Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática - IM
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PGMAT
Dissertação de Mestrado

Espaços métricos e topológicos na ausência do Axioma da Escolha

João Paulo Cirineu de Jesus

Salvador-Bahia
Fevereiro de 2010

Espaços métricos e topológicos na ausência do Axioma da Escolha

João Paulo Cirineu de Jesus

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Samuel Gomes da Silva.

Salvador-Bahia

Fevereiro de 2010

Jesus, João Paulo Cirineu de.

Espaços métricos e topológicos na ausência do Axioma da Escolha / João Paulo Cirineu de Jesus. – Salvador: UFBA, 2010.

116 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Samuel Gomes da Silva.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2010.

Referências bibliográficas.

1. Teoria dos conjuntos. 2. Espaços métricos. 3. Topologia. I. Silva, Samuel Gomes da. II. Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática. III. Título.

CDU : 510.22
: 515.122

Espaços métricos e topológicos na ausência do Axioma da Escolha

João Paulo Cirineu de Jesus

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 24 de fevereiro de 2010.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Samuel Gomes da Silva (Orientador)
UFBA

Prof. Dr. Charles James Glyn Morgan
University College London

Profa. Dra. Ofélia Teresa Alas
USP

À minha mãe e às minhas lindas sobrinhas.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço imensamente à minha família pelo apoio incondicional, moral e financeiro, para que eu pudesse alcançar o meu desejo de crescer cada vez mais intelectual e profissionalmente, de maneira justa e honesta, fazendo-me chegar ao nível intelectual e acadêmico no qual hoje me encontro. Em especial, agradeço muito mesmo à minha mãe pelo seu amor e carinho incondicionais por mim e às minhas lindas sobrinhas, paixões da minha vida e minha felicidade, pela alegria que me deram e me dão em meus momentos de tristeza.

Agradeço aos meus caríssimos amigos, ex-colegas de mestrado e meus sempre companheiros de luta, Teles e Wendell, Robério e Roberto e o nosso querido Vinicius "pink and blue butterfly" pelos nossos momentos memoráveis de estudos em grupo no IM e de diversão e farra comedidas dentro e fora do IM.

Agradeço muito à minha querida e "fofucha" Francisleide, aos meus caros Márcio "miserex-man", Edgard "minu", Renivaldo "$\mathbb{R}^n$" e a todos os meus outros caros amigos, que fiz durante os meus anos de estudo no IM, por serem a comprovação de que existem pessoas das quais podemos ter uma amizade sincera e pelas quais podemos nutrir grande apreço e ter verdadeira consideração.

Agradeço muito também ao meu orientador, Prof. Samuel Gomes da Silva, tanto pela sua disposição, dedicação e prestatividade quanto pelo seu constante incentivo e profissionalismo durante o período em que me orientou em nossos trabalhos de iniciação científica – que nos rendeu um artigo de capa em uma das edições de 2007 da revista Matemática Universitária – e durante a pesquisa orientada do mestrado – que culminou na apresentação de minha defesa de dissertação na Semana de Teoria dos Conjuntos e Topologia Geral do IM-UFBA neste ano de 2010. Agradeço-o ainda pelas experiências compartilhadas e pelos seus aconselhamentos, mesmo discordando de algumas opiniões suas expressas nestes últimos.

Agradeço à Profa. Lúcia Renato Junqueira e à Profa. Ofélia Teresa Alas pela gentileza e receptividade quando fui a São Paulo para apresentar um recorte do presente trabalho nos seminários de Topologia Geral e Teoria dos Conjuntos do IME-USP.

Agradeço ao Prof. Charles James Glyn Morgan e à Profa. Ofélia Teresa Alas por aceitarem participar da comissão julgadora de minha dissertação e me darem a grande honra de tê-los como membros da banca examinadora de minha defesa.

Agradeço a todos os professores do DMAT-UFBA que contribuíram efetivamente para minha formação como matemático. Agradeço ainda mais aos que contribuíram para minha formação não somente como matemático, mas também como ser humano. Agradecimentos especiais à Profa. Silvia Veloso Guimarães pela sua dedicação extrema aos alunos da graduação em Matemática e por tudo aquilo que aprendi com o exemplo de pessoa e educadora que ela é.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro concedido a mim durante todo o meu mestrado.

Ainda que sujeitos aos contratempos da vida, somos os principais responsáveis pelas escolhas que fazemos e seremos os maiores responsáveis pelas suas consequências.

João Paulo C. de Jesus

"Aquilo que é o melhor para nós nem sempre é o mais fácil. Mas, em última análise, é o que realmente compensa."

José Couto Nogueira

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo determinar a necessidade exata do uso de princípios de escolha para o estabelecimento de determinados resultados consagrados da Teoria dos Conjuntos e da Topologia Geral, assim como o de estabelecer a relação exata entre determinados princípios topológicos bem conhecidos e certos princípios de escolha e maximais. Além disso, são apresentados vários resultados que evidenciam o que pode ocorrer com os espaços métricos e topológicos na ausência de certos princípios de escolha ou mesmo de qualquer princípio de escolha. Em particular, são apresentados alguns resultados relacionados à paracompacidade e à metrizabilidade do primeiro cardinal não enumerável. Finalmente, são apresentadas duas construções de subconjuntos não mensuráveis da reta real e é feito um breve comentário sobre dois específicos modelos da teoria de conjuntos de Zermelo–Fraenkel.

Palavras-chave: Axioma da Escolha; Axioma da Escolha Enumerável; Espaços (pseudo)métricos; Produtos topológicos.

Abstract

This work aims to determine the exact need of the use of choice principles to establish certain renowned results in Set Theory and General Topology, as well as to establish the exact relationship between certain well-known topological principles and certain maximal and choice principles. In addition, we present several results that show what can happen with the topological and metric spaces in the absence of certain choice principles or even any choice principle. In particular, we present some results related to paracompactness and metrizability of the first uncountable cardinal. Finally, we present two constructions of non-measurable subsets of the real line and is made a brief comment on two specific models of Zermelo–Fraenkel set theory.

Keywords: Axiom of Choice; Axiom of Countable Choice; (Pseudo)metric spaces; Topological products.

Sumário

Introdução

Em um de seus artigos de 1908, Ernst Zermelo (1871–1953) apresentava a primeira axiomatização da Teoria dos Conjuntos. Fazem parte da axiomática de Zermelo os Axiomas da Extensionalidade ("quaisquer dois conjuntos que tenham exatamente os mesmos elementos são iguais"), da Separação ("para todo conjunto z e toda propriedade $\phi(x)$ que se aplica a cada $x \in z$, existe o conjunto y que é constituído por todo $x \in z$ tal que $\phi(x)$ vale"), do Vazio ("existe o conjunto sem elementos"), do Par ("existe o conjunto que é constituído somente por dois conjuntos dados"), da União ("existe o conjunto que é constituído pelos elementos dos elementos de um conjunto dado"), do Infinito ("existe um conjunto indutivo") e das Partes ("existe o conjunto dos subconjuntos de um conjunto dado"). Em 1922, Abraham Fraenkel e Thoralf Skolem propuseram (independentemente) um novo axioma-esquema, denominado Esquema de Substituição, o qual declara que: "para todo conjunto z e toda propriedade $\phi(x, y)$ que tem caráter funcional em z (i.e., para todo $x \in z$, existe um único conjunto y tal que $\phi(x, y)$ vale), existe o conjunto que é constituído por todo conjunto y para o qual existe um $x \in z$ tal que $\phi(x, y)$ vale". Falando intuitivamente, o Esquema de Substituição garante que "a imagem de um conjunto por uma função também é um conjunto". É utilizado quando não se tem pré-especificado um contradomínio natural para "separar" o conjunto-imagem. Em um artigo de 1925 de John von Neumann – e posteriormente em um trabalho de 1930 de Zermelo –, aparecia o chamado Axioma da Fundação, também conhecido como Axioma da Regularidade, o qual declara que: "todo conjunto não vazio possui um elemento $\in$-minimal", i.e., "para todo conjunto $x \neq \emptyset$, existe um $y \in x$ tal que $y \cap x = \emptyset$". É um axioma técnico, irrelevante para as aplicações matemáticas padrões, cuja finalidade menos óbvia é estabelecer uma estrutura "hierárquica cumulativa" para o universo de todos os conjuntos e a mais óbvia é impedir que ocorram certas "patologias", tais como: $x = \{x\}$, $x \in x$ e $x \in y \in x$, entre outras. Chama-se axiomática **ZF** (de Zermelo-Fraenkel) o sistema formado pelos axiomas de Zermelo (apresentados acima) mais o Esquema de Substituição e o Axioma da Regularidade. A teoria de conjuntos **ZF** fica definida como a teoria resultante da axiomática **ZF**.

Dentre os axiomas que Zermelo apresentou em 1908, o que levantou maiores problemas conceituais foi, sem dúvida alguma, o seu famoso Axioma da Escolha. Este axioma é polêmico devido justamente ao seu caráter inerentemente "não construtivo", pois o mesmo garante a todo matemático a possibilidade de fazer "infinitas escolhas arbitrárias" – o que não pode ser demonstrado por processos construtivos e finitísticos de prova. Falando intuitivamente, o Axioma da Escolha garante que "dada uma família infinita de conjuntos não vazios, pode-se formar um conjunto *escolhendo* um elemento de cada um dos conjuntos dessa família". Além deste enunciado para o Axioma da Escolha, outros mais comuns (e um pouco mais precisos) são os seguintes: "toda família de conjuntos não vazios admite uma função-escolha", "o produto cartesiano de qualquer família de conjuntos não vazios é não vazio" e "para toda família disjunta de conjuntos não vazios, existe um conjunto que possui exatamente um elemento em comum com cada elemento dessa família". Em muitas situações envolvendo os números reais, a existência de máximos e mínimos para subconjuntos compactos facilita bastante a introdução de regras específicas de escolha em alguns argumentos – também há muitas situações envolvendo conjuntos enumeráveis em que podemos facilmente introduzir regras específicas de escolha em determinados argumentos. No entanto, há muitas situações nas quais sabemos que infinitas escolhas arbitrárias não podem ser evitadas – por exemplo, a asserção "a união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável" depende fortemente do Axioma da Escolha (ou, pelo menos, do chamado Axioma da Escolha Enumerável, que é a restrição do Axioma da Escolha às famílias enumeráveis de conjuntos não vazios). De fato: existem modelos de **ZF** nos quais $\mathbb{R}$ pode ser escrito como uma união enumerável de conjuntos enumeráveis.

Quando se inclui o Axioma da Escolha na axiomática de uma teoria de conjuntos (que seja relativamente consistente com este axioma, tal como **ZF**), é costume notacional juntar à direita da sigla dessa axiomática a letra **C** (da palavra inglesa *choice*). Logo, **ZFC** é a axiomática **ZF** mais o Axioma da Escolha. Naturalmente, a teoria de conjuntos **ZFC** fica definida como a teoria resultante da axiomática **ZFC**. A sigla mais comumente utilizada para representar o Axioma da Escolha é **AC**. Na presente dissertação, está sendo adotada a sigla $\mathbf{AC}_\omega$ para representar o Axioma da Escolha Enumerável e a sigla $\mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$ para representar $\mathbf{AC}_\omega$ restrito às famílias (enumeráveis) de subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$.

O autor e o seu orientador, seguindo a tendência da literatura atual sobre o tema que dá título a presente dissertação, têm grande interesse em trabalhar tanto com versões fracas de **AC** – em específico, $\mathbf{AC}_\omega$ e $\mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$ – quanto com princípios maximais mais fracos que o Lema de Zorn – em particular, **BPI** (o Teorema do Ideal Booleano Primo), **UT** (o Teorema do Ultrafiltro) e **UF** (Existência de Ultrafiltros Livres) –, devido aos interessantes (e, em sua maioria, recentes) resultados que relacionam tais princípios de escolha e maximais com teoremas centrais da Teoria dos Espaços Métricos e Topológicos. Os seguintes (entre muitos outros) exemplos comprovam isso:

- Na ausência de qualquer princípio de escolha, é possível construir um espaço métrico compacto que não é separável nem tem base enumerável.

- Na ausência de $\mathbf{AC}_\omega$, pode-se construir um espaço pseudométrico que é Lindelöf e tem base enumerável, mas não é separável.

- Na ausência de $\mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$, garante-se a existência de um subespaço de $\mathbb{R}$ que não é separável – e isto nos garante a existência de um espaço métrico que tem base enumerável, mas não é separável.

Ainda que existam muito mais exemplos (que aparecerão ao longo deste trabalho) tão surpreendentes quanto os exemplos acima, estes últimos já representam muito bem o objetivo da presente dissertação: o de falar sobre "espaços métricos e topológicos na ausência do Axioma da Escolha".

