Universidade Federal da Bahia
Instituto de Matemática
Curso de Pós-graduação em Matemática
Dissertação de Mestrado

Expoentes de Lyapunov não nulos e Hiperbolicidade Uniforme

Luciana Silva Salgado

Salvador-Bahia
Março de 2008

Salgado, Luciana Silva.
Expoentes de Lyapunov não nulos e Hiperbolicidade Uniforme / Luciana Silva Salgado - Salvador : IM-UFBA, 2008. viii, 37p.
Orientador: Augusto Armando de Castro Júnior.
Dissertação de Mestrado - IM-UFBA. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2008.
Bibliografia: p.27.
Palavras-chave: 1. Sistemas Dinâmicos; 2. Expoentes de Lyapunov; 3. Hiperbolicidade.

Dissertação sob orientação do Prof. Dr. Augusto Armando de Castro Junior que será apresentada ao colegiado do curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Augusto Armando de Castro Junior (Orientador)

Prof. Dr. Vilton Jeovan Viana Pinheiro

Prof. Dr. Vitor Domingos Martins de Araujo

Expoentes de Lyapunov não nulos e
Hiperbolicidade Uniforme

Luciana Silva Salgado

Agradecimentos

Ao meu amigo e orientador de mestrado Armando Castro por sua sensibilidade, atenção, amizade e por me mostrar uma paixão pela matemática que então desconhecia, você é um grande exemplo para mim.

Aos caros professores do Instituto de Matemática da UFBA que sempre me incentivaram a continuar, todos vocês são pessoas fantásticas. Em particular, Vilton Pinheiro por me mostrar a beleza matemática da Análise pela primeira vez e Enaldo Vergasta por seu carinho com todos, sua paciência e disposição em ajudar sempre.

A todos funcionários do Instituto de Matemática da UFBA que desde minha graduação fazem parte dessa história. Em particular, D. Zezé e Tânia.

Professor Vítor Araújo, por sua presença nesta banca e por aceitar ser meu orientador de doutorado.

Aos meus colegas e amigos que sempre caminham comigo, longe ou perto, a me apoiar.

D. Neuza, minha mãe, por estar presente na vida de seus filhos.

Augusto Salgado, meu pai, de quem herdei o gosto pelo estudo.

Meu querido Moara por ser você comigo, quem me acalma e acende a chama, força minha, te adoro.

Ícaro Sol, meu filho amado, sua compreensão e apoio com os sonhos de sua mãe são indiscutíveis. Obrigada por sua confiança. Seu amor me faz uma pessoa melhor.

A Deus, por tanto amor.

Resumo

Provamos que se f é um difeomorfismo local C^1 tal que os expoentes de Lyapunov de toda medida de probalbilidade f-invariante são positivos, então f é uniformemente expansora. Apresentamos também uma versão deste resultado para difeomorfismo com um conjunto não-uniformemente hiperbólico. Por fim, fizemos uma exposição parcial sobre como os resultados de Cao e de Araújo-Alves-Saussol foram utilizados em Castro-Pinheiro-Oliveira para obter um critério de hiperbolicidade partindo de condições sobre os pontos periódicos de sistemas conjugados a hiperbólicos.

Abstract

We prove that if a C^1 local diffeomorphism f is such that the Lyapunov exponents of every f-invariant probability measure are positive, then f is uniformly expanding. We also present a version of this result for diffeomorphism with a non-uniformly hyperbolic set. Finally, we present an overview of how the results in Cao and Araújo-Alves-Saussol were used by Castro-Oliveira-Pinheiro to get a criterion of hyperbolicity from conditions about periodic points of the conjugated hyperbolic systems.

1 Introdução

A noção de sistema dinâmico uniformemente hiperbólico foi proposta por Smale, e desde então, muitos dos resultados obtidos em Sistemas Dinâmicos descrevem características de hiperbolicidade tanto sob o aspecto topológico quanto o da teoria da medida.

Em particular, o estudo das taxas de expansão não-uniforme e condições sobre um dado conjunto de pontos e suas relações com o comportamento uniformemente expansor é enfatizado em vários artigos recentes.

Desde Oseledets [14], sabe-se que se μ é medida invariante para uma aplicação f de classe C^1, então o número

$$\lambda(x,v) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|Df^n(x).v\| \tag{1}$$

é definido num conjunto de probabilidade total e é chamado de expoente de Lyapunov em x na direção de v.

No nosso estudo, provamos que se f é um difeomorfismo local C^1 tal que os expoentes de Lyapunov de toda medida de probabilidade f-invariante são positivos, então f é uniformemente expansora. E também uma versão deste resultado para difeomorfismo com um conjunto não-uniformemente hiperbólico.

Abaixo, apresentamos uma descrição sucinta dos artigos usados na dissertação.

Araújo, Alves e Saussol [3], provaram que se f é um difeomorfismo local C^1 não-uniformemente expansor (NUE) sobre um conjunto de probabilidade total, então f é uniformemente expansor, usando o conceito de NUE e o teorema de Birkhoff para tal fim.

No artigo que é a principal referência de nosso trabalho, Cao [1] apresentou uma versão deste resultado, na qual a hipótese de expansão não-uniforme é substituída por expoentes de Lyapunov positivos em todas as direções e o Teorema Ergódico Subaditivo (Kingman) para obter sua tese, a qual é a mesma de [3]. As diferenças entre as provas vistas em [1] e [3] são abordadas na seção 5.

A última seção da dissertação faz uma exposição parcial sobre como [1] e [3] foram utilizados por Castro, Pinheiro e Oliveira [4], usando o ferramental de tempos hiperbólicos e o Lema de Pliss, para obter um critério de hiperbolicidade partindo de condições sobre os pontos periódicos de sistemas conjugados a hiperbólicos.

2 Enunciado dos principais resultados

Definição 2.1. Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo local C^1 de uma variedade M dotada da métrica Riemanniana que induz uma norma $\|.\|$ no espaço tangente e uma forma de volume dita Medida de Lebesgue.A aplicação f é dita uniformemente expansora se existem contantes $c > 0$ e $\sigma > 1$ tais que:

$$\|Df_x^n(v)\| \geq c.\sigma^n \|v\|, \forall x \in M, v \in T_xM, n \geq 1.$$

Proposição 2.2. *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo local C^1 definido em uma variedade riemanniana compacta.*

Se

$$\liminf_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log(\|(Df^n(x))^{-1}\|) < 0 \tag{2}$$

sobre um conjunto de probabilidade total, então f é uniformemente expansora.

Definição 2.3. Para cada $x \in M$ e $v \in T_xM$, o número

$$\lambda(x, v) = \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k} \log \|Df_x^k(v)\|$$

é dito expoente de Lyapunov, sempre que tal limite existir.

