\rangle - c_kH_k$. Note que $\alpha, \lambda$ são constantes em $\mathcal{V}$. Então,

$$\begin{aligned}
tr(A) &= \sum_{i=1}^{n}\langle AE_i, E_i\rangle + \langle AG, G\rangle + \langle Ax, x\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle -cc_kH_kE_i - cc_k\langle\nabla H_k, X\rangle x, E_i\rangle + \langle\lambda G, G\rangle\\
&+ \langle -c_k\nabla H_k - c(2c_kH_k + \alpha)x, x\rangle\\
&= -ncc_kH_k + \lambda - c(2c_kH_k + \alpha)\\
&= constante
\end{aligned}$$

que implica que $H_k$ é constante em $\mathcal{V}$, que é uma contradição.

Se $H_{k+1}$ for uma constante diferente de zero e assumindo que $\mathcal{V}$ é não vazio, então 4.9 reduz-se a

$$2P_k(\nabla H_k) + c_kH_k\nabla H_k = 0 \qquad \text{em} \qquad \mathcal{V}.$$

Equivalentemente,

$$P_k(\nabla H_k) = -\frac{c_k}{2} H_k \nabla H_k \quad em \quad \mathcal{V}. \tag{4.17}$$

Considere $\{E_1, ..., E_n\}$ um referencial ortonormal local de direções principais de $S$ tal que $SE_i = \kappa_i E_i$, $\forall i = 1, ..., n$ e então

$$P_k E_i = \mu_{i,k} E_i$$

com

$$\mu_{i,k} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{n}{k-j} H_{k-j} \kappa_i^j = \sum_{i_1 < ... < i_k, i_j \neq i} \kappa_{i_1} ... \kappa_{i_k}. \tag{4.18}$$

**Afirmação 4.20.** *4.17 é equivalente a*

$$\langle \nabla H_k, E_i \rangle (\mu_{i,k} + \tfrac{c_k}{2} H_k) \quad em \quad \mathcal{V}.$$

De fato, escrevendo $\nabla H_k = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla H_k, E_i \rangle E_i$, temos que $P_k(\nabla H_k) = -\frac{c_k}{2} H_k \nabla H_k$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad P_k\Big(\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla H_k, E_i \rangle E_i\Big) = -\frac{c_k}{2} H_k \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla H_k, E_i \rangle E_i \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla H_k, E_i \rangle P_k E_i = -\frac{c_k}{2} H_k \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla H_k, E_i \rangle E_i \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla H_k, E_i \rangle \mu_{i,k} E_i = -\frac{c_k}{2} H_k \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla H_k, E_i \rangle E_i \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \mu_{i,k} \langle \nabla H_k, E_i \rangle E_i = \sum_{i=1}^{n} -\frac{c_k}{2} H_k \langle \nabla H_k, E_i \rangle E_i \\
&\Leftrightarrow \quad \mu_{i,k} \langle \nabla H_k, E_i \rangle = -\tfrac{c_k}{2} H_k \langle \nabla H_k, E_i \rangle \\
&\Leftrightarrow \quad \langle \nabla H_k, E_i \rangle (\mu_{i,k} + \tfrac{c_k}{2} H_k) = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, para todo $i$ tal que $\langle \nabla H_k, E_i \rangle \neq 0$ em $\mathcal{V}$ temos

$$\mu_{i,k} = -\frac{c_k}{2} H_k. \tag{4.19}$$

Isto implica que $\langle \nabla H_k, E_i \rangle = 0$ necessariamente para algum $i$. Se não

$$c_k H_k = tr(P_k) = \sum_{i=1}^{n} \mu_{i,k} \overset{4.19}{=} -\frac{n c_k}{2} H_k$$

então teríamos $H_k = 0$ em $\mathcal{V}$, o que é uma contradição.

Portanto, reenumerando o referencial ortonormal se necessário, podemos assumir que para $1 \leq m < n$, temos $\langle \nabla H_{k+1}, E_i \rangle \neq 0$ para $i = 1, ..., m$, $\langle \nabla H_{k+1}, E_i \rangle = 0$ para

$i = m+1, ..., n$ e $\kappa_1 < ... < \kappa_m$. O inteiro $m$ é o número de direções principais linearmente independentes de $\nabla H_k$, e $\nabla H_k$ é uma direção principal se, e somente se $m = 1$.

De 4.19 sabemos que

$$\mu_{1,k} = ... = \mu_{m,k} = -\frac{c_k}{2} H_k \neq 0 \quad em \quad \mathcal{V}. \tag{4.20}$$

Por 4.18 temos que $\kappa_1 < ... < \kappa_m$ são $m$ raízes reais distintas da seguinte equação polinomial de grau $k$

$$Q(t) = -\tfrac{c_k}{2} H_k$$

onde $Q(t)$ é o polinômio $Q(t) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \tbinom{n}{k-j} H_{k-j} t^j$. Em particular $m \leq k$.