O corpo da presente dissertação está dividido em quatro capítulos e um apêndice cujos conteúdos e objetivos estão brevemente discriminados a seguir:

- **Capítulo 1**: Apresentação de noções conjuntistas e topológicas preliminares e de proposições relacionadas a estas noções.

- **Capítulo 2**: Apresentação e demonstração de asserções que são demonstráveis em: $\mathbf{ZF}$, $\mathbf{ZF} + \mathbf{AC}_\omega$ e $\mathbf{ZF} + \mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$, com o intuito de explicitar a necessidade exata do uso de princípios de escolha para o estabelecimento de determinados resultados consagrados da Teoria dos Conjuntos e da Topologia Geral.

- **Capítulo 3**: Apresentação e demonstração da equivalência entre $\mathbf{AC}$ e o Teorema de Tychonoff e de equivalências entre $\mathbf{BPI}$ e algumas restrições do Teorema de Tychonoff, com o objetivo de estabelecer a relação exata entre tais princípios de escolha e maximal e determinados princípios topológicos bem conhecidos.

- **Capítulo 4**: Apresentação de alguns "horrores" da Análise Real e da Topologia da Reta no modelo básico de Cohen, de condições sob as quais $\mathbb{N}$ é Lindelöf e de determinados resultados sobre: espaços (pseudo)métricos e topológicos na ausência de $\mathbf{AC}_\omega$, espaços topológicos SE e SSE na ausência de $\mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$ e paracompacidade e metrizabilidade de ω_1 em $\mathbf{ZF}$, com o propósito de evidenciar o que pode ocorrer com os espaços métricos e topológicos na ausência de certos princípios de escolha ou mesmo de qualquer princípio de escolha.

- **Apêndice A**: Apresentação das construções de Vitali e de Sierpiński (com as quais prova-se a existência de subconjuntos não Lebesgue-mensuráveis de $\mathbb{R}$ na presença, respectivamente, de **AC** e de **BPI**) e apresentação de um breve comentário sobre os modelos de Halpern–Lévy e de Solovay.

Finalmente, destaquemos que, devido à extensão que o presente trabalho já tem com os conteúdos que estão sendo abordados, não foi possível falarmos sobre resultados relacionados a outros princípios de escolha estritamente mais fracos que **AC**, tal como **DC** (o Princípio das Escolhas Dependentes). Em trabalhos futuros, incluiremos, muito possivelmente, tais resultados que são tão importantes e interessantes quanto os que são apresentados na presente dissertação. Gostaríamos também de destacar que, devido à extensão e ao cumprimento do prazo de conclusão do presente trabalho, omitiremos as demonstrações de algumas asserções nos Capítulos 1 e 2. Porém, salientamos a nossa pretensão de incluir tais demonstrações em trabalhos futuros.

Capítulo 1

Noções preliminares de Teoria dos Conjuntos e Topologia Geral

No presente capítulo, apresentaremos as noções conjuntistas e topológicas que são necessárias para a devida compreensão dos conteúdos que serão abordados nos demais capítulos. A maioria das noções básicas de Teoria dos Conjuntos e de Topologia Geral que aparecerão ao longo do presente trabalho serão supostas conhecidas.

1.1 Noções conjuntistas

Na presente seção, são apresentadas algumas noções conjuntistas e determinadas proposições relacionadas a estas noções. Mesmo que não seja apresentada, a prova de cada uma das proposições seguintes é feita em **ZF**, salvo menção em contrário.

Definição 1.1.1. Sejam X e I conjuntos. Seja $\xi : I \longrightarrow X$ uma função. Diz-se que ξ é uma **indexação** de X por I se ξ for sobrejetora. Neste caso, diz-se que I é um **conjunto de índices** para X, ou que X **pode ser indexado** por I. Para cada $i \in I$, diz-se que $\xi(i)$ é a ***i*-ésima coordenada** de ξ e denota-se $\xi(i)$ por ξ_i. Escreve-se então $X = \{\xi_i : i \in I\}$ e, por abuso de linguagem, diz-se que $\{\xi_i : i \in I\}$ é uma indexação de X por I. Finalmente, se ξ for bijetora, diz-se que ξ é uma **enumeração** de X por I e, por abuso de linguagem, que $\{\xi_i : i \in I\}$ é uma enumeração de X por I. $\triangle$

Em virtude da Definição 1.1.1, é imediato concluir que, dados X e I conjuntos e uma indexação $\xi : I \longrightarrow X$, se $I = \emptyset$, então $X = \xi = \emptyset$, i.e., o único conjunto que pode ser indexado por $\emptyset$ é o próprio $\emptyset$.

Observação 1.1.2. Na literatura matemática, é bastante comum chamar um *conjunto de conjuntos* que esteja indexado por algum conjunto de *família indexada de conjuntos.*

Em tratamentos "ingênuos" de Teoria dos Conjuntos, o termo "família" é comumente utilizado para designar o que seria um conjunto de conjuntos. No entanto, para a teoria de conjuntos **ZF**, todo conjunto é um conjunto de conjuntos. Por esta razão, o termo "família" será tratado no presente trabalho apenas como um sinônimo para o termo "conjunto". Além disso, chamaremos uma família indexada de conjuntos simplesmente de família de conjuntos. $\triangle$

Definição 1.1.3. Seja $\{X_i : i \in I\}$ uma família de conjuntos. Diz-se que o conjunto $\prod_{i\in I} X_i := \left\{\zeta : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} X_i : \forall\, i \in I\, (\zeta(i) \in X_i)\right\}$ é o **produto cartesiano** de $\{X_i : i \in I\}$. Caso seja $I \neq \emptyset$, considere, para cada $i \in I$, $\pi_i : \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow X_i$ definida por $\pi_i(\zeta) = \zeta(i)$. Neste caso, para cada $i \in I$, diz-se que π_i é a **projeção** de $\prod_{i\in I} X_i$ **na *i*-ésima coordenada** e, para cada $\zeta \in \prod_{i\in I} X_i$, que $\pi_i(\zeta)$ é a ***i*-ésima coordenada** de ζ. $\triangle$

Destaquemos que, na definição da projeção de $\prod_{i\in I} X_i$ em um dada coordenada, não é considerado o caso em que $I = \emptyset$, devido ao seguinte fato: para $I = \emptyset$, temos que $\{X_i : i \in I\} = \emptyset$. Então, por vacuidade, segue que $\prod_{i\in I} X_i = \{\emptyset\}$. Neste caso, note que não é possível bem definir a projeção em uma dada coordenada. Por este motivo, é necessário que o conjunto de índices da família seja não vazio para que se possa bem definir a projeção de seu produto cartesiano em uma dada coordenada.

Além disso, destaquemos a seguinte consequência imediata da Definição 1.1.3: dada uma família $\{X_i : i \in I\}$ de conjuntos tal que, para todo $i, j \in I$, $X_i = X_j = A$, tem-se que $\prod_{i\in I} X_i$ é o conjunto das funções de I em A, o qual denotamos por ${}^I A$.

Definição 1.1.4. Sejam $\mathbb{P}$ um conjunto e $\leqslant$ uma relação binária sobre $\mathbb{P}$. Diz-se que $\langle \mathbb{P}, \leqslant\rangle$ é uma **pré-ordem**, ou que $\leqslant$ é uma **pré-ordem** sobre $\mathbb{P}$, se valer as seguintes condições:

(i) $\leqslant$ é reflexiva, i.e., para todo $x \in \mathbb{P}$, $x \leqslant x$.

(ii) $\leqslant$ é transitiva, i.e., para todo $x, y, z \in \mathbb{P}$, se $x \leqslant y$ e $y \leqslant z$, então $x \leqslant z$.

Diz-se que $\langle \mathbb{P}, \leqslant\rangle$ é uma **ordem parcial**, ou que $\leqslant$ é uma **ordem parcial** sobre $\mathbb{P}$, se $\langle \mathbb{P}, \leqslant\rangle$ for uma pré-ordem e valer a seguinte condição:

(iii) $\leqslant$ é antissimétrica, i.e., para todo $x, y \in \mathbb{P}$, se $x \leqslant y$ e $y \leqslant x$, então $x = y$.

Diz-se que $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ é uma **ordem total**, ou que $\leqslant$ é uma **ordem total** sobre $\mathbb{P}$, se $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ for uma ordem parcial e valer a seguinte condição:

(*iv*) $\leqslant$ é dicotômica, i.e., para todo $x, y \in \mathbb{P}$, $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$.

Agora, se $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ for uma ordem parcial, considere a relação binária $<$ sobre $\mathbb{P}$ que é definida pela seguinte sentença: para todo $x, y \in \mathbb{P}$, $x < y$ se, e somente se, $x \leqslant y$ e $x \neq y$. Neste caso, diz-se que $\langle \mathbb{P}, < \rangle$ é uma **ordem parcial estrita**, ou que $<$ é uma **ordem parcial estrita** sobre $\mathbb{P}$. $\triangle$

Um exemplo muito importante de ordem parcial é a relação de inclusão $\subseteq$ sobre a uma família qualquer de conjuntos. Neste caso, a ordem parcial estrita associada é, evidentemente, a relação de inclusão estrita – a qual será denotada de agora em diante por $\subset$.

No presente trabalho, iremos supor conhecidas as noções de: "ordem induzida sobre subconjuntos", "cota inferior" e "cota superior", "elemento minimal" e "elemento maximal", "ínfimo" e "supremo", "elemento mínimo" e "elemento máximo". Estas noções podem ser encontradas, por exemplo, nos livros [End77] e [Jec03]. Sejam $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ uma ordem parcial e $C \subseteq \mathbb{P}$. Diremos que C é uma **cadeia** segundo $\leqslant$ se a ordem induzida por $\leqslant$ sobre C for uma ordem total.

Diremos que uma ordem parcial $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ (resp., uma ordem parcial estrita $\langle \mathbb{P}, < \rangle$) é uma **boa ordem** (resp., uma **boa ordem estrita**) se todo subconjunto não vazio de $\mathbb{P}$ tiver elemento mínimo segundo $\leqslant$. Neste caso, diremos que $\leqslant$ é uma **boa ordem** (resp., que $<$ é uma **boa ordem estrita**) sobre que $\mathbb{P}$. Sendo assim, "toda boa ordem é uma ordem total". De fato: dados uma boa ordem $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ e $x, y \in \mathbb{P}$, tem-se que o conjunto não vazio $\{x, y\}$ tem elemento mínimo segundo $\leqslant$, o que implica que $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$. Agora, seja X um conjunto. Diremos que X **pode ser bem ordenado** se existir uma boa ordem $\leqslant$ sobre X.

Sejam $\langle \mathbb{P}_1, <_1 \rangle$ e $\langle \mathbb{P}_2, <_2 \rangle$ ordens parciais estritas. Diremos que $\langle \mathbb{P}_1, <_1 \rangle$ e $\langle \mathbb{P}_2, <_2 \rangle$ são **isomorfas**, ou que $\langle \mathbb{P}_1, <_1 \rangle$ é **isomorfa** a $\langle \mathbb{P}_2, <_2 \rangle$, se existir uma bijeção $f : \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_2$ tal que, para todo $x, y \in \mathbb{P}_1$, $x <_1 y$ se, e somente se, $f(x) <_2 f(y)$. Diremos que uma tal bijeção é um **isomorfismo de ordem** de $\langle \mathbb{P}_1, <_1 \rangle$ sobre $\langle \mathbb{P}_2, <_2 \rangle$.

Uma das noções mais importantes da Teoria dos Conjuntos é a de "ordinal". Para apresentar a definição de "ordinal", iremos introduzir a de "conjunto transitivo". Seja z um conjunto. Diremos que z é **transitivo** se, para todo $y \in z$ e todo $x \in y$, $x \in z$.

Agora, considere a relação binária $\leqslant$ sobre z que é definida pela seguinte sentença: para todo $x, y \in z$, $x \leqslant y$ se, e somente se, $x \in y$ ou $x = y$. Caso z seja transitivo, diremos que z é um **ordinal** se $\langle z, \leqslant \rangle$ for uma boa ordem. Neste caso, tem-se que $\langle z, \in \rangle$ é uma boa ordem estrita. São exemplos de ordinais os conjuntos $\emptyset$, $\{\emptyset\}$ e $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Mostra-se que, para todo ordinal α e todo $\gamma \in \alpha$, γ é um ordinal e $\gamma \subseteq \alpha$. Mais ainda: prova-se que a classe dos ordinais não forma um conjunto.

