Universidade Federal da Bahia
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Dissertação de Mestrado

A construção do k-radical: Uma generalização do radical de Jacobson

Luciano Dias de Andrade

Salvador-Bahia
Fevereiro de 2009

A construção do k-radical: Uma generalização do radical de Jacobson

Luciano Dias de Andrade

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Thierry Corrêa Petit Lobão.

Salvador-Bahia

Fevereiro de 2009

Andrade, Luciano Dias de.

A construção do k-radical: Uma generalização do radical de Jacobson / Luciano Dias de Andrade. – Salvador, 2009.

39 f.

Orientador: Prof. Dr. Thierry Corrêa Petit Lobão.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2009.

Referências bibliográficas.

1. Álgebra. 2. Anéis associativos. 3. Teoria dos radicais. I. Lobão, Thierry Corrêa Petit. II. Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática. III. Título.

CDU : 512.552

A construção do k-radical: Uma generalização do radical de Jacobson

Luciano Dias de Andrade

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 27 de fevereiro de 2009.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Thierry Corrêa Petit Lobão (Orientador)
UFBA

Prof. Dr. Francisco Cesar Polcino Milies
USP

Prof. Dr. José Fernandes Silva Andrade
UFBA

Dedico este trabalho às duas mulheres de grande importancia em minha vida e que amo muito: minha mãe Marize e minha esposa Fernanda!

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me dado forças para que eu pudesse vencer os obstáculos e alcançar meus objetivos!

Agradeço aos meus pais, Marcos e Marize por, acreditarem em minha capacidade e por me incentivarem nos estudos!

Agradeço a minha esposa Fernanda por se manter ao meu lado, acreditando em mim e não desistindo da nossa união, mesmo quando não pude lhe dar maior atenção!

Agradeço a meu orientador, Professor Thierry, pela paciência e dedicação que teve comigo durante todo o desenvolvimento do trabalho!

Agradeço aos professores José Fernandes e Cesar Polcino, por participarem da banca examinadora e por contribuirem com valorosos comentários para melhoria do trabalho!

Agradeço aos colegas de mestrado pelas trocas de informações e pelos incentivos e apoio durante todo o desenvolvimento do curso!

Resumo

Nosso trabalho tem como objetivo principal o estudo de estruturas particulares em um anel denominadas radicais. Radicais são ideais maximais cujos elementos têm características diferenciadas dos demais elementos do anel. Existem vários tipos de radicais, porém daremos maior atenção ao radical de Jacobson, pois o nosso objetivo com este estudo é obter uma generalização deste radical. Para tanto, introduziremos uma propriedade, à qual chamaremos de k-quase-regularidade, com k sendo um inteiro qualquer. Verificaremos que a k-quase-regularidade é uma propriedade radical e , então, construiremos uma família de novos radicais, os quais serão denominados k-radicais de Jacobson. Ademais, verificaremos duas propriedades importantes destes radicais: a hereditariedade e a possibilidade de decomposição dos anéis quocientes por tais radicais.

Palavras-chave: Anéis Simples; Radicais; Propriedades Radicais; k-Quase-Regularidade; Decomposição de Anéis.

Abstract

The central subject of our work is the study of particular substructures of a ring called radicals. Radicals are maximal ideals whose elements have distinct characteristics from the other elements in the ring. There are several kinds of radicals; however we shall pay special attention to the Jacobson radical; since our goal in this study is to generalize such a radical. In order to do this, we shall introduce a property, that we call k-quasi-regularity, with k and fixed integer. We shall prove that the k-quasi-regularity is a radical property and the set up a family of new radicals, which we call Jacobson k-radicals. Besides we also verify two important properties of such radicals, namely, heredity and the possibility of decomposition of the quotient rings by these radicals.

Keywords: Simple Rings; Radicals; Radicals Properties; k-Quasi-Regularity; Decomposition of the quotient rings.

Sumário

Introdução

No estudo da teoria de anéis, existem importantes estruturas denominadas de radicais. Estes são ideais maximais de um dado anel e têm grande importância no estudo do anel quociente módulo o radical. O radical do anel é também conhecido como a parte "ruim" do anel, pois ele dificulta o seu estudo. Ao retirá-lo, porém, através do anel quociente, podemos efetuar sua decomposição em anéis mais simples, facilitando, desta forma, o estudo do anel. Existem alguns radicais na literatura, tais como: o radical Clássico ou de Wedderburn-Artin; o radical de Jacobson; o radical de Brown-McCoy; o radical de Levitzki, entre outros. Segundo Divinsky [2], podemos determinar o radical de um anel via algumas propriedades, denominadas por ele de propriedades radicais. Portanto, todo radical é um ideal maximal e, como anel, tem uma tal propriedade radical. Por exemplo, o radical Clássico é determinado pela propriedade radical denominada Nil, e o radical de Jacobson é determinado pela propriedade radical denominada quase-regularidade. Esta última propriedade radical é definida via uma operação conhecida como operação círculo, na qual, dados dois elementos x, y quaisquer do anel, temos que: $x \circ y = x + y + xy$. Quando dado um elemento x do anel, existe um elemento y, tal que $x \circ y = 0 = y \circ x$, dizemos que x é quase-regular e que y é seu quase-inverso. Na Física, existem trabalhos que utilizam uma operação semelhante à operação círculo, definida da seguinte forma: dados dois elemento quaisquer x, y, temos $x * y = x + y + (1 - q)xy$. A primeira vez que tive conhecimento desta operação foi com os trabalhos do professor Borges [1], do Instituto de Física da UFBa, relacionados à mecânica estatística não extensiva. Percebendo, então, a relação desta operação com a operação círculo, resolvemos generalizá-la da seguinte forma: dados dois elementos quaisquer de um anel R, $x \circ_k y = x + y + kxy$ com k um inteiro qualquer, e a denominamos de operação k-círculo. Seguindo os resultados desenvolvidos por Divinsky [2], construimos alguns resultados que são originais, tais como: provamos que a operação k-círculo define uma propriedade radical; construimos o radical que denominamos o k-radical de Jacobson; provamos duas características do novo radical, que são a hereditariedade e o teorema de estrutura, isto é, que o anel quociente módulo este radical, pode ser decomposto em uma soma subdireta de ideais, que denominamos k-primitivos. Além disso, fizemos algumas relações com o já conhecido radical de Jacobson e constatamos que são radicais distintos, porém, fazendo $k = 1$, o k-radical volta a ser o radical de Jacobson. McConnell e T. Stokes [5], em seu artigo Generalising Quasiregularity for Rings, afirmaram que existem apenas oito operações definidas a partir das operações do anel, que são binárias e associativas. Uma destas corresponde à operação k-círculo que nós propusemos para generalizar a quase-regularidade.

Capítulo 1

Pré-Requisitos

Neste capítulo, iremos introduzir alguns resultados e definições necessárias para um bom entendimento e compreensão do trabalho proposto.

Definição 1.0.1. Um conjunto não vazio R é dito ser um anel, se estão definidas duas operações, que denotaremos por " + "(adição) e "."(multiplicação), tais que, para todo $a, b, c \in R$, temos:

1. $(a + b) + c = a + (b + c)$;
2. $a + b = b + a$;
3. existe um elemento $0 \in R$ tal que $a + 0 = 0 + a = a$;
4. existe $-a$ tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$;
5. $a(bc) = (ab)c$;
6. $a(b + c) = ab + ac$.

Definição 1.0.2. Um anel R é dito ser comutativo, se satisfaz o seguinte axioma:

$$\forall a, b \in R, \quad \text{então} \quad ab = ba.$$

Definição 1.0.3. Um anel R é dito ser com unidade, se satifaz o seguinte axioma;

$$\forall a \in R \exists 1 \in R, \quad \text{tal que} \quad a.1 = 1.a = a.$$

Definição 1.0.4. Sejam R um anel e I um subconjunto não vazio de R, dizemos que I é um ideal à direita (à esquerda) de R, se:

1. $\forall x, y \in I$ temos que $x + y \in I$;

2. $\forall x \in I$ e $\forall a \in R$ temos que $xa \in I$(ideal à direita);

3. $\forall x \in I$ e $\forall a \in R$ temos $ax \in I$(ideal à esquerda).

Observação 1.0.5. Se I for um ideal à direita, bem como ideal à esquerda de R, então diremos que I é um ideal bilateral de R, ou, simplesmente, que I é um ideal de R.

Definição 1.0.6. Se R não é o anel nulo e todo ideal próprio de R é nulo, então R é um anel simples. Um ideal I de R, distinto de R, será chamado um ideal próprio de R.

Definiremos, agora, algumas operações no conjunto de ideais de um anel R.

Definição 1.0.7. Se $I_1, I_2, I_3, ...$ é uma classe qualquer de ideais de R, não necessariamente finita ou enumerável, então a soma destes ideais, denotada por $\sum I_k$, será o conjunto de todas as somas $i_1 + i_2 + i_3 + ...$, tais que i_k está em I_k e, há somente um número finito destes, que serão não nulos.

Definição 1.0.8. Se I, J são ideais de um anel R, então, o produto destes ideais será dado pelo conjunto de todas as somas finitas, denotada por $IJ = \sum i_m j_m$, tais que i_m está em I e j_m está em J.

Lema 1.0.9. *A soma de um conjunto qualquer de ideais (à esquerda, à direita ou bilateral) de um anel R é ainda um ideal (à esquerda, à direita ou bilateral) do anel R.*

Demonstração. Considere $\{I_k\}_{k \in A}$ com A sendo uma família qualquer de ideais à direita em R, e seja $I = \sum I_k$. Tome $a \in I$, isto é, $a = a_1 + a_2 + ... + a_k$ e $r \in R$. Multiplicando r à direita de a, e como há apenas uma quantidade finita de elementos a_i não nulos, temos:

$$ar = (a_1 + a_2 + ... + a_k)r = (a_1 r + a_2 r + ... + a_k r) \in I, \quad \text{pois} \quad a_k \in I_k \quad \forall k \in A.$$

Portanto, I é um ideal à direita de R. De maneira similar, podemos fazer a prova para ideais à esquerda e ideais bilaterais. $\square$

Definiremos agora, um novo anel a partir do anel R e de seu ideal I, explicitando suas operações.

Definição 1.0.10. Seja I um ideal de um anel R. Para $a, b \in R$, dizemos que a é equivalente a b se, e somente se, $a - b \in I$. Isto define uma relação de equivalência em R, e denotaremos a classe de equivalência de a por

$$a + I = \bar{a} = a + x; x \in I$$

e o conjunto destas classes por R/I.

Também definiremos as operações no conjunto das classes, em termos das operações do anel R, como segue:

1. $(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$
2. $(a + I)(b + I) = ab + I$

Note que é necessário que I seja um ideal para que a multiplicação esteja bem definida. É fácil verificar que estas operações determinam em R/I uma estrutura de anel. Chamaremos o anel assim construído de anel quociente R módulo I.

