



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



VARIETADES INSTÁVEIS E CENTRAIS

Kleyber Mota da Cunha
Orientador: Prof. Dr. Vilton Pinheiro

Salvador-Bahia

Dezembro 2006

VARIETADES INSTÁVEIS E CENTRAIS

Kleyber Mota da Cunha

Dissertação apresentada ao colegiado do curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Vilton Pinheiro (Orientador)

Prof. Dr. José Ferreira Alves

Prof. Dr. Alberto Pinto

KLEYBER MOTA DA CUNHA

“VARIEDADES CENTRAIS” /Salvador-Ba, 2006.

Orientador: Dr. Vilton Pinheiro (UFBA).

Dissertação de Mestrado apresentada ao curso de Pós-graduação em Matemática da UFBA, ?? páginas.

Palavras-Chave: variedade instável e variedades centrais.

Resumo

Neste trabalho, mostraremos que dada uma aplicação Lipschitz $f : D \subset E \rightarrow E$, onde E é espaço de Banach, bem próxima, na topologia C^r , de um automorfismo linear hiperbólico, $T : E \rightarrow E$, a variedade instável de f é bem próxima da variedade instável de T .

É mostrado também que a variedade instável de f possui algumas propriedades em comum com a variedade instável de T , como ser f -invariante, e ser constituída dos pontos cujo os iterados para trás tende ao ponto fixo de f , neste conjunto. Em particular, mostraremos também que a variedade instável de f é Lipschitz e tão diferenciável quanto f .

Em seguida estenderemos este resultado para um caso mais geral, que é a variedade central.

Abstract

In this work, we will show that given an Lipschitz map $f : D \subset E \rightarrow E$, where E is a Banach space, well close, in the C^r topology, of a hyperbolic automorphism linear map, $T : E \rightarrow E$, the unstable manifold of f it is very close of the unstable manifold of T .

It is also shown that the unstable manifold of f has some properties in common with the unstable manifold of T , how to be f -invariante, and to be constituted of the points whose backwards iterates tends to the fixed point of f , in this set. In particular we will also show that the unstable variety of f is lipschitz and so differentiable as f .

Soon after we will extend this result for a more general case, that it is the central manifold.

Sumário

Resumo	iv
Abstract	v
Introdução	1
1 Preliminares	3
2 Variedade Instável	8
3 O caso f diferenciável	22
4 Variedades Centrais	34
4.1 A não unicidade da Variedade Central	41
Referências	53

Introdução

Dada uma aplicação $f : E \rightarrow E$, onde E espaço de Banach, nós definimos o conjunto instável de um ponto $p \in E$, em relação a f , sendo o conjunto dos pontos $q \in E$ que são assintóticos a p no passado. Sob certas condições, nós mostraremos que esse conjunto possui certas propriedades interessantes.

Esta dissertação está estruturada em quatro capítulos.

No primeiro capítulo, apresentamos algumas definições e alguns resultados de Análise, que serão utilizados no decorrer da dissertação. Omitiremos algumas demonstrações por se tratarem de resultados conhecidos.

No segundo e terceiro capítulo, nós provamos, respectivamente, o Teorema da Variedade Instável na versão lipschitz, bem como sua versão diferenciável. Este teorema é mais geral que o teorema de Grobman-Hartman, pois este nos diz que se uma aplicação $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é bem próxima de uma aplicação linear hiperbólica $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, então f é localmente topologicamente conjugada a aplicação A . Este teorema mostra ainda que a variedade instável(estável) de f é um disco topológico tangente a variedade instável(estável) de A na origem. Mas, o mesmo, não mostra que a variedade instável(estável) é diferenciável.

O Teorema da Variedade Instável(Estável) prova que a variedade instável(estável) é uma variedade mergulhada C^k que pode ser representada por um gráfico.

Para provar este teorema, existem basicamente dois tipos de provas: o método da transformação do gráfico de Hadamard(1901) e o método da variação de parâmetros de Perron(1929). Nós seguiremos, na prova do teorema, a idéia de Hadamard.

Em seguida, no quarto capítulo, nós provamos o Teorema da Variedade Central, que

é uma modificação do Teorema da Variedade Instável, visto que, neste teorema a aplicação linear possui autovalores sobre o círculo unitário. A versão diferenciável também é provada.

Ainda neste capítulo, mostraremos através de um exemplo simples, que ao contrário da variedade instável(estável), a variedade central não é única.

No apêndice mostramos o Teorema da seção C^r , no qual diz que existe uma única seção invariante diferenciável para uma determinada aplicação que tem contração nas fibras. Este teorema é utilizado para provar a versão diferenciável do Teorema da Variedade Central.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos algumas definições, proposições, bem como alguns teoremas que serão de grande utilidade para o desenvolvimento deste trabalho.

1.1 DEFINIÇÃO. *Seja E e F espaços de Banach. Dizemos que uma aplicação $f : E \rightarrow F$ é Lipschitziana se existe $k > 0$ tal que, para quaisquer $x, y \in E$, tem-se $\|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\|$. O menor valor de k para que a desigualdade anterior seja válida é chamada constante de Lipschitz, e denotada por $\text{Lip}(f)$. Quando $\text{Lip}(f) < 1$, f é dita uma contração.*

1.2 Observação. *A continuidade de uma aplicação pode ser definida da seguinte maneira: Uma aplicação $f : U \subset E \rightarrow F$ é contínua em $p \in U$ se dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$f(B_\delta(p)) \subset B_\varepsilon(f(p)).$$

1.3 Observação. *Note que toda aplicação Lipschitziana é contínua, pois dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$. Então $\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\| < k \cdot \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$.*

1.4 Teorema. *Seja $f : E \rightarrow F$ uma aplicação, onde E e F são espaços vetoriais sobre um corpo \mathbb{F} . Se o $\text{graf}(f)$ for um subespaço vetorial de $E \times F$ então f é linear.*

Prova: Seja $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \text{graf}(f)$ e $\lambda \in \mathbb{F}$, ou seja, $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$. Como $\text{graf}(f)$ é subespaço linear, temos que $(x_1, y_1) + \lambda(x_2, y_2) \in \text{graf}(f)$, ou seja, $\exists (x_3, y_3) \in \text{graf}(f)$, tal que $y_3 = f(x_3)$ e $(x_1, y_1) + \lambda(x_2, y_2) = (x_3, y_3)$. Assim $x_3 = x_1 + \lambda x_2$ e $y_3 = y_1 + \lambda y_2$. Logo

$$y_3 = f(x_3) = f(x_1 + \lambda x_2) = y_1 + \lambda y_2 = f(x_1) + \lambda f(x_2).$$



1.5 Observação. *A recíproca deste Teorema não é verdadeira. Basta considerarmos o seguinte contra-exemplo:*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ v &\longmapsto |v|^2 \cdot v. \end{aligned}$$

Vemos que f leva subespaços lineares do \mathbb{R}^2 em subespaços lineares do \mathbb{R}^2 , mas f não é linear.

1.6 DEFINIÇÃO (PONTO FIXO). *Seja M um conjunto. Um ponto fixo de uma aplicação $f : M \rightarrow M$ é um elemento $x \in M$ satisfazendo $f(x) = x$.*

1.7 Teorema (Ponto Fixo de Banach). *Seja F um subconjunto fechado do espaço métrico completo (X, d) . Se a aplicação $f : F \rightarrow F$ é uma contração então f possui um, e somente um, ponto fixo.*

Prova: Ver em [6].

1.8 Teorema (Perturbação da Identidade). *Seja $\varphi : U \subset F \rightarrow F$ contração, $U \subset F$ aberto, F espaço de Banach. A aplicação $f : U \rightarrow F$ dada por $f(x) = x + \varphi(x)$ é um homeomorfismo de U sobre o conjunto aberto $f(U) \subset F$. Além disso, se $U = F$, têm-se $f(U) = F$*

Prova: Ver em [5].

1.9 Lema. *Sejam F um espaço de Banach, X um espaço métrico e f, g duas funções contínuas de X em F . Suponha que f seja injetiva e f^{-1} seja Lipschitz. Se g satisfaz a condição $\text{Lip}(f - g) < [\text{Lip}(f^{-1})]^{-1}$, então g também é injetiva e*

$$\begin{aligned} \text{Lip}(g^{-1}) &\leq \{[\text{Lip}(f^{-1})]^{-1} - \text{Lip}(f - g)\}^{-1} \\ &= \frac{\text{Lip}(f^{-1})}{1 - \text{Lip}(g - f)\text{Lip}(f^{-1})} \end{aligned}$$

Prova: Como f é injetiva e f^{-1} é Lipschitz, obtemos para $x = f^{-1}(z)$ e $y = f^{-1}(w)$:

$$\begin{aligned} \|f^{-1}(z) - f^{-1}(w)\| &\leq \text{Lip}(f^{-1})d(z, w) \implies \\ \|f^{-1}(z) - f^{-1}(w)\|^{-1} &\geq \text{Lip}(f^{-1})^{-1}d(z, w)^{-1} \implies \\ d(x, y)^{-1} &\geq \text{Lip}(f^{-1})^{-1} \|f(x) - f(y)\|^{-1} \implies \\ \|f(x) - f(y)\| &\geq \text{Lip}(f^{-1})^{-1}d(x, y) \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned}
\|g(x) - g(y)\| &= \|g(x) - g(y) + f(x) - f(x) + f(y) - f(y)\| \\
&\geq \|f(x) - f(y)\| - \|(g - f)(x) - (g - f)(y)\| \text{ e por (1.1)} \\
&\geq [\text{Lip}(f^{-1})]^{-1}d(x, y) - \text{Lip}(f - g)d(x, y) \\
&= \{[\text{Lip}(f^{-1})]^{-1} - \text{Lip}(f - g)\}d(x, y)
\end{aligned}$$

A última desigualdade nos dá que g é injetiva, pois se $g(x) = g(y) \Rightarrow \|g(x) - g(y)\| = 0$ e usando o fato de que $[\text{Lip}(f^{-1})]^{-1} - \text{Lip}(f - g) > 0$, por hipótese, temos $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$.

Agora, sendo $x = g^{-1}(z)$ e $y = g^{-1}(w)$, obtemos novamente da última desigualdade

$$\begin{aligned}
d(z, w) &\geq \{[\text{Lip}(f^{-1})]^{-1} - \text{Lip}(f - g)\} \|g^{-1}(z) - g^{-1}(w)\| \Rightarrow \\
d(z, w)^{-1} &\leq \{[\text{Lip}(f^{-1})]^{-1} - \text{Lip}(f - g)\}^{-1} \|g^{-1}(z) - g^{-1}(w)\|^{-1} \Rightarrow \\
\|g^{-1}(z) - g^{-1}(w)\| &\leq \{[\text{Lip}(f^{-1})]^{-1} - \text{Lip}(f - g)\}^{-1} d(z, w). \tag{1.2}
\end{aligned}$$

Assim de (1.2), obtemos o resultado. ■

1.10 Teorema. *Seja f um homeomorfismo de um subconjunto aberto U de um espaço de Banach E sobre um aberto V de um espaço de Banach F , cuja a inversa é Lipschitz. Seja h uma aplicação contínua, Lipschitz de U em F satisfazendo $\text{Lip}(h)\text{Lip}(f^{-1}) < 1$. Seja $g = f + h$. Então g é um homeomorfismo de U sobre um subconjunto aberto de F , com inversa Lipschitz.*

Prova: Seja $\varphi = g \circ f^{-1} = (f + h) \circ f^{-1} = \text{id} + hf^{-1}$. Como h e f^{-1} são Lipschitz temos que hf^{-1} é Lipschitz e

$$\lambda = \text{Lip}(hf^{-1}) \leq \text{Lip}(h)\text{Lip}(f^{-1}) < 1$$

Assim hf^{-1} é uma contração. Logo pelo Teorema 1.8 (note que $\varphi : f(U) \subset F \rightarrow F$) temos que φ é um homeomorfismo de $f(U)$ sobre o conjunto aberto $\varphi(f(U))$. Obtemos assim que g é um homeomorfismo de U sobre $g(U)$, pois composta de homeomorfismos é um homeomorfismo, e

$$\varphi(f(U)) = g \circ f^{-1}(f(U)) = g(U) \Rightarrow g(U) \text{ é aberto.}$$

Resta agora mostrarmos que g^{-1} é Lipschitz. Para isto basta observarmos que

$$\begin{aligned} \|\varphi(x) - \varphi(y)\| &= \|x + hf^{-1}(x) - y - hf^{-1}(y)\| \\ &\geq \|x - y\| - \|hf^{-1}(x) - hf^{-1}(y)\| \\ &\geq \|x - y\| - \lambda \|x - y\| \\ &= (1 - \lambda) \|x - y\| \end{aligned}$$

Da última desigualdade temos que φ é injetiva. Logo fazendo $\varphi(x) = w$ e $\varphi(y) = z$ temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|w - z\|} &\leq \frac{1}{1 - \lambda} \cdot \frac{1}{\|\varphi^{-1}(w) - \varphi^{-1}(z)\|} \implies \\ \|\varphi^{-1}(w) - \varphi^{-1}(z)\| &\leq \frac{1}{1 - \lambda} \|w - z\| \implies \varphi^{-1} \text{ é Lipschitz.} \end{aligned}$$

Mas $\varphi^{-1} = f \circ g^{-1} \implies g^{-1} = f^{-1} \circ \varphi^{-1}$. Como φ^{-1} e f^{-1} são Lipschitz, temos que g^{-1} é Lipschitz.

■

1.11 Proposição. *Seja U um subconjunto aberto de um espaço de Banach E e g um homeomorfismo de U sobre um subconjunto aberto de um espaço de Banach F . Se g^{-1} é Lipschitz com $Lip(g^{-1}) < \lambda$, então $\overline{B_{\frac{r}{\lambda}}}(g(x)) \subset g(\overline{B_r}(x))$.*

Prova: Como g^{-1} é Lipschitz, temos que g^{-1} é contínua bastando tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{Lip(g^{-1})}$, pela Observação 1.3. Usando agora o fato de que g^{-1} é contínua em $g(x)$, pela Observação 1.2 temos que:

$$g^{-1}(B_{\frac{r}{\lambda}}(g(x))) \subset B_r(x) \implies B_{\frac{r}{\lambda}}(g(x)) \subset g(B_r(x))$$

Passando agora o fecho, obtemos:

$$\overline{B_{\frac{r}{\lambda}}(g(x))} \subset \overline{g(B_r(x))}.$$

Agora resta-nos mostrar que $\overline{g(B_r(x))} \subset g(\overline{B_r}(x))$. De fato, seja

$$y \in \overline{g(B_r(x))} \implies \exists y_n \in g(B_r(x)), \text{ tal que } y_n \rightarrow y.$$

Agora

$$y_n \in g(B_r(x)) \implies \exists x_n \in B_r(x), \text{ tal que } g(x_n) = y_n$$

Usando agora o fato de que g^{-1} é contínua, temos:

$$y_n \rightarrow y \Rightarrow x_n = g^{-1}(y_n) \rightarrow g^{-1}(y) \Rightarrow g^{-1}(y) \in \overline{B_r(x)} \Rightarrow y \in g(\overline{B_r(x)}) \Rightarrow \\ \overline{g(B_r(x))} \subset g(\overline{B_r(x)})$$

■

Capítulo 2

Variedade Instável

Neste capítulo iremos provar o Teorema da Variedade Instável Local para um ponto.

2.1 DEFINIÇÃO. *Seja $T : E \rightarrow E$ um endomorfismo linear, E um espaço de Banach. Dizemos que T é hiperbólico se e somente se existe uma decomposição em soma direta $E = E_1 \oplus E_2$, onde E_1 e E_2 são invariantes por T e constantes $c > 0$ e $\lambda < 1$ tal que:*

(1) *A restrição T_1 de T a E_1 é uma expansão, ou seja:*

$$\forall n \leq 0, \quad \|T_1^n\| \leq c\lambda^{-n}.$$

(2) *A restrição T_2 de T a E_2 é uma contração, ou seja:*

$$\forall n \geq 0, \quad \|T_2^n\| \leq c\lambda^n.$$

2.2 Proposição (Norma adaptada). *Seja T como acima. Então existe uma métrica C^∞ em E e uma constante η , $0 < \eta < 1$ tal que*

$$\|T|_{E_2}\| < \eta \quad e \quad \|T^{-1}|_{E_1}\| < \eta.$$

Prova: Ver em [8].

De agora em diante, denota-se por $E_i(r)$, $i = 1, 2$ a bola fechada de raio r e centro na origem em E_i .

2.3 Teorema (Teorema da Variedade Instável Local para um Ponto). *Seja $T : E \rightarrow E$ um automorfismo hiperbólico de um espaço de Banach E com decomposição $E = E_1 \oplus E_2 = E_1 \times E_2$ e suponha que a norma é adaptada, isto é, nós podemos encontrar $0 < \lambda < 1$, tal que*

$$\| T |_{E_2} \| < \lambda \quad e \quad \| T^{-1} |_{E_1} \| < \lambda.$$

Então existe um $\varepsilon > 0$, que depende somente de λ , e constante $\delta = \delta(\lambda, \varepsilon, r)$ tal que para toda aplicação Lipschitz $f : E_1(r) \times E_2(r) \rightarrow E$, com $\| f(0) \| < \delta$ e $\text{Lip}(f - T) < \varepsilon$, existe uma aplicação $g : E_1(r) \rightarrow E_2(r)$ cujo o gráfico nos dá uma variedade instável para f .

Além disso g e seu gráfico tem as seguintes propriedades:

- (1) *g é Lipschitz, com $\text{Lip}(g) \leq 1$. Além disto, a restrição de f^{-1} ao gráfico de g é contração e deste modo tem um ponto fixo p sobre o gráfico de g .*
- (2) *O gráfico de g é igual a $\bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(E_1(r), E_2(r))$. (Esta intersecção é o conjunto estável local de p , $W_{loc}^u(p)$.)*
- (3) *Se f é C^k então g é C^k .*
- (4) *Se f é C^1 com $f(0) = 0$, $Df(0) = T$, então o gráfico de g é tangente a E_1 em 0 .*
- (5) *Se $f(0) = 0$ e f é invertível, o gráfico de g consiste dos pontos em $E_1(r) \times E_2(r)$ cujo os iterados para trás tende a 0 .*
- (6) *Se $f(0) = 0$, um ponto x pertence ao gráfico de g se e somente se existe uma seqüência x_n , $n \geq 0$, em $E_1(r) \times E_2(r)$, tendendo a 0 tal que $f^n(x_n) = x$.*

Nós obtemos a variedade estável local trocando T por T^{-1} , E_1 por E_2 .