Teorema 2.4. *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo local C^1 numa variedade riemanniana compacta. Se os expoentes de Lyapunov para toda medida de probabilidade f-invariante são positivos, então f é uniformemente expansora.*

Também temos uma versão destes resultados para $f : M \to M$ um difeomorfismo local C^1 tendo conjuntos invariantes com alguma estrutura não-uniformemente hiperbólica.

Lembramos aqui que se M uma variedade diferenciável de dimensão n e T_xM o espaço tangente a M no ponto x, o conjunto

$$TM = \{(x, v), x \in M \ e \ v \in T_xM\}$$

é uma variedade diferenciável de dimensão $2n$ e é chamado de Espaço Fibrado Tangente a M.

Definição 2.5. Seja $\Lambda \subset M$ um conjunto invariante de f com uma decomposição contínua Df-invariante do fibrado tangente sobre Λ, $T_\Lambda M = E^{cs} \oplus E^{cu}$. Λ é dito conjunto hiperbólico se f tem as direções de expansão uniforme em E^{cu} e de contração uniforme em E^{cs}, ou seja, existem constantes $c > 0$ e $\sigma > 1$ tais que

$$\|Df_x^n(v^u)\| \geq c.\sigma^n \|v^u\| \text{ e } \|Df_x^n(v^s)\| \leq c.\sigma^{-n} \|v^s\|$$
$$\forall x \in \Lambda, v^s \in E^{cs}, v^u \in E^{cu}, n \geq 1.$$

Teorema 2.6. *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo C^1 e Λ um conjunto positivamente invariante para o qual o espaço tangente tem uma decomposição contínua Df-invariante $T_\Lambda M = E^{cs} \oplus E^{cu}$.Se f tem todos os expoentes de Lyapunov na direção E^{cu} positivos e todos os negativos na direção E^{cs}, sobre um conjunto de probabilidade total, então Λ é um conjunto hiperbólico.*

3 Lemas Preliminares

Nesta seção provamos alguns lemas que serão usados na demonstração da proposição 2.2.

Definição 3.1. (Convergência fraca-*)

Seja X um espaço normado e $X^{'} := \{l : X \to \mathcal{R}, l \text{ é linear e contínua}\}$ o seu espaço dual. Dizemos que uma sequência $(l_n)_{n=1}^{+\infty}$ converge fraca-* se existe $l \in X^{'}$ tal que

$$\lim_{n \to +\infty} |l_n(x) - l(x)| = 0, \forall x \in X.$$

Sejam M um espaço métrico compacto e $f : M \to M$ uma aplicação contínua.

Lema 3.2. *Seja $\mathcal{M}_f$ o espaço das medidas f-invariantes, ϕ uma função contínua sobre M. Se $\int \phi d\mu < \lambda, \forall \mu \in \mathcal{M}_f$, então para todo $x \in M$, $\exists\ n(x)$ tal que*

$$\frac{1}{n(x)} \sum_{i=0}^{n(x)-1} \phi(f^i x) < \lambda.$$

Prova:

Demonstrando por absurdo, suponhamos que $\exists\ x \in M$ tal que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \phi(f^i x) \geq \lambda, \forall\ n.$$

Definimos uma sequência de medidas de probabilidade

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{f^i x}(\cdot), n \geq 1$$

onde cada $\delta_{f^i x}$ é uma medida de Dirac suportada em $f^i x$.

Seja μ um ponto de acumulação fraco desta sequência, quando $n \to +\infty$. Tome uma subsequência μ_{n_k} que convirja para μ.

Observe que μ *é* f*-invariante, isto é,* $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$*: De fato, veja que* $\delta_x(f^{-i}(A)) = \delta_{f^i x}(A)$*.*

Seja $\delta_{f^i(x)}(A) = 1 \Rightarrow f^i(x) \in A \Rightarrow x \in f^{-i}(A) \Rightarrow \delta_x(f^{-i}(A)) = 1$*. Por outro lado, suponha que* $f^i(x) \notin A \Rightarrow \delta_{f^i(x)}(A) = 0 \Rightarrow x \notin f^{-i}(A) \Rightarrow \delta_x(f^{-i}(A)) = 0$*.*

Logo,

$$\mu = \lim_{n_k \to +\infty} \mu_{n_k} = \lim_{n_k \to \infty} \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k - 1} \delta_{f^i(x)}(\cdot) =$$

$$= \lim_{n_k \to \infty} \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k - 1} \delta_x(f^{-i}(\cdot)).$$

Assim,

$$\mu_{n_k}(f^{-1}(\cdot)) = \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k - 1} \delta(f^{-i}(f^{-1}(\cdot))) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k - 1} \delta(f^{-i}(\cdot))}_{\mu_{n_k}} + \frac{1}{n_k} \delta(f^{-n_k}(\cdot)) - \frac{1}{n_k} \delta(\cdot) \underbrace{\longrightarrow}_{fraca-*} \mu.$$

Como ϕ *é uma função contínua, temos*

$$\int \phi d\mu = \lim_{k \to +\infty} \int \phi d\mu_{n_k} = \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{n_k} \sum_{i=o}^{n_k - 1} \phi(f^i x) \geq \lambda.$$

o que contradiz a hipótese de $\int \phi d\mu < \lambda$*, provando o lema.*$\diamondsuit$

Lema 3.3. *Seja $\mathcal{M}_f$ o espaço das probabilidades f-invariantes, seja ϕ uma função contínua sobre M. Se $\int \phi d\mu < \lambda, \forall\ \mu \in\ \mathcal{M}_f$, então $\exists$ N tal que $\forall n \geq N$ temos*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\phi(f^i x) < \lambda, \forall x \in M.$$

Prova:

Pelo Lema 3.2, para cada $x \in M, \exists\ n(x) \in\ \mathbb{N}$ e $c(x) < \lambda$,tais que

$$\frac{1}{n(x)}\sum_{i=0}^{n(x)-1}\phi(f^i x) < c(x).$$

Assim , por continuidade, para cada $x \in M$, há uma vizinhança V_x de x tal que para todo $y \in V_x$, temos

$$\frac{1}{n(x)}\sum_{i=0}^{n(x)-1}\phi(f^i y) < c(x).$$

M é compacto,logo existe cobertura finita $V(x_1), ..., V(x_p)$ de M por vizinhanças deste tipo. Seja $\widetilde{N} = max\{n(x_1), ..., n(x_p)\}$ e $c = max\{c(x_1), ..., c(x_p)\}$.