Definição 1.0.11. Uma aplicação φ, de um anel R em um anel R', denotada por $\varphi : R \longrightarrow R'$, é um morfismo de anéis se, para todo $a, b \in R$,

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b) \quad \text{e}$$

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b),$$

sendo que as operações à esquerda, em cada equação, estão no anel R e, à direita, no anel R'. Se um morfismo de anéis é injetivo, bem como sobrejetivo, isto é, bijetivo, então tornar-se-á um isomorfismo. Se $\varphi : R \longrightarrow R$ é um morfismo, diremos que é um endomorfismo, e um endomorfismo que é isomorfismo deve ser considerado um automorfismo.

Não é difícil verificar que a imagem de um morfismo é um subanel de R' e que o núcleo de φ, representado por $ker(\varphi) = \{x \in R; \varphi(x) = 0\}$, é um ideal de R. Se o núcleo de φ for todo o R, chamaremos φ de morfismo zero.

Teorema 1.0.12. *Se $\varphi : R \longrightarrow R'$ é um morfismo de anéis sobrejetivo e K o seu núcleo, então R/K é isomorfo a R'.*

Demonstração. Defina $\theta : R/K \longrightarrow R'$ por $\theta(a + K) = \varphi(a)$. Pode ser verificado que θ é um morfismo bem definido e que ele é sobrejetivo, pois φ é sobrejetivo. Além do mais, θ é injetivo, pois $\theta(a + K) = \theta(b + K)$ implica que $\varphi(a - b) = 0$, isto é, que $a - b \in K$, logo $a + K = b + K$. Portanto θ é um isomorfismo. □

O teorema que citaremos a seguir será muito importante para desenvolvermos algumas propriedades do radical de um anel.

Teorema 1.0.13. *Se R é um anel e I um ideal de R, existe uma correspondência biunívoca entre os ideais de R/I e os ideais de R que contêm I.*

Demonstração. Se J é um ideal de R contendo I, seja $\bar{J} = \{a+I; a \in J\}$, podemos verificar que $\bar{J}$ é um ideal no anel quociente. No sentido contrário, suponhamos que $\bar{J}$ é um ideal de R/I e seja $\varphi : R \longrightarrow R/I$ a aplicação projeção. Tomemos $J = \{a \in R; \varphi(a) \in \bar{J}\}$. Como φ é morfismo, é fácil ver que J é um ideal. Nós representaremos esta correspondência por $J \longleftrightarrow J/I$. □

Vamos aqui definir e acrescentar alguns resultados sobre soma direta e subdireta de anéis. Para facilitar o entendimento, começaremos definindo soma direta finita e depois faremos sua extensão para uma família qualquer de anéis.

Sejam A e B dois subanéis de R tais que $A + B = R$. Então $\forall r \in R; r = a+b$ com $a \in A$ e $b \in B$; quando esta expressão não é única, conhecer bem os anéis A e B nem sempre nos dará boas informações sobre o anel R como gostaríamos. Se todo r pode ser escrito de forma única como $a + b$, então nosso conhecimento sobre A e B nos levará a conhecer mais completamente o anel R. Para saber se todo $r \in R$ pode ser escrito de forma única como $a+b$, é suficiente assumir que 0 pode ser expresso unicamente como $0 = 0 + 0$, pois, se $r = a_1 + b_1 = a_2 + b_2$ temos que $0 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)$ e se 0 for expresso unicamente como $0 + 0$, então

$$a_1 - a_2 = 0 \Longrightarrow a_1 = a_2$$

$$b_1 - b_2 = 0 \Longrightarrow b_1 = b_2$$

portanto todo r é expresso de forma única como $r = a + b$. Outra maneira de vermos isto é supondo que $A \cap B = \{0\}$. Logo, se $0 = a + b$, então $a = -b$, logo a está tanto em A quanto em B e, portanto, $a = 0 = b$; donde 0 é expresso de forma única. Reciprocamente, se 0 é expresso de forma única como $0 = 0 + 0$, então $A \cap B = \{0\}$, pois se r pertence a A e a B, então $-r$ está em B e $0 = r + (-r)$; logo $r = 0$.

Definição 1.0.14. Quando $R = A+B$ e $A\cap B = \{0\}$, diremos que R é uma soma direta suplementar dos anéis A e B.

De maneira similar, podemos estender este resultado para uma quantidade qualquer finita de subanéis em R, isto é, R é a soma suplementar dos subanéis $A_1, ..., A_m$ se $R = A_1 + ... + A_m$ e $(A_1 + ... + A_{i-1} + A_{i+1} + ... + A_M) \cap A_i = \{0\}$ com $i = 1, ..., m$. Mas somas suplementares ainda não são o que necessitamos para garantir um bom conhecimento sobre o anel R a partir dos A_i. Precisamos que a multiplicação dos A_i obedeçam à seguinte condição: $A_iA_j = A_jA_i = 0$, se $i \neq j$; pois, se isto acontece, então cada A_i é um ideal de R, já que $RA_i = (A_1 + ... + A_m)A_i = A_iA_i \subseteq A_i$. Da mesma forma $A_iR \subseteq A_i$, para todo $i = 1, ..., m$. Reciprocamente, se R é uma soma suplementar dos subanéis $A_1, ..., A_m$ e, se cada A_i é um ideal de R, então A_iA_j e A_jA_i estão contidos em $A_i \cap A_j$ logo é 0 se $i \neq j$.

Definição 1.0.15. Diremos que R é uma soma direta de $A_1, ..., A_m$, se ele é uma soma suplementar e se cada A_i é um ideal de R. Escreveremos,

$$R = A_1 \oplus ... \oplus A_m.$$

Vamos agora generalizar a definição de soma direta, para um conjunto qualquer não necessariamente finito ou contável de anéis A_j. Para facilitar nosso trabalho, iremos utilizar a notação de uma sequência generalizada.

Considere o conjunto S de elementos $(a_j)_{j\in T}$, em que T é um conjunto indexador qualquer, não necessariamente finito ou enumerável, tal que $a_j \in A_j$. Definiremos a adição e a multiplicação em S da seguinte forma:

$$(a_j)_{j\in T} + (b_j)_{j\in T} = (a_j + b_j)_{j\in T}$$

$$(a_j)_{j\in T}(b_j)_{j\in T} = (a_j b_j)_{j\in T}.$$

É fácil verificar que S é um anel e será chamado a soma direta completa dos anéis A_i, isto é, uma soma suplementar de ideais, logo é uma extensão da definição de soma direta finita.

O conjunto de todos os elementos da forma $(0, 0, ..., 0, a_i, 0, ...)$ é um subanel (na verdade um ideal) A_i' que é isomorfo a A_i, e a aplicação

$$\Pi_i : (a_1, a_2, ..., a_i, ...) \longrightarrow (0, 0, ..., 0, a_i, 0, ...)$$

é um morfismo de S em A_i'. Esta soma direta ainda é demasiadamente grande para ser realmente aplicada, exceto, talvez, para obterem-se contra-exemplos. Assim, é nos subanéis desta soma direta que estamos interessados, aos quais daremos maior atenção, por exemplo, o subanel que consiste em todos os elementos de S que tenham um número finito de entradas não nulas, denominada soma direta discreta ou soma direta fraca dos A_i. O morfismo natural da soma direta fraca para os A_i' ainda são morfismos para todo i, e é desta condição que nós precisamos.

Definição 1.0.16. Diremos que um subanel S^* da soma direta S é uma soma subdireta dos anéis A_i, se o morfismo natural de S^* para os A_i',

$$\Pi_i : (a_1, a_2, ..., a_i, ...) \longrightarrow (0, 0..., 0, a_i, 0, ...)$$

é uma aplicação sobrejetiva para todo i.

Este próximo teorema nos auxiliará na prova da decomposição do anel k-semi-simples (com respeito ao k-radical de Jacobson).

Teorema 1.0.17. *Um anel R é isomorfo a uma soma subdireta de anéis A_i se, e somente se, R contém uma classe de ideais B_i tais que, $\bigcap B_i = 0$ e $R/B_i \cong A_i$.*

Demonstração. Dado um subanel B de S, se B não for uma soma subdireta dos A_i', então os morfismos naturais de B para A_j' são, ao menos, aplicações. Se nós chamarmos as imagens desses morfismos de A_i^*, então B é, pelo menos, uma soma subdireta dos anéis A_i^*.

Se B for uma soma subdireta dos A_i, então, para todo i, $A_i \cong B/B_i$, no qual B_i é o núcleo do morfismo natural de B para A_i'. Além disso, $\bigcap B_i = \{0\}$, pois se $r = (a_1, a_2, ...)$ tiver a propriedade que $a_i = 0$ é o elemento 0 de A_i para todo i, então $r = (0, 0, ...)$ é o elemento 0 de B. Portanto, se B é uma soma subdireta dos A_i, então B contém a classe de ideais B_i tal que $\bigcap B_i = \{0\}$ e $B/B_i \cong A_i$.

Reciprocamente, suponhamos que B é um anel arbitrário e que ele contém a classe de ideais B_i, tal que $\bigcap B_i = \{0\}$. Definamos $A_i = B/B_i$ e consideremos a soma direta completa S dos A_i. Para todo elemento $r \in B$ nós podemos associar o elemento $(a_1, a_2, ...)$ de S no qual $a_i = r + B_i$ de A_i que é determinado por r. Então B é isomorfo a um subanel $\bar{B}$ de S e, B/B_i é isomorfo a uma soma subdireta dos anéis A_i. $\square$

Capítulo 2

Propriedades Radicais

Neste capítulo, iremos apresentar o conceito de propriedade radical. Destacaremos a forma como podemos demonstrar que uma certa propriedade é radical. A partir da propriedade radical, iremos determinar o radical de um anel. A principal referência deste capítulo é a obra de N.J. Divinsky [2].

2.1 Propriedades Radicais

Considere R um anel qualquer. Seja p uma propriedade que um dado anel R possa apresentar. Diremos que o anel R é um p-anel, se ele possui a propriedade p. Um ideal I de R é um p-ideal se for um p-anel. Um anel será chamado p-semi-simples se não contém nenhum $p-$ideal não nulo, isto é, se o único p-ideal de R for o ideal nulo (0).

Definição 2.1.1. Uma propriedade p será chamada propriedade radical, se ela satisfaz às três condições abaixo:

(A) A imagem homomórfica de um p-anel é um p-anel.

(B) Todo anel contém um p-ideal P que contém todos os outros p-ideais do anel.

(C) O anel quociente R/P é p-semi-simples.

Note que, pela definição acima, o p-ideal P do anel R é um ideal maximal em relação à propriedade referida.

Vamos, agora, expor uma definição para o radical de um anel a partir da propriedade radical.

Definição 2.1.2. O p-radical de um anel R é o p-ideal maximal P de R.

Vejamos algumas considerações que podemos fazer a partir das definições acima:

Se p é uma propriedade radical, note que o anel nulo (0) é um p-anel. Isto fica claro pela condição (B) (todo anel contém um p-ideal maximal que contém todos os outros p-ideais do anel), assim, (0) é um p-ideal maximal, isto é, ele é um p-anel. A condição (A) não garante que (0) seja um p-anel. Como o ideal nulo (0) é um p-anel, podemos dizer que um anel R é p-semi-simples quando o ideal nulo (0) é seu p-radical.