Usaremos, como é usual, letras gregas minúsculas (por exemplo, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \zeta$ e ξ) para designar ordinais. Seja α um ordinal. Dada uma ordem parcial estrita $\langle \mathbb{P}, < \rangle$ tal que $\langle \alpha, \in \rangle$ é isomorfa a $\langle \mathbb{P}, < \rangle$, diremos, por abuso de linguagem, que α é isomorfo a $\langle \mathbb{P}, < \rangle$. Agora, dado um ordinal β, representaremos a sentença "$\alpha \in \beta$" por "$\alpha < \beta$" e a sentença "$\alpha \in \beta$ ou $\alpha = \beta$" por "$\alpha \leqslant \beta$". Diremos que o conjunto $\alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\}$ é o **sucessor** de α. É fácil ver que $\alpha + 1$ é o menor ordinal maior que α (i.e., se β for um ordinal tal que $\alpha < \beta$, então $\alpha + 1 \leqslant \beta$), o que justifica o nome e a notação dados para o conjunto $\alpha \cup \{\alpha\}$. Diremos que α é **sucessor** se existir um ordinal γ tal que $\alpha = \gamma + 1$. Neste caso, mostra-se que γ é unicamente determinado por α e denota-se γ por $\alpha - 1$. Se $\alpha \neq \emptyset$ e α não for sucessor, diremos que α é **limite**. Verifica-se que α é limite se, e somente se, $\alpha = \bigcup \alpha$.

Agora, podemos descrever quem são os "números naturais" de von Neumann. Dado um ordinal α, diremos que α é um **número natural**, se satisfizer a seguinte condição: para todo $\gamma \leqslant \alpha$, ou $\gamma = \emptyset$ ou γ é sucessor. É imediato concluir que $\emptyset$ é um número natural. Além disso, é fácil ver que o sucessor de um dado número natural também é um número natural. Portanto, todos os ordinais na lista a seguir são números naturais:

$$0 := \emptyset < 1 := 0 + 1 = \{0\} < 2 := 1 + 1 = \{0, 1\} < 3 := 2 + 1 = \{0, 1, 2\} <$$
$$< 4 := 3 + 1 = \{0, 1, 2, 3\} < 5 := 4 + 1 = \{0, 1, 2, 3, 4\} < \ldots$$

Como é usual, também iremos designar números naturais por letras latinas minúsculas (por exemplo, i, j, k, l, m e n). Por simplicidade, usaremos o termo "natural" em lugar do termo "número natural". Mostra-se que todo natural é elemento de qualquer conjunto indutivo (i.e., um conjunto X tal que $0 \in X$ e, para todo $x \in X$, $(x \cup \{x\}) \in X$).

Utilizando-se os Axiomas do Infinito e da Separação, pode-se então fixar um conjunto indutivo e "separar" deste último o chamado "conjunto dos números naturais" $\omega := \{n : n \text{ é natural}\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$. Prova-se que ω é o menor ordinal limite e que ω satisfaz os chamados Axiomas de Peano.

Partindo-se do ordinal ω, os conjuntos numéricos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ podem ser construídos formalmente, em **ZF**, com os procedimentos usuais: *passagem ao quociente* (construção de $\mathbb{Z}$ e de $\mathbb{Q}$) e *via cortes à esquerda de Dedekind* (construção de $\mathbb{R}$).

Sejam α um ordinal e X um conjunto. Seja $s : \alpha \longrightarrow X$ uma função. Diremos que s é uma **$\boldsymbol{\alpha}$-sequência** em X. Para todo $\xi < \alpha$, chamaremos $s(\xi)$ de **$\boldsymbol{\xi}$-ésimo termo** de s e denotaremos $s(\xi)$ por x_ξ. Representaremos s por $\langle x_\xi \rangle_{\xi < \alpha}$. Diremos que toda ω-sequência é uma **sequência**. Para todo $n < \omega$, chamaremos toda n-sequência de **sequência finita**. Por abuso de linguagem, diremos que toda função $s : \omega \setminus 1 \longrightarrow X$ é uma sequência em X. Para toda α-sequência s em X e todo $x \in X$, a $(\alpha+1)$-sequência $s \cup \{\langle \alpha, x \rangle\}$ em X será representada por $s^\frown\langle x \rangle$.

Seja β um ordinal tal que $\beta \neq 0$. Sejam α um ordinal e s uma α-sequência em β. Diremos que s é **cofinal** em β se valer a seguinte condição: ou β é sucessor e $(\beta - 1) \in im(s)$ ou β é limite e $\sup(im(s)) = \beta$. Note que a função identidade de β é uma β-sequência cofinal em β. Logo, existem um ordinal α e uma α-sequência s em β tal que s é cofinal. Diremos que o ordinal $\mathrm{cf}(\beta) := \min\{\alpha : \alpha \text{ é ordinal e } \exists\, s \in {}^{\alpha}\beta\, (s \text{ é cofinal})\}$ é a **cofinalidade** de β. Assim definida, é claro que $\mathrm{cf}(\beta) \leqslant \beta$. Além disso, é fácil verificar que, se β for sucessor, então $\mathrm{cf}(\beta) = 1$. Diremos que β é **regular** se β for limite e $\mathrm{cf}(\beta) = \beta$. Diremos que β é **singular** se β for limite e $\mathrm{cf}(\beta) < \beta$. Mostra-se que, para todo ordinal limite β, $\mathrm{cf}(\beta)$ é regular (i.e., $\mathrm{cf}(\beta)$ é limite e $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\beta)) = \mathrm{cf}(\beta)$).

Um dos resultados mais importantes da Teoria dos Conjuntos é o que estabelece uma relação intrínseca entre as noções de "boa ordem" e de "ordinal". Este declara que: "dada uma boa ordem estrita $\langle \mathbb{P}, < \rangle$, tem-se que existe um único ordinal α que é isomorfo a $\langle \mathbb{P}, < \rangle$ e é único o isomorfismo de ordem de $\langle \mathbb{P}, < \rangle$ sobre α, o que implica que é único o isomorfismo de ordem de α sobre $\langle \mathbb{P}, < \rangle$" (veja o Teorema 7.6 em [Kun80, p. 17] e aplique o Lema 6.2 em [Kun80, p. 15]). Este resultado – cuja prova da existência do ordinal utiliza essencialmente o Esquema de Substituição – enseja a seguinte

Definição 1.1.5. Sejam $\langle \mathbb{P}, < \rangle$ uma boa ordem estrita e α o único ordinal que é isomorfo a $\langle \mathbb{P}, < \rangle$. Diz-se que α é o **tipo de ordem** de $\langle \mathbb{P}, < \rangle$ e denota-se α por $\mathrm{t.o.}(\mathbb{P}, <)$. Além disso, diz-se que o único o isomorfismo de ordem de $\mathrm{t.o.}(\mathbb{P}, <)$ sobre $\langle \mathbb{P}, < \rangle$ é a **enumeração canônica** de $\mathbb{P}$. $\triangle$

Associada a esta definição está a seguinte – e bem conhecida – equivalência que relaciona boa ordenação e enumeração: "dado um conjunto X, tem-se que X pode ser bem ordenado se, e somente se, existir uma enumeração de X por um ordinal". Esta equivalência está provada, por exemplo, em [SiJ07, p. 26]. Um resultado mais geral está enunciado na seguinte

Proposição 1.1.6. *Dado um conjunto X, tem-se que X pode ser bem ordenado se, e somente se, valer que X pode ser indexado por um ordinal.*

Demonstração:

Por um lado, se valer que X pode ser bem ordenado, então existe uma enumeração de X por um ordinal. Como é óbvio que toda enumeração é uma indexação, segue que X pode ser indexado por um ordinal.

Por outro lado, suponha que existam um ordinal α e uma indexação ξ de X por α. Se for $X = \emptyset$, então X pode ser bem ordenado, por vacuidade. Suponha então que X seja não vazio. Como ξ é sobrejetora, então, para todo $x \in X$, $\xi^{-1}[\{x\}] \subseteq \alpha$ é não vazio. Com isso, pode-se definir $f : X \longrightarrow \alpha$ pondo $f(x) := \min(\xi^{-1}[\{x\}])$. Pela construção, é claro que f está bem definida e que, para todo $x \in X$, $\xi_{f(x)} = x$. Considere o conjunto $A := im(f)$. Defina $g : A \longrightarrow X$ pondo $g(\beta) := \xi_\beta$. É claro que g está bem definida, por construção. Afirmamos que g é bijetora. Com efeito: sejam $\beta, \gamma \in A$ tais que $g(\beta) = g(\gamma)$. Assim, tem-se que $\xi_\beta = \xi_\gamma$ e que existem $x, y \in X$ tais que $f(x) = \beta$ e $f(y) = \gamma$. Logo, $x = \xi_{f(x)} = \xi_\beta = \xi_\gamma = \xi_{f(y)} = y$ e, por conseguinte, $\beta = f(x) = f(y) = \gamma$. Além disso, para cada $x \in X$, tem-se que $\beta := f(x) \in A$ e que $g(\beta) = \xi_\beta = \xi_{f(x)} = x$. Agora, como $A \subseteq \alpha$, tem-se que A pode ser bem ordenado. Seja $s : \mathrm{t.o.}(A, <) \longrightarrow A$ a enumeração canônica de A. Como g e s são bijeções, tem-se que $(g \circ s)$ é uma enumeração de X por $\mathrm{t.o.}(A, <)$. Portanto, existe uma enumeração de X por um ordinal, o que implica que X pode ser bem ordenado. ■

Definição 1.1.7. Sejam A e B conjuntos. Diz-se que A é **dominado** por B, e denota-se por $A \preceq B$, se existir uma função injetora $f : A \longrightarrow B$. Diz-se que A é **equipotente** a B, e denota-se por $A \approx B$, se existir uma função bijetora $f : A \longrightarrow B$. △

Em virtude da Definição 1.1.7, conclui-se que: dados X, Y e Z conjuntos, se $X \preceq Y$ e $Y \preceq Z$, então $X \preceq Z$ (visto que a composição de funções injetoras é uma função injetora). Caso seja $X \approx Y$, então $Y \approx X$ (já que a inversa de uma bijeção é uma bijeção). Além disso, sendo $X \approx Y$, tem-se que $X \preceq Y$ e $Y \preceq X$ (pois toda bijeção e a sua inversa são injetoras). A recíproca deste último resultado é válida – mas não é evidente – e está expressa na seguinte

Proposição 1.1.8 (Teorema de Schröder–Bernstein–Cantor)**.** *Dados X e Y conjuntos, se $X \preceq Y$ e $Y \preceq X$, então $X \approx Y$.* ■

Uma prova da Proposição 1.1.8 pode ser encontrada tanto em [End77, p. 147], quanto em [Jec03, p. 28].

Definição 1.1.9. Seja X um conjunto. Diz-se que X é **finito** se existir um $n < \omega$ tal que $X \approx n$. Caso contrário, diz-se que X é **infinito**. △

Como consequência imediata da Definição 1.1.9, tem-se que, para todo $n < \omega$, n é finito. Em particular, $\emptyset$ é finito.

Definição 1.1.10. Seja X um conjunto. Diz-se que X é **enumerável** se X for finito ou $X \approx \omega$. Caso contrário, diz-se que X é **não enumerável**. Se X for infinito e enumerável, diz-se que X é **infinito enumerável**. $\triangle$

Mostra-se que, para todo conjunto finito X, $X \not\approx \omega$. Como é óbvio que ω é enumerável, tem-se então que ω é infinito enumerável. Além disso, verifica-se que $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ são infinitos enumeráveis. Utilizando-se o chamado argumento diagonal de Cantor, prova-se que $\mathbb{R}$ é não enumerável.

Definição 1.1.11. Seja X um conjunto. Diz-se que X **tem tamanho** $\aleph_0$ se $X \approx \omega$. Diz-se que X **tem tamanho** $\mathfrak{c}$ se $X \approx \mathbb{R}$. $\triangle$

Em virtude das Definições 1.1.10 e 1.1.11, é imediato concluir que, dado um conjunto X, tem-se que X tem tamanho $\aleph_0$ se, e somente se, X for infinito enumerável.

Definição 1.1.12. Seja X um conjunto. Diz-se que X é **Dedekind-infinito** se existir um $Y \subset X$ tal que $X \approx Y$. Caso contrário, diz-se que X é **Dedekind-finito**. $\triangle$

Com uma simples aplicação do Princípio da Casa dos Pombos (que é fácil de demonstrar e precisamente declara que: "dados $n, m \in \omega$, se $n < m$, então $m \not\approx n$"), prova-se que todo conjunto finito é Dedekind-finito. Assim, por contraposição, tem-se a seguinte

Proposição 1.1.13. *Todo conjunto Dedekind-infinito é infinito.* $\blacksquare$

Proposição 1.1.14. *Dado um conjunto não vazio X, são equivalentes:*

(i) *X é enumerável.*

(ii) *$X \preceq \omega$.*

(iii) *X pode ser indexado por ω.*

(iv) *X pode ser indexado por um conjunto enumerável.*

Demonstração:

$(i) \Longleftrightarrow (ii)$: Por um lado, se X for enumerável, então ou X é equipotente a um natural ou X é equipotente a ω. Em qualquer dos casos, X é dominado por ω.