Daí, temos $c < \lambda$. Tome

$$\alpha = max_{x\in M}\|\phi(x)\| = \|\phi\|.$$

Defina, a seguinte sequência de aplicações:

$$N_1(x) = min\{n(x_i); x \in V_{x_i}, i = 1, ..., p\}$$

e

$$N_k : M \to \mathbb{N}, k \geq 0,$$

da seguinte forma

$N_0(x) = 0, N_{k+1}(x) = N_k(x) + N_1(f^{N_k(x)}(x))$, para $x \in M$.

Logo, para todo $x \in M$ e $n \in \mathbb{N}$, existe k tal que $N_k \leq n \leq N_{k+1}$.

Daí,

$$\sum_{i=0}^{n-1}\phi(f^i x)=\sum_{k=0}^{l-1}\sum_{j=N_k}^{N_k+1}\phi(f^i(x))+\sum_{j=N_k+1}^{n}\phi(f^j(x))\leq cN_l+\alpha\widetilde{N}\leq cn+(|c|+\alpha)\widetilde{N}.$$

Já que, temos

$$\textit{para } c\geq 0: cN_k+\alpha\widetilde{N}\leq cn+\alpha\widetilde{N}\leq cn+(|c|+\alpha)\widetilde{N};$$

$$\textit{e para } c<0: cN_k+\alpha\widetilde{N}=cn-c(n-N_k)+\alpha\widetilde{N}\leq cn+|c|\widetilde{N}+\alpha\widetilde{N}\leq cn+(|c|+\alpha)\widetilde{N}.$$

Portanto, se tomarmos $N=(2(|c|+\alpha)\widetilde{N})/(\lambda-c)$, *temos*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\phi(f^i x)<\lambda, \forall x\in M, n\geq N.\diamondsuit$$

4 Prova da Proposição 2.2

Definição 4.1. Uma aplicação $\mathfrak{A} : \mathbb{N}\times M \to Gl(k,\mathbb{R})$ é um cociclo subaditivo mensurável sobre f se verifica as seguintes propriedades:

(i) $\mathfrak{A}(n+m,x) \leq \mathfrak{A}(n, f^m(x)) + \mathfrak{A}(m,x)$, para quaisquer $n, m \in \mathbb{N}$ e $x \in X$.

(ii) $\mathfrak{A}(n,.) : M \to Gl(k,\mathbb{R})$ é uma função mensurável para cada $n \in \mathbb{N}$.

(iii) $\mathfrak{A}(0,x) = Id, \forall x \in X$.

Enunciaremos, agora, o teorema ergódico subaditivo de Kingman que será usado na próxima demonstração.

Teorema 4.2. *(Teorema Ergódico Subaditivo de Kingman)*

Seja $\mathfrak{A} : \mathbb{N}\times M \to \mathbb{R}$ *um cociclo subaditivo sobre* f *tal que* $max\{0, \mathfrak{A}(1,\cdot)\} =: \mathfrak{A}^+(1,\cdot) \in L^1(M,\mu)$. *Então, para* μ*-quase todo ponto* $x \in M$ *existe o limite*

$$\mathfrak{A}^* = \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathfrak{A}(n,x)}{n}.$$

Além disso, a função $\mathfrak{A}^*$ *está em* $L^1(M,\mu)$*, é* f*-invariante e satisfaz*

$$\int_M \mathfrak{A}^* d\mu = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \int_M \mathfrak{A}(n,x) d\mu(x).$$

Definição 4.3. Um conjunto boreliano A é dito de probabilidade total em M se, $\mu(A) = 1$, para toda medida de probabilidade f-invariante em M.

Definição 4.4. Uma medida de probabilidade f-invariante μ é dita ergódica se para qualquer conjunto f-invariante $A \in \mathcal{A}$ (ou seja, $f^{-1}(A) = A$) temos $\mu(A) \in \{0,1\}$.

Definição 4.5. Dados $\mu \in \mathcal{M}(M), F = \{\phi_1, ..., \phi_n\}$ um conjunto finito de funções contínuas $\phi_j : M \to \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$ arbitrário, definimos

$$V(\mu, F, \epsilon) := \{\eta \in \mathcal{M}(M); \mid \int \phi_j d\eta - \int \phi_j d\mu \mid < \epsilon, \forall \phi_j \in F\}.$$

A topologia contendo,para cada medida μ, a coleção de todos os conjuntos $V(\mu, F, \epsilon)$ como base de vizinhança em μ, com F e ϵ variáveis, é chamada Topologia fraca-* em $\mathcal{M}(M)$. Esta topologia corresponde à noção de convergência vista em 3.1

Observação 4.6. Na próxima demonstração usaremos o fato de $\mathcal{M}_f$ ser compacto, isto é devido aos teoremas de Riesz-Markov e Banach-Alaoglu e é comentado no apêndice.

Vamos, enfim, à

Demonstração da Proposição 2.2:

Seja $\mathcal{M}_f$ um espaço das medidas f-invariantes, munido da topologia fraca-*.

Defina $\phi_n(x) = \log \|(Df_x^n)^{-1}\|, n \in \mathbb{N}$.

Como f é um difeomorfismo local C^1 sobre M temos que a aplicação $\phi_n(x)$ é uma função contínua sobre M.

Afirmação 1. $\phi_n(x) = \log \|(Df_x^n)^{-1}\|$ é um cociclo subaditivo.

Prova:

Como ϕ_n é contínua, é mensurável. Ademais,

$$\phi_{m+n}(x) = \log \|(Df_x^{m+n})^{-1}\| = \log \|(Df^m(Df^n))^{-1}\| =$$
$$= \log \|(Df^m(f^n(x)) \cdot Df^n(x))^{-1}\| \leq \log(\|(Df^m(f^n(x)))^{-1}\| \cdot \|(Df^n(x))^{-1}\|) =$$
$$= \log \|(Df^m(f^n))^{-1}\| + \log \|(Df^n(x))^{-1}\| = \phi_m(f^n(x)) + \phi_n(x).$$

Isto prova a afirmação 1.

Daí, pelo teorema ergódico subaditivo (teorema 4.2), temos que o limite

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\phi_n(x) =: \widetilde{\phi}(x)$$

existe para $\mu - \underset{\sim}{q}tp$ x e toda medida μ f-invariante.

Além disso, $\widetilde{\phi}$ é f-invariante e integrável.

Afirmação 2. $\frac{\phi_n}{n}$ é dominada.