Antes de começarmos a demonstrar o Teorema, iremos fixar algumas notações:

$$T_i = T |_{E_i}, \quad p_i = \text{projecção de } E \text{ sobre } E_i, \quad f_i = p_i \circ f, \quad i = 1, 2.$$

Nós usaremos, por conveniência, a norma box $\| \|_{\text{box}} = \sup(\| \|_{E_1}, \| \|_{E_2})$, isto é, $\| x \| = \sup(\| p_1(x) \|, \| p_2(x) \|)$.

2.4 Observação. Usando o fato de que $E = E_1 \oplus E_2 = E_1 \times E_2$ e essa decomposição é invariante por T , para $x \in E_1$ e $y \in E_2$, temos que:

$$T(x, y) = T(x \oplus y) = T(x) \oplus T(y) = T_1(x) \oplus T_2(y) = (T_1(x), T_2(y)).$$

Iremos a partir de agora, estabelecer alguns resultados que utilizaremos para a demonstração do Teorema 2.3.

2.5 DEFINIÇÃO (TRANSFORMAÇÃO DE GRÁFICO). Suponhamos que nós temos uma $\sigma : E_1(r) \rightarrow E_2(r)$ para o qual $f_1 \circ (id, \sigma)$ é injetiva e $E_1(r) \subset f_1 \circ (id, \sigma)(E_1(r))$. Definimos a função $\Gamma_f(\sigma)$ por:

$$\Gamma_f(\sigma) = f_2 \circ (id, \sigma) \circ [f_1 \circ (id, \sigma)]^{-1} |_{E_1(r)} .$$

Isto é ilustrado na Figura 2.1.

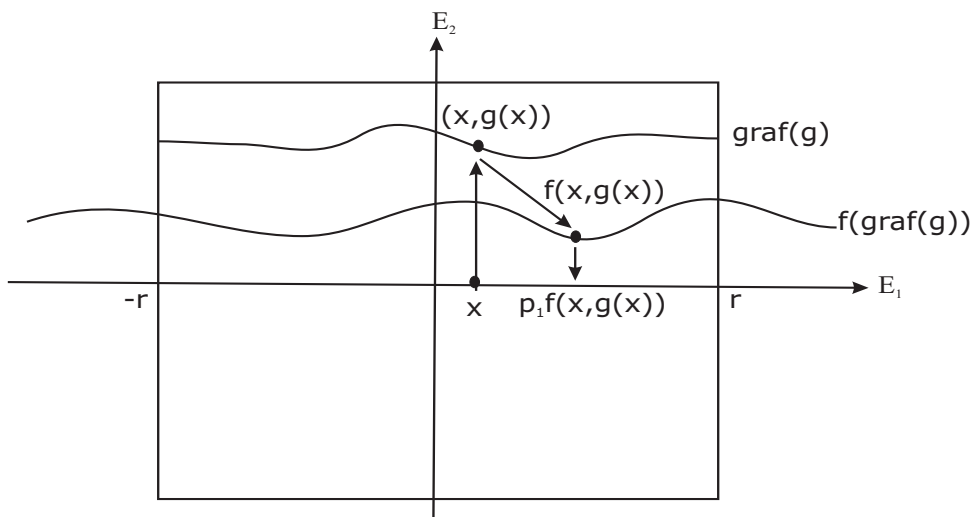


Figura 2.1: Transformação de Gráfico

Podemos notar que o gráfico de $\Gamma_f(\sigma)$ é a intersecção de $f(\text{graf de } \sigma)$ com $E_1(r) \times E_2(r)$, por isso Γ_f é chamada Transformação de Gráfico. Note que a variedade instável de T é E_1 que é o único gráfico invariante sobre Γ_T , assim existe uma esperança de encontrarmos uma variedade instável de f , pois f é bem próxima de T no sentido $\text{Lip}(f - T) < \varepsilon$, bem como um ponto fixo de Γ_f .

Seja $\text{Lip}_1(E_1(r), E_2(r))$ o conjunto das funções Lipschitz cuja constante é menor ou igual a 1. Primeiro mostraremos que Γ_f está bem definido em $\text{Lip}_1(E_1(r), E_2(r))$, depois

mostraremos que Γ_f é uma contração de $Lip_1(E_1(r), E_2(r))$ na métrica C^0 e usaremos o Teorema da Contração para garantir que Γ_f tem um único ponto fixo g .

2.6 Lema. *Se $\sigma \in Lip_1(E_1(r), E_2(r))$ temos a seguinte estimativa:*

$$Lip(f_1 \circ (id, \sigma) - T_1) \leq Lip(f - T).$$

Prova: Note que $f_1 \circ (id, \sigma) - T_1 = p_1 \circ (f - T) \circ (id, \sigma)$. De fato,

$$\begin{aligned} p_1 \circ (f - T) \circ (id, \sigma)(x) &= p_1 \circ (f - T) \circ (x, \sigma(x)) \\ &= p_1 \circ (f(x, \sigma(x)) - T(x, \sigma(x))) \\ &= f_1(x, \sigma(x)) - T_1(x) \\ &= [f_1 \circ (id, \sigma) - T_1](x) \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} Lip[f_1 \circ (id, \sigma) - T_1] &= Lip[p_1 \circ (f - T) \circ (id, \sigma)] \\ &\leq Lip(p_1)Lip(f - T)Lip(id, \sigma) \\ &\leq Lip(f - T) \end{aligned}$$

■

2.7 Lema. *Se $\varepsilon > 0$ é menor que $\frac{1}{\lambda}$ e $Lip(f - T) < \varepsilon$, então para todo $\sigma \in Lip_1(E_1(r), E_2(r))$, a aplicação $f_1 \circ (id, \sigma)$ é um homeomorfismo. Além disso, a inversa é uma função Lipschitz cuja constante Lipschitz satisfaz*

$$Lip([f_1 \circ (id, \sigma)]^{-1}) \leq \frac{1}{\frac{1}{\lambda} - \varepsilon}.$$

Prova: Pelo Lema 2.6 temos que $Lip(f_1 \circ (id, \sigma) - T_1) \leq Lip(f - T) \leq \varepsilon < \frac{1}{\lambda} < \|T_1^{-1}\|^{-1}$.

Fazendo $g = f_1 \circ (id, \sigma)$ e $f = T_1$, podemos aplicar o Teorema 1.10 onde $h = g - f$, sendo assim concluímos que $g = f_1 \circ (id, \sigma)$ é um homeomorfismo. Agora pelo Lema 1.9, pois $Lip(f - g) < [Lip(T_1^{-1})]^{-1} = \frac{1}{\lambda}$, obtemos:

$$\begin{aligned} Lip[f_1 \circ (id, \sigma)]^{-1} &\leq \frac{1}{\frac{1}{Lip(f^{-1})} - Lip(f - g)} \\ &\leq \frac{1}{\|T_1^{-1}\|^{-1} - Lip(f_1 \circ (id, \sigma) - T_1)} \\ &\leq \frac{1}{\frac{1}{\lambda} - \varepsilon}. \end{aligned}$$



2.8 Lema. *Seja $0 < 2\varepsilon < \frac{1}{\lambda} - 1$. Suponha que $Lip(f - T) < \varepsilon$ e $\|f(0)\| < r(\frac{1}{\lambda} - 1 - 2\varepsilon)$, então para todo $\sigma \in Lip_1(E_1(r), E_2(r))$, $E_1(r) \subset f_1 \circ (id, \sigma)(E_1(r))$*

Prova: Pelo Lema 2.7 temos que $Lip([f_1 \circ (id, \sigma)]^{-1}) \leq \frac{1}{\frac{1}{\lambda} - \varepsilon}$.

Fazendo agora $g = f_1 \circ (id, \sigma)$ na Proposição 1.11 e usando o fato de que $B_r(0) = E_1(r)$ obtemos:

$$\begin{aligned} B_{r(\frac{1}{\lambda} - \varepsilon)}(f_1 \circ (id, \sigma)(0)) &\subset f_1 \circ (id, \sigma)(E_1(r)) \Rightarrow \\ B_{r(\frac{1}{\lambda} - \varepsilon)}(f_1(0, \sigma(0))) &\subset f_1 \circ (id, \sigma)(E_1(r)). \end{aligned}$$

Mostraremos agora que $B_{r(\frac{1}{\lambda} - \varepsilon) - \|f_1(0, \sigma(0))\|}(0) \subset B_{r(\frac{1}{\lambda} - \varepsilon)}(f_1(0, \sigma(0)))$.

Seja $x \in B_{r(\frac{1}{\lambda} - \varepsilon) - \|f_1(0, \sigma(0))\|}(0)$, logo

$$\|x\| < r(\frac{1}{\lambda} - \varepsilon) - \|f_1(0, \sigma(0))\| \Rightarrow \|x\| + \|f_1(0, \sigma(0))\| < r(\frac{1}{\lambda} - \varepsilon),$$

mas

$$\|x - f_1(0, \sigma(0))\| \leq \|x\| + \|f_1(0, \sigma(0))\| < r(\frac{1}{\lambda} - \varepsilon) \Rightarrow x \in B_{r(\frac{1}{\lambda} - \varepsilon)}(f_1(0, \sigma(0))).$$

Seja $\rho = r(\frac{1}{\lambda} - \varepsilon) - \|f_1(0, \sigma(0))\|$. Resta-nos mostrar que $\rho \geq r$, pois assim

$$E_1(r) = B_r(0) \subset B_\rho(0) \subset B_{r(\frac{1}{\lambda} - \varepsilon)}(f_1(0, \sigma(0))) \subset f_1 \circ (id, \sigma)(E_1(r)).$$

$$\begin{aligned} \|f_1(0, \sigma(0))\| &\leq \|f_1(0, 0)\| + \|f_1(0, \sigma(0)) - f_1(0, 0)\| \\ &\leq \|f_1(0, 0)\| + \|f_1(0, \sigma(0)) - p_1T(0, \sigma(0)) + p_1T(0, \sigma(0)) \\ &\quad - f_1(0, 0) + p_1T(0, 0) - p_1T(0, 0)\| \\ &\leq \|f_1(0, 0)\| + \|(f_1 - p_1T)(0, \sigma(0)) + p_1T(0, \sigma(0)) - (f_1 - p_1T)(0, 0) \\ &\quad - p_1T(0, 0)\| \\ &\leq \|f_1(0, 0)\| + \|(f_1 - p_1T)(0, \sigma(0)) - (f_1 - p_1T)(0, 0)\|. \end{aligned}$$

Como $\|(f_1 - p_1T)(0, \sigma(0)) - (f_1 - p_1T)(0, 0)\| \leq \|(f - T)(0, \sigma(0)) - (f - T)(0, 0)\|$

e $\|f_1(0,0)\| < \|f(0,0)\|$, pois estamos utilizando a norma do sup, temos:

$$\begin{aligned} \|f_1(0,\sigma(0))\| &\leq \|f(0,0)\| + \|(f-T)(0,\sigma(0)) - (f-T)(0,0)\| \\ &\leq \|f(0,0)\| + \text{Lip}(f-T) \|(0,\sigma(0)) - (0,0)\| \\ &\leq \|f(0,0)\| + \varepsilon r \\ &\leq r\left(\frac{1}{\lambda} - 1 - 2\varepsilon\right) + \varepsilon r \\ &= r\left(\frac{1}{\lambda} - 1 - \varepsilon\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \underbrace{r\left(\frac{1}{\lambda} - \varepsilon\right) - \|f_1(0,\sigma(0))\|}_{\rho} - r \Rightarrow r \leq \rho.$$

■

2.9 Lema. *Seja $0 < 2\varepsilon < 1 - \lambda$ e $\delta < r \min\{\frac{1}{\lambda} - 1 - 2\varepsilon, 1 - \varepsilon - \lambda\}$. Se f satisfaz $\text{Lip}(f-T) < \varepsilon$ e $\|f(0)\| < \delta$, então para todo $\sigma \in \text{Lip}_1(E_1(r), E_2(r))$ a aplicação $\Gamma_f(\sigma)$ está bem definida sobre $E_1(r)$ e $\Gamma_f(\sigma) \in \text{Lip}_1(E_1(r), E_2(r))$.*

Prova: Primeiro mostraremos que $\text{Lip}([f_1 \circ (id, \sigma)]^{-1}) \leq \frac{1}{\frac{1}{\lambda} - \varepsilon} < 1$. Para isto note que $\frac{1}{\lambda} - 1 > 1 - \lambda$, pois $\frac{1}{\lambda} > 1$ e $0 < \lambda < 1$. Agora, por hipótese

$$2\varepsilon < 1 - \lambda \Rightarrow \varepsilon < \frac{1 - \lambda}{2} < \frac{1}{\lambda} - 1 \Rightarrow \frac{1}{\lambda} - \varepsilon > 1,$$

como queríamos.

Agora como $\Gamma_f(\sigma) = f_2 \circ (id, \sigma) \circ [f_1 \circ (id, \sigma)]^{-1} |_{E_1(r)}$, temos:

$$\begin{aligned} \text{Lip}(\Gamma_f(\sigma)) &\leq \text{Lip}(f_2 \circ (id, \sigma)) \cdot \text{Lip}([f_1 \circ (id, \sigma)]^{-1}) \\ &\leq \text{Lip}(f_2 \circ (id, \sigma)) \\ &\leq \text{Lip}(f_2) \cdot \text{Lip}(id, \sigma) \\ &\leq \text{Lip}(f_2) = \text{Lip}(T_2 + p_2(f - T)) \\ &\leq \text{Lip}(T_2) + \text{Lip}(p_2(f - T)) \\ &\leq \text{Lip}(T_2) + \text{Lip}((f - T)) \\ &\leq \lambda + \varepsilon \leq 1, \end{aligned}$$

pois como $2\varepsilon < 1 - \lambda \Rightarrow \varepsilon < 1 - \lambda \Rightarrow \varepsilon + \lambda < 1$.

Para mostrar que $\Gamma_f(\sigma) \in \text{Lip}(E_1(r), E_2(r))$, resta mostrar que $\Gamma_f(\sigma)(E_1(r)) \subset E_2(r)$.

Já sabemos pelo Lema 2.8 que $E_1(r) \subset f_1 \circ (id, \sigma)(E_1(r)) \Rightarrow [f_1 \circ (id, \sigma)]^{-1}(E_1(r)) \subset E_1(r)$, então basta mostrar que $f_2 \circ (id, \sigma)(E_1(r)) \subset E_2(r)$. Para isto seja $x \in E_1(r)$, então:

$$\begin{aligned}
 \| f_2(x, \sigma(x)) \| &\leq \| f_2(x, \sigma(x)) - p_2 T(x, \sigma(x)) + p_2 T(x, \sigma(x)) \| \\
 &\leq \| f_2(x, \sigma(x)) - p_2 T(x, \sigma(x)) \| + \| p_2 T(x, \sigma(x)) \| \\
 &\leq \| f_2(x, \sigma(x)) - p_2 T(x, \sigma(x)) \| + \| T_2 \| \| \sigma(x) \| \\
 &\leq \| (f - T)(x, \sigma(x)) \| + \lambda r \\
 &\leq \| (f - T)(x, \sigma(x)) - (f - T)(0, 0) \| + \| (f - T)(0, 0) \| \lambda r \\
 &\leq \text{Lip}(f - T) \| (x, \sigma(x)) \| + \| f(0) \| + \lambda r \\
 &\leq \varepsilon r + \delta + \lambda r \\
 &\leq \varepsilon r + r(1 - \varepsilon - \lambda) + \lambda r \\
 &\leq r.
 \end{aligned}$$

Assim como $f_2(x, \sigma(x)) \in E_2$ e $\| f_2(x, \sigma(x)) \| < r \Rightarrow f_2(x, \sigma(x)) \in E_2(r)$.

■

2.10 Lema. *Seja (x, y) um ponto de $E_1(r) \times E_2(r)$ tal que $f_1(x, y)$ esteja em $E_1(r)$. Para todo $\sigma \in \text{Lip}(E_1(r), E_2(r))$ a seguinte desigualdade vale:*

$$\| f_2(x, y) - \Gamma_f \sigma(f_1(x, y)) \| \leq (\lambda + 2\varepsilon) \| y - \sigma(x) \|.$$

Este lema está ilustrado na Figura 2.2.

Prova:

$$\begin{aligned}
 \| f_2(x, y) - \Gamma_f \sigma(f_1(x, y)) \| &= \| f_2(x, y) - f_2(x, \sigma(x)) + f_2(x, \sigma(x)) - \Gamma_f \sigma(f_1(x, y)) \| \\
 &\leq \| f_2(x, \sigma(x)) - \Gamma_f \sigma(f_1(x, y)) \| + \| f_2(x, y) - f_2(x, \sigma(x)) \| \\
 &= \| \Gamma_f \sigma(f_1(x, \sigma(x))) - \Gamma_f \sigma(f_1(x, y)) \| \\
 &\quad + \| f_2(x, y) - f_2(x, \sigma(x)) \|,
 \end{aligned}$$

pois $\Gamma_f(\sigma) = f_2 \circ (id, \sigma) \circ [f_1 \circ (id, \sigma)]^{-1} \Rightarrow \Gamma_f(\sigma) \circ [f_1 \circ (id, \sigma)] = f_2 \circ (id, \sigma) \Rightarrow \Gamma_f(\sigma)(f_1(x, \sigma(x))) = f_2(x, \sigma(x))$.