Por outro lado, suponha que $X \preceq \omega$. Se X for finito, é claro que X é enumerável. Suponha então que X seja infinito e fixe uma função injetora $f : X \longrightarrow \omega$. Como f é uma bijeção sobre sua imagem, então o conjunto $M := im(f) \subseteq \omega$ é infinito. Defina então a sequência $s = \langle n_k \rangle_{k\in\omega}$ em M pondo

$$n_0 := \min(M) \text{ e, para todo } k \in \omega \setminus 1,\, n_k := \min\left(M \setminus \{n_i : i < k\}\right).$$

Como M é um subconjunto infinito de ω, pode-se concluir, por indução finita, que a sequência $\langle n_k \rangle_{k\geqslant 1}$ está bem definida. Além disso, é fácil ver que, para todo $k \in \omega \setminus 1$, $n_k < n_{k+1}$. Logo, a sequência s é injetora. Afirmamos que s é sobrejetora. Com efeito: suponha que exista um $n \in M$ tal que $n \notin im(s)$. Sendo assim, para todo $k \in \omega \setminus 1$, $n \in M \setminus \{n_i : i < k\}$. Então, por minimalidade, para cada $k \in \omega \setminus 1$, tem-se que $n \geqslant n_k$. Disso, segue que $im(s)$ é finita, contradizendo o fato de s ser estritamente crescente. Consequentemente, s é uma bijeção de ω sobre M. Com isso, tem-se que $(s \circ f)$ é uma bijeção de X sobre ω. Portanto, $X \approx \omega$.

$(ii) \iff (iii)$: Por um lado, suponha que $X \preceq \omega$. Fixe um $x \in X$ e uma função injetora $f : X \longrightarrow \omega$. Como f é injetora, para cada $n \in im(f)$, existe um único $x_n \in X$ tal que $f(x_n) = n$. Defina então $g : \omega \longrightarrow X$ pondo

$$g(n) := \begin{cases} x_n\,, & \text{se } n \in im(f); \\ x\,, & \text{se } n \in \omega \setminus im(f). \end{cases}$$

Pela construção, é claro que g está bem definida. Além disso, é fácil verificar que g é sobrejetora. Logo, X pode ser indexado por ω.

Por outro lado, suponha que exista uma indexação ξ de X por ω. Como ξ é sobrejetora, então, para todo $x \in X$, $\xi^{-1}[\{x\}] \subseteq \omega$ é não vazio. Com isso, pode-se definir $f : X \longrightarrow \omega$ pondo $f(x) := \min(\xi^{-1}[\{x\}])$. É claro que f está bem definida, por construção. Além disso, é fácil verificar que f é injetora. Portanto, $X \preceq \omega$.

$(iii) \iff (iv)$: Por um lado, se valer que X pode ser indexado por ω, então é claro que X pode ser indexado por um conjunto enumerável.

Por outro lado, suponha que exista uma indexação ξ de X por algum conjunto enumerável I. Como I é enumerável, então ou I é equipotente a um natural ou I é equipotente a ω. Caso I seja equipotente a ω, fixe então uma bijeção $f : I \longrightarrow \omega$. Logo, a função $(\xi \circ f^{-1})$ é uma indexação de X por ω. Caso exista um $n < \omega$ tal que I seja equipotente a n, pode-se então fixar uma bijeção $g : I \longrightarrow n$. Então, a função $\varphi := (\xi \circ g^{-1})$ é uma indexação de X por n. Como $X \neq \emptyset$, tem-se que $n > 0$. Com isso, pode-se definir $h : \omega \longrightarrow X$ pondo

$$\psi(n) := \begin{cases} \varphi(k)\,, & \text{se } k < n; \\ \varphi(0)\,, & \text{se } k \geqslant n. \end{cases}$$

Pela construção, tem-se claramente que ψ está bem definida e que ψ é uma sobrejeção. Portanto, X pode ser indexado por ω. ∎

Corolário 1.1.15. *Todo conjunto enumerável pode ser bem ordenado.*

Prova:

Seja X um conjunto enumerável qualquer. Se for $X = \emptyset$, então X pode ser bem ordenado. Suponha então que X seja não vazio. Pela Proposição 1.1.14, conclui-se que X pode ser indexado por ω. Sendo assim, segue da Proposição 1.1.6 que X pode ser bem ordenado. Portanto, como X é qualquer, segue que todo conjunto enumerável pode ser bem ordenado. $\square$

Corolário 1.1.16. *Todo subconjunto de um dado conjunto enumerável é enumerável.*

Prova:

Sejam X um conjunto enumerável e $A \subseteq X$ quaisquer. Se for $X = \emptyset$, então $A = \emptyset$, o qual é enumerável. Suponha então que X seja não vazio. Pela Proposição 1.1.14, conclui-se que $X \preceq \omega$. Como a função inclusão é uma injeção, segue que $A \preceq X$. Logo, $A \preceq \omega$. Pela Proposição 1.1.14, tem-se então que A é enumerável. Portanto, como X e A são quaisquer, segue que todo subconjunto de um dado conjunto enumerável é enumerável. $\square$

Corolário 1.1.17. *Dado um conjunto X, são equivalentes:*

(i) *X é enumerável.*

(ii) *X é imagem de um conjunto enumerável por uma função.*

Prova:

$(i) \Longrightarrow (ii)$: Suponha que X seja enumerável. Se for $X = \emptyset$, então é claro que X é imagem de $\emptyset$ pela única função definida em $\emptyset$, que é a função $\emptyset$. Suponha então que X seja não vazio. Pela Proposição 1.1.14, conclui-se que X pode ser indexado por um conjunto enumerável. Logo, X é imagem de um conjunto enumerável por uma função.

$(ii) \Longrightarrow (i)$: Suponha agora que existam uma função f e um conjunto enumerável I tal que $X = f[I]$. Assim, tem-se que X pode ser indexado por I. Se for $X = \emptyset$, então é claro que X é enumerável. Suponha então que X seja não vazio. Portanto, como X pode ser indexado por um conjunto enumerável, segue da Proposição 1.1.14 que X é enumerável. $\square$

Proposição 1.1.18. *Dado um conjunto X, tem-se que X é Dedekind-infinito se, e somente se, $\omega \preceq X$.* ■

Uma idéia da prova da Proposição 1.1.18 pode ser encontrada, por exemplo, em [Jec73, p. 25].

Agora, note que, para todo conjunto X, $\omega \preceq X$ se, e somente se, existir um $Y \subseteq X$ tal que $Y \approx \omega$. Com isso, é imediato concluir da Proposição 1.1.18 a seguinte

Proposição 1.1.19. *Dado um conjunto X, tem-se que X é Dedekind-infinito se, e somente se, existir um subconjunto infinito enumerável de X.* ■

Corolário 1.1.20. *Dados um conjunto X e um $Y \subseteq X$, se X for Dedekind-finito, então Y é Dedekind-finito.* □

Existem várias formulações conjuntistas para o Axioma da Escolha – mas, para o presente trabalho, preferimos aquela que estabelece a existência de uma *função-escolha* para certos conjuntos. Para enunciar tal formulação do Axioma da Escolha, é preciso apresentar a seguinte

Definição 1.1.21. Sejam X um conjunto e $\phi : X \longrightarrow \bigcup X$ uma função. Diz-se que ϕ é uma **função-escolha** para X se, para todo $x \in X$, $\phi(x) \in x$. △

Existem muitos exemplos de função-escolha. Um deles é o seguinte exemplo: fixe um conjunto Y e considere o conjunto $X := \{\{y\} : y \in Y\}$. Vê-se facilmente que o conjunto $\phi := \{\langle \{y\}, y \rangle : y \in Y\}$ é uma função-escolha para X. Na verdade, tal função é a única função-escolha para X. Apesar de ser um exemplo muito trivial, este nos mostra que há situações em que não é preciso fazer infinitas escolhas arbitrárias para fixarmos um elemento de cada elemento de uma dada família de conjuntos não vazios – o que não é verdade para qualquer família de conjuntos (como, por exemplo, as famílias infinitas de subconjuntos de $\mathbb{R}$).

Agora, sendo necessário fazer infinitas escolhas arbitrárias, será preciso então utilizar o Axioma da Escolha. Das formulações conjuntistas que são dadas para este axioma, a que adotamos é a formulação dada a seguir:

(**AC**) Toda família infinita de conjuntos não vazios admite uma função-escolha.

Mais precisamente, **AC** (o Axioma da Escolha) declara que: "para todo conjunto X, se X for infinito e todo elemento de X for um conjunto não vazio, então existe uma função-escolha para X".

Observação 1.1.22. Apesar de ser necessário o uso de **AC** para se poder fazer infinitas escolhas arbitrárias, pode-se, em **ZF**, fazer finitas escolhas (arbitrárias ou não), pois tais escolhas são justificadas pela Lógica Clássica, que é finitária. Cientes disso, temos então que um resultado pode ser provado em **ZF** nas seguintes situações: quando em sua prova não houver escolhas arbitrárias ou, quando houver, que tais escolhas possam ser feitas em um número finito de vezes. △

Devido à Observação 1.1.22, conclui-se que, em **ZF**, **AC** é equivalente à asserção "toda família de conjuntos não vazios admite uma função-escolha". É fato que existem muitas outras asserções equivalentes a **AC** em **ZF**. Por exemplo, a proposição a seguir estabelece a equivalência entre **AC** e a não vacuidade do produto cartesiano de famílias infinitas de conjuntos não vazios, que é a versão mais conhecida e comumente utilizada deste princípio de escolha.

Proposição 1.1.23. *São equivalentes:*

(*i*) **AC**.

(*ii*) *O produto cartesiano de qualquer família de conjuntos não vazios é não vazio.*

(*iii*) *O produto cartesiano de qualquer família infinita de conjuntos não vazios é não vazio.* ■

Recordemos que $\mathbf{AC}_\omega$ (o Axioma da Escolha Enumerável) é a restrição de **AC** às famílias enumeráveis de conjuntos não vazios e que $\mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$ é a restrição de $\mathbf{AC}_\omega$ às famílias (enumeráveis) de subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$.

Com as devidas adaptações, a demonstração da Proposição 1.1.23 nos fornece uma prova para cada uma das duas proposições a seguir:

Proposição 1.1.24. *São equivalentes:*

(*i*) $\mathbf{AC}_\omega$.

(*ii*) *O produto cartesiano de qualquer família enumerável de conjuntos não vazios é não vazio.*

(*iii*) *O produto cartesiano de qualquer família infinita enumerável de conjuntos não vazios é não vazio.* ■

Proposição 1.1.25. *São equivalentes:*

(*i*) $\mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$.

(*ii*) *O produto cartesiano de qualquer família enumerável de subconjuntos não vazios de* $\mathbb{R}$ *é não vazio.*

(*iii*) *O produto cartesiano de qualquer família infinita enumerável de subconjuntos não vazios de* $\mathbb{R}$ *é não vazio.* ■

Proposição 1.1.26 (**AC**). *Dadas* $\{X_i : i \in I\}$ *e* $\{Y_i : i \in I\}$ *famílias de conjuntos não vazios, se* $\prod_{i\in I} X_i = \prod_{i\in I} Y_i$*, então, para todo* $i \in I$, $X_i = Y_i$.

Demonstração:

Suponha que $\prod_{i\in I} X_i = \prod_{i\in I} Y_i$ e admita que, para algum $j \in I$, $X_j \neq Y_j$. Fixando um tal $j \in I$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $X_j \setminus Y_j \neq \emptyset$ (pois, por hipótese, X_j e Y_j são ambos não vazios). Sendo assim, pode-se fixar um $p \in X_j \setminus Y_j$. Agora, considere o conjunto $\mathcal{F} := \{X_i : i \in I \setminus \{j\}\}$. Como $\{X_i : i \in I\}$ é uma família de conjuntos não vazios, é claro que $\mathcal{F}$ também o é. Assim, supondo-se que **AC** valha, pode-se concluir que existe uma função-escolha para $\mathcal{F}$, i.e., uma função $\phi : \mathcal{F} \longrightarrow \bigcup \mathcal{F}$ tal que, para todo $i \in I \setminus \{j\}$, $\phi(X_i) \in X_i$. Defina então $\zeta : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} X_i$ pondo

$$\zeta(i) := \begin{cases} \phi(X_i)\,, & \text{se } i \in I \setminus \{j\}; \\ p\,, & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Pela construção, é claro que ζ está bem definida e que, para todo $i \in I$, $\zeta(i) \in X_i$. Logo, $\zeta \in \prod_{i\in I} X_i = \prod_{i\in I} Y_i$. Consequentemente, teremos que $p = \zeta(j) \in Y_j$, uma contradição. Portanto, conclui-se que, para todo $i \in I$, $X_i = Y_i$. ■

Seja X um conjunto qualquer. Representaremos por $\mathbf{AC}_\omega(X)$ a restrição de $\mathbf{AC}_\omega$ às famílias (enumeráveis) de subconjuntos não vazios de X.