Prova:

De fato,

$$\|(Df^n)^{-1}\| = \|[\Pi_{j=0}^{n-1}(Df(f^j(x)))]^{-1}\| \leq \Pi_{j=0}^{n-1}\|(Df(f^j(x)))^{-1}\|.$$

Como f é difeomorfismo local $(Df)^{-1}$ é uniformemente limitada superiormente, digamos por uma constante $S > 0$. Assim,

$$\|(Df^n)^{-1}\| \leq S^n \Rightarrow \frac{1}{n}\log\|(Df^n)^{-1}\| \leq \frac{1}{n}\log\|(Df)^{-1}\| \leq \log S.$$

Por outro lado, Df^{-1} também é limitada inferiormente já que

$$\|(Df^n(x)^{-1})\|^{-1} = \inf_{\|v\|=1}\|(Df^n)\cdot v\| = \inf_{\|v\|=1}\|[(\Pi_{j=0}^{n-1}Df(f^j(x)))\cdot v]\| \leq$$

$$\leq \inf_{\|v\|=1}\{\Pi_{j=0}^{n-1}\|(Df(f^j(x)))\|\cdot\|v\|\} \leq \|Df\|^n \Rightarrow$$

$$\|Df\|^{-n} \leq \|(Df^n)^{-1}(x)\| \Rightarrow -\log\|Df\| \leq \frac{\log\|(Df^n(x))^{-1}\|}{n}.$$

Portanto, tomando $r = max\{\log\|Df\|, \log S\}$ temos $\|\frac{\phi_n}{n}\| \leq r, \forall n$.

Provando assim a afirmação 2.

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\lim_{n\to+\infty}\int\frac{\phi_n}{n}d\mu = \int\widetilde{\phi}d\mu, \text{para toda medida invariante } \mu.$$

Por hipótese,

$$\liminf_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\|(Df_x^n)^{-1}\|<0$$

num conjunto de medida de probabilidade total. Isto implica que $\widetilde{\phi}<0$, para $\mu-qtp\ x$ para qualquer medida invariante μ.

Assim, $\int\widetilde{\phi}d\mu<0,\forall\mu\in\mathcal{M}_f$.

Agora provemos que $\exists\ L\in\mathbb{N}$ e $\lambda<0$ tais que

$$\frac{1}{L}\int\phi_L d\mu<\lambda,\forall\mu\in\mathcal{M}_f:$$

Ora, para uma dada medida $\mu\in\mathcal{M}_f$, pelo teorema 4.2, temos

$$\lim_{n\to+\infty}\int\frac{\phi_n}{n}d\mu=\int\widetilde{\phi}d\mu.$$

Já que $\int\widetilde{\phi}d\mu<0,\exists\ n_\mu\in\mathbb{N}$ tal que $\int\frac{\phi_n}{n}d\mu<\frac{1}{2}\int\widetilde{\phi}d\mu,\forall n\geq n_\mu$.

Note que fixada μ, a aplicação $x\longmapsto\frac{\phi_{n_\mu}}{n_\mu}$ é contínua.

Para provarmos a uniformidade usaremos argumento padrão de compacidade da esfera unitária na topologia fraca-* e a consequente compacidade do subconjunto $\mathcal{M}_f$ das probabilidades f-invariantes.

(O argumento aqui usado é similar ao do Lema 3.3, só que refere-se à compacidade de $\mathcal{M}_f$ no lugar da de M)

Assim, tomando $\epsilon_\mu=\frac{1}{4}\|\int\widetilde{\phi}d\mu\|$, temos que o conjunto

$$V_\mu=\{\mu';\|\int\frac{\phi_{n_\mu}}{n_\mu}d\mu-\int\frac{\phi_{n_\mu}}{n_\mu}d\mu'\|<\epsilon_\mu\}$$

é aberto na topologia fraca-*, vizinhança de μ.

Veja que

$$\int\frac{\phi_{n_\mu}}{n_\mu}d\mu'=\int\frac{\phi_{n_\mu}}{n_\mu}d\mu'-\int\frac{\phi_{n_\mu}}{n_\mu}d\mu+\int\frac{\phi_{n_\mu}}{n_\mu}d\mu\leq$$
$$\leq\frac{1}{2}\int\widetilde{\phi}d\mu+\epsilon_\mu=\frac{1}{4}\int\widetilde{\phi}d\mu,\forall\mu'\in V_\mu.$$

Daí, $\cup V_\mu$ é uma cobertura de $\mathcal{M}_f$ e já que este é compacto (teoremas 7.1 e 7.2), podemos achar uma subcobertura finita, digamos $V\mu_1, ..., V\mu_l$.

Se denotarmos $n_j = n_{\mu_j}$ e $\lambda = max\{-\epsilon_{\mu_j}, j = 1, ..., l\}$, então, $\lambda < 0$ e $\forall \nu \in \mathcal{M}_f$, existe uma vizinhança

$$(V\mu_j) \ni \nu, \text{para algum j, tal que vale} \frac{1}{n_j}\int \phi_{n_j} d\nu < \lambda.$$

Observe que

$$\|Df^{n_jk}(x)\| \leq \|\Pi_{t=0}^{k-1}[Df^{n_jt}(f^{n_j})]\| \leq$$
$$\leq \Pi_{t=0}^{k-1}\|[Df^{n_j}(f^{n_jt})]\| \Rightarrow \log \|Df^{n_jk}(x)\| \leq \log \Pi_{t=0}^{k-1}\|[Df^{n_j}(f^{n_jt})]\| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \phi_{n_jk} \leq \sum_{t=0}^{k-1} \phi_{n_j}(f^{tn_j}(x)),$$

para algum $k \in \mathbb{N}$ e $j = \{1, ..., l\}$ fixado.

Dada $\widehat{\nu} \in V_{\mu_j}$, já que $\widehat{\nu}$ é f-invariante,

$$\frac{1}{kn_j}\int \phi_{n_j}(f^{kn_j}(x))d\widehat{\nu} \leq \frac{1}{k}\sum_{t=0}^{k-1}\frac{1}{n_j}\int \phi_{nj}(f^{tn_j}(x))d\widehat{\nu} =$$
$$= \frac{1}{k}\sum_{t=0}^{k-1}\frac{1}{n_j}\int \phi_{nj}(x)d\widehat{\nu} < \lambda \Rightarrow \int \frac{\phi_{kn_j}}{kn_j} < \lambda.$$

Assim, se fizermos $L = mmc\{n_l\}$, então $\frac{1}{L}\int \phi_L d\mu < \lambda$.