Por outro lado, $\kappa_i$ é também raiz do polinômio característico de $S$ que pode ser escrito como

$$Q_S(t) = (-1)^k t^{n-k} Q(t) + \sum_{j=k+1}^{n} (-1)^j \tbinom{n}{j} H_j t^{n-j}$$

pois

$$\begin{aligned} Q_S(t) &= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \tbinom{n}{j} H_j t^{n-j} \\ &= \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \tbinom{n}{j} H_j t^{n-j} + \sum_{j=k+1}^{n} (-1)^j \tbinom{n}{j} H_j t^{n-j} \\ &= (-1)^k t^{n-k} Q(t) + \sum_{j=k+1}^{n} (-1)^j \tbinom{n}{j} H_j t^{n-j}. \end{aligned}$$

Portanto, $\kappa_1 < ... < \kappa_m$ também são raízes da seguinte equação polinomial de grau $n - k$

$$(-1)^{k+1} \tfrac{c_k}{2} H_k t^{n-k} + \sum_{j=k+1}^{n} (-1)^j \tbinom{n}{j} H_j t^{n-j} = 0$$

em particular, $m \leq n - k$.

Por indução em $m$ é fácil provar que

$$\mu_{1,k} = ... = \mu_{m,k} = \sum_{m < i_1 < ... < i_k} \kappa_{i_1} ... \kappa_{i_k}. \tag{4.21}$$

Como $H_{k+1}$ é constante, então 4.6 reduz-se a

$$AX = -c_k H_{k+1} SX - c c_k H_k X - c c_k \langle \nabla H_k, X \rangle x$$

o que implica que para todo $m+1 \leq i \leq n$ temos

$$\begin{aligned} AE_i &= -c_k H_{k+1} SE_i - cc_k H_k E_i - cc_k \langle \nabla H_k, E_i \rangle x \\ &= -c_k H_{k+1} \kappa_i E_i - cc_k H_k E_i \\ &= -c_k (H_{k+1} \kappa_i + cH_k) E_i. \end{aligned}$$

Portanto, todo $-c_k(H_{k+1}\kappa_i + cH_k)$ com $i = m+1, ..., n$ é um auto valor constante $\alpha_i$ da matriz $A$. Então

$$\kappa_i = -\tfrac{\alpha_i + cc_k H_k}{c_k H_{k+1}}, \qquad \forall i = m+1, ..., n$$

De 4.20 e 4.21, temos que

$$\begin{aligned} -\tfrac{c_k}{2} H_k &= \sum_{m < i_1 < ... < i_k} \kappa_{i_1} ... \kappa_{i_k} \\ &= \sum_{m < i_1 < ... < i_k} (-\frac{\alpha_{i_1} + cc_k H_k}{c_k H_{k+1}}) ... (-\frac{\alpha_{i_1} + cc_k H_k}{c_k H_{k+1}}) \\ &= \tfrac{(-1)^k}{c_k^k H_{k+1}^k} \sum_{m < i_1 < ... < i_k} (\alpha_{i_1} + cc_k H_k) ... (\alpha_{i_1} + cc_k H_k) \end{aligned}$$

em $\mathcal{V}$. Mas isto significa que $H_k$ é constante em $\mathcal{V}$, que é uma contradição com a definição de $\mathcal{V}$.

□

**Teorema 4.21.** *Seja $x : M^n \to M_c^{n+1} \subset \mathbb{R}_q^{n+2}$ uma hipersuperfície orientável imersa tanto na esfera euclidiana $\mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ (se $c = 1$) ou no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1} \subset \mathbb{R}_1^{n+2}$ (se $c = -1$), e seja $L_k$ o operador linearizado da $(k+1)$-ésima curvatura média de $M$, para algum $k = 0, 1, 2, ..., n-1$ fixado. Então a imersão satisfaz a condição $L_k x = Ax$ para alguma matriz constante auto-adjunta $A \in \mathbb{R}^{(n+2)\times(n+2)}$ se, e somente se, é uma das seguintes hipersuperfícies:*

**(1)** *uma hipersuperfície com a $(k+1)$-ésima curvatura média zero e a $k$-ésima curvatura média constante;*

**(2)** *uma parte aberta do Toro de Clifford, $\mathbb{S}^m(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^{n-m}(r) \subset \mathbb{S}^{n+1}$, $0 < r < 1$, se $c = 1$;*

**(3)** *uma parte aberta do cilindro hiperbólico, $\mathbb{H}^m(-\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{S}^{n-m}(r) \subset \mathbb{H}^{n+1}$, $r > 0$, se $c = -1$.*