Proposição 1.1.27. *Dados* X *e* Y *conjuntos não vazios, se* $Y \preceq X$ *ou, mais geralmente,*[1] *valer que* Y *pode ser indexado por* X*, então* $\mathbf{AC}_\omega(X)$ *implica* $\mathbf{AC}_\omega(Y)$.

Demonstração:

Sejam X e Y conjuntos não vazios. Suponha que Y pode ser indexado por X. Fixe

[1] É realmente mais geral, pois, em **ZF**, prova-se que: "dados X e Y conjuntos não vazios, se existir uma injeção $f : Y \longrightarrow X$, então existe uma sobrejeção $g : X \longrightarrow Y$". De fato: usando-se a injetividade de f e a não vacuidade de X e Y, constrói-se facilmente uma inversa à esquerda g para f, analogamente ao que foi feito na prova de (*ii*) $\Longrightarrow$ (*iii*) da Proposição 1.1.14. Em contraste com este fato, mostra-se que a asserção "existe uma inversa à direita para qualquer sobrejeção dada" é equivalente a **AC**.

então uma sobrejeção $\xi : X \longrightarrow Y$. Tome uma família qualquer $\mathcal{F}$ de subconjuntos não vazios de Y. Como ξ é sobrejeção, então o conjunto $\mathcal{H} := \{\xi^{-1}[B] : B \in \mathcal{G}\}$ é uma família de subconjuntos não vazios de X. Supondo-se a validade de $\mathbf{AC}_\omega(X)$, pode-se fixar uma função-escolha ϕ para $\mathcal{H}$. Defina então $\phi_\mathcal{F} : \mathcal{F} \longrightarrow \bigcup \mathcal{F}$ pondo $\phi_\mathcal{F}(B) := (\xi \circ \phi)(\xi^{-1}[B])$. Pela construção, é claro que $\phi_\mathcal{F}$ está bem definida. Além disso, é fácil ver que $\phi_\mathcal{F}$ é uma função-escolha para $\mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ foi tomada qualquer, conclui-se então que $\mathbf{AC}_\omega(Y)$ vale. Portanto, segue que $\mathbf{AC}_\omega(X)$ implica $\mathbf{AC}_\omega(Y)$. ■

Agora, observe que, dada uma boa ordem $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$, o único isomorfismo de ordem de $\langle \mathbb{P}, < \rangle$ sobre o ordinal $\mathrm{t.o.}(\mathbb{P}, <)$ testemunha que $\mathbb{P}$ é equipotente a pelo menos um ordinal. Por este motivo, podemos introduzir a seguinte

Definição 1.1.28. Sejam X um conjunto que pode ser bem ordenado e κ um ordinal. Diz-se que o ordinal $|X| := \min\{\alpha : \alpha \text{ é ordinal e } X \approx \alpha\}$ é a **cardinalidade** de X.[2] Diz-se que κ é um **cardinal** se $|\kappa| = \kappa$ (i.e., para todo $\alpha < \kappa$, $\kappa \not\approx \alpha$). Agora, seja κ um cardinal tal que $\kappa \geqslant \omega$. Diz-se que κ é um **cardinal regular** se κ for ordinal regular. Diz-se que κ é um **cardinal singular** se κ for ordinal singular. △

Mostra-se que todo natural e ω são cardinais. Porém, todos estes cardinais são enumeráveis. Utilizando-se cuidadosamente os Axiomas das Partes e da Substituição, pode-se, para cada conjunto X, construir o conjunto $H(X) := \{\alpha : \alpha \text{ é ordinal e } \alpha \preceq X\}$, chamado de *a função de Hartogs* de X. Prova-se que $H(X)$ é o menor cardinal que não é dominado por X. É interessante destacar que não é necessário o uso de **AC** para a construção da função de Hartogs. Dado um cardinal κ, tem-se que $H(\kappa)$ é exatamente o menor cardinal que é maior que κ. Em particular, tem-se que $H(\omega)$ é o menor cardinal não enumerável. Denota-se o primeiro cardinal não enumerável $H(\omega)$ tanto por ω_1 quanto por $\aleph_1$. O cardinal ω é comumente denotado por $\aleph_0$. É devido a esta notação que o termo "tem tamanho $\aleph_0$" é empregado para se referir aos conjuntos equipotentes a ω (veja Definição 1.1.11).

Dados X e Y conjuntos que podem ser bem ordenados, mostra-se que $|X| < |Y|$ se, e somente se, $X \preceq Y$ e que $|X| = |Y|$ se, e somente se, $X \approx Y$. Como todo conjunto enumerável pode ser bem ordenado (pelo Corolário 1.1.15), conclui-se então que, dado

[2] Para um dado conjunto X que não pode ser bem ordenado, também é possível definir de maneira adequada a sua cardinalidade $|X|$ para que esta satisfaça a seguinte condição desejada: para todo A e todo B conjuntos, $|A| = |B|$ se, e somente se, $A \approx B$. Basta, para cada conjunto X, tomar $|X|$ igual à família de todos os conjuntos equipotentes a X e de "rank" mínimo. Porém, se assim o fizermos, teremos que, para todo conjunto X, $X \not\approx |X|$. Sugerimos o Capítulo 6 do livro [Jec03] para se obter a definição de "rank" de um conjunto e o Capítulo 11 do livro [Jec73] para obtenção de mais informações sobre a definição de cardinalidade na ausência de **AC**.

um conjunto X, tem-se que X é enumerável se, e somente se, valer que X pode ser bem ordenado e $|X| \leqslant \aleph_0$.

Devido à bem conhecida equivalência entre **AC** e o Teorema da Boa Ordem (que declara que: "todo conjunto pode ser bem ordenado"), conclui-se que: sob **AC**, todo conjunto tem cardinalidade bem definida. Sejam κ e λ cardinais tais que $\kappa \geqslant \omega$ ou $\lambda \geqslant \omega$. Sob **AC**, define-se o seguinte cardinal: $\kappa^\lambda := \left|{}^\lambda\kappa\right|$. Como será visto logo adiante, mostra-se que $\mathbb{R} \approx {}^\omega 2$. Então, sob **AC**, tem-se que $\mathfrak{c} := |\mathbb{R}| = |{}^\omega 2| = 2^{\aleph_0}$.

Além disso, se definirmos adequadamente *adição* e *multiplicação* de cardinais (consulte, por exemplo, os livros [Jec03] e [Kun80] para uma exposição sistemática da Teoria dos Cardinais), podemos garantir a validade de uma determinada asserção sobre equipotência ou sobre dominação de conjuntos que podem ser bem ordenados apenas provando sua versão para cardinais. Um exemplo disto é a seguinte

Proposição 1.1.29. *Dado um conjunto X, se X for infinito e valer que X pode ser bem ordenado, então $X^2 \approx X$.* ■

Uma prova da versão para cardinais da Proposição 1.1.29 pode ser encontrada em [Kun80, p. 29], o que nos garante a validade da referida proposição.

Corolário 1.1.30. $\omega^2 \approx \omega$. □

É interessante destacar que a asserção "para todo conjunto X, se X for infinito, então $X^2 \approx X$" é equivalente a **AC** (veja em [Jec73, p. 157] uma prova de que tal asserção implica **AC**). Em contraste com a referida asserção, temos a Proposição 1.1.29, que é válida em **ZF** justamente pela hipótese adicional de boa ordenação do conjunto.

Na presente dissertação, trabalharemos bem mais com argumentos que envolvem dominação e equipotência de conjuntos do que com argumentos envolvendo cardinalidade, já que a maior parte de nosso trabalho está ambientada em **ZF**.

Um resultado importante é o que está expresso na proposição a seguir, pois estabelece equipotências que serão necessárias para se demonstrar outros resultados no presente trabalho.

Proposição 1.1.31. ${}^\omega 2 \approx {}^\omega\omega \approx \mathcal{P}(\omega) \approx \mathbb{R}$. ■

A partir de agora, iremos apresentar a definição de álgebra de Boole e algumas noções e proposições relacionas a esta definição.

Definição 1.1.32. Sejam B um conjunto não vazio, $+$ e $\cdot$ operações binárias sobre B, $-$ uma operação unária sobre B e $0, 1 \in B$ tais que $0 \neq 1$. Diz-se que $\langle B, +, \cdot, -, 0, 1\rangle$ é uma álgebra de Boole se, para todo $a, b, c \in B$, valer as seguintes condições:

(i) (comutatividade) $a + b = b + a$ e $a \cdot b = b \cdot a$.

(ii) (associatividade) $(a + b) + c = a + (b + c)$ e $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

(iii) (distributividade) $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$ e $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

(iv) (absorção) $a + (a \cdot b) = a$ e $a \cdot (a + b) = a$.

(iv) (complementação) $a + (-a) = 1$ e $a \cdot (-a) = 0$.

Sempre que não houver confusão, diremos simplesmente que "B é uma álgebra de Boole" em lugar de "$\langle B, +, \cdot, -, 0, 1\rangle$ é uma álgebra de Boole". $\triangle$

Um exemplo bastante natural de álgebra de Boole é obtido quando se considera as operações conjuntistas de união, de interseção e de complementação sobre o conjunto das partes de um dado conjunto não vazio. Precisamente falando, dado um conjunto não vazio X, tem-se que $\langle \mathcal{P}(X), \cup, \cap, X\backslash, \emptyset, X\rangle$ é uma álgebra de Boole, a qual é chamada de "a álgebra dos subconjuntos de X".

Seja B uma álgebra de Boole. Para todo $a, b \in B$, a **diferença** de a e b é $a - b := a \cdot (-b)$ e a **diferença simétrica** de a e b é $a \vartriangle b := (a - b) + (b - a)$. Agora, considere a relação binária $\leqslant$ sobre B que é definida pela seguinte sentença: para todo $a, b \in B$, $a \leqslant b$ se, e somente se, $a - b = 0$. Mostra-se que $\leqslant$ é uma ordem parcial sobre B e que, para todo $a, b \in B$, $a \leqslant b$ se, e somente se, $a + b = b$ se, e somente se, $a \cdot b = a$. Além disso, é fácil ver que, para todo $b \in B$, $0 \cdot b = 0$ e $b + 1 = 1$, o que implica que $0 \leqslant b \leqslant 1$.

Definição 1.1.33. Sejam B uma álgebra de Boole e $I, F \subseteq B$. Diz-se que I é um ideal em B se valer as seguintes condições:

$(I.i)$ $0 \in I$ e $1 \notin I$.

$(I.ii)$ Para todo $a, b \in I$, $(a + b) \in I$.

$(I.iii)$ Para todo $a \in I$ e todo $b \in B$, se $b \leqslant a$, então $b \in I$.

Diz-se que F é um filtro em B se valer as seguintes condições:

$(F.i)$ $0 \notin F$ e $1 \in F$.

$(F.ii)$ Para todo $a, b \in F$, $(a \cdot b) \in F$.

$(F.iii)$ Para todo $a \in F$ e todo $b \in B$, se $a \leqslant b$, então $b \in F$. △

Seja B uma álgebra de Boole. Sejam I e F, respectivamente, um ideal e um filtro em B. Vê-se facilmente que o conjunto $I^* := \{b \in B : -b \in I\}$ é um filtro em B e que o conjunto $F^* := \{b \in B : -b \in F\}$ é um ideal em B. Diremos que I^* é o **filtro dual** de I e que F^* é o **ideal dual** de F. Claramente, tem-se que: $(I^*)^* = I$ e $(F^*)^* = F$.

Definição 1.1.34. Sejam B uma álgebra de Boole e $G, H \subseteq B$ tais que $H, G \neq \emptyset$ e $0 \notin G$. Diz-se que:

(i) G é uma **base de filtro** se, para todo $b_1, b_2 \in G$, existir um $b_3 \in G$ tal que $b_3 \leqslant b_1 \cdot b_2$.