Definição 2.1.3. Um anel R será chamado de anel radical se seu p-radical for ele próprio.

As três condições (A), (B) e (C) da definição de propriedade radical nos fornecem algumas possibilidades.
A condição (B) garante que a propriedade p de alguma forma pode ser assegurada. Já a condição (C) nos possibilita "retirar"a propriedade p do anel quociente. E a condição (A) serve para preservar as operações e assegurar a propriedade radical.

Nem sempre é tarefa fácil verificar se uma certa propriedade é uma propriedade radical aplicando as condições (A), (B) e (C). Vamos exibir um teorema equivalente às três condições e que pode nos ajudar a determinar uma propriedade radical mais facilmente.

Teorema 2.1.4. *Uma propriedade p é uma propriedade radical se, e somente se:*

(A) *A imagem homomórfica de um p-anel é um p-anel.*

(D) *Se toda imagem homomórfica não nula de um anel R contém um p-ideal não nulo, então R é um p-anel.*

A condição (B) é quase sempre verdade. A soma de todos os p-ideais de um anel é, como já vimos, um ideal, e, claro, contém todos os outros p-ideais do anel. O problema da condição (B) não ser sempre verdade é que esta soma dos p-ideais pode não ter a propriedade p.

Faremos, agora, a prova do teorema acima.

Demonstração. Assumiremos que p é uma propriedade radical e mostraremos que (B) e (C) implicam (D). Seja R um anel que não é um p-anel, então, por (B), R tem um p-radical P, e $P \neq R$. Logo, por (C), R/P é uma imagem não nula por um homomorfismo de R que não tem nehum p-ideal não nulo. Assim, um anel R que não é um p-anel tem uma imagem homomórfica não nula que não tem nehum p-ideal não nulo. Portanto, podemos concluir que se toda imagem não nula de um homomorfismo do anel R contém um p-ideal não nulo, então R é um p-anel, logo a condição (D) é válida.

Para provar a recíproca, vamos assumir que a propriedade p satisfaz às condições (A) e (D). Primeiro observemos que (0) é um p-anel, pela condição (D), pois (0) satisfaz à hipótese de (D), isto é, se ele não fosse um p-anel, existiria uma imagem homomórfica não nula de (0) contendo um p-ideal não nulo; mas toda imagem por homomorfismo do (0) é o próprio (0).

Naturalmente, (A) implica (A). Para garantir (B), seja J a soma de todos os p-ideais de R. Nós devemos mostrar que J é um p-anel. Se $J = (0)$, então ele é um p-anel. Se $J \neq (0)$, seja J/K um anel quociente não nulo do anel J. Como $K \subset J$, existe em R um p-ideal W tal que W não está contido em K. Pelo segundo teorema do isomorfismo, $(W + K)/K \cong W/(W \cap K)$, o lado esquerdo deste isomorfismo é um ideal não nulo de J/K, enquanto o lado direito é a imagem por homomorfismo do p-anel W e, desta forma, é um p-anel, por (A). Logo, temos que $(W + K)/K \subset J/K$ é um p-anel. Portanto, toda imagem não nula por homomorfismo J/K de J contém um p-ideal não nulo, e, por (D), J é um p-ideal, estabelecendo, assim, a condição (B).

Finalmente, vamos verificar (C), isto é, que R/J, sendo J o p-radical de R, é p-semi-simples. Tomemos um anel qualquer R. Sabemos que R tem um p-radical J, pois (B) já está assegurada. Suponhamos que R/J não é p-semi-simples e tomemos M/J como seu p-radical não nulo. Então M é um ideal de R e $M \supseteq J$. Seja M/N um anel quociente não nulo do anel M. Se $N \supseteq J$, então M/N é a imagem por homomorfismo do p-anel M/J e, por (A), M/N é um p-anel, logo M é um p-anel, por (D). Como J é maximal, $M \subseteq J$ portanto, $M/J = 0$, um absurdo.

Se, por outro lado, N não contém J, então $N \cap J \subset J$ e de novo, pelo segundo teorema do isomorfismo, $(N + J)/N \cong J/(N \cap J)$. O lado esquerdo deste isomorfismo é um ideal não nulo de M/N e o lado direito é a imagem por homomorfismo do p-anel J, logo, por (A), ele é um p-anel, assim, $(N + J)/N$ é um p-anel não nulo. Então, toda imagem não nula por homomorfismo de M contém um p-ideal não nulo e, por (D), M é um p-anel. Portanto, M deve estar contido em J, uma contradição. Assim, a condição C é válida, concluindo a prova do teorema. □

Vamos escrever um lema que tornará mais fácil determinar se um anel R é ou não um p-radical, pelo uso de anéis p-semi-simples.

Lema 2.1.5. *Se p é uma propriedade radical, então R é um anel p-radical se, e somente se, R não pode ser aplicado homomorficamente num anel p-semi-simples não nulo.*

Demonstração. Se R é um anel p-radical, então, por (A), toda imagem homomórfica não nula de R é também um anel p-radical, assim ele não pode ser aplicado por um homomorfismo num anel p-semi-simples não nulo. Para a recíproca desta prova, vamos considerar que R não é um anel p-radical; então por (B) e (C) ele pode ser aplicado homomorficamente no anel p-semi-simples não nulo R/P, em que P é o p-radical de R. □

2.2 Partição da classe dos Anéis Simples

Nesta seção, iremos exibir uma relação existente entre partições da classe dos anéis simples e as propriedades radicais. Para isto, vamos considerar a classe de todos os anéis simples.

Seja P é uma propriedade radical, então todo anel simples é P-radical ou P-semi-simples, uma vez que seus ideais são os triviais. Assim, uma propriedade radical P particiona a classe dos anéis simples em duas classes disjuntas:

1. A classe dos anéis simples que são P-semi-simples, denominada a classe superior;
2. A classe dos anéis simples que são P-radical, denominada a classe inferior.

Desta forma, diremos que a propriedade radical P corresponde a esta partição.

Não é óbvio que, se nós tomarmos uma partição dos anéis simples, exista uma propriedade radical que corresponda a esta partição; mas isto é verdade, pelo teorema a seguir:

Teorema 2.2.1. *Se é dada uma partição da classe dos anéis simples, em duas classes disjuntas (com anéis isomorfos em uma mesma classe), então existe pelo menos uma propriedade radical que corresponde a esta partição.*

Aprova deste teorema pode ser encontrada em [2], página 13. Note que, se tomarmos uma partição na classe dos anéis simples, então existe pelo menos uma propriedade radical que corresponde a esta propriedade, pois os únicos ideais destes anéis são o nulo e o próprio anel; portanto obtemos duas classes: os que possuem a propriedade e os que não possuem a propriedade.

2.3 Exemplo de Propriedade Radical

Vamos inicialmente definir as noções de Nil e Nilpotência.

Definição 2.3.1. Um anel R é dito ser nilpotente, se existe um número inteiro positivo n tal que $R^n = 0$.

Definição 2.3.2. Um anel R é dito ser Nil, se todo elemento x em R é nilpotente, isto é, $x^n = 0$ para algum número inteiro positivo n, dependendo do particular elemento x.

Claramente podemos observar que, se o anel R é nilpotente, então ele é nil, porém a recíproca não é verdadeira. Para verificarmos tal afirmação, vejamos o exemplo seguinte: Seja $(Z_p)_{p\in P}$, uma família de ideais (corpos), com P o conjunto de todos os números primos. Tomemos o ideal dado pela soma subdireta dos Z_p definida por $\oplus(Z_p)_{p\in P}$. Sabemos que todo elemento x do ideal $\oplus(Z_p)_{p\in P}$ é uma soma finita de elementos não nulos, logo, se tomarmos um número inteiro e positivo n como sendo um múltiplo dos elemento de P, tais que os Z_p são não nulos em $\oplus(Z_p)_{p\in P}$, teremos que $x^n = 0$, portanto $\oplus(Z_p)_{p\in P}$ é um ideal nil. Mas não existe um inteiro positivo k tal que $\oplus(Z_p)_{p\in P} = 0$, portanto este não é um ideal nilpotente.

Consideremos N a propriedade Nil. Diremos que um anel R é um N-anel, se ele tem a propriedade nil. Mostraremos que a propriedade nil é uma propriedade radical. Para tanto, iremos precisar de alguns resultados que exporemos agora.

Lema 2.3.3. *Se R é um anel nil, então todo subanel de R e toda imagem homomórfica de R também são nil. Se I for um ideal do anel R e, além disso, I e R/I são nil, então R também o é.*

Lema 2.3.4. *A soma de dois ideais nil I_1 e I_2 de um anel R é ainda um ideal nil.*

Demonstração. Sejam I_1 e I_2 dois ideais nil do anel R. Pelo segundo teorema do isomorfismo, temos que $\frac{(I_1+I_2)}{I_2} \cong \frac{I_1}{I_1\cap I_2}$; o lado direito desta igualdade é a imagem por homomorfismo de I_1, logo é um anel nil, e assim, o lado esquerdo também é um anel nil. Pelo lema anterior temos que $I_1 + I_2$ é um anel nil. □

A partir do lema anterior, se fizermos uma simples indução, podemos concluir o seguinte corolário.

Corolário 2.3.5. *A soma de um número finito qualquer de ideais nil de um anel é um ideal nil.*

Lema 2.3.6. *A soma de todos os ideais nil de um anel R é ainda um ideal nil.*

Demonstração. Seja W a soma de todos os ideais nil de R. Se $x \in W$, então x está em uma soma finita de ideais nil de R, logo, pelo corolário do lema anterior, x é nilpotente, portanto W é nil. □

Podemos, com estes resultados, enunciar e demonstrar o teorema seguinte:

Teorema 2.3.7. *A propriedade nil é uma propriedade radical.*

Demonstração. É claro que a propriedade nil N tem a condição (A), por hipótese do lema 2.3.3, na página anterior. A condição (B) está garantida pelo lema 2.3.6, pois W é o ideal nil maximal do anel, isto é, é o N-radical do anel. Para provarmos (C), suponhamos que R/W não é N-semi-simples e consideremos M/W seu N-radical. Então M é um ideal de R e $M \supset W$. Seja M/N um anel quociente qualquer de M; se $N \supset W$, então M/N é uma imagem por homomorfismo do N-anel M/W e, por (A), M/N é também um N-anel. Logo M é um N-anel e, consequentemente, $M \subset W$, uma contradição. Se N não contém W, então $N \cap W \subset W$ é um ideal de W e, pelo segundo teorema do isomorfismo, $(N+W)/N \cong W/(N \cap W)$. O lado esquerdo deste isomorfismo é um ideal não nulo de M/N, e o lado direito é a imagem homomórfica do N-anel W, logo por (A), $W/(N \cap W$ é um N-anel. Por (D), M é um N-anel, então M deve estar em W, uma contradição. Portanto, se fizermos o anel quociente módulo W, R/W, este será N-semi-simples, ou seja, seu $N - radical$ será o anel nulo (0). Pelo exposto acima, as condições (A), (B) e (C) da propriedade radical foram satisfeitas com relação à propriedade nil, logo ela é uma propriedade radical. $\square$

Capítulo 3

Exemplos de Radicais

O estudo da estrutura de anéis nem sempre consiste numa tarefa fácil em consequência de o anel ser muito grande. Assim, seria interessante se pudéssemos fazer a decomposição do anel em outros anéis mais simples, mas, às vezes, o anel não fornece condições para esta decomposição em consequência de ter alguns ideais com certas propriedades que dificultam tal trabalho (exemplo da nilpotência). Na tentativa de amenizarmos essas dificuldades, vamos pensar numa forma de juntar todos os ideais com tais propriedades, mantendo uma certa estrutura (estrutura de ideais), e "retirá-los"do anel através do anel quociente R/I, no qual I é um ideal que contém todos os outros ideais com a tal propriedade, ou seja, o p-radical do anel.