Já que $(\frac{1}{L})\phi_L$ é função contínua sobre M, pelo Lema 3.3, $\exists \widetilde{N} \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{L}\phi_L(f^i(x)) < \lambda, \forall n \geq \widetilde{N}, \forall x \in M. \tag{3}$$

(Isto é quase o que precisamos: Se $L = 1$, então $\frac{1}{n}\phi_n(x) \leq \sum_{i=1}^{n-1}\phi(f^i(x)) < \lambda \Rightarrow \phi_n(x) < \lambda n, \forall n \in \widetilde{N}$ que é o resultado desejado)

(Aqui ainda não vale a subaditividade de ϕ_L em relação a f, mas sim em relação a f^L. Trocar f por f^L neste momento não garante que todas as μ f^L-invariantes têm sua integral menor que λ)

Queremos uma expressão em que apareça os intermediários e não apenas os múltiplos de L, portanto usando a subaditividade, temos para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\phi_{kL}(x) \leq \sum_{i=0}^{k-1} \phi_L(f^{iL}(x)),$$

e então, para algum $0 \leq j < L$,

$$\phi_{kL}(x) \leq \phi_j(x) + \sum_{i=0}^{k-2} \phi_L(f^{iL+j}(x)) + \phi_{L-j}(f^{(k-1)L+j}(x)).$$

(Basta fazer $f^{kL} = f^{L-j} \circ f^{(k-1)L} \circ f^j$ e aplicar a regra da cadeia e a subaditividade em ϕ_{kL})

Somando em $j = 0, ..., L-1$ e dividindo por L, temos

$$\phi_{kL}(x) \leq \frac{1}{L} \sum_{j=0}^{L-1} [\phi_j(x) + \sum_{i=0}^{k-2} \phi_L(f^{Li+j}(x) + \phi_{L-j}(f^{(k-1)L+j}(x)))] =$$

$$= \frac{1}{L} \sum_{j=0}^{L-1} [\phi_j + \phi_{L-j}(f^{(k-1)L}(f^j(x)))] + \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{k-2} \sum_{j=0}^{L-1} \phi_L(f^{Li+j}(x)).$$

Seja $c_1 > 1$ uma cota para

$$\|\phi_{L-j}\| = \sup_{x \in M} \|\phi_{L-j}(x)\|, \forall 0 \leq j \leq L, \text{digamos,} c_1 = \max_{i=1,...,L} \max_{x \in M} \phi_i(x).$$

Daí,

$$\phi_{kL} \leq \sum_{j=0}^{L-1} \sum_{i=0}^{k-2} \frac{\phi_L}{L}(f^{iL+j}(x)) + 2c_1 \leq \sum_{t=0}^{L(k-1)-1} \frac{\phi_L}{L}(f^t(x)) + 2c_1 \underbrace{<}_{(3)} L(k-1)\lambda + 2c_1,$$

se $L(k-1) - 1 > \widetilde{N}$.

Logo, temos $\phi_{kL}(x) \leq L(k-1)\lambda + 2c_1, \forall\ k$ tal que $L(k-1) \geq \widetilde{N}$.

Assim, para algum $n \geq \widetilde{N} + 2L$, podemos decompor $n = kL + j$, onde $0 \leq j < L$. Então,$(k-1)L = n - (L+j) > \widetilde{N}$.

Novamente, usando a subaditividade, obtemos

$$\phi_n(x) \leq \phi_{kL}(x) + \phi_j(f^{kL}(x)) \leq L(k-1)\lambda + 2c_1 + c_1.$$

Logo, $\phi_n(x) \leq L(k-1)\lambda + 3c_1$.

Como $(k-1)L < n$, obtemos

$$\frac{1}{n}\phi_n(x) \leq \frac{L(k-1)}{n}\lambda + \frac{3}{n}c_1 =$$
$$= \Big[\frac{(L(k-1)) + L + j}{n} + \frac{L-j}{n}\Big]\lambda + \frac{3c_1}{n} \leq \frac{\lambda}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \phi_n \leq \frac{n\lambda}{2}, \forall n > \overline{N},$$

onde
$$\frac{L(k-1)}{n} \longrightarrow 1 \text{ e } \overline{N} > \widetilde{N} \text{tal que} \frac{3c_1}{n} < \Big|\frac{\lambda}{8}\Big|, \frac{L}{n} < \frac{1}{8}.$$

Assim, se tomarmos

$$k = \max\{\widetilde{N} + 2L, \frac{6c_1}{(-\lambda)}\}, \text{ obtemos } \frac{1}{n}\phi_n(x) \leq \frac{\lambda}{2}, \forall x \in M, n \geq k.$$

Seja $c^{-1} = max\{\|(Df_x)^{-1}\|, \dots, \|(Df_x^{k-1})^{-1}\|, 1\}$.

Daí,
$$\|(Df_x)^{-1}\| \leq c^{-1}e^{\frac{\lambda n}{2}}, \forall n \geq 1.$$

Ademais, $\exists c > 0$ e $\lambda < 0$ tais que

$$\|Df_x^n(v)\| \geq ce^{-\frac{\lambda n}{2}}\|v\|, \forall x \in M, v \in T_xM, n \geq 1. \diamondsuit$$

Escólio 1. Seja ϕ_n um cociclo subaditivo contínuo em uma variedade M compacta tal que
$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\phi_n < 0, \forall\ n.$$

Então,$\exists\ \lambda < 0$ e $N_0 > 0$ tais que $\phi_n < n\lambda, \forall\ n > N_0$.

5 Provas dos Teoremas

Apresentamos agora o enunciado do importante

Teorema 5.1. *(Teorema de Oseledets - versão não invertível)*

Seja $\mathfrak{A} : \mathbb{N} \times M \to Gl(n, \mathbb{R})$ *um cociclo sobre uma transformação mensurável* $f : M \to M$ *com* $log^+ \|\mathfrak{A}(1, \cdot)\|$, *onde* $log^+ = max\{0, log\}$, *integrável em relação a uma medida* f*-invariante* μ *em* M. *Para* $\mu - qtp$ $x \in M$ *existe um inteiro positivo* $t(x) \leq n$, *números* $\lambda_1(x) < \ldots < \lambda_{t(x)}(x)$ *e espaços lineares* $\{0\} = F_0(x) \subset F_1(x) \subset \ldots \subset F_{t(x)}(x) = \mathbb{R}^n$ *tais que:*

1) Se $F \subset F_i(x)$ *é um subespaço linear com* $F \cap F_{i-1}(x) = 0$ *então*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \inf \|\mathfrak{A}(n, x)v\| = \lim_{n\to+\infty} \log \sup \|\mathfrak{A}(n, x)v\| = \lambda_i(x),$$

onde o ínfimo e o supremo são tomados sobre todos os vetores $v \in F$ *tais que* $\|v\| = 1$;

2)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log |\det \mathfrak{A}(n, x)| = \sum_{i=1}^{t(x)} (dimF_i(x) + dimF_{i-1}(x))\lambda_i(x).$$

Este teorema é de suma importância na teoria de sistemas dinâmicos e será usado de maneira bem direta juntamente à proposição 2.2 na demonstração do próximo teorema.