Como p_2 e f são Lipschitz, temos que $f_2 = p_2 \circ f$ também é Lipschitz. Logo

$$\begin{aligned}
 \| f_2(x, y) - \Gamma_f \sigma(f_1(x, y)) \| &\leq \text{Lip}(f_2) \| (x, y) - (x, \sigma(x)) \| \\
 &\quad + \text{Lip}(\Gamma_f \sigma) \| f_1(x, \sigma(x)) - f_1(x, y) \|
 \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.9 temos que $\text{Lip}(\Gamma_f \sigma) \leq 1$. Observe também que

$$\begin{aligned} \text{Lip}(f_2) &= \text{Lip}(f_2 - p_2 T + p_2 T) \\ &= \text{Lip}(T_2) + \text{Lip}(p_2(f - T)) \\ &\leq \text{Lip}(T_2) + \text{Lip}(f - T) \\ &\leq \lambda + \varepsilon. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \| f_2(x, y) - \Gamma_f \sigma(f_1(x, y)) \| &\leq (\lambda + \varepsilon) \| y - \sigma(x) \| + \| f_1(x, \sigma(x)) - f_1(x, y) \| \\ &\leq (\lambda + \varepsilon) \| y - \sigma(x) \| + \| f_1(x, \sigma(x)) - p_1 T(x, \sigma(x)) \\ &\quad + p_1 T(x, \sigma(x)) + p_1 T(x, y) - p_1 T(x, y) - f_1(x, y) \| \\ &\leq (\lambda + \varepsilon) \| y - \sigma(x) \| + \| (f_1 - p_1 T)(x, \sigma(x)) \\ &\quad - (f_1 - p_1 T)(x, y) \| + \| p_1 T(x, \sigma(x)) - p_1 T(x, y) \| \\ &\leq (\lambda + \varepsilon) \| y - \sigma(x) \| + \text{Lip}(f_1 - p_1 T) \| (x, \sigma(x)) - (x, y) \| \\ &\quad + \| T_1(x) - T_1(x) \| \\ &\leq \{(\lambda + \varepsilon) + \text{Lip}(f - T)\} \| y - \sigma(x) \| \\ &\leq (\lambda + \varepsilon + \varepsilon) \| y - \sigma(x) \| \\ &\leq (\lambda + 2\varepsilon) \| y - \sigma(x) \|. \end{aligned}$$

■

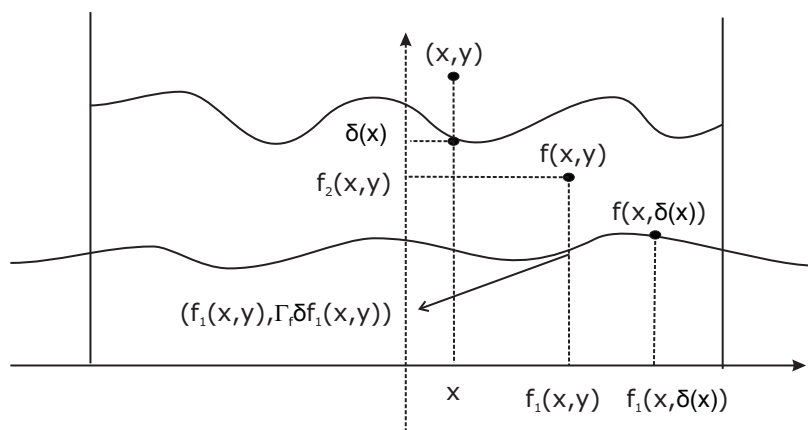


Figura 2.2: Lema 2.10.

2.11 Lema. Na situação anterior Γ_f contrai na distância C^0 por um fator no máximo $\lambda + 2\varepsilon$.

Prova: Seja $\sigma_1, \sigma_2 \in \text{Lip}_1(E_1(r), E_2(r))$, $z \in E_1(r)$ e $(x, y) = ([f_1 \circ (id, \sigma_1)]^{-1}(z), \sigma_1([f_1 \circ (id, \sigma_1)]^{-1}(z)))$, ou seja $(x, y) \in \text{graf}(\sigma_1)$.

Aplicando o Lema 2.10 para $\sigma = \sigma_2$ em (x, y) temos:

$$\| f_2(x, y) - \Gamma_f \sigma_2(f_1(x, y)) \| \leq (\lambda + 2\varepsilon) \| y - \sigma_2(x) \| .$$

Mas note que

$$\begin{aligned} \Gamma_f \sigma_1(z) &= f_2 \circ (id, \sigma_1) \circ \underbrace{[f_1 \circ (id, \sigma_1)]^{-1}(z)}_x \\ &= f_2 \circ (id, \sigma_1)(x) \\ &= f_2(x, \sigma_1(x)) = f_2(x, y) \end{aligned}$$

e que

$$x = [f_1 \circ (id, \sigma_1)]^{-1}(z) \Rightarrow [f_1 \circ (id, \sigma_1)](x) = z \Rightarrow z = f_1(x, \sigma_1(x)) = f_1(x, y).$$

Então

$$\begin{aligned} \| \Gamma_f \sigma_1 - \Gamma_f \sigma_2 \| &= \sup_{z \in E_1(r)} \| \Gamma_f \sigma_1(z) - \Gamma_f \sigma_2(z) \| \\ &\leq (\lambda + 2\varepsilon) \sup_{z \in E_1(r)} \| \sigma_1([f_1 \circ (id, \sigma_1)]^{-1}(z)) - \sigma_2([f_1 \circ (id, \sigma_1)]^{-1}(z)) \| \\ &\leq (\lambda + 2\varepsilon) \sup_{z \in E_1(r)} \| \sigma_1(z) - \sigma_2(z) \| \\ &= (\lambda + 2\varepsilon) \| \sigma_1 - \sigma_2 \|, \end{aligned}$$

onde na penúltima desigualdade utilizamos o fato de que $[f_1 \circ (id, \sigma_1)]^{-1}(E_1(r)) \subset E_1(r) \Rightarrow$

$$\sup_{z \in E_1(r)} \| \sigma_1([f_1 \circ (id, \sigma_1)]^{-1}(z)) \| \leq \sup_{z \in E_1(r)} \| \sigma_1(z) \|.$$

■

2.12 Proposição. Se $\text{Lip}(f - T) < \varepsilon < \frac{1 - \lambda}{2} e$

$$\| f(0) \| \leq \delta < r \min \left\{ \frac{1}{\lambda} - 1 - 2\varepsilon, 1 - \varepsilon - \lambda \right\}$$

então a transformação de gráfico Γ_f tem um único ponto fixo $g \in \text{Lip}_1(E_1(r), E_2(r))$.

Prova: Pelo Lema 2.11 temos que

$$\text{Lip}(\Gamma_f) \leq \lambda + 2\varepsilon < \lambda + 2 \cdot \frac{1 - \lambda}{2} = 1 \Rightarrow \Gamma_f \text{ é uma contração.}$$

Afirmção: $\text{Lip}_1(E_1(r), E_2(r)) \subset C^0(E_1(r), E_2(r))$ é fechado.

De fato, utilizando a norma da convergência uniforme, seja $f_n \in \text{Lip}_1(E_1(r), E_2(r))$, tal que $f_n \xrightarrow{u} f$. Assim

$$\begin{aligned} \| f(x) - f(y) \| &\leq \| f(x) - f_n(x) \| + \| f_n(x) - f_n(y) \| + \| f_n(y) - f(y) \| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \| x - y \| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon + \| x - y \| . \end{aligned}$$

Fazendo ε tender a zero, obtemos que

$$\| f(x) - f(y) \| \leq \| x - y \| \Rightarrow f \in \text{Lip}_1(E_1(r), E_2(r)).$$

Assim pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach (Teorema 1.7) existe um único ponto fixo de Γ_f em $\text{Lip}_1(E_1(r), E_2(r))$. Chamemos de g este ponto fixo. ■

Agora provaremos o resultado principal, que é o Teorema 2.3.

Prova: Por construção sabemos que $\text{Lip}(g) \leq 1$.

Para ver que $f^{-1}|_{\text{graf}(g)}$ é uma contração, note que quando $(x, g(x)) = f(y, g(y)) \Rightarrow x = f_1(x, g(y)) = f_1 \circ (id, g)(y) = p_1 \circ f(y, g(y))$ temos o seguinte:

$$\begin{aligned} (p_1|_{\text{graf}(g)})^{-1}(x) &= (p_1|_{\text{graf}(g)})^{-1}(x) \circ p_1 \circ f(y, g(y)) \implies \\ (p_1|_{\text{graf}(g)})^{-1}(x) &= f(y, g(y)) = (x, g(x)) \implies \\ f|_{\text{graf}(g)} \circ (p_1|_{\text{graf}(g)})^{-1}(x) &= f(x, g(x)) \implies \\ p_1 \circ f|_{\text{graf}(g)} \circ (p_1|_{\text{graf}(g)})^{-1}(x) &= p_1 \circ f(x, g(x)) \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.7 temos que $f_1 \circ (id, g)$ é homeomorfismo, logo invertível, então

$$\begin{aligned} (p_1|_{\text{graf}(g)})^{-1} \circ p_1 \circ f|_{\text{graf}(g)} \circ (p_1|_{\text{graf}(g)})^{-1}(x) &= (p_1|_{\text{graf}(g)})^{-1} \circ f_1(x, g(x)) \implies \\ f|_{\text{graf}(g)} \circ (p_1|_{\text{graf}(g)})^{-1}(x) &= (p_1|_{\text{graf}(g)})^{-1} \circ f_1(x, g(x)) \end{aligned}$$

Assim $f|_{\text{graf}(g)}$ é conjugado a $p_1 \circ f(x, g(x))$ via $(p_1|_{\text{graf}(g)})^{-1}$.

Como $p_1 \circ f(x, g(x))$ é invertível então $f|_{\text{graf}(g)}$ é invertível.

Usando o fato de que $p_1|_{\text{graf}(g)}$ é uma isometria com respeito a norma do sup (veja Proposição 2.14) e isometria preserva a constante de Lipschitz, concluimos que $\text{Lip}(f^{-1}|_{\text{graf}(g)}) < 1$, pois $\text{Lip}[f_1 \circ (id, g)]^{-1} < 1$.

Assim $f^{-1}|_{\text{graf}(g)} : \text{graf}(g) \rightarrow \text{graf}(g)$ é uma contração.

Afirmamos que o $\text{graf}(g) \subset E$ é fechado. De fato, considere a aplicação $\varphi(x, y) = y - g(x)$, que é contínua, pois g é contínua ($g \in \text{Lip}_1()E_1(r), E_2(r)$). Observe agora que $\text{graf}(g) = \varphi^{-1}(0)$. Como φ é contínua e 0 é fechado concluímos que $\text{graf}(g)$ é fechado, já que a pré-imagem de fechado por uma aplicação contínua é fechado.

Então temos que existe um único ponto fixo, que denotamos por p , de $f^{-1}|_{\text{graf}(g)}$. Logo (1) está provado.

Para provar (2) considere $(x', y') \in E_1(r) \times E_2(r)$ tal que $f(x', y') \in E_1(r) \times E_2(r)$, para que possamos considerar os iterado de f . Pelo Lema 2.10, temos

$$\| f_2(x', y') - \Gamma_f(g)(f_1(x', y')) \| \leq (\lambda + 2\varepsilon) \| y' - g(x') \| .$$

Como g é ponto fixo de Γ_f , temos que $\Gamma_f(g) = g$, logo

$$\| f_2(x', y') - g(f_1(x', y')) \| \leq (\lambda + 2\varepsilon) \| y' - g(x') \| . \quad (2.1)$$

Repetindo-se o processo para os primeiros n iterados de f , $(x', y'), f(x', y'), \dots, f^n(x', y') = (x, y)$, temos:

$$\begin{aligned} \| y - g(x) \| &= \| p_2 \circ f^n(x', y') - g \circ p_1 \circ f^n(x', y') \| \\ &= \| p_2 \circ f(f^{n-1}(x', y')) - g \circ p_1 \circ f(f^{n-1}(x', y')) \| \\ &= \| f_2(f^{n-1}(x', y')) - g \circ f_1(f^{n-1}(x', y')) \| \\ &\leq (\lambda + 2\varepsilon) \| p_2 \circ f^{n-1}(x', y') - g \circ p_1 \circ f^{n-1}(x', y') \| \text{ por (2.1)} \\ &\leq (\lambda + 2\varepsilon) \| p_2 \circ f(f^{n-2}(x', y')) - g \circ p_1 \circ f(f^{n-2}(x', y')) \| \\ &\leq (\lambda + 2\varepsilon) \| f_2(f^{n-2}(x', y')) - g \circ f_1(f^{n-2}(x', y')) \| \\ &\leq (\lambda + 2\varepsilon)^2 \| p_2 \circ f^{n-2}(x', y') - g \circ p_1 \circ f^{n-2}(x', y') \| \text{ por (2.1)} \\ &\leq (\lambda + 2\varepsilon)^n \| y' - g(x') \| \\ &\leq (\lambda + 2\varepsilon)^n (\| y' \| + \| g(x') \|) \\ &\leq (\lambda + 2\varepsilon)^n 2r \end{aligned}$$

Mas $\varepsilon < \frac{1-\lambda}{2}$, pelo Lema 2.9, assim

$$(\lambda + 2\varepsilon) < 1 \Rightarrow (\lambda + 2\varepsilon)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow y = g(x) \Rightarrow (x, y) = f^n(x', y') \in \text{graf}(g) \Rightarrow$$

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(E_1(r) \times E_2(r)) \subset \text{graf}(g).$$

Resta-nos mostrar que $\text{graf}(g) \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(E_1(r) \times E_2(r))$. Sabemos que $\text{graf}(\Gamma_f(g)) = f(\text{graf}(g)) \cap (E_1(r) \times E_2(r))$. Mas como g é o ponto fixo de Γ_f , temos que

$$\text{graf}(g) = f(\text{graf}(g)) \cap (E_1(r) \times E_2(r)) \subset E_1(r) \times E_2(r) \quad (2.2)$$

Da equação (2.2), obtemos que

$$\text{graf}(g) \subset f(\text{graf}(g)) \subset E_1(r) \times E_2(r). \quad (2.3)$$

Aplicando f na equação (2.3) temos que

$$\text{graf}(g) \subset f^2(E_1(r) \times E_2(r)).$$

Repetindo-se o mesmo processo n vezes, temos que

$$\text{graf}(g) \subset f^n(E_1(r) \times E_2(r)) \quad \forall n.$$

Logo $\text{graf}(g) \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(E_1(r) \times E_2(r))$.

E assim fica demonstrado o ítem (2).

Para demonstrar o ítem (5), note que como $f|_{\text{graf}(g)}^{-1}$ é uma contração e $f^{-1}(0) = 0$, então 0 é o único ponto fixo de $f|_{\text{graf}(g)}^{-1}$. Seja $(x, y) \in \text{graf}(g)$, então:

$$\begin{aligned} \| f^{-n}(x, y) - \underbrace{f^{-n}(0)}_0 \| &= \| f^{-1}(f^{-n+1}(x, y)) - f^{-1}(f^{-n+1}(0)) \| \\ &\leq \alpha \| f^{-n+1}(x, y) - f^{-n+1}(0) \| \\ &\leq \alpha^n \| x \| \\ &\leq \alpha^n r, \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde $\alpha = \text{Lip}(f|_{\text{graf}(g)}^{-1}) < 1$. Logo

$$\| f^{-n}(x, y) \| \leq \alpha^n r \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow f^{-n}(x, y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

2.13 Observação. Note que como g é o ponto fixo de Γ_f , temos que $\text{graf}(g) = f(\text{graf}(g)) \cap (E_1(r) \times E_2(r))$. Como f é invertível por hipótese, temos que $f^{-1}(\text{graf}(g)) \subset \text{graf}(g)$. Assim como $(x, y) \in \text{graf}(g) \Rightarrow f^{-n}(x, y) \in \text{graf}(g) \quad \forall n$. E assim a equação (2.4) tem sentido.

Agora seja $(x, y) \in E_1(r) \times E_2(r)$ com $f^{-n}(x, y) \rightarrow 0$. Seja $(x_n, y_n) = f^{-n}(x, y)$, ou seja $f^n(x_n, y_n) = (x, y)$. Assim $x = p_1 \circ f^n(x_n, y_n)$ e $y = p_2 \circ f^n(x_n, y_n)$. Logo, por (2.1)

$$\begin{aligned} \|y - g(x)\| &= \|p_2 \circ f^n(x_n, y_n) - g(p_1 \circ f^n(x_n, y_n))\| \\ &\leq (\lambda + 2\varepsilon)^n \|y_n - g(x_n)\| \end{aligned}$$

Como $(x_n, y_n) \rightarrow 0$, temos que $x_n \rightarrow 0$ e $y_n \rightarrow 0$. Usando o fato de g ser contínua temos que $g(x_n) \rightarrow g(0) = 0$. Assim

$$\|y - g(x)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow (x, y) \in \text{graf}(g),$$

e (5) está provado.

Agora para demonstrar (6), tomemos $(x, y) \in \text{graf}(g)$, logo por (5), $f^{-n}(x, y) \rightarrow 0$. Fazendo $(x_n, y_n) = f^{-n}(x, y)$, temos que, $f^n(x_n, y_n) = (x, y)$, e $(x_n, y_n) \rightarrow 0$. Por outro lado, quando $(x_n, y_n) \in E_1(r) \times E_2(r)$, tal que $(x_n, y_n) \rightarrow 0$ e $f^n(x_n, y_n) = (x, y)$, o resultado segue diretamente por (5).

2.14 Proposição. $p_1|_{\text{Graf}(g)} : \text{Graf}(g) \rightarrow E_1$ é uma isometria com a norma do sup.

Prova:

$$\begin{aligned} \|p_1(x, g(x)) - p_1(y, g(y))\|_{\text{sup}} &= \|x - y\|_{\text{sup}} = \sup(\|p_1(x - y)\|_{E_1}, \|p_2(x - y)\|_{E_2}) = \\ &= \sup(\|x - y\|_{E_1}, 0) = \|x - y\|_{E_1} \end{aligned}$$

Resta mostrar que $\|(x, g(x)) - (y, g(y))\|_{\text{sup}} = \|x - y\|_{E_1}$. Mas

$$\begin{aligned} \|(x, g(x)) - (y, g(y))\|_{\text{sup}} &= \|(x - y, g(x) - g(y))\|_{\text{sup}} \\ &= \sup(\|p_1(x - y)\|_{E_1}, \|p_2(g(x) - g(y))\|_{E_2}) \\ &= \sup(\|x - y\|_{E_1}, \|g(x) - g(y)\|_{E_2}) \\ &= \|x - y\|_{E_1}, \end{aligned}$$

pois $g \in \text{Lip}_1(E_1(r), E_2(r))$, ou seja, $\|g(x) - g(y)\| \leq \|x - y\|$.