(ii) H **tem a p.i.f.** (**propriedade da interseção finita**) se valer a seguinte condição: para todo subconjunto finito e não vazio J de H, se $n = |J|$ e $J = \{a_k : k < n\}$, então $a_0 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \neq 0$. △

Sejam B uma álgebra de Boole e $G \subseteq B$ tal que $G \neq \emptyset$ e $0 \notin G$. Caso G seja uma base de filtro, verifica-se que o conjunto $F(G) := \{c \in B : \exists\, b \in G\,(b \leqslant c)\}$ é um filtro em B que contém G. Neste caso, diremos que $F(G)$ é o **filtro gerado** por G. Agora, seja $H \subseteq B$ tal que $H \neq \emptyset$. Considere o conjunto

$$G_H := \{b \in B : \exists\, n \in \omega \setminus 1\ \exists\, a_0, \ldots, a_{n-1} \in H\,(b = a_0 \cdot \ldots \cdot a_{n-1})\}$$

Note que G_H contém H. Caso H tenha a p.i.f., tem-se que $0 \notin G_H$ e mostra-se que G_H é uma base de filtro. Neste caso, denotaremos por $F(H)$ o filtro gerado por G_H.

Definição 1.1.35. Sejam X um conjunto não vazio e $\mathcal{I}$, $\mathcal{F}$ e $\mathcal{H}$ famílias de subconjuntos de X. Diz-se que:

(i) $\mathcal{I}$ é um **ideal sobre** X se $\mathcal{I}$ for um ideal em $\mathcal{P}(X)$.

(ii) $\mathcal{F}$ é um **filtro sobre** X se $\mathcal{F}$ for um filtro em $\mathcal{P}(X)$.

(iii) $\mathcal{H}$ **tem a p.i.f.** se $\mathcal{H}$ for não vazia e tiver a p.i.f. como subconjunto de $\mathcal{P}(X)$ (i.e., se toda subfamília finita e não vazia de $\mathcal{H}$ tiver interseção não vazia). △

Proposição 1.1.36. *Dados uma álgebra de Boole B, um $H \subseteq B$ tal que $H \neq \emptyset$ e $a, b \in B$, se H tiver a p.i.f. e $a + b = 1$, então $H \cup \{a\}$ tem a p.i.f. ou $H \cup \{b\}$ tem a p.i.f..* ■

Corolário 1.1.37. *Dados um conjunto não vazio X, uma família não vazia $\mathcal{H}$ de subconjuntos de X e $A, B \subseteq X$, se $\mathcal{H}$ tiver a p.i.f. e $A \cup B = X$, então $\mathcal{H} \cup \{A\}$ tem a p.i.f. ou $\mathcal{H} \cup \{B\}$ tem a p.i.f..* $\square$

Pode-se exibir facilmente um conjunto não vazio X, uma família não vazia $\mathcal{H}$ de subconjuntos de X que tem a p.i.f e subconjuntos A e B de X tais que $A \cup B = X$, com $\mathcal{H} \cup \{A\}$ e $\mathcal{H} \cup \{B\}$ tendo a p.i.f..

Definição 1.1.38. Seja B uma álgebra de Boole. Sejam I e F, respectivamente, um ideal e um filtro em B. Diz-se que:

(i) I é **primo** se valer a seguinte condição: para todo $a, b \in B$, se $(a \cdot b) \in I$, então $a \in I$ ou $b \in I$.

(ii) F é **primo** se valer a seguinte condição: para todo $a, b \in B$, se $(a + b) \in F$, então $a \in F$ ou $b \in F$.

(iii) F é **ultrafiltro** se valer a seguinte condição: para todo filtro G em B, se $F \subseteq G$, então $F = G$ (i.e., F é maximal segundo $\subseteq$). $\triangle$

Valendo-se das propriedades básicas das operações booleanas, verifica-se que: para toda álgebra de Boole B e todo ideal I em B, I é primo se, e somente se, I^* é primo. Além disso, mostra-se que: para toda álgebra de Boole B e todo filtro F em B, F é primo se, e somente se, F^* é primo.

Proposição 1.1.39. *Dados uma álgebra de Boole B e um filtro F em B, são equivalentes:*

(i) *F é ultrafiltro.*

(ii) *F é primo.*

(iii) *Para todo $b \in B$, ou $b \in F$ ou $-b \in F$.* $\blacksquare$

Corolário 1.1.40. *Dados um conjunto não vazio X e um filtro $\mathcal{F}$ sobre X, são equivalentes:*

(i) *$\mathcal{F}$ é ultrafiltro.*

(ii) *$\mathcal{F}$ é primo.*

(iii) *Para todo $A \subseteq X$, ou $A \in \mathcal{F}$ ou $(X \setminus A) \in \mathcal{F}$.* $\square$

Sejam B uma álgebra de Boole e $a \in B$. Diremos que a é um **átomo** de B se $a \neq 0$ e valer a seguinte condição: para todo $b \in B$, se $0 \leqslant b < a$, então $b = 0$. Agora, seja $a \in B$ tal que $a \neq 0$. É óbvio que $\{a\}$ é um subconjunto não vazio de B que tem a p.i.f.. Então, o conjunto $U_a := F(\{a\}) = \{c \in B : a \leqslant c\}$ é um filtro em B, o qual chamaremos de o **filtro principal** associado a a. Caso a seja um átomo de B, mostra-se, com o uso da Proposição 1.1.39, que U_a é um ultrafiltro. Neste caso, diremos que U_a é o **ultrafiltro principal** associado a a.

Note que, para todo conjunto não vazio X e todo $A \subseteq X$, A é átomo de $\mathcal{P}(X)$ se, e somente se, existir um $x \in X$ tal que $A = \{x\}$. Note ainda que, para todo conjunto não vazio X e todo $x \in X$, $U_{\{x\}}$ é o conjunto $\mathcal{U}_x := \{C \subseteq X : x \in C\}$.

Agora, sejam X um conjunto não vazio e $\mathcal{U}$ um ultrafiltro sobre X. Diremos que $\mathcal{U}$ é **livre** se $\mathcal{U}$ não for um ultrafiltro principal (i.e., para todo $x \in X$, $\mathcal{U} \neq \mathcal{U}_x$). Utilizando-se a equivalência entre os itens (i) e (ii) do Corolário 1.1.40, mostra-se que: todo ultrafiltro livre sobre um dado conjunto infinito X não possui subconjunto finito algum de X como elemento.

Proposição 1.1.41. *Dados um conjunto infinito X e um ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre X, são equivalentes:*

(i) *$\mathcal{U}$ é livre.*

(ii) $\bigcap \mathcal{U} = \emptyset$.

(iii) $\{A \subseteq X : X \setminus A \text{ é finito}\} \subseteq \mathcal{U}$. ■

Proposição 1.1.42. *Dados um conjunto infinito X, um ultrafiltro livre $\mathcal{U}$ sobre X e $A, B \subseteq X$, se $A \setminus B$ for finito e $A \in \mathcal{U}$, então $B \in \mathcal{U}$.*

Demonstração:

Suponha que $A \setminus B$ seja finito e que $A \in \mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}$ é um filtro primo (pelo Corolário 1.1.40) e $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$, tem-se então que $(A \cap B) \in \mathcal{U}$ ou $(A \setminus B) \in \mathcal{U}$. Como X é infinito, $\mathcal{U}$ é um ultrafiltro livre sobre X e $A \setminus B$ é suposto finito, segue que $(A \setminus B) \notin \mathcal{U}$. Logo, $(A \cap B) \in \mathcal{U}$. Portanto, como $\mathcal{U}$ é um filtro e $A \cap B \subseteq B$, conclui-se que $B \in \mathcal{U}$. ■

Corolário 1.1.43. *Dados um conjunto infinito X, um ultrafiltro livre $\mathcal{U}$ sobre X e $A, B \subseteq X$, se $A \triangle B$ for finito, então $A \in \mathcal{U}$ se, e somente se, $B \in \mathcal{U}$.*

Prova:

Suponha que $A \triangle B$ seja finito. Como $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, tem-se então que $A \setminus B$ e $B \setminus A$ são finitos. Admita que $A \in \mathcal{U}$. Como $A \setminus B$ é finito, conclui-se da Proposição 1.1.42 que $B \in \mathcal{U}$. Admita agora que $B \in \mathcal{U}$. Analogamente, conclui-se que $A \in \mathcal{U}$. Portanto, tem-se que $A \in \mathcal{U}$ se, e somente se, $B \in \mathcal{U}$. $\square$

Sugerimos o livro "Models and Ultraproducts: An Introduction", dos autores John L. Bell e Abraham B. Slomson, para obtenção da prova de cada uma das proposições relacionadas a filtros, ultrafiltros e ultrafiltros livres cujas demonstrações omitimos no presente trabalho.

Gostaríamos de destacar que um princípio maximal importante relacionado às álgebras de Boole é o chamado Teorema do Ideal Booleano Primo, o qual é enunciado a seguir:

(**BPI**) Toda álgebra de Boole possui um ideal primo.

Utilizando-se a dualidade entre as noções de "ideal primo" e "ultrafiltro" em uma álgebra de Boole, conclui-se que **BPI** (o Teorema do Ideal Booleano Primo) é equivalente a asserção "toda álgebra de Boole possui um ultrafiltro". Outra asserção equivalente a **BPI** é o chamado Teorema do Ultrafiltro, cujo enunciado é dado a seguir:

(**UT**) Todo filtro em um dada álgebra de Boole pode ser estendido a um ultrafiltro.

Mais precisamente, **UT** (o Teorema do Ultrafiltro) declara que: "para toda álgebra de Boole B e todo filtro F em B, existe um ultrafiltro U em B tal que $F \subseteq U$".

A equivalência entre **BPI** e **UT** é justificada, sem muitos detalhes, no que segue: seja B uma álgebra de Boole qualquer. É claro que o conjunto $F := \{1\}$ é um filtro em B. Então, supondo-se que **UT** valha, pode-se concluir que existe um ultrafiltro U em B que contém F. Por conseguinte, **UT** implica **BPI**. Agora, tome um filtro F qualquer em B. Seja I o ideal dual de F. Considere então a relação binária $\sim$ sobre B que é definida pela seguinte sentença: para todo $a, b \in B$, $a \sim b$ se, e somente se, $(a \triangle b) \in I$. Verifica-se que $\sim$ é uma relação de equivalência. Considere agora o conjunto quociente $B/\!\sim\, = \{[b] : b \in B\}$. Defina as operações $+$, $\cdot$ e $-$ sobre $B/\!\sim$ pondo, para todo $a, b \in B$, $[a] + [b] := [a + b]$, $[a] \cdot [b] := [a \cdot b]$ e $-[a] := [-a]$. Mostra-se que estas operações estão bem definidas e que $\langle B/\!\sim, +, \cdot, -, [0], [1] \rangle$ é uma álgebra de Boole. Assim, admitindo-se que **BPI** valha, conclui-se que $B/\sim$ possui um ideal primo K. É fácil verificar que o conjunto $J := \{b \in B : [b] \in K\}$ é um ideal primo em B que contém I. Logo, o filtro dual de J é um ultrafiltro em B que contém F. Portanto, como B é qualquer, conclui-se que **BPI** implica **UT**.

Um fato de prova bastante simples é que o Lema de Zorn implica **UT** em **ZF**. Com efeito: fixe arbitrariamente uma álgebra de Boole B e um filtro F em B. Considere então a família $\mathcal{F} := \{G \subseteq B : G \text{ é filtro e } F \subseteq G\}$. Como a inclusão $\subseteq$ é uma ordem parcial sobre $\mathcal{F}$, tome uma cadeia $\mathcal{C}$ qualquer em $\mathcal{F}$ segundo $\subseteq$. É fácil ver que $\bigcup \mathcal{C}$ é um filtro em B que contém F. Logo, para toda cadeia $\mathcal{C}$ em $\mathcal{F}$ segundo $\subseteq$, existe uma cota superior para $\mathcal{C}$ segundo $\subseteq$. Então, supondo-se que o Lema de Zorn valha, pode-se fixar um elemento maximal U para $\mathcal{F}$ segundo $\subseteq$. Tem-se claramente que U é um ultrafiltro em B que contém F. Portanto, como B e F foram fixados arbitrariamente, segue que o Lema de Zorn implica **UT**.

Como vimos que **BPI** e **UT** são equivalentes e é bem conhecida a equivalência entre **AC** o Lema de Zorn, concluímos então que **AC** implica **BPI** em **ZF**. Contudo, veremos no Apêndice A que, no chamado modelo de Halpern–Lévy, a recíproca desta implicação é falsa, i.e., **BPI** não implica **AC** em **ZF**.

1.2 Noções topológicas

Na presente seção, são apresentadas algumas noções topológicas e determinadas proposições relacionadas a estas noções. Mesmo que não seja apresentada, a prova de cada uma das proposições seguintes é feita em **ZF**, salvo menção em contrário.

Definição 1.2.1. Seja X um espaço topológico. Diz-se que:

(*i*) X é **primeiro-enumerável** se, para todo $x \in X$, existir uma base local enumerável para x.

(*ii*) X é **segundo-enumerável** se existir uma base enumerável de X. Neste caso, também é comum dizer que X **tem base enumerável**.