Prova do Teorema 2.4

Pelo Teorema 5.1 , existe um conjunto $B \subset M$ tal que $\mu(B) = 1, \forall \mu \in \mathcal{M}_f$, com as propriedades:
(1)Existe uma função mensurável $s : B \to \mathbb{Z}^*$ com $s \circ f = s$.
(2)Se $x \in B$, existem números reais $\lambda_1(x) < ... < \lambda_{s(x)}(x)$.
(3)Se $x \in B$, existem subespaços lineares $0 = F_0(x) \subset ... \subset F_{s(x)}(x) = T_xM$.
(4)Se $x \in B$ e $0 < i \leq s(x)$, então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|Df_x^n(v)\| = \lambda_i(x), \forall v \in F_i(x) \backslash F_{i-1}(x).$$

Por hipótese, se $x \in B$, então $\lambda_i(x) > 0$, para $i = 1, ..., s(x)$.

Daí, para todo $x \in B, \exists N(x)$ tal que

$$\|Df_x^n(v)\| \geq e^{(n\lambda_1(x))/2}\|v\|,$$

para $n \geq N(x)$ e $v \in T_xM$.

Assim,

$$\|(Df_x^n)^{-1}\| < e^{(-n\lambda_1(x))/2},$$

para $n \geq N(x)$ e

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|(Df_x^n)^{-1}\| \leq \frac{-\lambda_1(x)}{2} < 0.$$

Portanto, pela Proposição 2.2, f é uniformemente expansora.$\diamondsuit$

Vejamos a diferença entre esta demonstração e a apresentada em [3].

Definição 5.2. Um difeomorfismo local C^1 $f : M \to M$ é uma aplicação não-uniformemente expansora (NUE) em $x \in M$ se

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log \|(Df_{f_x^j})^{-1}\| < 0.$$

Em [3], os autores investigaram se uma condição NUE pode ainda implicar comportamento de expansão uniforme forte.

Na hipótese dos lemas em [3] temos NUE num conjunto de probabilidade total enquanto em [1] o autor percebeu que podia usar $\int \phi d\mu < \lambda$. Mesmo de maneira implícita, Araújo-Alves-Saussol passaram por esta integral, chegando a ela pela condição de NUE, que é mais forte que a de todos os expoentes de Lyapunov positivos.

Observe que esses lemas levam à tese do teorema principal em ambos os artigos. Entretanto, no caso de [3] os lemas são utilizados diretamente para obter o teorema e em [1] o autor ainda teve de passar pela proposição 2.2.

O que Cao fez a mais foi supor que os expoentes de Lyapunov são todos positivos, chegando à hipótese $\frac{1}{L}\int \phi_L d\mu < \lambda$, pela aplicação do teorema ergódico de Kingman, depois ajustou as contas para poder aplicar os lemas e chegar ao resultado desejado.

Abaixo o enunciado do teorema apresentado no artigo [3]:

Teorema 5.3. *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo local C^1 definido numa variedade Riemanniana compacta. Se f é não-uniformemente expansora sobre um conjunto de probabilidade total, então f é uniformemente expansora.*

Os lemas usados na demonstração deste teorema foram os seguintes:

Lema 5.4. *Se*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \phi(f^j(x)) < 0$$

vale num conjunto de probabilidade total, então é válido para todo $x \in X$.

Lema 5.5. *Existe $c_0 > 0$ tal que $\sum_{j=0}^{m\tilde{N}-1} \phi(f^j x) \le -\frac{c}{2}m + c_0, \forall x \in X$ e $m \ge 1$.*

Prova do Teorema 2.6

Devido à continuidade dos fibrados, basta tomar

$$\phi_n(x) = \log \|Df^{-n}|_{E_x^{cu}}\|$$

ou

$$\phi_n(x) = \log \|Df^{n}|_{E_x^{cs}}\|,$$

e aplicar o escólio 1, obtendo a prova do mesmo modo que no teorema 2.4.

6 Um critério de hiperbolicidade para sistemas conjugados a expansores

Neste capítulo apresentamos como a Proposição 2.2 pode ser aplicada a outros resultados.

Seja $g : M \to M$ um difeomorfismo local C^2, M variedade riemanniana.

Definição 6.1. Seja $z \in M$ um ponto regular. Dizemos que $k \in \mathbb{N}$ é um tempo ξ-hiperbólico para z se, para $i = 1, ..., k$, temos

$$\Pi_{j=1}^{i} \| [Dg|_{(g^{k-j}(z))}]^{-1} \| \leq \xi^i.$$

O seguinte lema será muito útil no que segue:

Lema 6.2. *(Lema de Pliss)*

Dados $\lambda > 0$, $\epsilon > 0$ e $H > 0$, existem $N_0 = N_0(\lambda, \epsilon, H)$ e $\delta = \delta(\lambda, \epsilon, H) > 0$ tais que, se $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são números reais, satisfazendo

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \leq N\lambda,$$

$N \geq N_0, |a_n| \leq H$ para $n = 1, \ldots, N$, então existe $l \geq N\delta, 1 \leq n_1 \leq \ldots \leq n_l \leq N$ tal que

$$\sum_{i=n_j+1}^{n} a_i \leq (n - n_j)(\lambda + \epsilon),$$

para todo $j = 1, \ldots, l$ e $n_j < n \leq N$.

Uma propriedade interessante de tempos hiperbólicos para difeomorfismos locais é que, sob condições de proximidade entre segmentos de órbitas, um tempo $\xi-$hiperbólico para um ponto $x \in M$ será também tempo $\sqrt{\xi}$-hiperbólico para os pontos de uma vizinhança de x:

Lema 6.3. *(Versão simplificada da Proposição 2.23 em [5])*

Seja $g : M \to M$ um difeomorfismo local numa variedade riemanniana compacta M. Suponha que k seja um tempo $\xi-$hiperbólico para $x \in M$.Então, existe $\widehat{\delta} > 0$ tal que, para todo $y \in M$ cujo k-segmento de órbita dista a menos de $\widehat{\delta}$ do de x, temos k como tempo $\sqrt{\xi}-$hiperbólico para y.

Prova:

De fato, seja $\widehat{\delta} > 0$ tal que

$$\|[Dg(y)]^{-1}\| \leq \frac{1}{\sqrt{\xi}} \cdot \|[Dg(z)]^{-1}\|, \forall y, z \in M, \textit{tais que } d(y,z) < \widehat{\delta}.$$

Considere agora $x_j = g^j(x)$ e $y_j = g^j(y)$ com $d(x_j, y_j) < \widehat{\delta}$,e $j = 0, \ldots, k$.

Daí, para $l < k$, temos

$$\Pi_{j=1}^{l}\|[Dg(y_{k-j})]^{-1}\| \leq \Pi_{j=1}^{l}\frac{1}{\sqrt{\xi}}\|[Dg(x_{k-j})]^{-1}\| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{\xi}}\right)^l \cdot (\varsigma)^l = (\sqrt{\varsigma})^l,$$

implicando que k é tempo ξ-hiperbólico para y.$\diamondsuit$

Seja $g : M \to M$ um difeomorfismo local C^2 topologicamente conjugado a um endomorfismo C^1 expansor.