■

Os itens (3) e (4) são conhecidos como a versão diferenciável do Teorema da Variedade Instável, pois o leitor pode notar que nestes itens estamos supondo que f é diferenciável. É necessário então ver alguns resultados sob esta hipótese para demonstrá-los. E isto é tarefa para o próximo capítulo.

Capítulo 3

O caso f diferenciável

Neste capítulo mostraremos a versão diferenciável do Teorema da Variedade Instável.

Ou seja, mostraremos que:

(3) Se f é C^k então g é C^k .

(4) Se f é C^1 com $f(0) = 0$, $Df(0) = T$, então o gráfico de g é tangente a E_1 em 0.

A idéia da prova é a seguinte: Se existe uma função $g \in C^1$ cujo gráfico é f invariante, então a derivada de f aplica o espaço tangente do gráfico no espaço tangente do gráfico, isto é:

$$f(x, g(x)) = (y, g(y)) \Rightarrow Df_{(x,g(x))}(T_{(x,g(x))}\text{graf}(g)) = T_{(y,g(y))}\text{graf}(g) = T_{f(x,g(x))}\text{graf}(g)$$

ou

$$Df_{(x,g(x))} \cdot (id, Dg_x) = (id, Dg_y) = (id, Dg_{f_1(x,g(x))}) \Rightarrow$$

$$Df_{(x,g(x))}(\text{graf}(Dg_x)) = \text{graf}(Dg_{f_1(x,g(x))}),$$

pois $(id, Dg_x) \cdot v = (v, Dg_x(v)) = \text{graf}(Dg_x)$. Ver Figura 3.1.

Depois consideraremos uma nova transformação de gráfico (global e linear), em seguida usaremos o Teorema do Ponto Fixo de Banach (Teorema (1.7)) para encontrar uma

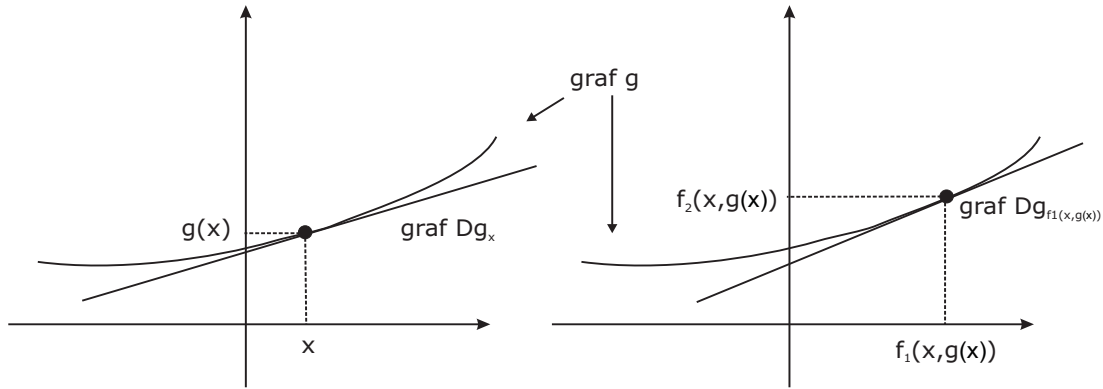


Figura 3.1: Derivada de f .

função $\sigma : E_1(r) \rightarrow L_1(E_1, E_2)$, onde $L_1(E_1, E_2)$ é o espaço das aplicações lineares contínuas de E_1 para E_2 cuja norma é menor ou igual a 1, que tem a seguinte propriedade:

$$\Gamma_{Df}\sigma(x) = \sigma(f_1(x, g(x))).$$

E finalmente mostraremos que σ é a derivada de g .

Aqui e no que se segue, para simplificar a notação nós escreveremos Df para $Df_{(x, g(x))}$.

3.1 Lema. *Existe um $\varepsilon > 0$, tal que quando $\| S - T \| < \varepsilon$, a transformação de gráfico $\Gamma_S : L_1(E_1, E_2) \rightarrow L_1(E_1, E_2)$ é bem definida. Além disso, Γ_S é Lipschitz em $L_1(E_1, E_2)$ com constante de Lipschitz menor ou igual a $\lambda + 2\varepsilon$.*

Prova: Primeiro note que toda aplicação linear é Lipschitz, com constante de Lipschitz igual a sua norma, ou seja, $L_1(E_1, E_2) \subset \text{Lip}_1(E_1(r), E_2(r)) \quad \forall r$. Assim escolhendo ε igual ao do Lema 2.9, nós temos que Γ_S está bem definida em $\text{Lip}_1(E_1(r), E_2(r))$ para todo r , logo em $L_1(E_1, E_2)$.

Sabemos que $\text{graf}(\Gamma_S\sigma) = S(\text{graf}(\sigma))$. Como σ é uma aplicação linear então $\text{graf}(\sigma)$ é um subespaço linear. Sendo S linear, S leva subespaço linear em subespaço linear, logo $S(\text{graf}(\sigma))$ é um subespaço linear. Concluimos então que $\text{graf}(\Gamma_S\sigma)$ é subespaço linear. Assim pelo Teorema 1.4 temos que Γ_S é linear.

Finalmente, a constante de Lipschitz de Γ_S é estimada pelo Lema 2.11.



3.2 Lema. *Seja U_ε uma vizinhança de T em $L_1(E_1, E_2)$. A aplicação $\Gamma : U_\varepsilon \times L_1(E_1, E_2) \rightarrow L_1(E_1, E_2)$ dada por $\Gamma(S, K) = \Gamma_S(K)$ é contínua.*

Prova: Seja $S_i = p_i \circ S$. Sabemos que $\Gamma_S(K) = S_2 \circ (id, K) \circ [S_1 \circ (id, K)]^{-1}$. Como inversão e composição de aplicações contínuas são contínuas sobre o espaço das aplicações lineares, Γ é contínua. ■

Suponha agora que f é C^1 bem próxima de T , na topologia C^1 em $E_1(r) \times E_2(r)$, ou seja, $\text{Lip}(f - T) < \varepsilon$ e $\|Df - T\| < \varepsilon$ para todo $z \in E_1(r) \times E_2(r)$. Seja g a aplicação de $E_1(r)$ para $E_2(r)$ cujo o gráfico é a variedade instável de f . Nós examinaremos o gráfico da derivada de g , supondo que esta é diferenciável.

Seja $h = f_1 \circ (id, g) : E_1(r) \rightarrow E_1$. O dois lemas precedentes nos permite definir uma aplicação contínua

$$\begin{aligned} F : E_1(r) \times L_1(E_1, E_2) &\rightarrow E_1 \times L_1(E_1, E_2) \\ F : (x, L) &\mapsto (h(x), \Gamma_{Df}L). \end{aligned}$$

Além disso, F faz o seguinte diagrama de aplicações contínuas comutar:

$$\begin{array}{ccc} E_1(r) \times L_1(E_1, E_2) & \xrightarrow{F} & E_1 \times L_1(E_1, E_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_1(r) & \xrightarrow{h} & E_1, \end{array}$$

onde as aplicações verticais são projeções, sobre o primeiro fator.

3.3 Lema. $\|F(x, L) - F(x, K)\| \leq (\lambda + 2\varepsilon) \|L - K\|$, uniformemente sobre $E_1(r)$ e, além disso, $E_1(r) \subset h(E_1(r))$, $\text{Lip}(h^{-1}) < 1$.

Prova: $\|F(x, L) - F(x, K)\| = \|(h(x), \Gamma_{Df}L) - (h(x), \Gamma_{Df}K)\| = \|\Gamma_{Df}L - \Gamma_{Df}K\| \leq \|L - K\|$, pelo Lema 3.1. E pelos Lemas 2.7 e 2.8, concluímos a demonstração. ■

Seja $\Gamma^0(E_1(r), E_1(r) \times L_1(E_1, E_2))$ o espaço das seções contínuas do fibrado trivial $E_1(r) \times L_1(E_1, E_2) \rightarrow E_1(r)$, ou seja, $\Gamma^0(E_1(r), E_1(r) \times L_1(E_1, E_2)) = \{\sigma : E_1(r) \rightarrow E_1(r) \times L_1(E_1, E_2) \mid \sigma(x) = (x, \Pi_2\sigma(x))\}$, com a métrica uniforme, ou seja para seções σ_1 e σ_2 :

$$d(\sigma_1, \sigma_2) = \sup_{x \in E_1(r)} \|\Pi_2\sigma_1(x) - \Pi_2\sigma_2(x)\|,$$

onde Π_2 é a projeção sobre o segundo fator de $E_1(r) \times L_1(E_1, E_2)$. Note que o espaço das seções contínuas é isométrico, via composição com Π_2 , com o espaço completo das aplicações contínuas de $E_1(r)$ para $L_1(E_1, E_2)$ e as imagens das seções correspondem aos gráficos. Assim nós definimos uma nova transformação de gráfico Γ_F sendo um automorfismo $\Gamma_F : \tau \mapsto F \circ \tau \circ h^{-1}$ de $\Gamma^0(E_1(r), E_1(r) \times L_1(E_1, E_2))$; isto é, $\Gamma_F\tau$ é uma seção cuja a imagem é a intersecção de F (imagem τ) com $E_1(r) \times L_1(E_1, E_2)$.

3.4 Lema. Γ_F tem um único ponto fixo σ que satisfaz

$$\Gamma_{Df}(\Pi_2\sigma(x)) = \Pi_2\sigma h(x) = \Pi_2\sigma f_1(x, g(x)).$$

Prova: Sejam τ_1, τ_2 seções. Logo

$$\begin{aligned} \|\Gamma_F\tau_1 - \Gamma_F\tau_2\| &= \sup_{z \in E_1(r)} \|\Gamma_F\tau_1(z) - \Gamma_F\tau_2(z)\| \\ &= \sup_{z \in E_1(r)} \|F \circ \tau_1 \circ h^{-1}(z) - F \circ \tau_2 \circ h^{-1}(z)\| \\ &= \sup_{z \in E_1(r)} \|F(h^{-1}(z), \Pi_2\tau_1(h^{-1}(z))) - F(h^{-1}(z), \Pi_2\tau_2(h^{-1}(z)))\| \\ &\leq (\lambda + 2\varepsilon) \sup_{z \in E_1(r)} \|\Pi_2\tau_1(h^{-1}(z)) - \Pi_2\tau_2(h^{-1}(z))\| \\ &\leq (\lambda + 2\varepsilon)d(\tau_1, \tau_2). \end{aligned}$$

Como $\lambda + 2\varepsilon < 1 \Rightarrow \Gamma_F$ é contração.

Seja σ a seção que é o único ponto fixo de Γ_F . Então

$$\Gamma_F\sigma = \sigma \Rightarrow F\sigma h^{-1} = \sigma \Rightarrow F\sigma = \sigma h.$$

Assim

$$F\sigma(x) = F(x, \Pi_2\sigma(x)) = \sigma(h(x)) = (h(x), \Pi_2\sigma h(x)).$$

Mas $F(x, \Pi_2\sigma(x)) = (h(x), \Gamma_{Df}\Pi_2\sigma(x))$, pela definição da F . Logo

$$\Gamma_{Df}\Pi_2\sigma(x) = \Pi_2\sigma h(x) = \Pi_2\sigma(f_1(x, g(x))).$$



Como um dos nossos objetivos é provar que o gráfico de g é tangente a E_1 em zero, iremos agora definir quando duas funções são tangentes em um ponto.

3.5 DEFINIÇÃO. *Seja Y e Z dois espaços métricos. Suponha que h_1 e h_2 são duas funções de uma vizinhança de x em Y para Z , com $h_1(x) = h_2(x)$. Nós dizemos que h_1 e h_2 são tangentes em x se, e somente se,*

$$\text{Lip}_x(h_1, h_2) = \limsup_{y \rightarrow x} \frac{d(h_1(y), h_2(y))}{d(x, y)} = 0.$$

Isto é, a distância Lipschitz h_1 para h_2 em x é 0.

1 Exemplo. *Se E_1 e E_2 são espaços vetoriais normados e L_1 e L_2 são duas aplicações lineares contínuas de E_1 para E_2 , então independente de x ,*

$$\text{Lip}_x(L_1, L_2) = \|L_1 - L_2\|.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \text{Lip}_x(L_1, L_2) &= \limsup_{y \rightarrow x} \frac{\|L_1(y) - L_2(y)\|}{\|x - y\|} \\ &= \limsup_{y \rightarrow x} \frac{\|L_1(y) - L_1(x) + L_2(x) - L_2(y)\|}{\|x - y\|}, \text{ pois } L_1(x) = L_2(x) \\ &= \limsup_{y \rightarrow x} \frac{\|L_1(y - x) - L_2(y - x)\|}{\|y - x\|} \\ &= \limsup_{y \rightarrow x} \frac{\|(L_1 - L_2)(y - x)\|}{\|y - x\|} \\ &= \|L_1 - L_2\|. \end{aligned}$$

2 Exemplo. *Se $f : U \subset E_1 \rightarrow E_2$, onde $U \subset E_1$ é aberto, E_1 e E_2 são espaços de Banach e $L : E_1 \rightarrow E_2$ uma aplicação linear contínua. L é a derivada de f em x se, e somente se $f(x + y)$ e $f(x) + L(y)$ são tangentes em $y = 0$, isto é*

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\|f(x) - f(x + y) - L(y)\|}{\|y\|} = 0.$$

Iremos provar agora uma proposição, na qual temos como consequência o ítem (3) do Teorema da Variedade Instável (Teorema 2.3).

3.6 Proposição. *Quando f é C^1 , o ponto fixo g de Γ_f é C^1 com derivada $\Pi_2\sigma$, onde σ é o ponto fixo de Γ_F .*

Prova: Observemos que

$$(\Gamma_f g)(h(x) + y) - g(h(x)) - \Gamma_{Df}[\Pi_2 \sigma(x)](y) =$$

$$(\Gamma_f g)(h(x) + y) - g(h(x)) - \Gamma_{Df}[g \circ (id + x) - g(x)](y) + \Gamma_{Df}[g \circ (id + x) - g(x)](y) - \Gamma_{Df}[\Pi_2 \sigma(x)](y).$$

Assim

$$\begin{aligned} & \text{Lip}_0[(\Gamma_f g)(h(x) + y), g(h(x)) - \Gamma_{Df}[\Pi_2 \sigma(x)](y)] = & (3.1) \\ & \limsup_{y \rightarrow 0} \frac{\| (\Gamma_f g)(h(x) + y) - g(h(x)) - \Gamma_{Df}[\Pi_2 \sigma(x)](y) \|}{\| y - 0 \|} \leq \\ & \limsup_{y \rightarrow 0} \frac{\| (\Gamma_f g)(h(x) + y) - g(h(x)) - \Gamma_{Df}[g \circ (id + x) - g(x)](y) \|}{\| y \|} + \\ & \limsup_{y \rightarrow 0} \frac{\| \Gamma_{Df}[g \circ (id + x) - g(x)](y) - \Gamma_{Df}[\Pi_2 \sigma(x)](y) \|}{\| y \|} = \\ & \text{Lip}_0[(\Gamma_f g)(h(x) + y) - g(h(x)), \Gamma_{Df}[g \circ (id + x) - g(x)](y)] + \\ & \text{Lip}_0[\Gamma_{Df}[g \circ (id + x) - g(x)](y), \Gamma_{Df}[\Pi_2 \sigma(x)](y)] = \\ & (I) + (II). \end{aligned}$$

Primeiro iremos trabalhar com a equação (II). Seja $k = p_1 Df(id, g \circ (id + x) - g(x))$. Utilizando o Lema 2.7, substituindo f por Df e σ por $g \circ (id + x) - g(x)$, temos que k^{-1} é uma contração e k é sobrejetiva. Isto é possível, pois $\| Df - T \| < \varepsilon$ e $g \circ (id + x) - g(x) \in \text{Lip}_1(E_1(r), E_2(r))$, visto que

$$\| g(y + x) - g(x) - (g(w + x) - g(x)) \| = \| g(y + x) - g(w + x) \| \leq \| y + x - w - x \| = \| y - w \|.$$

Agora, note que

$$k(0) = p_1 Df(0, g(x) - g(x)) = p_1 Df(0, 0) = 0.$$

Considere w' tal que $k(w') = y$, isto é possível pela sobrejetividade de k . Então

$$\| y \| = \| k(w') - k(0) \| \geq [\text{Lip}(k^{-1})]^{-1} \| w' - 0 \| > \| w' \|,$$

pois $\text{Lip}(k^{-1}) < 1 \Rightarrow [\text{Lip}(k^{-1})]^{-1} > 1$.