Neste capítulo, iremos apresentar os radicais: clássico (ou de Wedderbur-Artin) e de Jacobson. Destacaremos alguns teoremas, lemas e corolários mais importantes. Isto será feito a partir das propriedades radicais.

3.1 Radical Clássico

Para trabalharmos com o radical clássico, será necessário explicitar algumas propriedades sobre ideais nil e ideais nilpotentes, mostrar ainda, que, sob certas condições, podemos determinar os radicais de um anel com respeito às propriedades nil, e, sob as condições de cadeia, nilpotência.

Teorema 3.1.1. *A soma de um número finito de ideais nilpotentes à esquerda (à direita) em um anel R é um ideal nilpotente à esquerda (à direita) do anel R.*

Corolário 3.1.2. *Seja $\{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$ uma família de ideais à esquerda (à direita) nilpotentes do anel R, então $\sum_{\alpha\in A} I_\alpha$ é um ideal à esquerda (à direita) nil.*

A partir deste corolário, podemos enunciar um teorema que será muito importante para a determinação do radical clássico.

Teorema 3.1.3. *Sejam $\{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$ a família de todos os ideais à direita nilpotentes de um anel R, $\{J_\beta\}_{\beta\in B}$ a família de todos os ideais à esquerda nilpotentes em R, e $\{K_\gamma\}_{\gamma\in C}$ a família de todos os ideais nilpotentes de R. Definamos*

$$W_r = \sum_{\alpha\in A} I_\alpha$$

$$W_l = \sum_{\beta\in B} J_\beta$$

e

$$W = \sum_{\gamma\in C} K_\gamma.$$

Então,

$$W = W_r = W_l.$$

Vamos denotar este ideal que, pelo corolário anterior, é nil, por W e o chamaremos o nil-radical de R. Desenvolveremos algumas propriedades para que este ideal se transforme em um radical nilpotente. Primeiramente, vamos fazer um breve comentário sobre o que significam os conceitos Artiniano e Noetheriano.

Definição 3.1.4. Se uma sequência crescente de ideais de um anel R tornar-se constante depois de um número finito de termos, então R tem a condição de cadeia ascendente. Um anel com esta condição é chamado de Artiniano.

Definição 3.1.5. Se uma sequência decrescente de ideais de um anel R tornar-se constante depois de um número finito de termos, então R tem a condição de cadeia descendente. Um anel com esta condição é chamado de Noetheriano.

Teorema 3.1.6. *Se um anel R é noetheriano à esquerda (à direita), então W é nilpotente.*

Teorema 3.1.7. *Se um anel R é artiniano à esquerda (à direita), então todo ideal à esquerda (à direita) nil é nilpotente.*

Corolário 3.1.8. *Se um anel R é artiniano à esquerda (à direita), então $W = W_l = W_r$ é nilpotente.*

Assim, podemos ver que, sob certas condições, conhecidas como condições de cadeia, a soma W de todos os ideais nilpotentes de um anel R é ainda um ideal nilpotente de R, que será chamado o radical clássico (ou Wedderbur-Artin ou nilpotente) do anel R. Vejamos algumas propriedades deste radical em anéis que o contém.

Teorema 3.1.9. *Seja um anel que tem W como seu radical, então R/W não tem ideais nilpotentes não nulos.*

Corolário 3.1.10. *Se R é arthiniano à esquerda (à direita), então R/W é semi-simples com respeito a nilpotência.*

Aqui nesta seção, vimos a importância das condições de cadeia para determinação do radical.

3.2 O Radical de Jacobson

Nesta seção, iremos trabalhar com anéis que não têm condições de cadeia. Propriedades radicais baseadas na noção de nilpotência parecem não ter resultados satisfatórios, para a decomposição do anel, em anéis sem as condições de cadeia. Porém, com a introdução do conceito de quase-regularidade, proposta por Perlis [7] e posteriormente desenvolvida por Jacobson, foram obtidos bons resultados para o problema da decomposição de anéis sem as condições de cadeia. As demonstrações desta seção estão feitas no capítulo 4 deste trabalho, bastando, para tal, atribuirmos $k = 1$ nos resultados.

Seja R um anel, não necessariamente com condições de cadeia, diremos que um elemento x de R é quase-regular à direita se existe um elemento y em R tal que;

$$x + y + xy = 0.$$

O elemento y é chamado o quase-inverso à direita de x em R. De maneira análoga, podemos definir quase-regularidade à esquerda.

Definição 3.2.1. Um elemento a é quase-regular se existe um elemento $a' \in R$ tal que

$$a + a' + aa' = a + a' + a'a = 0.$$

Podemos observar que a quase-regularidade é uma generalização do conceito de nilpotência. De fato, seja $x \in R$ um elemento qualquer nilpotente, isto é, $x^n = 0$ para algum número inteiro positivo n, e tome

$$y = -x + x^2 - x^3 + ... \pm x^{n-1}$$

então;

$$x + y + xy = x - x + x^2 - x^3 + ... + x^{n-1} - x^2 + x^3 - ... \mp x^{n-1} \pm x^n = 0$$

logo $y \in R$ é o quase-inverso à direita de x. Portanto todo elemento nilpotente é quase-regular à direita. Analogamente podemos desenvolver esta generalização do conceito de elemento nilpotente com elemento quase-regular à esquerda. Porém, existem outros elementos quase-regulares à direita que não são nilpotentes.

Outra forma de vermos a quase-regularidade à direita é considerando um anel com unidade, denotado por 1. Se $x + 1 \in R$ tem um inverso, expresse o seu inverso na forma $1 + y$. Então

$$(1 + x)(1 + y) = 1$$

$$1 + x + y + xy = 1$$

assim,

$$x + y + xy = 0,$$

portanto, x é quase-regular.

Definição 3.2.2. Um anel R é dito quase-regular à direita, se todos os seus elementos são quase-regulares à direita.

Se I é um ideal à direita (à esquerda ou bilateral) de um anel R (R não necessariamente quase-regular à direita) e se todo elemento de I é quase-regular à direita, então diremos que I é um ideal à direita (ou à esquerda ou bilateral) quase-regular à direita.

Note que se I é um ideal à direita quase-regular à direita de um anel R e y um quase-inverso à direita de $x \in I$, temos $x + y + xy = 0$, então

$$y = -x - xy \in I,$$

logo I é, de certa forma, independente do anel que o contém.

Vamos, agora, definir uma nova operação binária em R, denominada operação círculo.

Definição 3.2.3. Seja R um anel qualquer, temos

$$x \circ y = x + y + xy$$

para todo $x, y \in R$.

Para estabelecermos que a quase-regularidade à direita é uma propriedade radical, começaremos, assim como no radical clássico, mostrando que todo anel tem um ideal quase-regular à direita maximal.

Lema 3.2.4. *Se x é quase-regular à direita e se y pertence a um ideal à direita quase-regular à direita I, então $x + y$ é quase-regular à direita.*

Corolário 3.2.5. *A soma de dois ideais à direita quase-regulares à direita é ainda um ideal à direita quase-regular à direita.*

Tomando J como a soma de todos os ideais à direita quase-regulares à direita e fazendo uma simples indução, podemos ver que J é um ideal à direita quase-regular à direita, isto porque todo elemento em J é uma soma finita de elementos não nulos de ideais à direita quase-regulares à direita, portanto cada elemento em J é quase-regular à direita. Observe que, por sua construção, J contém todos os ideais à direita quase-regulares à direita do anel R.

Lema 3.2.6. *O ideal à direita maximal quase-regular à direita J é um ideal de R.*

Note que determinamos um ideal maximal quase-regular à direita em R. Devemos agora mostrar que valem as três condições da definição da propriedade radical.

Teorema 3.2.7. *A quase-regularidade à direita é uma propriedade radical.*

Demonstração. Pelo lema 3.2.6, asseguramos a condição (B). A condição (A) é imediata, pois, se R' é a imagem por homomorfismo de um anel quase-regular à direita R, então todo elemento de R' é quase-regular à direita. De fato, seja

$$\varphi : R \longrightarrow R'$$

um morfismo de anéis e $R' = \varphi(R)$. Para todo $x, y \in R$ tais que, $x \circ y = x + y + xy$ temos

$$\varphi(0) = \varphi(x \circ y) = \varphi(x + y + xy) = \varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(x)\varphi(y) = 0$$

logo, $\varphi(x)$ é quase-regular à direita em R'.

Para finalizarmos, devemos garantir a condição (C), ou seja, que R/J não tem ideais quase-regulares à direita não nulos, isto é, que R/J é semi-simples com respeito à quase-regularidade à direita. Para tal, suponhamos que R/J tem um ideal à direita quase-regular à direita T/J e tomemos $x + J$ um elemento de T/J. Logo, existe uma clase $x' + J$ tal que

$$x + J + x' + J + (x + J)(x' + J) = 0 + J$$

em R/J. Assim, temos que $x + x' + xx'$ está em J pois $(x + x' + xx') + J = 0 + J$, logo, deve existir um elemento $u \in R$ tal que

$$0 = (x + x' + xx') + u + (x + x' + xx')u = x + (x' + u + x'u) + x(x' + u + x'u),$$

mostrando que x é quase-regular à direita como elemento de R. Consequentemente, todo elemento na classe $x + J$ é quase-regular à direita, pelo lema 3.2.4. Logo, todo elemento em T é quase-regular à direita, mas T é um ideal quase-regular à direita de R, e então $T \subseteq J$, pois J é maximal, logo $T/J = 0$ em R/J. Segue que, R/J é semi-simples com respeito à quase-regularidade à direita. $\square$

Todo esse desenvolvimento poderia ter sido feito com respeito à quase-regularidade à esquerda, ou seja, poderíamos definir um ideal maximal quase-regular à esquerda J' do anel R. Mostraremos que $J = J'$.

Começaremos provando que $J' \subseteq J$, ou seja, que todo elemento em J' é também quase-regular à direita. Para isto, precisaremos do seguinte lema.

Lema 3.2.8. *Se um elemento z é ao mesmo tempo quase-regular à direita, $z+w+zw = 0$ e quase-regular à esquerda $z + t + tz = 0$, então $t = w$, $wz = zw$ e w é único.*

Este elemento w é chamado o quase-inverso de z.