Definição 6.4. (Aplicação Não-Uniformemente Expansora sobre um conjunto)

Dizemos que um difeomorfismo local f é NUE sobre um conjunto X, se existe $\eta < 0$ tal que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \log \|[Df(f^j(x))]^{-1}\| \leq \eta < 0, \forall x \in X.$$

Lema 6.5. *Suponha que g é topologicamente conjugada a uma aplicação expansora f. Seja x um ponto regular recorrente de g. Se $Per(g)$ é NUE, então todos os expoentes de Lyapunov de x são positivos.*

Prova:

Seja $\delta > 0$ tal que dada qualquer bola $B(z, \delta)$ os ramos inversos correspondentes de g são difeomorfismos bem definidos. Se $\xi = e^{\eta}, \eta < 0$ como na definição de NUE, $\xi < \xi' < 1$ fixado e seja $\epsilon > 0$ tal que $(\sqrt{\xi'})^{-1} - \epsilon > 1$. Desde que x seja um ponto regular $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$(\xi_1 - \epsilon)^n.\|v_1\| < \|Dg^n(x).v_1\| < (\xi_1 + \epsilon)^n.\|v_1\|, \forall v_1 \in E_1; \forall n \geq n_0.$$

Onde os E_1 é o autoespaço de Lyapunov associado a $log(\xi_1)$ o menor expoente de Lyapunov.

Agora,pelo lema 6.2, existe $n_1 > n_0$ tal que para qualquer ponto y e $n > n_1$ onde

$$\Pi_{j=0}^{n}\|[Dg(g^j(y))]^{-1}\|^{-1} \geq \xi^{-n},$$

temos, então que y tem pelo menos n_0 tempos hiperbólicos menores que n.

Fixemos $0 < \delta' \leq \delta$ tal que

$$\|[Dg^{-1}(y)]\| \leq \frac{1}{\sqrt{\xi'}}\|Dg^{-1}(z)\|, \forall z, y; d(z, y) < \delta',$$

onde g^{-1} designa qualquer ramo inverso de g.

Escolhemos $0 < \delta'' < \delta'$ tal que se g^{-n} é uma composição arbitrária de n ramos inversos de g, então $diam(g^{-n}(B(z, \delta''))) < \delta', \forall z \in M, \forall n \in \mathbb{N}$. Isto ocorre pois é válido para o sistema expansor f que é conjugado a g.

Como x é um ponto recorrente, escolhemos $n_2 \geq n_1$ um tempo de retorno tal que uma vizinhança $V_x \subset B(x, \delta'')$ de x é dada por g^{n_2} sobre $B(x, \delta'')$.

Portanto, escrevendo $G := (g^{n_2}|_{V_x})^{-1}, G : B(x, \delta'') \to V_x \subset B(x, \delta'')$ tem um ponto fixo $p \in V_x$, que é periódico de período n_2 por g.

Por hipótese, p é um ponto periódico hiperbólico para o qual temos

$$\Pi_{j=0}^{n_2-1}\|[Dg(g^j(p))]^{-1}\|^{-1} \geq \|\xi^{-n_2}\| \Rightarrow \|DG(p)\| \leq \|\xi^{n_2}\|.$$

Por nossa escolha de n_1 *e pela equação acima, existe um tempo* ξ'*-hiperbólico* $n_0 < n' < n_2$ *para* p*. Devido ao lema 6.3,* n' *é também* $\sqrt{\xi'}$*-hiperbólico para* x*. Em particular, isto implica que*

$$\|Dg^{n'}(x).v\| \geq \sqrt{\xi'}^{-n'}\|v\|, \forall v \in T_pM.$$

Portanto, $\xi_1 \geq \sqrt{\xi'^{-1}} - \epsilon > 1$.

Isto significa que o menor dos expoentes de Lyapunov de x *é maior que* 0*, e portanto todos os outros o são.*$\diamondsuit$

Definição 6.6. (Sombreamento por Pontos Periódicos)

Seja $f : M \to M$ uma aplicação e $\widehat{\Lambda} \subset M$ um conjunto compacto f-invariante.Dizemos que $(f, \widehat{\Lambda})$ tem a propriedade de sombreamento por pontos periódicos se dados $\epsilon > 0, \alpha > 0$ tais que para todo segmento de órbita $\{x, \ldots, f^n(x)\} \subset \widehat{\Lambda}$ com $d(f^n(x), x) < \alpha$, existe um ponto periódico $p \in M$ com período n tal que $d(f^j(p), f^j(x)) < \epsilon, \forall 0 \leq j \leq n$.

Neste caso, dizemos que a órbita de p ϵ-sombreia o segmento de órbita $\{x, \ldots, f^n(x)\}$.

Se $\widehat{\Lambda} \subset M$ é um conjunto compacto, hiperbólico, invariante por um difeomorfismo f, então a teoria clássica de sistemas hiperbólicos implica que $(f, \widehat{\Lambda})$ tem a propriedade de sombreamento por pontos periódicos. O mesmo também é válido para qualquer sistema que é topologicamente conjugado a f.

Teorema 6.7. *Seja $g : M \to M$ um difeomorfismo local C^2 sobre uma variedade compacta M. Suponha que existe um conjunto compacto invariante $\Lambda \subset M$ tal que (g, Λ) tem a propriedade de sombreamento por pontos periódicos.Se g é NUE sobre o conjunto de pontos periódicos Per(g), então g é uma aplicação expansora sobre Λ.*

Notamos que o conjunto de pontos recorrentes regulares de Oseledets é um conjunto de probabilidade total, devido ao Teorema de Oseledets (teorema 5.1) e ao Teorema de Recorrência de Poincaré (teorema 7.3). Isto significa que este conjunto tem medida igual a 1 para qualquer medida g-invariante, e o lema 6.3 implica que todos os expoentes de Lyapunov são positivos. Portanto, nosso teorema 6.7 é obtido pela aplicação do lema 6.3 para a proposição 2.2.$\diamondsuit$

Como finalização, faremos um breve comentário sobre o resultado análogo ao que provamos aqui, mas no contexto de difeomorfismos, feito também em [4].