Aplicando o Lema 2.11, trocando f, σ_1, σ_2 por $Df, g \circ (id + x) - g(x), \Pi_2\sigma(x)$, respectivamente, observando que $k = p_1 Df(id, g \circ (id + x) - g(x)) = Df_1(id, \sigma)$ e $(x', y') = (k^{-1}(y), \sigma_1(k^{-1}(y))) = (w', \sigma_1(w'))$, temos

$$\begin{aligned} \|\Gamma_{Df}[g(id + x) - g(x)](y) - \Gamma_{Df}[\Pi_2\sigma(x)](y)\| &\leq (\lambda + 2\varepsilon) \|\sigma_1(k^{-1}(y)) - \sigma_2(k^{-1}(y))\| \\ &= (\lambda + 2\varepsilon) \|\sigma_1(w') - \sigma_2(w')\| \\ &= (\lambda + 2\varepsilon) \|g(w' + x) - g(x) - \Pi_2\sigma(x)(w')\|. \end{aligned}$$

Usando o fato de que $\|w'\| < \|y\|$, temos

$$\frac{\|\Gamma_{Df}[g(id + x) - g(x)](y) - \Gamma_{Df}[\Pi_2\sigma(x)](y)\|}{\|y\|} \leq (\lambda + 2\varepsilon) \frac{\|g(w' + x) - g(x) - \Pi_2\sigma(x)(w')\|}{\|w'\|}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} (II) &= \text{Lip}_0[\Gamma_{Df}[g \circ (id + x) - g(x)](y), \Gamma_{Df}[\Pi_2\sigma(x)](y)] \\ &= \limsup_{y \rightarrow 0} \frac{\|\Gamma_{Df}[g(id + x) - g(x)](y) - \Gamma_{Df}[\Pi_2\sigma(x)](y)\|}{\|y\|} \\ &\leq (\lambda + 2\varepsilon) \limsup_{w' \rightarrow 0} \frac{\|g(w' + x) - g(x) - \Pi_2\sigma(x)(w')\|}{\|w'\|} \\ &= (\lambda + 2\varepsilon) \text{Lip}_0[g(w' + x) - g(x), \Pi_2\sigma(x)w'] \\ &= (\lambda + 2\varepsilon) \text{Lip}_0[g(w' + x), g(x) + \Pi_2\sigma(x)w'], \end{aligned}$$

isto é

$$(II) \leq \text{Lip}_0[\Pi_2\sigma(x), g(x + id) - g(x)]. \quad (3.2)$$

Agora iremos mostrar que $(I) = 0$. Para isto, seja w , tal que $h(x + w) = h(x) + y$, isto é possível, pois h é homeomorfismo. Observe que

$$\|y\| = \|h(x + w) - h(x)\| \geq [\text{Lip}(h^{-1})]^{-1} \|(x + w) - x\| \geq \|w\|,$$

e que

$$(\Gamma_{fg})(h(x) + y) = (\Gamma_{fg})(h(x + w)) = (\Gamma_{fg})(f_1(x + w, g(x + w))) = f_2(x + w, g(x + w)),$$

Pela escolha de w' , temos

$$\begin{aligned} \Gamma_{Df}[g(x + id) - g(x)](y) &= p_2 Df(id, g(x + id) - g(x)) \circ [p_1 Df(id, g(x + id) - g(x))]^{-1}(y) \\ &= p_2 Df(id, g(x + id) - g(x)) \circ k^{-1}(y) \\ &= p_2 Df(id, g(x + id) - g(x))(w') \\ &= p_2 Df(w', g(x + w') - g(x)). \end{aligned}$$

Deste modo, nós podemos expressar

$$\begin{aligned}
 (III) &= \| (\Gamma_f g)(h(x) + y) - g(h(x)) - \Gamma_{Df}[g(id + x) - g(x)](y) \| \\
 &= \| p_2 \circ f(x + w, g(x + w)) - p_2 \circ f(x, g(x)) - p_2 Df(w', g(x + w') - g(x)) \| \\
 &= \| p_2 \circ Df(w, g(x + w) - g(x)) + p_2 \circ R[w, g(x + w) - g(x)] \\
 &\quad - p_2 \circ Df(w', g(x + w') - g(x)) \| \\
 &= \| p_2 \circ Df(w - w', g(x + w) - g(x + w')) + p_2 \circ R[w, g(x + w) - g(x)] \|,
 \end{aligned}$$

onde, na penúltima igualdade, usamos o fato de que $f(a + v) - f(a) = Df(a)v + R(v)$, onde $a = (x, g(x))$ e $v = (w, g(x + w) - g(x))$.

Como $\| v \| = \| (w, g(x + w) - g(x)) \| = \| w \|$, pois como $\text{Lip}(g) \leq 1$, $\| g(x + w) - g(x) \| \leq \| x + w - x \| = \| w \|\text{, pelo Teorema de Taylor}$

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{R(v)}{\| v \|} = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{R[w, g(x + w) - g(x)]}{\| w \|} = 0.$$

Assim

$$(IV) = \frac{(III)}{\| y \|} \leq \| p_2 Df \| \frac{\| w - w' \|}{\| y \|} + \frac{R[w, g(x + w) - g(x)]}{\| y \|}.$$

Agora observe que

$$\begin{aligned}
 (I) &= \limsup_{y \rightarrow 0} \frac{\| [(\Gamma_f g)(h(x) + y) - g(h(x)) - \Gamma_{Df}[g \circ (id + x) - g(x)](y)] \|}{\| y \|} \\
 &= \limsup_{y \rightarrow 0} (IV).
 \end{aligned}$$

Note que $\lim_{\| y \| \rightarrow 0} \frac{R[w, g(x + w) - g(x)]}{\| y \|} \leq \lim_{\| w \| \rightarrow 0} \frac{R[w, g(x + w) - g(x)]}{\| w \|} = 0$, pois $\| w \| \leq \| y \|\text{ e assim } \| y \| \rightarrow 0 \Rightarrow \| w \| \rightarrow 0$.

Iremos agora mostrar que $\lim_{\| y \| \rightarrow 0} \frac{\| w - w' \|}{\| y \|} = 0$. Para isto, observe que $y = h(x + w) - h(x)$ e

$$\begin{aligned}
 h(x + w') - h(x) &= p_1 f(x + w', g(x + w')) - p_1 f(x, g(x)) \\
 &= p_1 Df(w', g(x + w') - g(x)) + p_1 R(w', g(x + w') - g(x)),
 \end{aligned}$$

assim

$$\begin{aligned}
 p_1 R(w', g(x + w') - g(x)) &= h(x + w') - h(x) - y \\
 &= h(x + w') - h(x) - h(x + w) + h(x) \\
 &= h(x + w') - h(x + w),
 \end{aligned}$$

mas

$$\| h(x + w') - h(x + w) \| \geq [\text{Lip}(h^{-1})]^{-1} \| x + w' - x - w \| = \| w - w' \|,$$

logo

$$\| w - w' \| \leq \| p_1 R(w', g(x + w') - g(x)) \| .$$

Então

$$\lim_{\|y\| \rightarrow 0} \frac{\| w - w' \|}{\| y \|} \leq \lim_{\|y\| \rightarrow 0} \frac{\| p_1 R(w', g(x + w') - g(x)) \|}{\| y \|} = 0 \Rightarrow \lim_{\|y\| \rightarrow 0} \frac{\| w - w' \|}{\| y \|} = 0,$$

o que nos dá $(I) = 0$.

Assim, por (3.1) e (3.2), temos

$$\begin{aligned} & \text{Lip}_0[(\Gamma_f g)(h(x) + y), g(h(x)) - \Gamma_{Df}[\Pi_2 \sigma(x)](y)] \\ & \leq (\lambda + 2\varepsilon) \text{Lip}_0[g(x + y), g(x) + \Pi_2 \sigma(x)(y)]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Agora, usando o fato de que $\Gamma_f g \equiv g$ e que $\Gamma_{Df}[\Pi_2 \sigma(x)] = \Pi_2 \sigma h(x)$ (Lema 3.4), temos

$$\begin{aligned} & \text{Lip}_0[g(h(x) + y), gh(x) + \Pi_2 \sigma h(x)(y)] \\ & \leq (\lambda + 2\varepsilon) \text{Lip}_0[g(x + y), g(x) + \Pi_2 \sigma(x)(y)]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Como $h^{-1}(E_1(r)) \subset E_1(r)$ e $x \in E_1(r)$, vemos que $h^{-n}(x) \in E_1(r)$ e então por (3.4), temos

$$\begin{aligned} & \text{Lip}_0[g(h^{-n}(x) + y), gh^{-n}(x) + \Pi_2 \sigma h^{-n}(x)(y)] \\ & \geq \frac{1}{\lambda + 2\varepsilon} \text{Lip}_0[g(h^{-n+1}(x) + y), gh^{-n+1}(x) + \Pi_2 \sigma h^{-n+1}(x)(y)] \\ & \geq \frac{1}{\lambda + 2\varepsilon} \cdot \frac{1}{\lambda + 2\varepsilon} \text{Lip}_0[g(h^{-n+2}(x) + y), gh^{-n+2}(x) + \Pi_2 \sigma h^{-n+2}(x)(y)]. \end{aligned}$$

Repetindo-se esse processo n vezes, obtemos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} & \text{Lip}_0[g(h^{-n}(x) + y), gh^{-n}(x) + \Pi_2 \sigma h^{-n}(x)(y)] \\ & \geq \left(\frac{1}{\lambda + 2\varepsilon} \right)^n \text{Lip}_0[g(x + y), g(x) + \Pi_2 \sigma(x)(y)]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Queremos mostrar que $\text{Lip}_0[g(x + y), g(x) + \Pi_2 \sigma(x)(y)] = 0$. Suponhamos que não, então existe $x \in E_1(r)$ tal que $\text{Lip}_0[g(x + y), g(x) + \Pi_2 \sigma(x)(y)] = \delta > 0$, ou seja

$$\limsup_{y \rightarrow 0} \frac{\| g(x + y) - g(x) - \Pi_2 \sigma(x)(y) \|}{\| y \|} = \delta > 0.$$

Logo existe seqüência $x_n \in E_1(r)$, tal que $\text{Lip}_0[g(x_n + y), g(x_n) + \Pi_2\sigma(x_n)(y)] \rightarrow \infty$, ou seja

$$\limsup_{y \rightarrow 0} \frac{\|g(x_n + y) - g(x_n) - \Pi_2\sigma(x_n)(y)\|}{\|y\|} = \infty,$$

pois pela equação (3.5) temos que seu segundo membro é infinito, visto que estamos supondo $\text{Lip}_0[g(x + y), g(x) + \Pi_2\sigma(x)(y)] = \delta > 0$ e $\left(\frac{1}{\lambda+2\varepsilon}\right)^n \rightarrow \infty$, pois $\frac{1}{\lambda+2\varepsilon} > 1$.

Mas $\text{Lip}(g) \leq 1$ e $\sigma \in L_1(E_1, E_2)$, ou seja, $\|\sigma\| \leq 1$, logo temos que $\|\Pi_2\sigma(x_n)\| \leq 1$.

Assim

$$\begin{aligned} \text{Lip}_0[g(x_n + y), g(x_n) + \Pi_2\sigma(x_n)(y)] &= \limsup_{y \rightarrow 0} \frac{\|g(x_n + y) - g(x_n) - \Pi_2\sigma(x_n)(y)\|}{\|y\|} \\ &\leq \limsup_{y \rightarrow 0} \frac{\|g(x_n + y) - g(x_n)\|}{\|y\|} + \limsup_{y \rightarrow 0} \frac{\|\Pi_2\sigma(x_n)(y)\|}{\|y\|} \\ &\leq \limsup_{y \rightarrow 0} \frac{\|x_n + y - x_n\|}{\|y\|} + \limsup_{y \rightarrow 0} \|\Pi_2\sigma(x_n)\| \\ &\leq 1 + 1 = 2, \end{aligned}$$

o que contradiz o fato de que $\text{Lip}_0[g(x_n + y), g(x_n) + \Pi_2\sigma(x_n)(y)] \rightarrow \infty$, logo não existe $x \in E_1(r)$, tal que $\text{Lip}_0[g(x + y), g(x) + \Pi_2\sigma(x)(y)] = \delta > 0$, então

$$\text{Lip}_0[g(x + y), g(x) + \Pi_2\sigma(x)(y)] = 0 \quad \forall x \in E_1(r).$$

Assim, como $\Pi_2\sigma(x)$ é linear, temos que $Dg(x) = \Pi_2\sigma(x)$.

■

Para provar o ítem (4) do Teorema 2.3, temos que $f(0) = 0$ e $Df(0) = T$. Pelo Lema 3.4, temos que $\Gamma_{Df}[\Pi_2\sigma(x)] = \Pi_2\sigma f_1(x, g(x))$. Fazendo $x = 0$ temos que $\Gamma_T[\Pi_2\sigma(0)] = \Pi_2\sigma f_1(0, g(0)) = \Pi_2\sigma(0)$, ou seja, o gráfico de $\Pi_2\sigma(0)$ é invariante por T . Mas sabemos que o gráfico de E_1 é o único invariante por Γ_T . Assim

$$\text{graf}(\Pi_2\sigma(0)) = \text{graf}(Dg(0)) = (E_1, 0).$$

Portanto o gráfico de g é tangente a E_1 em zero.

Agora provaremos que se f é C^k então g é C^k .

De agora em diante, $E(r)$ denota $E_1(r) \times E_2(r)$ e $TE(r) = TE_1(r) \times TE_2(r)$, o fibrado tangente de $E(r)$, ou seja, o conjunto $\{(x, v)/x \in E(r) \text{ e } v \in T_x E(r)\}$.

Definamos agora a função $T_f : TE(r) \rightarrow TE$ dada por, $T_f(x, v) = (f(x), Df(x)v)$.

Note que:

$$(i) \quad \|T_f(0)\| = \|(f(0), Df(0)0)\| = \|f(0)\| < \delta.$$

(ii) T_f é Lipschitz.

Logo, pelo Teorema da Variedade Instável, aplicado a T_f , existe uma aplicação $\bar{g} : TE_1(r) \rightarrow TE_2(r)$ cujo o gráfico é a variedade instável para T_f , ou seja, \bar{g} é o ponto fixo para a aplicação $\Gamma_{T_f} : \text{Lip}_1(TE_1(r), TE_2(r)) \rightarrow \text{Lip}_1(TE_1(r), TE_2(r))$ que é uma contração, pelo Lema 2.11.

Queremos encontrar quem é esse ponto fixo. E isto é feito pela seguinte proposição:

3.7 Proposição. *A função $\bar{g} : TE_1(r) \rightarrow TE_2(r)$ dada por $\bar{g}(x, v) = (g(x), Dg(x)v)$ é o ponto fixo de Γ_{T_f} .*

Prova: Suponhamos que isto seja válido, logo

$$\Gamma_{T_f}(\bar{g})(x, v) = T_{f_2} \circ (id, \bar{g}) \circ [T_{f_1} \circ (id, \bar{g})]^{-1}(x, v).$$

Seja $[T_{f_1} \circ (id, \bar{g})]^{-1}(x, v) = (y, w)$. Assim

$$\begin{aligned} (g(x), Dg(x)v) &= T_{f_2} \circ (id, \bar{g})(y, w) \\ &= T_{f_2} \circ (y, w, g(y), Dg(y)w) \\ &= T_{f_2}((y, g(y)), (w, Dg(y)w)) \\ &= p_2 \circ T_f((y, g(y)), (w, Dg(y)w)) \\ &= p_2(f(y, g(y)), Df(y, g(y)) \cdot (w, Dg(y)w)) \\ &= Df(y, g(y)) \cdot (w, Dg(y)w). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Mas

$$\begin{aligned}
(x, v) &= T_{f_1} \circ (id, \bar{g})(y, w) \\
&= T_{f_1} \circ (y, w, g(y), Dg(y)w) \\
&= p_1 \circ T_f((y, g(y)), (w, Dg(y)w)) \\
&= p_1(f(y, g(y)), Df(y, g(y)) \cdot (w, Dg(y)w)) \\
&= f(y, g(y)),
\end{aligned}$$

obtendo-se que $x = f_1(y, g(y))$ e $v = f_2(y, g(y))$. Substituindo estes valores na equação (3.6) temos

$$\begin{aligned}
(g(f_1(y, g(y))), Dg(f_1(y, g(y))) \cdot f_2(y, g(y))) &= Df(y, g(y)) \cdot (w, Dg(y)w) \Rightarrow \\
(f_2(y, g(y)), Dg(f_1(y, g(y))) \cdot f_2(y, g(y))) &= Df(y, g(y)) \cdot (w, Dg(y)w), \tag{3.7}
\end{aligned}$$

pois no nosso caso $f(y, g(y)) = (x, g(x))$, visto que $x = f_1(y, g(y))$.

Assim temos

$$Df(y, g(y)) \cdot (\text{graf } Dg(y)) = \text{graf}(Dg(f_1(y, g(y)))) ,$$

como vimos no início do capítulo. Assim a equação (3.7) é satisfeita e nosso ponto fixo, é de fato, $\bar{g}(x, v) = (g(x), Dg(x)v)$.

■

Note que

$$\text{graf}(\bar{g}) = (x, v, g(x), Dg(x)v) = (\text{graf}(g), \text{graf}(Dg(x))) = (W_0^u, TW_0^u).$$

Já sabemos que se f é C^1 então g é C^1 . Suponhamos que o resultado seja válido para $k - 1$. Logo aplicando a hipótese de indução para T_f , temos que se T_f é C^{k-1} então \bar{g} é C^{k-1} . Sendo assim

$$f \text{ é } C^k \Rightarrow T_f \text{ é } C^{k-1} \Rightarrow \bar{g} \text{ é } C^{k-1} \Rightarrow Dg \text{ é } C^{k-1} \Rightarrow g \text{ é } C^k.$$

Isto prova o ítem (4) e, por sua vez, o Teorema 2.3 está provado.

3.8 Observação. O ítem (4) do Teorema 2.3 também pode ser provado usando o Teorema 4.10, que se encontra no apêndice.

Capítulo 4

Variedades Centrais

Neste capítulo nós provaremos o Teorema da Variedade central que é uma generalização do Teorema da Variedade Instável.

4.1 DEFINIÇÃO. *Seja $T : E \rightarrow E$ uma aplicação linear contínua de um espaço de Banach E . T é ρ -pseudohiperbólico se existe uma decomposição em soma direta $E = E_1 \oplus E_2$ T -invariante e constantes $0 < \lambda_1 < \rho < \mu_1$, e $C_1, C_2 > 0$ tal que:*

(1) *a restrição T_1 de T a E_1 é um isomorfismo e $\forall n \geq 0$ e $\forall v \in E_1$*

$$\| T_1^n(v) \| \geq C_1 \mu_1^n \| v \|;$$

(2) *$\forall n \geq 0$ e $\forall v \in E_2$ e T_2 a restrição de T a E_2*

$$\| T_2^n(v) \| \leq C_2 \lambda_1^n \| v \| .$$

Vemos claramente que uma aplicação linear pseudohiperbólica é hiperbólica quando $\rho = 1$. Se assumimos que a norma em E é adaptada para T , então para $0 < \lambda < \rho < \mu$ temos:

(1) $\| T_1(v) \| > \mu \| v \|$ para todo $v \neq 0$ em E_1 ,

(2) $\| T_2(v) \| < \lambda \| v \|$ para todo $v \neq 0$ em E_2 .