Agora retornaremos à prova de que $J' \subseteq J$. Seja x um elemento qualquer em J', então existe um y tal que

$$x + y + yx = 0$$

pois x é quase-regular à esquerda. Além disso,

$$y = -x - yx$$

pertence a J', pois J' é um ideal. Assim, temos que

$$y + r + ry = 0$$

para algum $r \in R$. Mas

$$y + x + yx = 0,$$

logo y é quase-regular à direita e, pelo lema 3.2.8, $r = x$. Portanto, $xy = yx$ e, em particular,

$$x + y + xy = x + y + yx = 0.$$

Consequentemente, todo elemento em J' é quase-regular à direita, ou seja, J' é um ideal quase-regular à direita, então, $J' \subseteq J$, pois J é ideal maximal quase-regular à direita de R.

Analogamente, podemos mostrar que $J \subseteq J'$. E, portanto, $J = J'$.

Com este resultado, podemos fortalecer o teorema 3.2.7:

Teorema 3.2.9. *A quase-regularidade é uma propriedade radical.*

Capítulo 4

O k-Radical de Jacobson

Neste capítulo, iremos construir uma generalização do radical de Jacobson, determinando o k-radical de Jacobson, no qual k é um número inteiro qualquer, mostrando que a k-quase-regularidade é uma propriedade radical. Assim como em toda generalização, quando fizermos $k = 1$, retornaremos ao radical que lhe deu origem, o radical de Jacobson, além de preservar algumas de suas propriedades. Como já vimos, o radical de Jacobson pode ser construído via a prorpiedade radical denominada quase-regularidade, a qual é definida pela operação círculo denotada por $x \circ y = x + y + xy$, introduzida por Perlis [7]. Assim é natural nos perguntarmos se existem outras operações, derivadas das operações usuais do anel, que dêem origem a outras propriedades radicais. Uma vez que a associatividade da operação círculo é essencial na determinação do radical de Jacobson, nossa questão inicial leva-nos a buscar quais operações derivadas definidas no anel são associativas. Esta questão foi investigada por McConnell e T. Stokes [5], e seus resultados serão expostos a seguir. Também faremos uso das definições e resultados anteriores, efetuando algumas modificações.

4.1 Operação k-Círculo

Primeiro, vamos expor um teorema que nos mostrará as possíveis operações binárias associativas derivadas.

Teorema 4.1.1. *As únicas operações binárias associativas derivadas, na classe dos anéis associativos, têm as seguintes formas:*

$$x + y, x, y, 0, kxy, kyx, x + y + kxy, x + y + kyx.$$

Demonstração. Considere $f(x, y)$ uma expressão no anel satisfazendo a condição associativa dada por $f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z))$. Seja n o maior grau que x pode assumir em algum monômio em $f(x, y)$, então o maior grau no lado esquerdo da equação acima é n^2, enquanto que no lado direito é n; logo $n^2 = n$, e assim, $n = 0$ ou $n = 1$. Similarmente, podemos verificar que o maior grau de y, em qualquer termo de $f(x, y)$, é também $n = 0$ ou $n = 1$. Assim, temos que $f(x, y) = ax + by + cxy + dyx$ para alguns inteiros a, b, c, d. Igualando os coeficientes na condição associativa dada, obtemos as seguintes relações:

$$a^2 = a, b^2 = b, ac = bc, cd = 0, ad = bd.$$

Como $cd = 0$, temos que: $d = 0 \quad$ e $\quad c \neq 0$ ou $c = 0 \quad$ e $\quad d \neq 0$ ou $d = c = 0$.

1. Se $d = 0 \quad$ e $\quad c \neq 0$, obtemos; $a = b$, logo $a = 0$ ou $a = 1$, fazendo $a = 0$, temos $b = 0$, portanto $f(x, y) = cxy$, por outro lado, tomando $a \neq 0$, teremos $a = b = 1$, então $f(x, y) = x + y + cxy$.

2. Se $c = 0 \quad$ e $\quad d \neq 0$, obtemos de maneira similar que $f(x, y) = dyx$ e $f(x, y) = x + y + dyx$.

3. Se $d = c = 0$, obtemos os seguintes resultados:

   - se $a = b = 0$, então $f(x, y) = 0$;
   - se $a = 1$ e $b = 0$, então $f(x, y) = x$;
   - se $a = 0$ e $b = 1$, então $f(x, y) = y$;
   - se $a = b = 1$, então $f(x, y) = x + y$.

□

Das opreções acima, as únicas que darão origem a generalizações da quase-regularidade são $f(x, y) = x + y$, $f(x, y) = x + y + cxy$, $f(x, y) = x + y + dyx$, e destas, a primeira nos diz que todos os elementos do anel são quase-regulares, tornando-se uma operação trivial, logo utilizaremos as duas últimas para obter a nossa generalização. Agora que a escolha da operação foi justificada, começaremos a construção dos k-radicais.

Consideremos R um anel qualquer, sem a suposição das condições de cadeia e não necessariamente com unidade. Tomemos $x \in R$.

Definição 4.1.2. Diremos que $x \in R$ é k-quase-regular à direita, para um dado k inteiro, se existir um elemento $y \in R$ tal que

$$x \circ_k y = x + y + kxy = 0.$$

Definição 4.1.3. Diremos que $x \in R$ é k-quase-regular à esquerda, para um dado k inteiro, se existir um elemento $z \in R$ tal que

$$z \circ_k x = z + x + kzx = 0.$$

Definição 4.1.4. Diremos que $a \in R$ é k-quase-regular, para um dado k inteiro, se existir um elemento $a' \in R$ tal que

$$a \circ_k a' = a' \circ_k a = 0.$$

Observação 4.1.5. Observemos que, assim como no radical de Jacobson, se x é nilpotente, ou seja, $x^n = 0$, para algum n inteiro positivo, então x é k-quase-regular à direita. Para tal, basta tomarmos

$$y = -x + kx^2 - k^2x^3 + ... + (-1)^{n-1}k^{n-2}x^{n-1}$$

assim, $x + y + kxy =$

$$x - x + kx^2 - k^2x^3 + ... + (-1)^{n-1}k^{n-2}x^{n-1} + kx(-x + kx^2 - k^2x^3 + ... + (-1)^{n-1}k^{n-2}x^{n-1)} =$$

$$= (-1)^{n-1}k^{n-1}x^n = 0.$$

Porém, existem outros elementos k-quase-regulares à direita que não são nilpotentes. Vamos mostrar um exemplo de um anel radical com relação a quase-regularidade, mas que seja nil semi-simples.

Exemplo 4.1.6. Seja W o conjunto de todos os números racionais da forma $a = \frac{2x}{2y+1}$, no qual x, y são inteiros e o maior divisor comum entre $2x$ e $2y + 1$ é a unidade 1. Este conjunto é um anel comutativo sobre as operações usuais de adição e multiplicação e contém o anel dos inteiros pares, logo existem em W elementos não nilpotentes e portanto W é um anel nil semi-simples. Porém, todos os elemento neste anel são k-quase-regulares, pois, para todo elemento $a = \frac{2x}{2y+1}$ em W, se tomarmos um elemento $b = \frac{2(-x)}{2(kx+y)+1}$ em W e fizermos $a \circ b = a + b + kab$, teremos

$$\frac{2x}{2y+1} + \frac{2(-x)}{2(kx+y)+1} + k\{\frac{2x}{2y+1}\frac{2(-x)}{2(kx+y)+1}\} =$$

$$\frac{2x(2kx + 2y + 1) - 2x(2y + 1) - 4kx^2}{(2y + 1)(2kx + y + 1)} = 0.$$

Portanto, W é um anel radical com respeito a k-quase-regularidade e, com isso, mostramos que nem todo elemento k-quase-regular é nilpotente.

Também podemos encontrar elementos k-quase-regulares em anéis com unidade. De fato, consideremos um anel A com unidade, reprentada por 1. Seja $1 + kx \in R$, com $k \neq 0$ um elemento com inverso à direita, e vamos expressar o seu inverso por $1 + ky$, então

$$(1 + kx)(1 + ky) = 1$$

assim,

$$kx + ky + kxky = 0$$

$$kx + ky + k^2xy = 0$$

$$k(x + y + kxy) = 0,$$

como $k \neq 0$, temos que

$$x + y + kxy = 0,$$

portanto x é k-quase-regular à direita e seu k-quase-inverso é y.

4.2 Uma construção do k-Radical

Vamos agora mostrar que a k-quase-regularidade à direita é uma propriedade radical. O lema e corolário a seguir irão garantir a existência de um ideal à direita maximal k-quase-regular à direta do anel R.

Lema 4.2.1. *Se x é k-quase-regular à direita e se y pertence a um ideal à direita k-quase-regular à direita I, então $x + y$ é k-quase-regular à direita.*

Demonstração. Como x é k-quase-regular à direita temos que

$$x + x' + kxx' = 0 \quad \text{para algum} \quad x'.$$

Consideremos o elemento $y + kyx'$, ele está em I pois $y, ky \in I$ e, sendo I um ideal à direita, $kyx \in I$, logo este elemento é k-quase-regular à direita. Seja z seu k-quase-inverso à direita, temos

$$y + kyx' + z + k(y + kyx')z = 0$$

$$y + z + k(yx' + yz + kyx'z) = 0.$$

Agora, vamos provar que

$$x' + z + kx'z$$

é o k-quase-inverso à direita de $x + y$.