*Demonstração.* No capítulo 3, vimos que cada uma das hipersuperfícies mencionadas no teorema 4.21 satisfaz a condição $L_k x = Ax$ para uma matriz auto-adjunta constante. Reciprocamente,vamos assumir que

$$x : M^n \to M_c^{n+1} \subset \mathbb{R}_q^{n+2}$$

satisfaz a condição $L_k x = Ax$ para alguma matriz auto-adjunta constante $A \in \mathbb{R}^{(n+2)\times(n+2)}$. Como $b = 0$, de 4.8 temos que $\nabla H_k = 0$ em $M$, logo $H_k$ é constante em $M$. Por 4.14 $H_{k+1}$ também é constante em $M$. Se $H_{k+1} = 0$, não há o que provar, pois teremos uma hipersuperfície com $H_{k+1} = 0$ e $H_k = \mathit{constante}$. Seja então $H_{k+1}$ uma constante diferente de zero com $H_k$ também constante. Portanto 4.6 e 4.8 reduzem-se a

$$AX = -c_k H_{k+1} SX - cc_k H_k X \tag{4.22}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ e

$$AG = \alpha G + c_k(cH_{k+1} + \frac{H_k^2}{H_{k+1}})x + c\frac{H_k}{H_{k+1}}Ax \tag{4.23}$$

respectivamente, com

$$\alpha = -(\binom{n}{k+1}nH_1H_{k+1} - (n-k-1)H_{k+2} + cc_kH_k$$

pois,

$$\begin{aligned} AX &= -c_kH_{k+1}SX - cc_kH_kX + c_k\langle\nabla H_{k+1}, X\rangle G - cc_k\langle\nabla H_k, X\rangle x \\ &= -c_kH_{k+1}SX - cc_kH_kX \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} AG &= \alpha G + \tfrac{L_kH_{k+1}}{H_{k+1}}G + c_k(cH_{k+1} + \tfrac{H_k^2}{H_{k+1}})x - c\tfrac{L_kH_k}{H_{k+1}}x + c\tfrac{H_k}{H_{k+1}}Ax \\ &= \alpha G + c_k(cH_{k+1} + \tfrac{H_k^2}{H_{k+1}})x + c\tfrac{H_k}{H_{k+1}}Ax \end{aligned}$$

**Afirmação 4.22.** $\nabla^0_X(AG) = \langle\nabla\alpha, X\rangle G - \alpha SX + c_k(cH_{k+1} + \frac{H_k^2}{H_{k+1}})X + c\frac{H_k}{H_{k+1}}AX$ $= \langle\nabla\alpha, X\rangle G + (\binom{n}{k+1}(nH_1H_{k+1} - (n-k-1)H_{k+2})SX + cc_kH_{k+1}X$.

De fato, tomando a derivada covariante em 4.23 temos

$$\begin{aligned}
\nabla^0_X(AG) &= \nabla^0_X(\alpha G) + c_k(cH_{k+1} + \tfrac{H_k^2}{H_{k+1}})\nabla^0_X x + c\tfrac{H_k}{H_{k+1}}\nabla^0_X(Ax)\\
&= X(\alpha)G + \alpha\nabla^0_X G + c_k(cH_{k+1} + \tfrac{H_k^2}{H_{k+1}})X + c\tfrac{H_k}{H_{k+1}}AX\\
&\overset{2.1}{=} \langle\nabla\alpha, X\rangle G - \alpha SX + c_k(cH_{k+1} + \tfrac{H_k^2}{H_{k+1}})X + c\tfrac{H_k}{H_{k+1}}AX\\
&\overset{4.22}{=} \langle\nabla\alpha, X\rangle G + (\tbinom{n}{k+1}(nH_1H_{k+1} - (n-k-1)H_{k+2}) + cc_kH_k)SX\\
&+ c_k(cH_{k+1} + \tfrac{H_k^2}{H_{k+1}})X + c\tfrac{H_k}{H_{k+1}}(-c_kH_{k+1}SX_c c_kH_kX)\\
&= \langle\nabla\alpha, X\rangle G + \tbinom{n}{k+1}(nH_1H_{k+1} - (n-k-1)H_{k+2})SX\\
&+ cc_kH_{k+1}X.
\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\nabla^0_X(AG) = A(\nabla^0_X G) \overset{2.1}{=} -A(SX) \overset{4.22}{=} c_kH_{k+1}S^2X + cc_kH_kSX. \tag{4.24}$$

Portanto $\nabla^0_X(AG) \in \mathfrak{X}(M)$, logo $\langle\nabla\alpha, X\rangle = 0$, $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ o que implica que $\alpha$ é constante em $M$.