4.2 Teorema. *Seja $T : E \rightarrow E$ uma aplicação linear contínua ρ -pseudohiperbólica de um espaço de Banach E , com decomposição $E = E_1 \oplus E_2$, métrica adaptada $\| \cdot \|$ e constantes $0 < \lambda < \rho < \mu$ tais que*

$$\| T_1(v) \| > \mu \| v \| \quad \text{para todo } v \neq 0 \text{ em } E_1,$$

$$\| T_2(v) \| < \lambda \| v \| \quad \text{para todo } v \neq 0 \text{ em } E_2.$$

Seja $\varepsilon > 0$ um número real tal que $f : E \rightarrow E$ é uma aplicação lipschitz com $f(0) = 0$ e $\text{Lip}(f - T) < \varepsilon$, então

- (1) *O conjunto $W_1 = \bigcap_{n \geq 0} f^n S_1$, onde $S_1 = \{(x, y) \in E_1 \times E_2; \| x \| \geq \| y \| \}$ é o gráfico de uma função Lipschitz $g : E_1 \rightarrow E_2$ com $\text{Lip}(g) \leq 1$ e $f(\text{graf}(g)) = \text{graf}(g)$.*
- (2) *$z \in W_1$ se, e somente se, existe a imagem inversa $f^{-n}z$ tal que $\| f^{-n}z \| / \rho^n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ ou quando $\| f^{-n}z \| / \rho^n \rightarrow 0$ está limitado quando $n \rightarrow \infty$.*
- (3) *Se f é C^r e $\mu^{-j}\lambda < 1$ para $1 \leq j \leq r$ então g é C^r . Se f é diferenciável em 0 e se $Df(0) = T$ então o gráfico de g é tangente a E_1 em 0.*

Para $\mu < 1$, o gráfico de g é chamado de *variendade instável central* e denotado por W^{cu} ou $W_f^{cu}(0)$. Se $\lambda > 1$ o gráfico de g é chamado *variendade instável forte* e denotado por W^{uu} ou $W_f^{uu}(0)$.

Se f é invertível então considerando f^{-1} existe uma variedade invariante tangente a E_2 em 0, que é a interseção $\bigcap_{n \geq 0} f^{-n}S_2$, onde $S_2 = \{(x, y) \in E_1 \times E_2; \| x \| \leq \| y \| \}$. Essa variedade é chamada de variedade centro estável se $\lambda > 1$ e variedade estável forte se $\mu < 1$, e são denotadas por W^{cs} e W^{ss} respectivamente.

Considere funções $g : E_1 \rightarrow E_2$ tais que $g(0) = 0$ e $\text{Lip}(g) \leq 1$. Considere $Df = \begin{pmatrix} A & B \\ C & K \end{pmatrix}$, com $E = E_1 \times E_2$, $\alpha = \sup \| A^{-1} \|$, $k = \sup \| K \|$, $b = \sup \| B \|$, $c = \sup \| C \|$. Quando $k > 1$, a transformação de gráfico, Γ_f , não é necessariamente uma contração na norma do sup, pois $\Gamma_f(\text{Lip}_1(E_1, E_2)) \not\subset \text{Lip}_1(E_1, E_2)$, como mostra o exemplo abaixo.

3 Exemplo. *Considere as seguintes funções: $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = (4x, 10y)$, que é Lipschitz, e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \frac{1}{2}x$, que é lipschitz com constante de lipschitz*

menor do que um. Note que

$$h(x) = f_1 \circ (id, g)(x) = 4x \Rightarrow h^{-1}(x) = \frac{1}{4}x.$$

Logo

$$\Gamma_f(g)(x) = f_2 \circ (id, g)\left(\frac{1}{4}x\right) = p_2 \circ f\left(\frac{1}{4}x, \frac{1}{8}x\right) = \frac{5}{4}x \notin \text{Lip}_1(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Então definimos a seguinte métrica

$$\|g_1 - g_2\|_* = \sup_{x \neq 0} \frac{\|g_1(x) - g_2(x)\|}{\|x\|}, \quad x \in E_1.$$

De acordo com o Lema 2.7 temos que h^{-1} é Lipschitz com $\text{Lip}(h^{-1}) \leq \frac{1}{\mu - \varepsilon}$, onde $h = f_1 \circ (id, g)$.

4.3 Lema. Com a norma $\|\cdot\|_*$ o espaço $G = \{g : E_1 \rightarrow E_2 \mid g(0) = 0 \text{ e } \|g\|_* < \infty\}$ é um espaço de Banach e $G(1) = \{g \in G \mid \text{Lip}(g) \leq 1\}$ é um subconjunto fechado.

Prova: Seja g_n uma sequência de Cauchy em G . Então g_n converge uniformemente sobre os conjuntos limitados, logo pontualmente para uma função g . Assim para cada n , escolha $m = m(x, n) \geq n$ tal que $\frac{\|g_m(x) - g(x)\|}{\|x\|} < \frac{1}{n}$. Então

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|g_n(x) - g(x)\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|g_n(x) - g_m(x)\|}{\|x\|} + \frac{\|g_m(x) - g(x)\|}{\|x\|} \leq \varepsilon_n + \frac{1}{n},$$

onde $\varepsilon_n = \sup_{m \geq n} \|g_m - g_n\|_*$. Assim $\|g_n - g\|_* \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$ e então G é completo.

Mostraremos agora que $G(1)$ é fechado. Para isto basta mostrarmos que quando $g_n \rightarrow g$, na nova métrica definida acima, e $\text{Lip}(g_n) \leq 1$ então $\text{Lip}(g) \leq 1$.

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|g_n(x) - g(x)\|}{\|x\|} = \|g_n - g\|_* < \varepsilon \implies \|g_n(x) - g(x)\| < \varepsilon \|x\|.$$

Logo

$$\begin{aligned} \|g(x)\| &= \|g(x) - g(0)\| \\ &\leq \|g_n(x) - g(x)\| + \|g_n(x)\| \\ &\leq \varepsilon \|x\| + \|x\| \\ &= (\varepsilon + 1) \|x\|. \end{aligned}$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ temos o resultado.



4.4 Lema. Γ_f está bem definida e $\Gamma_f : G(1) \rightarrow G(1)$.

Prova: Para toda $g \in G(1)$, $\Gamma_f(g)$ está definida e

$$\begin{aligned} \text{Lip}(\Gamma_f(g)) &\leq \text{Lip}(f_2)\text{Lip}(id, g)\text{Lip}(h^{-1}) \\ &\leq [\text{Lip}(T_2) + \text{Lip}(p_2 \circ (f - T))] \frac{1}{\mu - \varepsilon} \\ &\leq \frac{\lambda + \varepsilon}{\mu - \varepsilon} < 1, \end{aligned}$$

para ε bastante pequeno.



4.5 Lema. Se $\|x\| \geq \|y\|$ e $g \in G(1)$ então

$$\frac{\|f_2(x, y) - \Gamma_f(g)(f_1(x, y))\|}{\|f_1(x, y)\|} < \frac{\lambda + 2\varepsilon}{\mu - \varepsilon} \frac{\|y - g(x)\|}{\|x\|}.$$

Ver Figura 4.1.

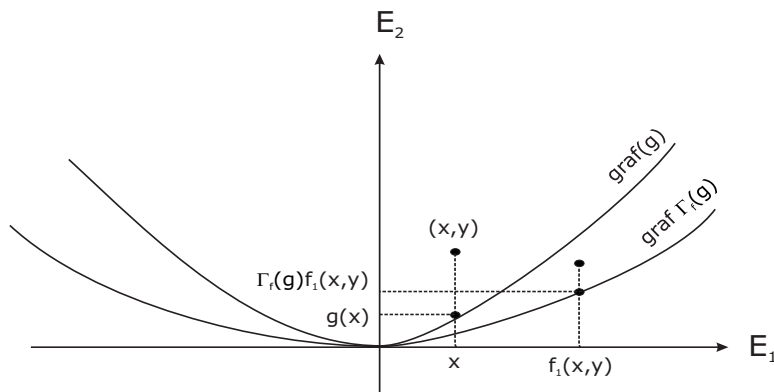


Figura 4.1: Lema 4.5.

Prova: Primeiro, note que

$$\begin{aligned} \|f_1(x, g(x)) - f_1(x, y)\| &\leq \|f_1(x, g(x)) - T_1(x, g(x)) + T_1(x, g(x)) \\ &\quad - T_1(x, y) + T_1(x, y) - f_1(x, y)\| \\ &\leq \|(f_1 - T_1)(x, g(x)) - (f_1 - T_1)(x, y)\| + \underbrace{\|T_1(x, g(x)) - T_1(x, y)\|}_{=0} \\ &\leq \varepsilon \|y - g(x)\|, \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned}
 \| f_1(x, y) \| &= \| T_1(x, y) + f_1(x, y) - T_1(x, y) \| \\
 &\geq \| T_1(x, y) \| - \| (f_1 - T_1)(x, y) \| \\
 &\geq \mu \| x \| - \varepsilon \| (x, y) \| \\
 &= (\mu - \varepsilon) \| x \|,
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

pois $\| x \| > \| y \|$.

Logo

$$\begin{aligned}
 \| f_2(x, y) - \Gamma_f(g)(f_1(x, y)) \| &\leq \| f_2(x, y) - f_2(x, g(x)) + f_2(x, g(x)) - \Gamma_f(g)(f_1(x, y)) \| \\
 &\leq \| f_2(x, y) - f_2(x, g(x)) \| + \| f_2(x, g(x)) - \Gamma_f(g)(f_1(x, y)) \| \\
 &\leq \text{Lip}(f_2) \| y - g(x) \| + \| \Gamma_f(g)(f_1(x, g(x))) - \Gamma_f(g)(f_1(x, y)) \| \\
 &\leq (\lambda + \varepsilon) \| y - g(x) \| + \text{Lip}(\Gamma_f(g)) \| f_1(x, g(x)) - f_1(x, y) \| \\
 &\leq (\lambda + \varepsilon) \| y - g(x) \| + \varepsilon \| y - g(x) \| \\
 &\leq (\lambda + 2\varepsilon) \| y - g(x) \|.
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Das equações (4.1) e (4.2) temos

$$\frac{\| f_2(x, y) - \Gamma_f(g)(f_1(x, y)) \|}{\| f_1(x, y) \|} < \frac{\lambda + 2\varepsilon}{\mu - \varepsilon} \frac{\| y - g(x) \|}{\| x \|}.$$

■

4.6 Lema. Para $g, g' \in G(1)$

$$\| \Gamma_f(g) - \Gamma_f(g') \|_* \leq \frac{\lambda + 2\varepsilon}{\mu - \varepsilon} \| g - g' \|_*.$$

Prova: Seja $(x, y) = (h^{-1}(z), g'(h^{-1}(z)))$, $z \in E_1$, ou seja, $(x, y) \in \text{graf}(g')$. Note que

$$\begin{aligned}
 \Gamma_f g'(z) &= f_2 \circ (id, g') \circ [f_1 \circ (id, g')]^{-1}(z) \\
 &= f_2 \circ (h^{-1}(z), g'(h^{-1}(z))) \\
 &= f_2(x, y),
 \end{aligned}$$

e que $x = h^{-1}(z) \Rightarrow z = h(x) = f_1 \circ (id, g')(x) = f_1(x, g'(x)) = f_1(x, y)$.

Logo

$$\begin{aligned}
 \|\Gamma_f g' - \Gamma_f g\|_* &= \sup_{z \neq 0} \frac{\|\Gamma_f g'(z) - \Gamma_f g(z)\|}{\|z\|} \\
 &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|f_2(x, y) - \Gamma_f g(f_1(x, y))\|}{\|f_1(x, y)\|} \\
 &\leq \frac{\lambda + 2\varepsilon}{\mu - \varepsilon} \sup_{x \neq 0} \frac{\|y - g(x)\|}{\|x\|} \\
 &\leq \frac{\lambda + 2\varepsilon}{\mu - \varepsilon} \sup_{x \neq 0} \frac{\|g'(h^{-1}(z)) - g(h^{-1}(z))\|}{\|h^{-1}(z)\|} \\
 &\leq \frac{\lambda + 2\varepsilon}{\mu - \varepsilon} \|g' - g\|_* .
 \end{aligned}$$

■

De acordo com os Lemas 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, temos que Γ_f está bem definida, é uma contração em $G(1)$, logo possui um único ponto fixo, que a partir de agora, denotamos de g .

Iremos agora iniciar a demonstração do Teorema 4.2.

Prova:

(1) Como g é o ponto fixo de Γ_f , claramente $f(\text{graf}(g)) = \text{graf}(g)$. Agora, seja $(x, y) \in S_1$.

Pelo Lema 4.5 temos que

$$\frac{\|f_2(x', y') - \Gamma_f(g)(f_1(x', y'))\|}{\|f_1(x', y')\|} < \frac{\lambda + 2\varepsilon}{\mu - \varepsilon} \frac{\|y' - g(x')\|}{\|x'\|} .$$

Repetindo-se esse processo para os primeiros n iterados de f , (x', y') , $f(x', y')$, \dots , $f^n(x', y') = (x, y)$, temos

$$\begin{aligned}
 \frac{\|y - g(x)\|}{\|x\|} &= \frac{\|p_2 \circ f^n(x', y') - g(p_1 \circ f^n(x', y'))\|}{\|p_1 \circ f^n(x', y')\|} \\
 &= \frac{\|f_2(f^{n-1}(x', y')) - g(f_1(f^{n-1}(x', y')))\|}{\|f_1(f^{n-1}(x', y'))\|} \\
 &< \frac{\lambda + 2\varepsilon}{\mu - \varepsilon} \frac{\|p_2 \circ f^{n-1}(x', y') - g(p_1 \circ f^{n-1}(x', y'))\|}{\|p_1 \circ f^{n-1}(x', y')\|} \\
 &< \left(\frac{\lambda + 2\varepsilon}{\mu - \varepsilon}\right)^n \frac{\|y' - g(x')\|}{\|x'\|} .
 \end{aligned}$$

Mas note que

$$\frac{\|y' - g(x')\|}{\|x'\|} < \frac{\|y'\| + \|g(x')\|}{\|x'\|} < \frac{\|y'\|}{\|x'\|} + \frac{\|g(x')\|}{\|x'\|} < 1 + \text{Lip}(g) < 2.$$

Logo

$$\frac{\|y - g(x)\|}{\|x\|} < \left(\frac{\lambda + 2\varepsilon}{\mu - \varepsilon}\right)^n \frac{\|y' - g(x')\|}{\|x'\|} < \left(\frac{\lambda + 2\varepsilon}{\mu - \varepsilon}\right)^n \cdot 2 \rightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow \infty$. Assim concluímos que $y = g(x)$, ou seja, $(x, y) \in \text{graf}(g)$, e isto implica que $\bigcap_{n \geq 0} f^n S_1 \subset \text{graf}(g)$.

Agora seja $(x, y) \in \text{graf}(g)$, ou seja $y = g(x)$. Como $(x, g(x)) \in S_1$, pois

$$\|g(x) - g(0)\| \leq \text{Lip}(g) \|x - 0\| \Rightarrow \|g(x)\| \leq \|x\|,$$

temos que $\text{graf}(g) \subset S_1$. Aplicando f , obtemos

$$f(\text{graf}(g)) \subset fS_1 \Rightarrow \text{graf}(g) \subset fS_1.$$

Repetindo-se esse processo n vezes

$$\text{graf}(g) \subset f^n S_1.$$

Logo $\text{graf}(g) \subset \bigcap_{n \geq 0} f^n S_1$, e assim $\text{graf}(g) = \bigcap_{n \geq 0} f^n S_1$.

(2) Se $(x, y) \in \text{graf}(g)$ então

$$(x, y) = f^n(h^{-n}(x), gh^{-n}(x)). \tag{4.3}$$

Provaremos isto por indução. Seja $\bar{x} = h^{-1}(x) \Rightarrow h(\bar{x}) = x \Rightarrow x = f_1(\bar{x}, g(\bar{x}))$. Assim

$$f(h^{-1}(x), gh^{-1}(x)) = f(\bar{x}, g(\bar{x})) = (f_1(\bar{x}, g(\bar{x})), g(f_1(\bar{x}, g(\bar{x})))) = (x, g(x)) = (x, y).$$

Suponhamos agora, que a equação (4.3) seja válida para n , ou seja, $(x, y) = f^n(h^{-n}(x), gh^{-n}(x))$.

Logo

$$\begin{aligned} f^{n+1}(h^{-n-1}(x), gh^{-n-1}(x)) &= f \circ f^n(h^{-n}(h^{-1}(x)), gh^{-n}(h^{-1}(x))) \\ &= f(h^{-1}(x), gh^{-1}(x)) \\ &= (x, y). \end{aligned}$$

Agora note que

$$\|f^{-n}(x, y)\| = \|(h^{-n}(x), gh^{-n}(x))\| = \|h^{-n}(x)\| \leq \left(\frac{1}{\mu - \varepsilon}\right)^n \|x\|.$$

E então temos

$$\frac{\|f^{-n}(x, y)\|}{\rho^n} \leq \left(\frac{\rho}{\mu - \varepsilon}\right)^n \|x\| \rightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow \infty$, pois $\frac{\rho}{\mu - \varepsilon} < 1$ para ε bastante pequeno.

- (3) Primeiro, provaremos que g é C^1 quando f é C^1 . Defina o fibrado $E_1 \times L_1(E_1, E_2) \rightarrow E_1$ como na prova do Teorema 2.3. O fato de que $\text{Lip}(f - T) < \varepsilon$ nos dá que $\|Df(x, y) - T\| < \varepsilon$ para todo (x, y) . Definindo $F : E_1 \times L_1(E_1, E_2) \rightarrow E_1 \times L_1(E_1, E_2)$ por $F(x, L) = (h(x), \Gamma_{Df}L)$ temos que F é uma contração nas fibras, cujo o fator de contração é $\leq \frac{\lambda + 2\varepsilon}{\mu - \varepsilon}$.