De fato,

$$x + y + x' + z + kx'z + k(x + y)(x' + z + kx'z) =$$

$$x + x' + kxx' + k(x' + x + kxx')z + y + z + k(yx' + yz + kyx'z) = 0.$$

□

Corolário 4.2.2. *A soma de dois ideais à direita k-quase-regulares à direita é ainda um ideal à direita k-quase-regular à direita.*

Demonstração. Já sabemos que a soma de dois ideais à direita é um ideal à direita (ver pré-requisitos lema 1.0.9). Pelo lema acima demonstrado, a prova está concluída, pois qualquer elemento dessa soma é a soma de dois elementos k-quase-regulares à direita e, portanto, esta soma representa um ideal k-quase-regular à direita. $\square$

Corolário 4.2.3. *A soma de todos os ideais à direita k-quase-regulares à direita é ainda um ideal à direita k-quase-regular à direita.*

Demonstração. Considere J_k a soma de todos os ideais à direita k-quase-regulares à direita do anel R. Como já sabemos, qualquer elemento em J_k é uma soma finita de elementos de ideais à direita k-quase-regulares à direita e, claro, cada elemento em J_k é k-quase-regular à direita. Logo J_k é um ideal à direita k-quase-regular à direita e contém qualquer ideal à direita k-quase-regular à direita de R. Portanto, J_k é um ideal à direita k-quase-regular à direita maximal em R. $\square$

Lema 4.2.4. *O ideal à direita k-quase-regular à direita maximal J_k de um anel R é um ideal de R.*

Demonstração. Já sabemos que se x pertence a J_k, para qualquer r em R, temos que xr pertence também a J_k e é k-quase-regular à direita. Assim, para demonstrarmos este lema é suficiente mostrarmos que $rx \in J_K, \quad \forall x \in R$. Começaremos mostrando que rx é k-quase-regular à direita. Como $xr \in J_k$, existe um elemento $w \in R$ tal que

$$xr + w + kxrw = 0.$$

Consideremos, agora, o elemento

$$-rx - krwx.$$

Logo,

$$rx + (-rx - krwx) + k(rx)(-rx - krwx) =$$

$$= -krwx - krxrx - krkxrwx =$$

$$= k(-r)(w + xr + kxrw)x = 0.$$

Portanto rx é k-quase-regular à direita. Tomemos o ideal à direita gerado por rx. Isto é, o conjunto de todos os $rxi + rxs$, em que i é um inteiro e s pertence a R. O elemento $xi + xs$ está em J_k e, como vimos acima, $r(xi + xs)$ é k-quase-regular á direita, logo $\{rxi + rxs\}$ é um ideal à direita k-quase-regular à direita. Além disso, $\{rxi + rxs\} \subseteq J_k$, pois J_k é maximal e, em particular, rx está em J_k. Portanto J_k é um ideal de R. $\square$

Teorema 4.2.5. *A k-quase-regularidade à direita é uma propriedade radical.*

Demonstração. Para provarmos este teorema, devemos mostrar que a k-quase-regularidade à direita satisfaz as condições (A), (B) e (C) da definição de propriedade radical. O lema acima garante a existência de um ideal k-quase-regular à direita maximal J_k contido num anel qualquer R, assegurando desta forma a condição (B). A condição (A) é imediata, pois, se R' é a imagem pelo homomorfismo φ do anel k-quase-regular à direita R, então todo elemento de R' é k-quase-regular à direita, com efeito, consideremos o morfismo

$$\varphi : R \longrightarrow R', \quad \text{tal que} \quad x \longmapsto \varphi(x) = x'.$$

Tomemos $x, y \in R$ tal que, $x \circ_k y = x + y + kxy = 0$ logo,

$$\varphi(0) = \varphi(x \circ_k y) = \varphi(x + y + kxy) =$$

$$= \varphi(x) + \varphi(y) + k\varphi(x)\varphi(y) = x' + y' + kx'y' = 0.$$

Para finalizar, devemos estabelecer a condição (C), isto é, que R/J_k é k-semi-simples com respeito à k-quase-regularidade à direita.

Para tal, suponhamos que R/J_k tenha um ideal à direita k-quase-regular à direita T_k/J_k e tomemos $x + J_k$ como um elemento de T_k/J_k. Então, existe uma classe $x' + J_k$ tal que

$$x + J_k + x' + J_k + k(x + J_k)(x' + J_k) = (0 + J_k) = \overline{0},$$

isto é,

$$(x + x' + kxx') + J_k = 0 + J_k.$$

Logo, $x + x' + kxx' \in J_k$,e assim, existe um elemento $u \in R$ tal que

$$0 = (x + x' + kxx') + u + k(x + x' + kxx')u = x + x' + kxx' + u + kxu + kx'u + k^2xx'u =$$

$$= x + (x' + u + kx'u) + kx(x' + u + kx'u),$$

portanto x é k-quase-regular à direita como elemento de R. Consequentemente todo elemento em $x + J_k$ é k-quase-regular à direita, pelo lema 4.2.1. Assim, todo elemento de T_k é k-quase-regular à direita, logo T_k é um ideal à direita k-quase-regular à direita em R. Mas lembremos que J_k é ideal maximal k-quase-regular à direita de R, sendo assim, $T_k \subseteq J_k$ e portanto $T_k/J_k = 0$ em R/J_k. Como o radical do anel R/J_k é o ideal nulo, temos que R/J_k é k-semi-simples com respeito a k-quase-regularidade à direita. □

Dessa forma, mostramos que as condições (A), (B) e (C) da propriedade radical são válidas para a k-quase-regularidade à direita, logo, ela é uma propriedade radical.

4.3 k-Quase-Regularidade

Podemos facilmente verificar que a construção do k-radical de Jacobson poderia ter sido obtida usando a k-quase-regularidade à esquerda. Portanto, todo anel R tem um ideal maximal J'_k que é k-quase-regular à esquerda. Toda construção seria feita de maneira análoga sem perdas. Vamos mostrar também que, $J_k = J'_k$.

Primeiro iremos enunciar e provar um lema de fundamental importância para o bom desenvolvimento da afirmação feita acima.

Lema 4.3.1. *Se um elemento z é k-quase-regular à direita, $z + w + kzw = 0$, bem como k-quase-regular à esquerda, $z + t + ktz = 0$, então*

$$t = w, \quad kwz = kzw \quad e \quad w \quad \text{é único.}$$

Demonstração. Lembremos que $z + w + kzw = (z \circ_k w)$ e $z + t + ktz = (t \circ_k z)$, assim temos:

$$t = t \circ_k ((z \circ_k w)) = t \circ_k (z + w + kzw) =$$

$$= t + z + w + kzw + ktz + ktw + k^2tzw =$$

$$= (t \circ_k z) \circ_k w = 0 \circ_k w = w.$$

Notemos também, que

$$z + w + kzw = 0 = z + t + ktz,$$

como $t = w$, temos

$$kzw = kwz.$$

Finalmente, suponhamos que existe um z' tal que $z + z' + kzz' = 0$, então $z' = w = t$, logo w é único. O elemento w é chamado o k-quase-inverso de z. □

Agora estamos prontos para mostrar que $J_k = J'_k$ e começaremos verificando que $J'_k \subseteq J_k$. Seja $x \in J'_k$, então existe um elemento y tal que $x + y + kyx = 0$ pois x é k-quase-regular à esquerda. Mas, $y = -x - kyx \in J'_k$, logo $y \in J'_k$ e portanto,

$$y + r + kry = 0 \quad \text{para algum r.}$$

Porém,

$$y + x + kyx = 0,$$

logo y é k-quase-regular à direita e seu k-quase-inverso à direita é x. Logo, pelo lema anterior, temos: $r = x$ e $kxy = kyx$.

Em particular,

$$y + x + kyx = x + y + kxy = 0,$$

consequentemente todo elemento em J'_k é k-quase-regular à direita, assim, J'_k é um ideal k-quase-regular à direita. Como J_k é ideal k-quase-regular à direita maximal, no anel, então $J'_k \subseteq J_k$. De maneira análoga, podemos mostrar que $J_k \subseteq J'_k$ e, portanto , que $J_k = J'_k$. Com este resultado, podemos generalizar o teorema 4.2.5 enunciando o seguinte teorema:

Teorema 4.3.2. *A k-quase-regularidade é uma propriedade radical.*

Assim, J_k é o k-radical determinado pela k-quase-regularidade, em um anel qualquer R. Se tivermos um anel R, podemos encontrar o seu k-radical determinado pela k-quase-regularidade e, se fizermos o anel quociente R/J_k, veremos que este anel é um anel semi-simples com respeito a k-quase-regularidade.

Capítulo 5

Anéis k-semi-simples

Neste capítulo, tentaremos obter uma forma de decompor o anel quociente via o k-radical de Jacobson. Para tal, devemos primeiramente conseguir uma representação diferente deste radical (J_k). Mas, antes, observemos que, se um anel R não é um anel k-radical, então ele contém um ideal (à direita, à esquerda e/ou bilateral) maximal com a propriedade da k-quase-regularidade à direita. Isto é verdade, pois, se R não é um anel k-radical, então R contém um elemento x que não é k-quase-regular à direita, isto é, $\{kxr + r\} \neq R$. Logo, $\{kxr + r; \quad \forall r \in R\}$ é um ideal à direita de R que não contém x, pois, caso contrário, ele seria todo R, já que, se $\{kxr + r\}$ contém tanto $kxr + r$ como x, então, para algum r, temos $kxr + r = x$ dessa forma,

$$x + (-r) + kx(-r) = 0$$

e por consequência, x é k-quase-regular à direita, configurando-se um absurdo. Tomando todos os ideais à direita que contêm $kxr + r$ e que não contêm x, pela ordenação desses ideais via inclusão e usando o lema de Zorn, obtemos um ideal à direita maximal. Portanto, todo anel que não é k-radical, possui ideais à direta maximais com a k-quase-regularidade à direita. De maneira análoga, podemos mostrar que todo anel, que não é k-radical, possui ideais à esquerda maximais e bilaterais maximais, com respeito à k-quase-regularidade à direita.

5.1 Decomposição dos Anéis k-Semi-simples

Para conseguirmos fazer uma nova representação do k-radical, será necessária a seguinte definição:

Definição 5.1.1. Um ideal à direita V é k-regular se existe um elemento $e \in R$ tal que:

$$ker - r \in V, \quad \forall r \in R.$$

Um tal elemento e é dito a k-unidade à esquerda de V.

Agora já temos condições de escrever e provar as formas equivalentes para o k-radical de Jacobson.

Lema 5.1.2. *O k-radical de Jacobson J_k de qualquer anel R é igual a:*

1. $\alpha=\{$ *interseção de todos os ideais à direita maximais k-regulares* $\}$,

2. $\beta = \{$ *interseção de todos os ideais à esquerda maximais k-regulares* $\}$,

3. $\gamma=\{x: \quad kxr \quad$ *é k-quase-regular à direita* $\quad \forall r \in R\}$,

4. $\delta=\{x: \quad krx \quad$ *é k-quase-regular à esquerda* $\quad \forall r \in R\}$.

Demonstração. Se $x \in J_k$, então $\forall r \in R \quad kxr \in J_k$, pois J_k é um ideal, logo kxr é k-quase-regular à direita, assim, $J_k \subseteq \gamma$.

Tomemos agora um elemento $x \in \alpha$, x está em todo ideal à direita maximal k-regular de R, logo, ou x é k-quase-regular á direita ou não. Suponhamos que x não seja k-quase-regular à direita, então $\{kxr + r\} \neq R$. Seja M um ideal à direita maximal contendo $kxr + r$, mas não contendo x. Notemos que M é k-regular, pois

$$\forall r \in R \quad - kxr - r = kx(-r) + (-r) \in M$$

$$\text{e} \quad k(-x)r - r = -kxr - r,$$

portanto, M é k-regular, um absurdo, pois, sendo M k-regular, $x \in M$. Consequentemente, todo $x \in \alpha$ é k-quase-regular à direita e, sendo α um ideal à direita, ele é um ideal à direita k-quase regular à direita, logo $\alpha \subseteq J_k$.