**Afirmação 4.23.** *O operador de forma satisfaz a seguinte equação quadrática*

$$S^2 + \lambda S - cI = 0$$

*onde* $\lambda = \frac{\alpha}{c_kH_{k+1}} + 2c\frac{H_k}{H_{k+1}} =$ *constante.*

Com efeito, de 4.22 e 4.24 temos

$$\begin{aligned}
0 &= c_kH_{k+1}S^2X + (cc_kH_k - \tbinom{n}{k+1}(nH_1H_{k+1} - (n-k-1)H_{k+2}))SX\\
&- cc_kH_{k+1}X\\
&= S^2X + \tfrac{1}{c_kH_{k+1}}(cc_kH_k - \tbinom{n}{k+1}(nH_1H_{k+1} - (n-k-1)H_{k+2}))SX - cX
\end{aligned}$$

isto implica que

$$S^2 + (\tfrac{\alpha}{c_kH_{k+1}} + \tfrac{2cH_k}{H_{k+1}})S - cI = 0$$

Como $S = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & \kappa_2 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \kappa_{n-1} & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & \kappa_n \end{pmatrix}$, então o operador de forma satisfaz a equação

$$\begin{pmatrix} \kappa_1^2+\lambda\kappa_1-c & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_2^2+\lambda\kappa_2-c & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \kappa_{n-1}^2+\lambda\kappa_{n-1}-c & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \kappa_n^2+\lambda\kappa_n-c \end{pmatrix} = 0.$$

Portanto temos que $M$ é totalmente umbílica em $M_c^{n+1}$ (mas não totalmente geodésica, pois $H_{k+1} \neq 0$) ou $M$ é uma hipersuperfície isoparamétrica de $M_c^{n+1}$ com duas curvaturas principais constantes. Por outro lado, as umbílicas não totalmente geodésicas não satisfazem a equação $L_k x = Ax$. Logo ficamos somente com as hipersuperfícies isoparamétricas com duas curvaturas principais constantes. Portanto por Lawson [Law69] e Ryan [Rya69], concluímos que $M$ é uma parte aberta do produto riemaniano. Caso a imersão seja em $\mathbb{S}^{n+1}$, então M é uma parte aberta do Toro de Clifford. Mas se a imersão for em $\mathbb{H}^{n+1}$, então $M$ será uma parte aberta do cilindro hiperbólico.

□

# Referências


[AFL95] Alías, L. J.; Ferrández, A.;Lucas, P. Hypersurfaces in space forms satisfying the condition $\triangle x = Ax + B$, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **347** (1995), 1793 - 1801.

[AGu06] Alías, L. J.;Gürbüz, N. An extension of Takahashi theorem for the linearized operators of the higher order mean curvatures, *Geom. Dedicata*, **121** (2006), 113 - 127.

[AKa10] Alías, L. J.; Kashani, S. M. B. Hypersurfaces in space forms satisfying the condition $L_k x = Ax + b$, *Taiwan. J. of Math.* , **14** (2010), 1957 - 1977.

[BCo97] Barbosa, J. L. M.; Colares, A. G. Stability of hypersurfaces with constant r-mean curvature, *Ann. Global Anal. Geom.*, **15** (1997), 277 - 297.

[PdC08] Carmo, Manfredo P. do. *Geometria Riemanniana*, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2008-4ª edição.

[CPe91] Chen, B. Y.; Petrovic, M. On spectral decomposition of immersions of finite type, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **44** (1991), 117 - 129.

[DPV90] Dillen, F.; Pass, J.; Verstraelen, L. On surfaces of finite type in Euclidean 3-space, *Kodai Math. J.*, **13**(1990), 10 - 21.

[Gar90] Garay, O. J. An extension of Takahashi's theorem, *Geom. Dedicata*, **34**(1990), 105 - 112.

[HVl92] Hasanis, T.; Vlachos, T. Hypersurfaces of $E^{n+1}$ satisfying $\triangle x = Ax+B$, *Austral. Math. Soc. Ser. A*, **53**(1992), 377 - 384.

[Law69] Lawson, H. Local rigidity theorems for minimal hypersurfaces, *Ann. of Math.*, **89(2)** (1969), 187 - 197.

[Rei70] Reilly, R. C. Extrinsic rigidity theorems for compact submanifolds of the sphere, *J. Differential Geometry*, **4** (1970), 487 - 497.

[Rei73] Reilly, R. C. Variational properties of functions of the mean curvatures of hypersurfaces in space forms, *J. Differential Geometry*, **8** (1973), 465 - 477.

[Ros93] Rosenberg, H. Hypersurfaces of constant curvature in space forms, *Bull. Sci. Math*, **17** (1993), 211 - 239.

[Rya69] Ryan, P. J. Homogeneity and some curvature conditions for hypersurfaces, *Tohoku Math. J.*, **21** (1969), 363 - 388.

[Tak66] Takahashi, T. Minimal immersions of Riemannian manifolds, *J. Math. Soc. Japan*, **18**(1966), 380 - 385.