Seguindo exatamente como na Proposição 3.6, chegamos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} & \text{Lip}_0[(\Gamma_f g)(h(x) + y), gh(x) + \Gamma_{Df}(\sigma_2(x))(y)] \\ & \leq \left(\frac{\lambda + 2\varepsilon}{\mu - \varepsilon} \right) \text{Lip}_0[g(x + y), g(x) + \sigma_2(x)(y)]. \end{aligned}$$

E novamente, seguindo as linhas da Proposição 3.6 a partir da equação acima, concluímos que σ_2 é a derivada de g . Logo g é C^1 .

Assim se f é C^k , segue diretamente do Teorema 4.10 (apêndice) que g é C^k .

■

4.1 A não unicidade da Variedade Central

Ao contrário da variedade instável (estável), a variedade central não é única. Um exemplo bem simples da não unicidade da variedade central é dado a seguir.

4 Exemplo. *Considere a seguinte equação diferencial:*

$$\begin{cases} x' = x^2 \\ y' = -y \end{cases}$$

A linearização do sistema acima, na origem é

$$DX(0)(x, y) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

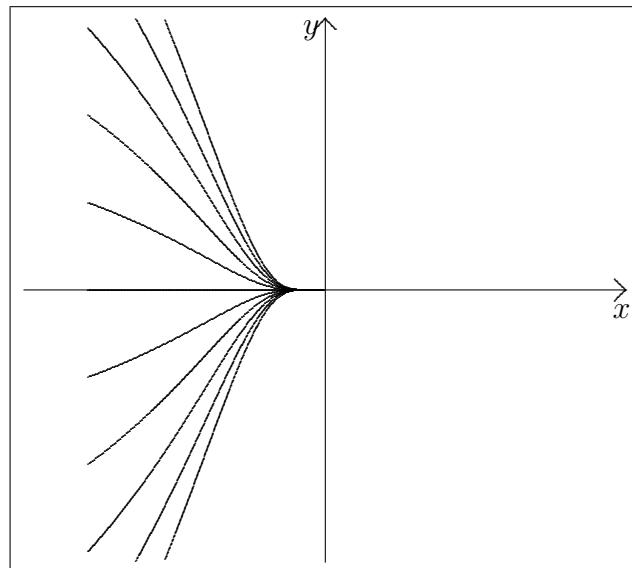
Os autovalores de $DX(0)$ são 0 e -1 . O autoespaço associado ao autovalor -1 é o eixo y , que é o espaço estável e o autoespaço associado ao autovalor 0 é o eixo x , que é o espaço central.

Note que a curva

$$y = \begin{cases} y_0 \exp(\frac{1}{x}) / \exp(\frac{1}{x_0}), & \text{se } x < 0 \\ 0, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

é uma solução do sistema inicial, que passa pelo ponto (x_0, y_0) , quando $x_0 < 0$ e que é invariante pelo fluxo. Temos também que a curva acima é tangente ao eixo x em 0 , pois $\exp(\frac{1}{x}) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow 0^-$ e $\frac{d^m y}{d^m x} = 0$ em $x = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Logo é uma variedade central para o nosso sistema inicial.

Sendo assim, o nosso sistema inicial, possui uma infinidade de variedades centrais, como mostra a figura seguinte.



Apêndice

4.7 DEFINIÇÃO. Um fibrado vetorial $\pi : E \rightarrow X$, com espaço total E , base X e fibra típica F , é uma aplicação contínua com a seguinte propriedade: para todo ponto $x \in X$ existem uma vizinhança $\mathcal{U} \ni x$ e um homeomorfismo $\varphi_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \times F \rightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U})$, tal que $\pi \circ \varphi_{\mathcal{U}} = \pi_{\mathcal{U}}$, onde $\pi_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \times F \rightarrow \mathcal{U}$ é a projeção na primeira coordenada.

A igualdade $\pi(\varphi_{\mathcal{U}}(x, y)) = x$ significa que, para cada $x \in \mathcal{U}$, $\varphi_{\mathcal{U}}$ leva $x \times F$ homeomorficamente sobre $\pi^{-1}(x)$. Assim, a imagem inversa $\pi^{-1}(x)$ de cada ponto de X é homeomorfa a fibra típica F . O diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U} \times F & \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{U}}} & \pi^{-1}(\mathcal{U}) \\ & \searrow \pi_{\mathcal{U}} & \downarrow \pi \\ & & \mathcal{U} \end{array}$$

Quando $E = B \times F$ dizemos que o fibrado é trivial.

4.8 DEFINIÇÃO. Seja $\Pi : E \rightarrow X$ um fibrado vetorial com uma métrica no espaço base. Nós dizemos que uma métrica d em E é admissível quando

- (1) d induz uma norma sobre cada fibra;
- (2) Existe um fibrado complementar E' sobre X e um isomorfismo de $E \oplus E'$ em $X \times A$, onde A é um espaço de Banach e a métrica produto em $X \times A$ induz d em E ;
- (3) A projeção de $X \times A$ sobre E é de norma 1.

4.9 DEFINIÇÃO. Uma aplicação φ entre dois espaços métricos Y_1 e Y_2 é dita ser α -Hölder, $0 < \alpha \leq 1$, se existe uma constante K tal que para todo $x, y \in Y_1$

$$d[\varphi(x), \varphi(y)] \leq K(d[x, y])^\alpha.$$

4.10 Teorema (Teorema da Seção C^r). *Seja $\Pi : E \rightarrow X$ um fibrado vetorial sobre o espaço métrico X , com uma métrica admissível sobre E . Seja X_0 um subconjunto de X e D um disco fibrado de raio C em E , onde $C > 0$ é uma constante finita. Seja D_0 a restrição de D a X_0 , ou seja, $D_0 = D \cap \Pi^{-1}(X_0)$.*

Seja h um homeomorfismo que cobre X_0 , isto é, $X_0 \subset h(X_0)$. Seja $F : D_0 \rightarrow D$ uma aplicação que cobre h . Suponha que exista uma constante k , $0 \leq k < 1$, tal que, para todo $x \in X_0$, a restrição de F a uma fibra sobre x , $F_x : D_x \rightarrow D_{h(x)}$, é Lipschitz com constante não maior do que k . Então:

- (a) *Existe uma única seção $\sigma : X_0 \rightarrow D_0$ tal que $F(\text{imagem de } \sigma) \cap D_0 = \text{imagem de } \sigma$.*
- (b) *Se F é contínua então σ é contínua.*
- (c) *Se, além disso, h^{-1} é Lipschitz com $\text{Lip}(h^{-1}) = \mu$, F é α -Hölder, e $k\mu^\alpha < 1$, então σ é α -Hölder. Em particular, quando $\alpha = 1$, σ é Lipschitz.*
- (d) *Se, além disso, X , X_0 e E são variedades C^r ($r \geq 1$), h e F são C^r , $F^{(j)}$ e $(h^{-1})^{(j)}$ são limitadas para $1 \leq j \leq r$, Lipschitz para $1 \leq j < r$, e $k\mu^r < 1$, onde $\mu = \text{Lip}(h^{-1})$, então σ é C^r .*

Prova: Nós podemos assumir, sem perda de generalidade, que E é trivial. Se não é, a existência da métrica admissível nos permite substituir E por $E \oplus E'$ e F pela composição

$$F' : E \oplus E' \xrightarrow{p} E \xrightarrow{F} E \xrightarrow{i} E \oplus E',$$

onde p é a projeção e i a inclusão. Claramente F' cobre h e tem a mesma constante de Lipschitz sobre qualquer fibra, além disso, desde que a imagem de F' está contida em E , assim é a imagem de qualquer seção invariante sob $\Gamma_{F'}$.

Então de agora em diante, consideraremos $E = X \times A$ e escreveremos $\sigma(x) = (x, \sigma_2(x))$ em coordenadas.

- (a) Veja que o espaço $\Gamma(X_0, D_0)$ das seções $\sigma : X_0 \rightarrow D_0$, com a métrica

$$d(\sigma, \sigma') = \sup_{x \in X_0} \|\sigma(x) - \sigma'(x)\|$$

é completo.

Definamos agora a aplicação $\Gamma_F : \Gamma(X_0, D_0) \rightarrow \Gamma(X_0, D_0)$ dada por $\Gamma_F(\sigma) = F \circ \sigma \circ h^{-1}$. Temos que Γ_F é uma contração (ver Lema 3.4), logo possui um único ponto fixo, que denotaremos por σ . Este ponto fixo satisfaz claramente que $F(\text{imagem de } \sigma) \cap D_0 = \text{imagem de } \sigma$.

(b) Se F é contínua, então $\Gamma_F : \Gamma^0(X_0, D_0) \rightarrow \Gamma^0(X_0, D_0)$ está bem definida, onde $\Gamma^0(X_0, D_0)$ é o espaço das seções contínuas. Como $\Gamma^0(X_0, D_0)$ é fechado em $\Gamma(X_0, D_0)$. Logo pela unicidade do ponto fixo, temos que σ é contínua.

(c) Seja $F_2 = \Pi \circ F$. Note que

$$F(h^{-1}(x), \sigma_2 h^{-1}(x)) = (h \circ h^{-1}(x), \Gamma_{Df} \sigma_2 h^{-1}(x)) = (x, \Gamma_{Df} \sigma_2 h^{-1}(x)) = (x, \sigma_2(x)),$$

pois $\Gamma_{Df} \sigma_2(x) = \sigma_2 \circ h(x)$ pelo Lema 3.4. Logo $F_2(h^{-1}(x), \sigma_2 h^{-1}(x)) = \sigma_2(x)$.

A componente σ_2 satisfaz

$$\begin{aligned} d[\sigma_2(x), \sigma_2(y)] &= d[F_2(h^{-1}(x), \sigma_2 h^{-1}(x)), F_2(h^{-1}(y), \sigma_2 h^{-1}(y))] \\ &\leq d[F_2(h^{-1}(x), \sigma_2 h^{-1}(x)), F_2(h^{-1}(x), \sigma_2 h^{-1}(y))] \\ &\quad + d[F_2(h^{-1}(x), \sigma_2 h^{-1}(y)), F_2(h^{-1}(y), \sigma_2 h^{-1}(y))] \\ &\leq kd[\sigma_2 h^{-1}(x), \sigma_2 h^{-1}(y)] + Hd[h^{-1}(x), h^{-1}(y)]^\alpha \\ &\leq kd[\sigma_2 h^{-1}(x), \sigma_2 h^{-1}(y)] + H\mu^\alpha d[x, y]^\alpha. \end{aligned}$$

Mais geralmente temos

$$d[\sigma_2(x), \sigma_2(y)] \leq k^n d[\sigma_2 h^{-n}(x), \sigma_2 h^{-n}(y)] + H \sum_{j=1}^n (\mu^\alpha)^j k^{j-1} d[x, y]^\alpha. \quad (4.4)$$

Provaremos que a equação acima é válida por indução:

Para $n = 1$ já foi mostrado anteriormente. Suponha agora que a equação acima seja válida para n . Agora, note que

$$\begin{aligned} k^n d[\sigma_2 h^{-n}(x), \sigma_2 h^{-n}(y)] &\leq k^n \{ kd[\sigma_2 h^{-n-1}(x), \sigma_2 h^{-n-1}(y)] + H\mu^\alpha d[h^{-n}(x), h^{-n}(y)]^\alpha \} \\ &\leq k^{n+1} d[\sigma_2 h^{-n-1}(x), \sigma_2 h^{-n-1}(y)] + Hk^n \mu^\alpha d[h^{-n}(x), h^{-n}(y)]^\alpha \\ &\leq k^{n+1} d[\sigma_2 h^{-n-1}(x), \sigma_2 h^{-n-1}(y)] + Hk^n \mu^\alpha \mu^{\alpha n} d[x, y]^\alpha \\ &\leq k^{n+1} d[\sigma_2 h^{-(n+1)}(x), \sigma_2 h^{-(n+1)}(y)] + Hk^n (\mu^\alpha)^{n+1} d[x, y]^\alpha \end{aligned} \quad (4.5)$$

Assim das equações (4.4) e (4.5) temos

$$\begin{aligned} d[\sigma_2(x), \sigma_2(y)] &\leq k^{n+1}d[\sigma_2h^{-(n+1)}(x), \sigma_2h^{-(n+1)}(y)] + Hk^n(\mu^\alpha)^{n+1}d[x, y]^\alpha \\ &\quad + H \sum_{j=1}^n (\mu^\alpha)^j k^{j-1} d[x, y]^\alpha \\ &= k^{n+1}d[\sigma_2h^{-(n+1)}(x), \sigma_2h^{-(n+1)}(y)] + H \sum_{j=1}^{n+1} (\mu^\alpha)^j k^{j-1} d[x, y]^\alpha. \end{aligned}$$

E isto conclui a indução. Fazendo agora $n \rightarrow \infty$, temos

$$\begin{aligned} d[\sigma_2(x), \sigma_2(y)] &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \{k^n d[\sigma_2h^{-n}(x), \sigma_2h^{-n}(y)]\} \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ H \sum_{j=1}^n (\mu^\alpha)^j k^{j-1} d[x, y]^\alpha \right\}. \end{aligned}$$

Temos que $k^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, pois $k < 1$, $h^{-n}(X_0) \subset X_0$, pois $h^{-1}(X_0) \subset X_0$ e que $d[\sigma_2h^{-n}(x), \sigma_2h^{-n}(y)] \leq 2C$, pois $\sigma : X_0 \rightarrow D_0$. Logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{k^n d[\sigma_2h^{-n}(x), \sigma_2h^{-n}(y)]\} = 0.$$

Assim

$$d[\sigma_2(x), \sigma_2(y)] \leq H \frac{\mu^\alpha}{1 - \mu^\alpha k} d[x, y]^\alpha.$$

Logo σ_2 é α -Hölder, o que nos dá que $\sigma = (id, \sigma_2)$ também é α -Hölder.

- (d) Seja $\bar{E} \rightarrow X$ o fibrado vetorial com fibra $L(T_x X, A)$ em x , onde $L(T_x X, A)$ é o espaço das aplicações lineares contínuas do espaço tangente em x de X em A . Note que esse espaço é onde está a derivada de σ_2 .

Seja \bar{D} o disco fibrado de raio C associado a \bar{E} . Sua fibra em x e o conjunto das aplicações lineares de norma não maior do que $2C$.

Definamos agora a aplicação $\Gamma_{DF} : \bar{D}_0 \rightarrow \bar{D}$ que cobre o homeomorfismo $h : X_0 \rightarrow X$ dada por

$$\begin{aligned} \Gamma_{DF}(L) &= \Pi_2 DF_{x, \sigma_2(x)} \circ (id, L) \circ Dh_{h(x)}^{-1}. \\ T_{h(x)} X &\xrightarrow{Dh^{-1}} T_x X \xrightarrow{(id, L)} T_x X \times A \xrightarrow{DF} T_{h(x)} \times A \xrightarrow{\Pi_2} A. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} \Gamma_{DF}(L) &= \Pi_2 DF_{x, \sigma_2(x)} \circ (id, L) \circ Dh_{h(x)}^{-1} \\ &= \Pi_2 (D_1 F_{x, \sigma_2(x)} \oplus D_2 F_{x, \sigma_2(x)}) \circ (Dh_{h(x)}^{-1}, LDh_{h(x)}^{-1}) \\ &= \Pi_2 D_1 F_{x, \sigma_2(x)} Dh_{h(x)}^{-1} \oplus \Pi_2 D_2 F_{x, \sigma_2(x)} \circ L \circ Dh_{h(x)}^{-1}, \end{aligned}$$

e que se σ é diferenciável, a derivada de σ_2 é o ponto fixo de Γ_{DF} , pois

$$\begin{aligned} (\Gamma_{F\sigma})'_{h(x)} = \sigma' &= (id, D\sigma_2) = (F \circ \sigma \circ h^{-1})'_{h(x)} \\ &= (F \circ (id, \sigma_2))'_x \circ Dh_{h(x)}^{-1} \\ &= DF_{x, \sigma_2 x} \circ (id, \sigma_2)' \circ Dh_{h(x)}^{-1} \\ &= DF_{x, \sigma_2 x} \circ (id, D\sigma_2) \circ Dh_{h(x)}^{-1}. \end{aligned}$$

Assim

$$\Pi_2(\Gamma_{F\sigma})' = D\sigma_2 = \Pi_2 DF_{x, \sigma_2 x} \circ (id, D\sigma_2) \circ Dh_{h(x)}^{-1} = \Gamma_{DF} D\sigma_2.$$

As hipóteses sobre a constante de Lipschitz de F e h^{-1} nos dá as seguintes estimativas:

$$\begin{aligned} \|h^{-1}(x) - h^{-1}(y)\| < \mu \|x - y\| &\Rightarrow \left\| \frac{h^{-1}(x) - h^{-1}(y)}{x - y} \right\| \leq \mu \Rightarrow \\ \left\| \lim_{x \rightarrow y} \frac{h^{-1}(x) - h^{-1}(y)}{x - y} \right\| &\leq \mu \Rightarrow \|Dh^{-1}\| < \mu, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|F(x, L) - F(x, S)\| \leq k \|L - S\| &\Rightarrow \left\| \frac{F(x, L) - F(x, S)}{L - S} \right\| \leq k \Rightarrow \\ \|D_2 F\| \leq k &\Rightarrow \|\Pi_2 D_2 F\| \leq k, \end{aligned}$$

pois a norma da projecção é menor ou igual a 1.