Agora, vamos tomar x um elemento qualquer de γ, logo kxr é k-quase-regular à direita para todo $r \in R$. Assim, ou $x \in \alpha$ ou não. Supondo a segunda hipótese, existe um ideal à direita maximal k-regular M tal que $x \notin M$. Como M é maximal, o ideal à direita maximal gerado por M e x é todo R, logo, $R = \{m + x(r + i)\}$, no qual $m \in M$, $r \in R$ e i é um inteiro. Como M é k-regular existe e, a unidade à esquerda de M, tal que

$$\forall r \in R \quad ker - r \in M$$

assim, existe $m_0 \in M, \quad r_0 \in R \quad \text{e} \quad i_0 \in Z$ tais que:

$$-e = m_0 + x(r_0 + i_o).$$

Multiplicando por e à direita temos,

$$-e^2 = m_0e + x(r_0 + i_0)e \quad (1).$$

Como $x \in \gamma$, então kxr é k-quase-regular à direita $\forall r \in R$. Logo, $kx(r_0 + i_0)e$ é k-quase-regular à direita portanto, existe z tal que

$$kx(r_0 + i_0)e + z + k^2x(r_0 + i_0)ez = 0 \quad (2)$$

tomando a (1) e, multiplicando a esquerda por k^2 e à direita por z temos:

$$-k^2e^2z = k^2m_0ez + k^2x(r_0 + i_0)ez \quad (3).$$

Substituindo a equação (2) em (3) obtemos

$$k^2m_0ez - kx(r_0 + i_0)e - z + k^2e^2z = 0 \quad (4).$$

Mas $\forall t \in R \quad ket - t \in M$, logo, $kee - e \in M$ e assim, $keez - ez \in M$ pois M é ideal à direita. É verdade também que $kez - z \in M$ e, $k^2e^2z - kez \in M$ e somando estas duas últimas expressões, concluimos que, $k^2e^2z - z \in M$.

Como $m_0 \in M$ e M é um ideal à direita, temos que $k^2m_0ez \in M$, e, da equação (4), segue que $kx(r_0 + i_0)e \in M$. Multiplicando a equação (1) por k à esquerda temos

$$-ke^2 = km_0e + kx(r_0 + i_0)e.$$

Sendo $km_0e \in M$ e $kx(r_0 + i_0)e \in M$, então $-ke^2 \in M$. Como já havíamos provado que $ke^2 - e \in M$, podemos concluir que $e \in M$ e portanto, $ker \in M \quad \forall r \in R$. Mas $ker - r \in M \quad \forall r$, logo $r \in M$, desta forma, $M = R$, impossível, pois $x \notin M$. Então $x \in \alpha$, ou seja, $\gamma \subseteq \alpha$.

Assim, mostramos que

$$\alpha \subseteq J_k \subseteq \gamma \subseteq \alpha$$

e portanto, são todos iguais. A prova para a esquerda é análoga. □

Definição 5.1.3. Seja M um ideal à direita de um anel R, então

$$(M : R) = \{r \in R; \quad Rr \subseteq M\}.$$

É facil verificar que este conjunto é um ideal de R. A partir da definição acima, iremos definir um outro conjunto que também será um ideal e que nos ajudará na prova dos teoremas posteriores.

Definição 5.1.4. Seja M um ideal à direita, então

$$(M : kR) = \{r \in R; \quad kRr \subseteq M\}.$$

Notemos que o conjunto da definição acima, $(M : kR)$, é também um ideal de R. De fato,

1. $\forall a, b \in (M : kR) \Longrightarrow a - b \in (M : kR)$.

   Como $a, b \in (M : kR)$, então $kRa \subseteq M$ e $kRb \subseteq M$, isto é, $kra \in M \quad$ e $\quad krb \in M \quad \forall r \in R$. Logo

$$kr(a-b) = kra - krb \in M \quad \forall r \in R,$$

   ou seja,

$$kR(a-b) \subseteq M \Longrightarrow (a-b) \in (M : kR).$$

2. Se $a \in (M : kR) \Longrightarrow as, sa \in (M : kR) \quad \forall s \in R$.

   (a) Vamos mostrar que $sa \in (M : kR) \quad \forall s \in R$.

   Sejam $rs \in R$ temos que $krs \in R$, e que $kr(sa) = k(rs)a \in M$. Logo, $sa \in (M : kR) \quad \forall s \in R$.

   (b) Mostraremos agora, que $as \in (M : kR) \quad \forall s \in R$.

   Como $a \in (M : kR)$, então $kra \in M \quad \forall r \in R$. Mas, M é ideal à direita, logo, $k(ra)s \in M, \quad \forall s \in R$. Assim, $kr(as) = k(ra)s \in M$, e portanto $as \in (M : kR) \quad \forall s \in R$.

Lema 5.1.5. *Se M é ideal à direita k-regular (não necessariamente maximal), então $(M : kR)$ é o maior ideal de R contido em M.*

Demonstração. Seja e a unidade à esquerda de M, isto é, $ker - r \in M \quad \forall r \in R$. Se $x \in (M : kR)$, então $kRx \subseteq M$ logo, $kex \in M$ e como $kex - x \in M$ temos que $x \in M$. Portanto, $(M : kR) \subseteq M$.

Além disso, seja Q um ideal qualquer de R, tal que $Q \subseteq M$, então $RQ \subseteq kRQ \subseteq M$, logo $Q \subseteq (M : kR)$, ou seja, $(M : kR)$ é o maior ideal de R contido em M. $\square$

Agora, com os resultados que iremos expor, mostraremos que J_k é a interseção de um certo conjunto de ideais com propriedades específicas, o que tornará possível a decomposição do anel quociente módulo o k-radical de Jacobson, J_k.

Definição 5.1.6. Um anel R é k-primitivo à direita, se R contém um ideal à direita maximal M tal que $(M : kR) = \{0\}$.

Definição 5.1.7. Um ideal P de R é um ideal k-primitivo à direita, se R/P é k-primitivo à direita.

Lema 5.1.8. *Se M é um ideal à direita k-regular maximal de R, então $(M : kR)$ é um ideal k-primitivo à direita de R.*

Demonstração. Consideremos $R/(M : kR)$. Se $(M : kR) = M$, então M é um ideal de R, e $R/M = R/(M : kR)$ não tem ideais à direita próprios não nulos (isto é, ele é simples) pois M é maximal. De fato, R/M não tem ideais à direita próprios não nulos, pois se T/M é ideal à direita não nulo de R/M, então T é um ideal à direita de R que contém M. Logo $T/M = \{\bar{0}\}$ é o ideal à direita maximal de R/M tal que $(\{\bar{0}\} : kR/M) = \{\bar{0}\}$. Com efeito, se $kR/M\bar{x} = \bar{0}$, então $kRx \subseteq M$. Portanto, $x \in (M : kR) = M$ e assim, $\bar{x} = \bar{0}$. Consequentemente, $(M : kR)$ é um ideal k-primitivo à direita em R quando $(M : kR) = M$.

Por outro lado, se $(M : kR) \neq M$, então pelo lema anterior, $(M : kR) \subseteq M$. Assim, em $R/(M : kR)$, consideremos o ideal à direita $M/(M : kR)$. Claramente ele é um ideal à direita de $R/(M : kR)$. Além disso, $(M/(M : kR) : kR/(M : kR)) = \{\bar{0}\}$, pois se $R/(M : kR)\bar{x} \subseteq M/(M : kR)$, então $kRx \subseteq M$ e assim, $x \in (M : kR)$ e $\bar{x} = \bar{0}$.

Portanto, $R/(M : kR)$ é um anel k-primitivo à direita e, desta forma, $(M : kR)$ é um ideal k-primitivo à direita. □

Vamos enunciar e provar um lema que será muito importante para o desenvolvimento da prova do teorema a seguir:

Lema 5.1.9. $\{x; kxR \subseteq M\} = M$.

Demonstração. Sabemos que M é um ideal à direita em R, logo, se $m \in M$ e $r \in R$, então $mr \in M$, e portanto, $\forall m \in M$ temos que $m \in \{x; kxR \subseteq M\}$, ou seja, $M \subseteq \{x; kxR \subseteq M\}$. Por outro lado, como M é maximal, $\{x; \quad kxR \subseteq M\} = M$ ou $\{x; \quad kxR \subseteq M\} = R$. Se $\{x; \quad kxR \subseteq M\} = R$, teremos que $kRR \subseteq M$, porém, $(M : kR) = \{r \in R; \quad kRr \subseteq M\}$, e assim, $(M : kR) = R$. Como $(M : kR) \subseteq M$, então $M = R$, um absurdo. □

Com os resultados acima, podemos agora dar uma nova definição para o k-radical de Jacobson J_k, que será útil para conseguirmos a decomposição do anel quociente k-semi-simples.

Teorema 5.1.10. *O k-radical de Jacobson J_k é igual a interseção de todos os ideais k-primitivos à direita em R.*

Demonstração. Começaremos mostrando que J_k contém a interseção de todos os ideais k-primitivos à direita de R.

Todo ideal à direita maximal k-regular M, de R, contém um ideal k-primitivo à direita $(M : kR)$, pelos lemas 5.1.5 e 5.1.8. Portanto, J_k, que é a interseção de todos os ideais à direita maximais k-regulares , contém a interseção dos ideais k-primitivos à direita em R.

Iremos, agora, mostrar que o k-radical J_k está contido na interseção de todos os ideais k-primitivos à direita em R. Para isto, consideremos P um ideal k-primitivo à direita em R. Então R/P é k-primitivo à direita, ou seja, contém um ideal à direita maximal M/P tal que $(M/P : kR/P) = \{\bar{0}\}$, ou seja, $(M : kR) \subseteq P$.

Se M for k-regular, então $J_k \subseteq M$, pelo lema 5.1.2. Além disso, $J_k \subseteq (M : kR)$, pois $(M : kR)$ é o maior ideal de R contido em M, como vimos no lema 5.1.5. Portanto, $J_k \subseteq (M : kR) \subseteq P$. No entanto, nós não sabemos se M é k-regular.

Como $P \subseteq M$, $(M : kR) \subseteq M$, já que podemos pelo menos concluir que $(M : kR)$ é o maior ideal de R contido em M. Caso contrário, se Q é um ideal de R, e $Q \subseteq M$, então $kRQ \subseteq Q \subseteq M$, logo, $Q \subseteq (M : kR)$. Em particular, consideremos $P = (M : kR)$. Agora, se o k-radical J_k não está contido em P, ele não pode está contido em $(M : kR)$ e, portanto, não poderá estar contido em M. Vamos então supor que J_k não está contido em M na tentativa de chegarmos numa contradição, e assim concluiremos que $J_k \subseteq P$.