(*iii*) X é **super segundo-enumerável** se, para toda base $\mathcal{B}$ de X, existir uma base enumerável de X contida em $\mathcal{B}$.

(*iv*) X é **separável** se existir um subconjunto enumerável denso de X.

Por simplicidade, serão adotadas as siglas SE e SSE para “segundo-enumerável” e “super segundo-enumerável”, respectivamente. $\triangle$

Lembrando que a topologia de um espaço topológico qualquer é uma base deste espaço, segue imediatamente da Definição 1.2.1 a seguinte

Proposição 1.2.2. *Todo espaço topológico SSE tem base enumerável.* $\blacksquare$

Definição 1.2.3. Seja X um espaço topológico. Diz-se que:

(i) X é $\boldsymbol{T_0}$ se valer a seguinte condição: para todo $x, y \in X$, se $x \neq y$, então existe um aberto U em X tal que $x \in U$ e $y \notin U$ ou existe um aberto V em X tal que $y \in V$ e $x \notin V$.

(ii) X é $\boldsymbol{T_1}$ se valer a seguinte condição: para todo $x, y \in X$, se $x \neq y$, então existe um aberto U em X tal que $x \in U$ e $y \notin U$ e existe um aberto V em X tal que $y \in V$ e $x \notin V$.

(iii) X é $\boldsymbol{T_2}$ se valer a seguinte condição: para todo $x, y \in X$, se $x \neq y$, então existem abertos U e V em X tais que $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.

(iv) X é $\boldsymbol{T_3}$ se valer a seguinte condição: para todo $x \in X$ e todo F fechado em X, se $x \notin F$, então existem abertos U e V em X tais que $x \in U$, $F \subseteq V$ e $U \cap V = \emptyset$.

(v) X é **regular** se X for T_1 e T_3.

(vi) X é $\boldsymbol{T_{3\frac{1}{2}}}$ se valer a seguinte condição: para todo $x \in X$ e todo F fechado em X, se $x \notin F$, então existe uma função contínua $f : X \longrightarrow [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ e $f[F] \subseteq \{1\}$. $\triangle$

Em virtude da Definição 1.2.3, conclui-se que todo espaço topológico regular é T_2, que todo espaço T_2 é T_1 e que todo espaço T_1 é T_0. Além disso, prova-se que todo espaço topológico zero-dimensional (i.e., que possui uma base constituída por abertos-fechados) é $T_{3\frac{1}{2}}$ e que todo espaço métrico é, para todo $i \in \left\{0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}\right\}$, T_i.

Definição 1.2.4. Sejam X um espaço topológico e $A \subseteq X$. Sejam $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ famílias de subconjuntos de X. Diz-se que:

(0) $\mathcal{U}$ **cobre** A se $A \subseteq \bigcup \mathcal{U}$.

(1) $\mathcal{U}$ é uma **cobertura** de X se valer que $\mathcal{U}$ cobre X.

(2) $\mathcal{U}$ é uma **cobertura aberta** de X se $\mathcal{U}$ for uma cobertura de X e todo elemento de $\mathcal{U}$ for um aberto em X.

(3) $\mathcal{V}$ **refina** $\mathcal{U}$ se, para todo $V \in \mathcal{V}$, existir um $U \in \mathcal{U}$ tal que $V \subseteq U$.

(4) $\mathcal{V}$ é um **refinamento** de $\mathcal{U}$ se $\mathcal{V}$ for uma cobertura de X e valer que $\mathcal{V}$ refina $\mathcal{U}$.

(5) $\mathcal{V}$ é um **refinamento aberto** de $\mathcal{U}$ se $\mathcal{V}$ for uma cobertura aberta de X e valer que $\mathcal{V}$ refina $\mathcal{U}$.

(6) $\mathcal{U}$ é **localmente finita** se, para todo $x \in X$, existir uma vizinhança aberta V de x em X satisfazendo a condição de que o conjunto $\{U \in \mathcal{U} : V \cap U \neq \emptyset\}$ é finito.

(7) $\mathcal{V}$ é um **refinamento aberto localmente finito** de $\mathcal{U}$ se $\mathcal{V}$ for um refinamento aberto de $\mathcal{U}$ e for localmente finita.

(9) $\mathcal{U}$ é **discreta** se, para todo $x \in X$, existir uma vizinhança aberta V de x em X satisfazendo a condição de que o conjunto $\{U \in \mathcal{U} : V \cap U \neq \emptyset\}$ ou é vazio ou é unitário.

(10) $\mathcal{U}$ é **$\boldsymbol{\sigma}$-localmente finita** (resp., **$\boldsymbol{\sigma}$-discreta**, **$\boldsymbol{\sigma}$-finita**) se existir uma família enumerável $\{\mathcal{U}_n : n < \omega\}$ de famílias localmente finitas (resp., famílias discretas, famílias finitas) de subconjuntos de X tal que $\mathcal{U} = \bigcup_{n<\omega} \mathcal{U}_n$. △

Como consequência imediata da Definição 1.2.4, tem-se que toda família discreta e toda família finita é localmente finita. Além disso, é fácil ver que toda família discreta é disjunta.

Definição 1.2.5. Seja X um espaço topológico. Diz-se que:

(i) X é **compacto** se, para toda cobertura aberta $\mathcal{C}$ de X, existir uma subcobertura finita de $\mathcal{C}$.

(ii) X é **enumeravelmente compacto** se, para toda cobertura aberta enumerável $\mathcal{C}$ de X, existir uma subcobertura finita de $\mathcal{C}$.

(iii) X é **Lindelöf** se, para toda cobertura aberta $\mathcal{C}$ de X, existir uma subcobertura enumerável de $\mathcal{C}$.

(iv) X é **paracompacto** se, para toda cobertura aberta $\mathcal{C}$ de X, existir um refinamento aberto localmente finito de $\mathcal{C}$.

(*v*) X é **$\aleph_1$-compacto** se todo subconjunto não enumerável de X tiver um ponto de acumulação. △

Em virtude da Definição 1.2.5, conclui-se que, dado um espaço topológico X, tem-se que X é compacto se, e somente se, X for enumeravelmente compacto e Lindelöf. Além disso, pode-se provar que todo espaço topológico compacto é paracompacto.

Proposição 1.2.6. *Todo espaço topológico compacto e discreto é finito.* ■

Com argumento análogo àquele que é usualmente dado para se demonstrar a Proposição 1.2.6, prova-se a seguinte

Proposição 1.2.7. *Todo espaço topológico Lindelöf e discreto é enumerável.* ■

Proposição 1.2.8. *Dado um ordinal $\alpha > 0$, tem-se que α é compacto se, e somente se, α for sucessor.* ■

Definição 1.2.9. Seja X um espaço topológico. Diz-se que X é **DCCC** se toda família discreta de subconjuntos abertos de X for enumerável.[3] △

Definição 1.2.10. Sejam ϕ e ψ propriedades que se aplicam a espaços topológicos. Diz-se que ϕ é **preservada por homeomorfismos**, ou que ϕ é uma **propriedade topológica**, se valer a seguinte condição: para todo espaço topológico X que satisfaz ϕ e todo espaço topológico Y que é homeomorfo a X, Y satisfaz ϕ. Diz-se que uma propriedade topológica ϕ é **hereditária** (resp., **hereditária para subespaços que satisfazem** ψ) se valer a seguinte condição: para todo espaço topológico X que satisfaz ϕ e todo subespaço Y de X (resp., que satisfaz ψ), Y satisfaz ϕ. △

Proposição 1.2.11. *Ser primeiro-enumerável, ser SE e, para cada $i \in \left\{0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}\right\}$, ser T_i são propriedades topológicas hereditárias.* ■

Proposição 1.2.12. *Ser compacto, ser enumeravelmente compacto e ser Lindelöf são propriedades topológicas hereditárias para subespaços fechados.* ■

Definição 1.2.13. Sejam X um espaço topológico e $A \subseteq X$. Diz-se que A é $\boldsymbol{G_\delta}$ em X se existir uma família enumerável $\{U_n : n < \omega\}$ de subconjuntos abertos de X tal que $A = \bigcap_{n<\omega} U_n$. Diz-se que X é **perfeito** se todo subconjunto fechado de X for G_δ em X. △

[3] A sigla DCCC é para a expressão *discrete countable chain condition.*

Proposição 1.2.14. *Todo espaço métrico é perfeito.* ■

Proposição 1.2.15. *Dados um ordinal δ, um ordinal limite $\gamma < \delta$ e um $A \subseteq \delta$ tal que A é fechado em δ, se $A \cap \gamma$ for ilimitado em γ, então $\gamma \in A$.*

Demonstração:

Seja V uma vizinhança aberta qualquer de γ em δ. Como a topologia da ordem sobre δ é gerada pelo conjunto $\{\{0\}\} \cup \{]\beta, \alpha] : \beta < \alpha < \delta\}$, tem-se então que existe um $\beta < \gamma$ tal que $]\beta, \gamma] \subseteq V$. Agora, suponha que $A \cap \gamma$ seja ilimitado em γ. Então, pode-se concluir que existe um $\xi \in A \cap \gamma$ tal que $\beta < \xi$. Com isso, tem-se de imediato que $\xi \in]\beta, \gamma] \cap A \subseteq V \cap A$. Logo, $V \cap A \neq \emptyset$. Já que V é qualquer, segue que $\gamma \in \overline{A}^{\delta}$. Portanto, como A é um subconjunto fechado de δ, conclui-se que $\gamma \in A$. ■

Proposição 1.2.16 (AC). *Dadas uma família $\{X_i : i \in I\}$ de espaços topológicos e uma família $\{A_i : i \in I\}$ de conjuntos tais que, para todo $i \in I$, $A_i \subseteq X_i$, se $Y = \prod_{i \in I} X_i$ estiver munido da topologia-produto, então $\overline{\prod_{i \in I} A_i}^{Y} = \prod_{i \in I} \overline{A_i}^{X_i}$.* ■

Proposição 1.2.17. *Dado um espaço topológico X, tem-se que X é compacto se, e somente se, toda família não vazia de subconjuntos fechados de X que tem a p.i.f. possuir interseção não vazia.* ■

O argumento usual para a prova da Proposição 1.2.17 é essencialmente o de fazer passagens ao complementar de fechados no espaço topológico X – destacando-se que, para tal argumento, não é necessário utilizar princípio de escolha algum.

Em **ZF**, prova-se que "todo ultrafiltro sobre um espaço compacto converge". Contudo, é necessário o uso de **BPI** para provar a seguinte

Proposição 1.2.18 (BPI). *Dado um espaço topológico X, se valer que todo ultrafiltro sobre X converge, então X é compacto.* ■

Então, sob **BPI**, pode-se concluir que: dado um espaço topológico X, tem-se que X é compacto se, e somente se, valer que todo ultrafiltro sobre X converge.

Proposição 1.2.19. *Todo subconjunto infinito de um dado espaço topológico compacto tem um ponto de acumulação.* ■

Com argumento análogo àquele que é usualmente dado para se demonstrar a Proposição 1.2.19, prova-se a seguinte

Proposição 1.2.20. *Todo subconjunto não enumerável de um dado espaço topológico Lindelöf tem um ponto de acumulação.* ■

Proposição 1.2.21. *Dados X e Y espaços topológicos, uma função contínua e injetora $f : X \longrightarrow Y$, um ponto $z \in X$ e um $A \subseteq X$, se z for um ponto de acumulação de A em X, então $f(z)$ é um ponto de acumulação de $f[A]$ em Y.* ■

Proposição 1.2.22. *Dados um espaço topológico X, um ponto $z \in X$ e um $A \subseteq X$, se X for T_1, são equivalentes:*

(i) *z é um ponto de acumulação de A.*

(ii) *Para toda vizinhança V de z em X, o conjunto $A \cap V$ é infinito.* ■

Proposição 1.2.23. *Dados um espaço topológico X e um $A \subseteq X$, se X for T_1, são equivalentes:*

(i) *A é fechado e discreto em X.*

(ii) *$\{\{x\} : x \in A\}$ é uma família discreta.*

(iii) *$\{\{x\} : x \in A\}$ é uma família locamente finita.* ■

Corolário 1.2.24. *Dados um espaço topológico X, uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos não vazios de X e uma função-escolha $\phi : \mathcal{F} \longrightarrow \bigcup \mathcal{F}$, se X for T_1 e $\mathcal{F}$ for localmente finita, então $im(\phi)$ é um subconjunto fechado e discreto de X.* □

Definição 1.2.25. Sejam $z \in \mathbb{R}$ e $A \subseteq \mathbb{R}$. Diz-se que:

(i) z é um **ponto de acumulação** de A **à esquerda** se, para todo $y \in \mathbb{R}$ tal que $y < z$, o conjunto $A \cap]y, z[$ for infinito.