Definição 6.8. (Conjunto Não-uniformemente Hiperbólico - NUH)

Seja $g : M \to M$ um difeomorfismo sobre uma variedade compacta M. Dizemos que um conjunto invariante $S \subset M$ é um conjunto Não Uniformemente Hiperbólico (NUH) se

(1) $\exists T_S M = E^{cs} \oplus E^{cu}$ decomposição Dg-invariante;

(2) Existem $\eta > 0$ e uma métrica Riemanniana adaptada para a qual qualquer ponto $p \in S$ satisfaz

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log \|Dg(g^j(p))|_{E^{cs}(g^j(p))}\| \leq \eta,$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log \|[Dg(g^j(p))|_{E^{cu}(g^j(p))}]^{-1}\| \leq \eta.$$

Definição 6.9. (Decomposição Dominada)

Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo sobre uma variedade compacta M e seja $X \subset M$ um subconjunto invariante (isto é, $f(X) = X$). Diz-se que uma decomposição $T_xM = E \oplus \widehat{E}$ é dominada se e somente se

(i) A decomposição é Df-invariante, ou seja, $Df(E(x)) = E(f(x))$ e $Df(\widehat{E}(x)) = \widehat{E}(f(x))$;

(ii) $\exists 0 < \lambda < 1$ e algum $l \in \mathbb{N}$ tais que, $\forall x \in X$

$$\sup_{v \in E, \|v\|=1} \{\|Df^l(x) \cdot v\|\} \cdot (\inf_{v \in \widehat{E}, \|v\|=1} \{\|Df^l(x) \cdot v\|\})^{-1} \leq \lambda.$$

Os autores usaram estas definições para mostrar que se g é topologicamente conjugada a uma aplicação hiperbólica f, então os expoentes de Lyapunov de todo ponto recorrente regular de g são não-nulos no seguinte lema:

Lema 6.10. *Suponha que g é topologicamente conjugado a uma aplicação hiperbólica f. Seja x um ponto recorrente regular de g. Suponha que $Per(g)$ é NUH e que a decomposição $T_{Per(g)}M = E^{cs} \oplus E^{cu}$ é decomposição dominada. Então, os expoentes de Lyapunov de x são não nulos.*

e o aplicaram para demonstrar o teorema abaixo:

Teorema 6.11. *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo C^1 sobre uma variedade Riemanniana compacta, com um conjunto positivamente invariante Λ para o qual o fibrado tangente tem uma decomposição contínua $T_\Lambda M = E^{cs} \oplus E^{cu}$. Se f tem expoentes de Lyapunov positivos na direção E^{cu} e negativos na direção E^{cs} sobre um conjunto de probabilidade total, então $f|_\Lambda$ é uniformemente hiperbólica.*

7 Apêndice

Teorema 7.1. *(Banach-Alaoglu)*

Seja X um espaço normado.Então, a bola fechada unitária do dual X^* de X é compacta na topologia fraca-.*

Teorema 7.2. *(Riesz-Markov)*

Seja M um espaço métrico compacto e $C^0(M)$ o espaço das funções contínuas de M em $\mathcal{R}$. Então, o dual de $C^0(M)$ é o espaço das medidas borelianas finitas com sinal sobre M.

Teorema 7.3. *(Recorrência de Poincaré - Versão Probabilística)*

Seja $f : X \to X$, X um espaço de probabilidade. Então, $\mu - qtp\ x \in X$ é recorrente.

7.1 Compacidade do espaço $\mathcal{M}_f$

Pelo teorema de Banach-Alaoglu, a bola fechada unitária $\mathcal{B}^*[0,1]$ do espaço dual de um espaço normado é compacta na topologia fraca-*. Ora, o teorema de Riesz-Markov dá-nos que o espaço $\mathcal{M}(M)$ das medidas de probabilidade finitas com sinal de um dado espaço M é isomorfo $(C^0(M))^*$.

Veja que $\mathcal{M}_f$ na prova da proposição 2.2 é um subconjunto fechado de $\mathcal{B}^*_M[0,1]$:

Com efeito, seja $\mu_n \in \mathcal{M}_f$ uma sequência convergindo na topologia fraca-* para uma certa medida μ. Para vermos que $\mu \in \mathcal{M}_f$, basta mostrarmos que para toda ϕ contínua fixada vale

$$\int_M \phi \circ f d\mu = \int_M \phi d\mu.$$

De fato, temos

$\int_M \phi \circ f d\mu_n \underbrace{\longrightarrow}_{fraca-*} \int_M \phi \circ f d\mu$ e $\int_M \phi d\mu_n \underbrace{\longrightarrow}_{fraca-*} \int_M \phi d\mu$.

Como o limite é único e

$\int_M \phi \circ f d\mu_n \underbrace{=}_{\mu_n \in \mathcal{M}_f} \int_M \phi d\mu_n \Rightarrow \int_M \phi \circ f d\mu = \int_M \phi d\mu$

e já que $\phi \in C^0(M)$ é qualquer, obtemos μ f-invariante.

Referências

[1] Cao Y., 2003, Non-zero Lyapunov exponents and uniform hyperbolicity, Nonlinearity 16 1473-1479.

[2] Alves J.F., Bonatti C., Viana M., SRB measures for partially hyperbolic systems with mostly expanding central direction, Invent Math 140 (2000), 351-398. MR 2001j:37063b.

[3] Alves J, Araujo V and Saussol B, 2003, On the uniform hyperbolicity of some nonuniformly hyperbolic systems, Proc. Am. Math. Soc. 131 1303-9.

[4] Castro A., Oliveira K., Pinheiro V., 2006, Shadowing by non-uniformly hyperbolic periodic points and uniform hyperbolic, Nonlinearity 20 75-85.

[5] Castro A., 2004 Fast mixing for attractors with mostly contracting central direction, Ergod. Theory Dyn. Syst. 24 17-44.

[6] Bonatti C., Viana M., SRB measures for partially hyperbolic systems with mostly contracting central direction, Israel J. Math. 115 (2000), 157-193. MR 2001j:37063a.

[7] Katok A., Hasselblat B., Modern Theory of Dynamical Systems 2006, 8th Ed.

[8] Mañé R., Hyperbolicity, sinks and measure in one-dimensional dynamics, Comm. in Math. Phys. 100 (1985) 495-524. Erratum, Comm. in Math. Phys. 112 (1987) 721-724. MR 87f:58131; MR 88i:58139. 2001.

[9] Mañé R., Ergodic Theory and Differentiable Dynamics, Springer-Verlag, 1987.

[10] Pliss V., On a conjecture due to Smale, Diff. Uravnenija 8 (1972), 262-268. MR 45:8957

[11] Ruelle D., 1989, the thermodynamical formalism for expanding maps, Comm. Math. Phys. 125 239-62.

[12] Shub M., Global Stability of Dynamical Systems, Springer-Verlag, New York (1987). MR 87m:58086

[13] Mañé R, 1988, A proof of the C^1 stability conjecture, Publ. Math. I.H.E.S. 66 161-210.

[14] Oseledets V, 1968, a multiplicative ergodic theorem: Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems, Trans. Moscow Math Soc. 19 197-231.

Index