Então

$$\|\Pi_2 D_2 F_{x, \sigma_2(x)} \circ (L_1 - L_2) \circ Dh^{-1}\| \leq \mu k \|L_1 - L_2\|. \quad (4.6)$$

Logo temos que

(i) $\Gamma_{DF} : L(T_x X, A) \rightarrow L(T_x X, A)$ está bem definida. De fato,

$$\Gamma_{DF}(L) = \underbrace{\Pi_2 DF_{x, \sigma_2(x)}}_{linear} \circ \underbrace{(id, L)}_{linear} \circ \underbrace{Dh_{h(x)}^{-1}}_{linear} \Rightarrow \Gamma_{DF}(L) \text{ é linear,}$$

e se $L_1 = L_2 \Rightarrow \Gamma_{DF}(L_1) = \Gamma_{DF}(L_2)$. De fato

$$\begin{aligned} \|\Gamma_{DF}(L_1) - \Gamma_{DF}(L_2)\| &= \|\Pi_2 DF_{x, \sigma_2(x)} \circ (id, L_1) \circ Dh_{h(x)}^{-1} \\ &\quad - \Pi_2 DF_{x, \sigma_2(x)} \circ (id, L_2) \circ Dh_{h(x)}^{-1}\| \\ &= \|\Pi_2 D_1 F_{x, \sigma_2(x)} Dh_{h(x)}^{-1} + \Pi_2 D_2 F_{x, \sigma_2(x)} \circ L_1 \circ Dh_{h(x)}^{-1} \\ &\quad - \Pi_2 D_1 F_{x, \sigma_2(x)} Dh_{h(x)}^{-1} - \Pi_2 D_2 F_{x, \sigma_2(x)} \circ L_2 \circ Dh_{h(x)}^{-1}\| \\ &= \|\Pi_2 D_2 F_{x, \sigma_2(x)} \circ L_1 \circ Dh_{h(x)}^{-1} - \Pi_2 D_2 F_{x, \sigma_2(x)} \circ L_2 \circ Dh_{h(x)}^{-1}\| \\ &= \|\Pi_2 D_2 F_{x, \sigma_2(x)} (L_1 \circ Dh_{h(x)}^{-1} - L_2 \circ Dh_{h(x)}^{-1})\| \\ &= \|\Pi_2 D_2 F_{x, \sigma_2(x)} \circ (L_1 - L_2) \circ Dh^{-1}\| \\ &\leq \mu k \|L_1 - L_2\|, \text{ por (4.6).} \end{aligned}$$

Como $L_1 = L_2 \Rightarrow \|L_1 - L_2\| = 0 \Rightarrow \|\Gamma_{DF}(L_1) - \Gamma_{DF}(L_2)\| = 0 \Rightarrow \Gamma_{DF}(L_1) = \Gamma_{DF}(L_2)$.

(ii) Γ_{DF} é contínua.

De (4.6), temos que se $\|L_1 - L_2\| < \delta$ então $\|\Gamma_{DF}(L_1) - \Gamma_{DF}(L_2)\| < \mu k \delta$.

(iii) Γ_{DF} é afim sobre as fibras.

Já vimos que

$$\Gamma_{DF}(L_1) - \Gamma_{DF}(L_2) = \Pi_2 D_2 F_{x, \sigma_2(x)}(L_1 - L_2) D h_{h(x)}^{-1}.$$

Como $\Pi_2 D_2 F_{x, \sigma_2(x)}(L_1 - L_2) D h_{h(x)}^{-1}$ é linear, temos o resultado.

(iv) Γ_{DF} tem translação limitada.

(v) $\text{Lip}((\Gamma_{DF})_x) \leq \mu k < 1$.

Segue diretamente de (4.6).

Portanto, nós podemos encontrar uma constante finita C tal que Γ_{DF} aplique \overline{D}_0 em \overline{D} . Agora nós iremos aplicar a hipótese de indução.

Suponhamos que a seção invariante, τ de Γ_{DF} é a derivada de σ_2 .

r=1: Suponha que F e h são C^1 e $\mu k < 1$. Considere $\Gamma^d(X_0, D_0)$ o espaço das seções $\sigma : X_0 \rightarrow D_0$ que são diferenciáveis. Claramente $\Gamma^d(X_0, D_0) \subset \Gamma^0(X_0, D_0)$ e se $\sigma \in \Gamma^d(X_0, D_0)$, temos que $\Gamma_F \sigma = F \circ \sigma \circ h^{-1} \in \Gamma^d(X_0, D_0)$, ou seja $\Gamma_F : \Gamma^d(X_0, D_0) \rightarrow \Gamma^d(X_0, D_0)$. Como $\Gamma^d(X_0, D_0)$ é fechado em $\Gamma^0(X_0, D_0)$, temos que a seção invariante de Γ_F também é C^1 .

r=2: Suponha agora que F e h são C^2 e $k\mu^2 = (k\mu)\mu < 1$. Se F é C^2 , temos que DF é C^1 . Sabemos que $\Gamma_{DF} : \overline{D}_0 \rightarrow \overline{D}$, $\text{Lip}((\Gamma_{DF})_x) \leq \mu k < 1$ e por hipótese $\text{Lip} h^{-1} = \mu$ e $(k\mu)\mu < 1$. Aplicando o Teorema no caso C^1 , para DF no lugar de F , temos que o ponto fixo de Γ_{DF} é C^1 . Mas esse ponto fixo é $D\sigma_2$, logo σ_2 é C^2 e assim $\sigma = (id, \sigma_2)$ é C^2 .

Suponhamos agora que o Teorema está provado quando F e h são C^{r-1} e $\mu^{r-2}(\mu k) < 1$, ou seja, nestas condições a seção invariante de Γ_F é C^{r-1} .

Agora, seja F e h C^r e $\mu^{r-1}(\mu k) < 1$. Novamente, como F é C^r , DF é C^{r-1} , aplicando o Teorema no caso C^{r-1} para DF no lugar de F , obtemos que a seção invariante de Γ_{DF} é C^{r-1} , ou seja, $D\sigma_2$ é C^{r-1} o que nos dá que σ é C^r .

Agora, mostraremos que de fato τ é a derivada de σ_2 . A prova é um pouco longa, mas segue os passos da Proposição 3.6. Fixando x e deixando y variar, temos

$$\begin{aligned} & \text{Lip}_0[\sigma_2(h(x) + y), \sigma_2(h(x)) + \tau(h(x))(y)] \leq \\ & \underbrace{\text{Lip}_0[\sigma_2(h(x) + y) - \sigma_2(h(x)), \Gamma_{DF}[\sigma_2(x + y) - \sigma_2(x)]]}_{(I)} + \underbrace{\text{Lip}_0[\Gamma_{DF}[\sigma_2(x + y) - \sigma_2(x)], \Gamma_{DF}\tau(x)(y)]}_{(II)}. \end{aligned}$$

A equação (II) nos dá que:

$$\begin{aligned} (II) &= \|\Gamma_{DF}[\sigma_2(x + y) - \sigma_2(x)] - \Gamma_{DF}\tau(x)(y)\| \\ &\leq \mu k \|\sigma_2(\text{id} + x) - \sigma_2(x)\|(y) - \tau(x)(y)\|, \end{aligned}$$

pois $\text{Lip}((\Gamma_{DF})_x) \leq \mu k$.

Agora, mostraremos que (I) = 0.

Seja w , tal que $h(x + w) = h(x) + y$. É fácil ver que $\|w\| \leq \mu \|y\|$ e que

$$\Gamma_{DF}[\sigma_2(\text{id} + x) - \sigma_2(x)](y) = \Pi_2 DF_{x, \sigma_2(x)} \circ (\text{id}, \sigma_2(\text{id} + x) - \sigma_2(x)) \circ Dh_{h(x)}^{-1}(y).$$

Chamando $Dh_{h(x)}^{-1}(y) = w'$, temos que $\|w'\| \leq \mu \|y\|$ e que

$$\Gamma_{DF}[\sigma_2(\text{id} + x) - \sigma_2(x)](y) = \Pi_2 DF_{x, \sigma_2(x)}(w', \sigma_2(w' + x) - \sigma_2(x)).$$

Sabemos que $F(x, L) = (h(x), \Gamma_{Df}L(x))$ e que

$$\sigma_2(h(x) + y) = \sigma_2 \circ h(x + w) = \Gamma_{Df}\sigma_2(x + w).$$

Logo

$$F(x + w, \sigma_2) = (h(x + w), \Gamma_{Df}\sigma_2(x + w)) \Rightarrow \Pi_2 F(x + w, \sigma_2(x + w)) = \Gamma_{Df}\sigma_2(x + w).$$

Então

$$\begin{aligned} & \|\sigma_2(h(x) + y) - \sigma_2(h(x)) - \Gamma_{DF}[\sigma_2(\text{id} + x) - \sigma_2(x)](y)\| = \\ & \|\Gamma_{Df}\sigma_2(x + w) - \Gamma_{Df}\sigma_2(x) - \Pi_2 DF_{x, \sigma_2(x)}(w', \sigma_2(w' + x) - \sigma_2(x))\| = \\ & \|\Pi_2 F(x + w, \sigma_2(x + w)) - \Pi_2 F(x, \sigma_2(x)) - \Pi_2 DF_{x, \sigma_2(x)}(w', \sigma_2(w' + x) - \sigma_2(x))\| = \\ & \|\Pi_2 DF_{x, \sigma_2(x)}(w, \sigma_2(w + x) - \sigma_2(x)) + \Pi_2 R(w, \sigma_2(w + x) - \sigma_2(x)) \\ & - \Pi_2 DF_{x, \sigma_2(x)}(w', \sigma_2(w' + x) - \sigma_2(x))\| = (III). \end{aligned}$$

Note que $\| (w, \sigma_2(w+x) - \sigma_2(x)) \| = \max\{\| w \|, \| \sigma_2(w+x) - \sigma_2(x) \|\} = \| w \|$, pois $\sigma_2 \in L_1(E_1, E_2)$. Logo

$$\lim_{\|w\| \rightarrow 0} \frac{R(w, \sigma_2(w+x) - \sigma_2(x))}{\| w \|} = 0.$$

A equação (III) pode ser reescrita como

$$(III) = \| \Pi_2 DF_{x, \sigma_2(x)}(w - w', \sigma_2(x+w) - \sigma_2(x+w')) + \Pi_2 R(w, \sigma_2(x+w) - \sigma_2(x)) \|.$$

Assim

$$(IV) = \frac{(III)}{\| y \|} \leq \| \Pi_2 DF_{x, \sigma_2(x)} \| \frac{\| w - w' \|}{\| y \|} + \frac{R(w, \sigma_2(w+x) - \sigma_2(x))}{\| y \|}.$$

Então

$$\begin{aligned} (I) &= \limsup_{y \rightarrow 0} \frac{\sigma_2(h(x) + y) - \sigma_2(h(x)) - \Gamma_{DF}[\sigma_2(id + x) - \sigma_2(x)](y)}{\| y \|} \\ &= \limsup_{y \rightarrow 0} \frac{(III)}{\| y \|} \\ &= \limsup_{y \rightarrow 0} (IV). \end{aligned}$$

Como $\| w \| \leq \mu \| y \|$, temos

$$\lim_{\|y\| \rightarrow 0} \frac{R(w, \sigma_2(w+x) - \sigma_2(x))}{\| y \|} \leq \mu \lim_{\|w\| \rightarrow 0} \frac{R(w, \sigma_2(w+x) - \sigma_2(x))}{\| w \|} = 0.$$

Iremos agora mostrar que $\lim_{\|y\| \rightarrow 0} \frac{\| w - w' \|}{\| y \|} = 0$. Para isto, observe que

$$\begin{aligned} h(x+w') - h(x) &= \Pi_1 F(x+w', \sigma_2(x+w')) - \Pi_1 F(x, \sigma_2(x)) \\ &= \Pi_1 DF_{x, \sigma_2(x)}(w', \sigma_2(x+w') - \sigma_2(x)) + R(w', \sigma_2(x+w') - \sigma_2(x)). \end{aligned}$$

Mas $\Pi_1 DF_{x, \sigma_2(x)}(w', \sigma_2(x+w') - \sigma_2(x)) = Dh_x(w') = y$, pois

$$\begin{aligned} DF_{x, \sigma_2(x)}(w', \sigma_2(x+w') - \sigma_2(x)) &= \\ \left(\begin{array}{cc} Dh_x & 0 \\ D_1 F_{x, \sigma_2(x)} & D_2 F_{x, \sigma_2(x)} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} w' \\ \sigma_2(x+w') - \sigma_2(x) \end{array} \right) &= \\ (Dh_x w', D_1 F_{x, \sigma_2(x)} w' + D_2 F_{x, \sigma_2(x)}(\sigma_2(x+w') - \sigma_2(x))) &. \end{aligned}$$

Logo

$$h(x+w') - h(x) = y + R(w', \sigma_2(x+w') - \sigma_2(x)).$$

Como $y = h(x + w) - h(x)$ temos

$$h(x + w') - h(x + w) = R(w', \sigma_2(x + w') - \sigma_2(x)).$$

Usando o fato de que h^{-1} é Lipschitz, obtemos

$$\| h(x + w') - h(x + w) \| \geq [\text{Lip}(h^{-1})]^{-1} \| w - w' \| = \mu^{-1} \| w - w' \| .$$

E assim

$$\| w - w' \| \leq \mu \| h(x + w') - h(x + w) \| = \mu \| R(w', \sigma_2(x + w') - \sigma_2(x)) \| .$$

Então

$$\begin{aligned} \lim_{\|y\| \rightarrow 0} \frac{\| w - w' \|}{\| y \|} &\leq \mu \lim_{\|y\| \rightarrow 0} \frac{\| R(w', \sigma_2(x + w') - \sigma_2(x)) \|}{\| y \|} \\ &\leq \lim_{\|w'\| \rightarrow 0} \mu \frac{\| R(w', \sigma_2(x + w') - \sigma_2(x)) \|}{\mu^{-1} \| w' \|} \\ &= \mu^2 \lim_{\|w'\| \rightarrow 0} \frac{\| R(w', \sigma_2(x + w') - \sigma_2(x)) \|}{\| w' \|} \\ &= 0. \end{aligned}$$

E assim $(I) = 0$.

Então

$$\begin{aligned} &\text{Lip}_0[\sigma_2(h(x) + y), \sigma_2(h(x)) + \tau(h(x))(y)] \\ &\leq \mu k \cdot \text{Lip}_0[\sigma_2(x + y), \sigma_2(x)(y) + \tau(x)(y)], \end{aligned} \tag{4.7}$$

ou seja,

$$\text{Lip}_0[\sigma_2(x + y), \sigma_2(x)(y) + \tau(x)(y)] \geq \frac{1}{\mu k} \text{Lip}_0[\sigma_2(h(x) + y), \sigma_2(h(x)) + \tau(h(x))(y)].$$

Logo

$$\begin{aligned} &\text{Lip}_0[\sigma_2(h^{-n}(x) + y), \sigma_2(h^{-n}(x)) + \tau(h^{-n}(x))(y)] \\ &\geq \frac{1}{\mu k} \text{Lip}_0[\sigma_2(h^{-n+1}(x) + y), \sigma_2(h^{-n+1}(x)) + \tau(h^{-n+1}(x))(y)] \\ &\frac{1}{\mu k} \frac{1}{\mu k} \text{Lip}_0[\sigma_2(h^{-n+2}(x) + y), \sigma_2(h^{-n+2}(x)) + \tau(h^{-n+2}(x))(y)] \\ &\geq \dots \geq \left(\frac{1}{\mu k} \right)^n \text{Lip}_0[\sigma_2(x + y), \sigma_2(x)(y) + \tau(x)(y)]. \end{aligned}$$

Suponhamos agora que exista $x \in X_0$, tal que $\text{Lip}_0[\sigma_2(x + y), \sigma_2(x)(y) + \tau(x)(y)] = \delta > 0$, ou seja, existe uma seqüência $x_n \in X_0$, tal que $\text{Lip}_0[\sigma_2(x_n + y), \sigma_2(x_n)(y) + \tau(x_n)(y)] \rightarrow \infty$. Assim

$$\limsup_{y \rightarrow 0} \frac{\| \sigma_2(x_n + y) - \sigma_2(x_n)(y) - \tau(x_n)(y) \|}{\| y \|} = \infty.$$

Mas

$$\begin{aligned}
\limsup_{y \rightarrow 0} \frac{\| \sigma_2(x_n + y) - \sigma_2(x_n)(y) - \tau(x_n)(y) \|}{\| y \|} &\leq \limsup_{y \rightarrow 0} \frac{\| \sigma_2(x_n + y) - \sigma_2(x_n)(y) \|}{\| y \|} \\
&\quad + \limsup_{y \rightarrow 0} \frac{\| \tau(x_n)(y) \|}{\| y \|} \\
&\leq \text{Lip}(\sigma_2) \limsup_{y \rightarrow 0} \frac{\| x_n + y - x_n \|}{\| y \|} \\
&\quad + \limsup_{y \rightarrow 0} \| \tau(x_n) \| \\
&\leq \text{Lip}(\sigma_2) + \| \tau(x_n) \| .
\end{aligned}$$

E isto nos dá que $\text{Lip}_0[\sigma_2(x_n + y), \sigma_2(x_n)(y) + \tau(x_n)(y)]$ é limitado, o que contradiz a existência de algum $x \in X_0$, tal que $\text{Lip}_0[\sigma_2(x + y), \sigma_2(x)(y) + \tau(x)(y)] = \delta > 0$, ou seja, $\text{Lip}_0[\sigma_2(x + y), \sigma_2(x)(y) + \tau(x)(y)] = 0$. Logo $\tau(x)$ é a derivada de σ_2 em x .

■

Referências Bibliográficas

- [1] **Brin, Michael; Stuck, Garret**(2002)“*Introduction to Dynamical Systems*”, Cambridge University Press.
- [2] **Burns, Keith; Gidea, Marian**(2005)“*Differential Geometry and Topology with a view to Dynamical Systems*”, Chapman& Hall.
- [3] **Grant, Christopher P.** (1999) ” *Lecture Notes on Ordinary Differential Equations*.
- [4] **Hirsch, Morris. W.; Pugh, Charles. C.; Shub, Michael** (1977)“*Invariant Manifolds*”, Lecture Notes in Mathematics, No. 583, Springer-Verlag, New York.
- [5] **Lima, Elon L.** (2005) ” *Curso de Análise volume 2*”, Impa, 8^a edição.
- [6] **Oliveira, César R.** (2005)“*Introdução à Análise Funcional*”, Impa, Publicações Matemáticas, 2^a edição.
- [7] **Robinson, Clark**(1999)“*Dynamical Systems - Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*”, Second Edition, CRC Press.
- [8] **Shub, Michael**“*Global Stability of Dynamical Systems*”, Springer-Verlag.