Suponhamos que $J_k \nsubseteq M$.Tomemos $x \in J_k - M$. Então $kRx \nsubseteq M$, pois, do contrário, se $kRx \subseteq M$, então $x \in (M : kR) \subseteq M$. Agora tomemos um elemento $z \in R$ tal que $kzx \notin M$ (isto é possível pois kRx não está contido em M). Com o lema 5.1.9, na página anterior, podemos mostrar que neste caso $kzxR \nsubseteq M$, pois, do contrário, isto é, se $kzxR \subseteq M$, então $zx \in M$, e, desta forma $zx + zx + ... + zx = kzx \in M$. Como M é maximal e $kzxR \nsubseteq M$, temos que

$$M + kzxR = R.$$

Consequentemente, existem $m \in M \quad \text{e} \quad t \in R$ tais que

$$-z = m + kzxt,$$

donde,

$$z + kzxt = -m \in M.$$

Mas $x \in J_k$, logo $xt \in J_k$, e portanto, xt é k-quase-regular à direta. Logo, existe um elemento $w \in R$ tal que $xt + w + kxtw = 0$. Assim,

$$z = z + kz(xt + w + kxtw) = z + kzxt + k(z + kzxt)w.$$

Como cada parcela acima está em M, temos que $z \in M$, mas isto contradiz $kzx \notin M$. Este absurdo veio do fato de admitir que $J_k \nsubseteq M$, logo $J_k \subseteq M$, e portanto, $J_k \subseteq P$. $\square$

De forma análoga, podemos provar que o k-radical de Jacobson J_k é a interseção de todos os ideais k-primitivos à esquerda. Agora que temos o k-radical J_k, representado como a interseção de ideais k-primitivos, podemos dar uma potencialmente forte declaração sobre os anéis k-semi-simples (com respeito ao k-radical de Jacobson).

Teorema 5.1.11 (Teorema de Estrutura)**.** *Todo anel k-semi-simples é isomorfo a uma soma subdireta de anéis k-primitivos à direita.*

Demonstração. Sendo R um anel k-semi-simples, temos que o seu k-radical J_k é $\{0\}$, e então a interseção dos ideais k-primitivos à direita, P_i, é também 0. Portanto, pelo teorema 1.0.17, em pré-requisitos, R é isomorfo a uma soma subdireta de anéis R_i, em que cada $R_i \cong R/P_i$. Mas cada um desses é por definição um anel k-primitivo à direita. $\square$

De maneira análoga, podemos provar que todo anel k-semi-simples é isomorfo a uma soma subdireta de anéis k-primitivos à esquerda, portanto, podemos concluir que todo anel k-semi-simples é isomorfo a uma soma subdireta de anéis k-primitivos à direita. Assim, todo anel k-semi-simples pode ser decomposto.

5.2 Considerações Sobre o k-radical

Nesta seção, adicionaremos algumas observações a respeito do k-radical e também algumas relações entre ele e o radical de Jacobson, que foram analizadas durante esta pesquisa. Temos a impressão que tais observações podem render boas idéias posteriormente.

5.2.1 Hereditariedade

Iremos aqui falar sobre uma característica importante de algumas propriedades radical, a hereditariedade. Esta característica não é trivial, pois nem todos os radicais a possuem. Começaremos definindo e depois provaremos que o nosso k-radical satisfaz às suas condições.

Definição 5.2.1. Diremos que uma propriedade radical P é hereditária se, e somente se, satisfaz às seguintes condições:

1. Todo ideal de um anel P-radical é ele mesmo um anel P-radical.
2. Para todo anel R e para todo ideal I de R, temos $Rad(I) = I \cap Rad(R)$, no qual $rad(A)$ é o radical do anel A.

Como já foi dito, nem toda propriedade radical apresenta hereditariedade, porém a k-quase-regularidade é uma propriedade radical que satisfaz às condições acima citadas. Para vermos isto, vamos enunciar e provar o lema e o teorema a seguir:

Lema 5.2.2. *Seja A um ideal de um anel R e seja B um ideal de A. Seja B^* o ideal de R gerado por B, então $B^{*3} \subseteq B$.*

Demonstração. Seja A^* o ideal de R gerado por A. Temos que se $B \subseteq A$, então $B^* \subseteq A^* = A$. Portanto, $B^{*3}B{*}B{*}B^* \subseteq AB^*A = A(B+RB+BR+RBR)A \subseteq ABA \subseteq B$. □

Teorema 5.2.3. *Se $J_k(R)$ é o k-radical do anel R, e T é um ideal de R, então o k-radical de T, $J_k(T)$, é dado por $J_k(R) \cap T$. Em particular, se R é k-semi-simples, então T também o será.*

Demonstração. Seja A o k-radical de T e seja A^* o ideal de R gerado por A, pelo lema acima, $A^{*3} \subseteq A$. Mas $A^{*3} = A^*A^*A^*$ é um ideal de R e, como ele está em A, é k-quase-regular à direita, logo $A^{*3} \subseteq J_k(R)$. Se R é k-semi-simples, então $J_k(R) = 0$ e, como $A^{*3} \subseteq J_k(R)$, temos que $A^{*3} = 0$; logo A^* é um ideal nilpotente, consequentemente, podemos concluir que $A^* = 0$, pois todo ideal nilpotente está contido no ideal nil maximal, ver 3.1.3, que por sua vez, está contido no ideal k-quase-regular maximal J_k, ver 4.1.5, mas $J_k = \{0\}$. Portanto $A = 0$, pois A^* é gerado por A, logo, T é k-semi-simples.

Se R não é k-semi-simples, então $\frac{T+J_k(R)}{J_k(R)}$ é um ideal do anel k-semi-simples $R/J_k(R)$ e portanto é k-semi-simples. Pelo segundo teorema do isomorfismo, temos que

$$\frac{T + J_k(R)}{J_k(R)} \cong \frac{T}{T \cap J_k(R)}$$

logo,

$$\frac{T}{T \cap J_k(R)}$$

é k-semi-simples, isto é,

$$J_k(\frac{T}{T \cap J_k(R)}) = 0.$$

Mas $T \cap J_k(R)$ é um ideal de T k-quase-regular à direita, e então $T \cap J_k(R) \subseteq A$. Se $T \cap J_k(R) \neq A$, então $\frac{A}{T \cap J_k(R)}$ é um ideal k-quase-regular à direita não nulo de $\frac{T}{T \cap J_k(R)}$, o que é um absurdo. Portanto,

$$T \cap J_k(R) = A = J_k(T).$$

□

5.2.2 Divisores do k

Sabemos que um ideal à direita V de um anel R é k-regular se $\forall r \in R$ temos que $ker - r \in V$, para um dado $e \in R$. Se l divide k, então $lm = k$, para algum m inteiro e portanto,

$$l(me)r - r = (lm)er - r = ker - r \in V \quad \forall r \in R.$$

Logo, todo ideal k-regular é um ideal l-regular, e assim, todo ideal k-regular é um ideal l-regular. Mas, sabemos que o k-radical $J_k(R)$ de um anel R é a interseção de todos os ideais maximais k-regulares de R. Como o l-radical de Jacobson $J_l(R)$ de um anel é a interseção de todos os ideais maximais l-regulares de R, então

$$J_l(R) \subseteq J_k(R) \quad \text{se} \quad l|k.$$

Em particular,

$$J \subseteq J_k.$$

Já temos pelo resultado acima, que o radical de Jacobson de um dado anel está contido no k-radical de Jacobson, mas precisamos saber se não existe a inclusão inversa; para tal, mostraremos um exemplo que nos garante que tal inclusão não necessariamente é sempre verdadeira. Inicialmente, vamos definir uma, também conhecida, propriedade radical, ver [5], denominada k-torção. Em seguida, mostraremos que ela está contida no k-radical e não está contida no radical de Jacobson.

Definição 5.2.4. Sejam R um anel e k um inteiro positivo. Um elemento x pertencente a R é dito ter k-torção, se existe um inteiro positivo n, tal que $k^n x = 0$. O radical de R com relação a k-torção é o ideal maximal de R que possui a propriedade. Denotaremos este radical por T^k.

Vamos, agora, mostrar que $T^k \subseteq J_k$. Para tal, suponhamos que $x \in T^k$, logo existe um inteiro n tal que $k^n x = 0$. Seja $y = -x(1 - kx + k^2x^2 - ... + (-k)^{n-1}x^{n-1}$, então

$$x + y + kxy = x - x + kx^2 - k^2x^3 + ... - (-k)^{n-1}x^n - kx^2 + k^2x^3 - ... + (-k)^{n-1}x^n = 0,$$

logo $x \in J_k$. Portanto, $T^k \subseteq J_k$.

Vejamos um exemplo em que T^k não está contido em J.

Exemplo 5.2.5. Considere um anel R como sendo um corpo de característica k. Sabemos que todo corpo é um anel que possui apenas os ideais triviais, ou seja, qualquer ideal ou é todo o anel ou o anel nulo. Sendo assim, o radical de Jacobson deste anel é o ideal nulo, pois a unidade, 1, que é um elemento do anel, não é quase-regular. Por outro lado, todo elemento deste anel tem k-torção, logo o radical do anel com relação à propriedade radical da k-torção é todo o anel. Provamos, anteriormente, que ambos os radicais estão contidos no k-radical, assim, conseguimos um exemplo em que o k-radical é diferente do radical de Jacobson.

Com este trabalho, desenvolvemos a construção de uma família de radicais, e que seus elementos são distintos a depender do número inteiro k escolhido. Desta forma, obtivemos uma possível ferramenta para o estudo dos anéis simples, pois, como sabemos, cada propriedade radical dá orígem a uma partição na classe dos anéis simples.

Conclusão

Como já tínhamos mencionado, o objetivo deste trabalho foi fazer uma generalização do radical de Jacobson. Seguindo os resultados de N. J. Divinsky [2], conseguimos obter a tal generalização e a denominamos o k-radical de Jacobson. Primeiro nós definimos uma operação com as operações do anel, isto é, $\forall x, y \in R, \quad x \circ y = x + y + kxy$ e então definimos que um elemento é k-regular se $x \circ y = 0$. Provamos que a k-quase-regularidade é uma propriedade radical e assim construímos o k-radical. Estudando melhor o k-radical, conseguimos também provar o teorema de estrutura, que consiste na decomposição do anel quociente. Esta característica é de grande importância para o estudo dos anéis, pois facilita a compreensão da estrutura do anel. Também mostramos que a k-quase-regularidade é hereditária, característica não trivial das propriedades radical. Outra observação importante sobre o k-radical é que conseguimos construir uma família de radicais, bastando, para isto, variar o k no conjunto dos inteiros. Além disso, se fizermos $k = 1$, o k-radical volta a ser o já conhecido radical de Jacobson. Para um posterior estudo, temos a impressão de que esta família de radicais pode nos ajudar no estudo da partição dos anéis simples, pois cada propriedade, ou seja, cada radical define uma partição diferente dos anéis simples.

Referências

[1] BORGES, E. P. A possible deformed algebra and calculus inspired in nonextensive thermostatistics. *Physica A*, v. **340**, p. 95-101, 2004.

[2] DIVINSKY, N. J. *Rings and Radicals*. Toronto: University of Toronto Press, 1965.

[3] GRAY, Mary. *A Radical Approach to Algebra*. Reading: Addison-Wesley, 1970. (Addison-Wesley Series in Mathematics)

[4] JACOBSON, Nathan. *Structure of Rings*. Providence: AMS, 1956.

[5] MCCONNELL, N. R.; STOKES, T. Generalising Quaseregularity for Rings, *Australian Mathematical Society Gazette*, vol. **...**, n. ,p. 250-252, 1998.

[6] MILIES, C. P.; SEHGAL, S. K. *An Introduction to Group Rings*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002.

[7] PERLIS, Sam. A characterization of the radical of an Algebra, *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. **48**, n. 2, p. 128-132, 1942.