(ii) z é um **ponto de acumulação** de A **à direita** se, para todo $w \in \mathbb{R}$ tal que $z < w$, o conjunto $A \cap]z, w[$ for infinito. △

Em virtude da Definição 1.2.25, conclui-se facilmente da Proposição 1.2.22 a seguinte

Proposição 1.2.26. *Dados um ponto $z \in \mathbb{R}$ e um $A \subseteq \mathbb{R}$, z é um ponto de acumulação de A se, e somente se, z for um ponto de acumulação de A à esquerda ou z for um ponto de acumulação de A à direita.*[4] ■

---

[4] Note que ambas as possibilidades podem ocorrer, ou seja, um ponto de acumulação de A pode ser ponto de acumulação de A à esquerda e à direita.

Capítulo 2

Asserções demonstráveis em: ZF, ZF + $\mathbf{AC}_\omega$ e ZF + $\mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$

No presente capítulo, apresentaremos algumas asserções que são demonstráveis em: **ZF**, **ZF** + $\mathbf{AC}_\omega$ e **ZF** + $\mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$, com o intuito de explicitar a necessidade exata do uso de princípios de escolha para se estabeler a maioria dos resultados nos capítulos subsequentes. Além disso, iremos apresentar e demonstrar dois resultados que estabelecem equivalências em termos de sequências tanto para $\mathbf{AC}_\omega$ quanto para $\mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$.

2.1 Asserções que ZF prova

Na presente seção, são apresentadas algumas asserções que são demonstráveis em **ZF**. Contudo, para a maioria destas asserções, iremos omitir as demonstrações.

Teorema 2.1.1 (ZF). $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{R}$.

Demonstração:

Defina $\sigma : {}^\omega 2 \times {}^\omega 2 \longrightarrow {}^\omega 2$ pondo $\sigma\langle s,t\rangle := \langle x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots\rangle$, em que $s = \langle x_n\rangle_{n<\omega}$ e $t = \langle y_n\rangle_{n<\omega}$. Pela construção, é claro que σ está bem definida. Além disso, é fácil ver que σ é uma bijeção. Logo, ${}^\omega 2 \times {}^\omega 2 \approx {}^\omega 2$. Portanto, já que ${}^\omega 2 \approx \mathbb{R}$ (pela Proposição 1.1.31), segue que $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \approx {}^\omega 2 \times {}^\omega 2 \approx {}^\omega 2 \approx \mathbb{R}$. ■

Para cada conjunto X e cada ordinal α, iremos definir os seguintes conjuntos: ${}^{<\alpha}X := \bigcup_{\xi<\alpha} {}^\xi X$ e $[X]^{<\alpha} := \{A \subseteq X : \exists \beta < \alpha\,(A \approx \beta)\}$. Em particular, para um dado conjunto X, tem-se que: ${}^{<\omega}X$ é o conjunto das sequências finitas em X e $[X]^{<\omega}$ é o conjunto dos subconjuntos finitos de X.

Teorema 2.1.2 (ZF). *Dado um conjunto X, se X for infinito e $X^2 \approx X$, então X é Dedekind-infinito e ${}^{<\omega}X \approx X$.*

Demonstração:

Seja X um conjunto infinito. Sendo assim, pode-se fixar um $x_0 \in X$. Defina $\varphi : X \longrightarrow \{x_0\} \times X$ pondo $\varphi(x) := \langle x_0, x \rangle$. Pela construção, é claro que φ está bem definida e que φ é injetora (e sobrejetora). Logo, $X \preceq \{x_0\} \times X$. Agora, suponha que $X^2 \approx X$. Assim, tem-se que $X^2 \preceq X$ e que $X \preceq X^2$. Como é óbvio que $\{x_0\} \times X \preceq X^2$ e se tem que $X^2 \preceq X \preceq \{x_0\} \times X$, segue do Teorema de Schröder–Bernstein–Cantor (Proposição 1.1.8) que $X^2 \approx \{x_0\} \times X$. Novamente usando que X é infinito, pode-se fixar um $y_0 \in X \setminus \{x_0\}$. Tem-se então que $\langle y_0, y_0 \rangle \in X^2 \setminus (\{x_0\} \times X)$, implicando que $\{x_0\} \times X \subset X^2$. Logo, X^2 é Dedekind-infinito. Então, pela Proposição 1.1.18, tem-se que $\omega \preceq X^2$. Por conseguinte, $\omega \preceq X$. Novamente pela Proposição 1.1.18, conclui-se que X é Dedekind-infinito.

Pode-se provar, por indução finita sobre $n \geqslant 1$, que existe um subconjunto $\{g_n : n \in \omega \setminus 1\}$ de $\bigcup_{n \geqslant 1} {}^{X^n}X$ tal que, para todo $n \in \omega \setminus 1$, g_n é uma bijeção de X^n em X. De fato: para $n = 1$, tome g_1 igual a função identidade de X. Suponha que, para um dado $n \geqslant 1$, tenhamos definido uma bijeção $g_n : X^n \longrightarrow X$. Defina então $h_n : X^{n+1} \longrightarrow X^2$ pondo, para todo $z \in X^n$ e todo $x \in X$, $h_n \langle z, x \rangle := \langle g_n(z), x \rangle$. Claramente, tem-se que h_n está bem definida, por construção. Além disso, tem-se que h_n é bijetora, já que g_n o é. Supondo ainda que $X^2 \approx X$, fixe uma bijeção $g : X^2 \longrightarrow X$. Defina agora $g_{n+1} : X^{n+1} \longrightarrow X$ pondo, para todo $z \in X^n$ e todo $x \in X$, $g_{n+1} \langle z, x \rangle := (g \circ h_n) \langle z, x \rangle$. Assim, tem-se que g_{n+1} é uma bijeção de X^{n+1} em X.

Para prosseguir com a demonstração, fixe arbitrariamente um $n \in \omega \setminus 1$ e defina $\sigma_n : {}^nX \longrightarrow X^n$ pondo

$$\sigma_n\left(\langle x_k \rangle_{k<n}\right) := \begin{cases} \langle x_0, \ldots, x_{n-1} \rangle, & \text{se } n > 1; \\ x_0, & \text{se } n = 1. \end{cases}$$

É claro que σ_n está bem definida, por construção. Além disso, vê-se facilmente que σ_n é bijetora. Agora, tome $\varphi_n : {}^nX \longrightarrow X$ definida por $\varphi_n(s) = (g_n \circ \sigma_n)(s)$. Sendo assim, tem-se que, para todo $n \in \omega \setminus 1$, φ_n é bijetora. Finalmente, tome $\Phi : {}^{<\omega}X \longrightarrow \omega \times X$ definida por

$$\Phi(s) = \begin{cases} \langle 0, x_0 \rangle, & \text{se } s = \emptyset; \\ \langle dom(s), \varphi_{dom(s)}(s) \rangle, & \text{se } s \in {}^{<\omega}X \setminus \{\emptyset\}. \end{cases}$$

Pela construção, tem-se claramente que Φ está bem definida. Utilizando-se diretamente a definição de Φ e o fato de que, para cada $n \in \omega \setminus 1$, φ_n é injetora, verifica-se facilmente que Φ é injetora. Logo, ${}^{<\omega}X \preceq \omega \times X$. Além disso, como $X^2 \preceq X$ e $\omega \preceq X$, conclui-se que $\omega \times X \preceq X \times X = X^2 \preceq X$. Consequentemente, ${}^{<\omega}X \preceq X$. Já que $X \preceq X^2 \preceq {}^2X$ e, obviamente, ${}^2X \preceq \bigcup_{n<\omega} {}^nX = {}^{<\omega}X$, conclui-se também que $X \preceq {}^{<\omega}X$. Portanto, segue do Teorema de Schröder–Bernstein–Cantor que ${}^{<\omega}X \approx X$. ■

Corolário 2.1.3 (ZF). *${}^{<\omega}\omega \approx \omega$, ${}^{<\omega}\mathbb{R} \approx \mathbb{R}$ e $[\omega]^{<\omega}$ é enumerável.*

Prova:

Como se tem que: ω e $\mathbb{R}$ são infinitos, $\omega^2 \approx \omega$ (pelo Corolário 1.1.30) e $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{R}$ (pelo Teorema 2.1.1), então segue do Teorema 2.1.2 que: ${}^{<\omega}\omega \approx \omega$ e ${}^{<\omega}\mathbb{R} \approx \mathbb{R}$. Agora, para cada $A \in [\omega]^{<\omega}$, tome o natural $n(A) := \text{t. o.}\,(A, <)$. Seja $\langle x_k \rangle_{k<n(A)}$ a enumeração canônica de A. Defina então $\varphi : [\omega]^{<\omega} \longrightarrow {}^{<\omega}\omega$ pondo $\varphi(A) := \langle x_k \rangle_{k<n(A)}$. Tem-se claramente que φ está bem definida, por construção. Além disso, é fácil verificar que φ é injetora. Logo, $[\omega]^{<\omega} \preceq {}^{<\omega}\omega$. Já que ${}^{<\omega}\omega \approx \omega$, tem-se, em particular, que ${}^{<\omega}\omega \preceq \omega$. Conclui-se então que $[\omega]^{<\omega} \preceq \omega$. Portanto, pela Proposição 1.1.14, tem-se que $[\omega]^{<\omega}$ é enumerável. □

Teorema 2.1.4 (ZF). *A união de qualquer família finita de conjuntos enumeráveis é enumerável.* ■

Teorema 2.1.5 (ZF). *O produto cartesiano de qualquer família finita de conjuntos enumeráveis é enumerável.* ■

Teorema 2.1.6 (ZF). *Dados um espaço topológico X, um ponto $x_0 \in X$, uma sequência $\langle x_n \rangle_{n\geqslant 1}$ em X e um $A \subseteq X$, se o conjunto $\{n \in \omega \setminus 1 : x_n \in A\}$ for infinito e $x_n \to x_0$, então existe uma sequência em A que converge para x_0.*

Demonstração:

Considere o conjunto $M := \{n \in \omega \setminus 1 : x_n \in A\}$ e defina a sequência $s = \langle n_k \rangle_{k\geqslant 1}$ em M pondo

$$n_1 := \min(M) \text{ e, para todo } k \in \omega \setminus 1,\ n_{k+1} := \min(M \setminus \{n_i : 1 \leqslant i \leqslant k\}).$$

Como M é um subconjunto infinito de ω, pode-se concluir, por indução finita, que a sequência s está bem definida. Além disso, é fácil ver que, para todo $k \in \omega \setminus 1$, $n_k < n_{k+1}$. Assim, tem-se que a sequência s é injetora, implicando que $im(s)$ é um subconjunto infinito de $\omega \setminus 1$. Agora, considere a sequência $\langle x_k^* \rangle_{k\geqslant 1}$ em A tal que, para todo $k \in \omega \setminus 1$, $x_k^* := x_{n_k}$. Pela construção, tem-se claramente que $\langle x_k^* \rangle_{k\geqslant 1}$ está bem definida. Já que $im(s) \subseteq \omega$ é infinita, tem-se que $im(s)$ é ilimitada. Portanto, como $x_n \to x_0$ e s é estritamente crescente, segue que $x_k^* \to x_0$. ■

Teorema 2.1.7 (ZF). *Todo espaço pseudométrico separável tem base enumerável.*

Demonstração:

Seja X um espaço pseudométrico separável. Então, pode-se fixar um subconjunto enumerável denso D de X. Para cada $x \in D$ e cada $n \in \omega \setminus 1$, considere o conjunto $B_{\langle x,n\rangle} := B\left(x, \dfrac{1}{n}\right)$. Considere agora o conjunto $\mathcal{B}_0 := \left\{B_{\langle x,n\rangle} : \langle x,n\rangle \in D \times (\omega \setminus 1)\right\}$. É claro que $\mathcal{B}_0$ é enumerável, pois está indexado por um produto finito de conjuntos enumeráveis (veja Teorema 2.1.5 e Proposição 1.1.14). Utilizando-se adequadamente a densidade de D em X, verifica-se facilmente que $\mathcal{B}_0$ é uma base de X. Portanto, tem-se que X é SE. ■

Lema 2.1.8 (ZF). *Dado um espaço topológico $\langle X,\tau\rangle$, se valer que $\langle X,\tau\rangle$ tem base enumerável, então $\tau \preceq \mathbb{R}$.*

Demonstração:

Seja $\langle X,\tau\rangle$ um espaço topológico SE. Sendo assim, fixe uma base enumerável $\mathcal{B}$ para τ e defina $\varphi : \tau \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{B})$ pondo $\varphi(U) := \{B \in \mathcal{B} : B \subseteq U\}$. É claro que φ está bem definida, por construção. Além disso, tem-se que φ é injetora. De fato: como $\mathcal{B}$ é uma base para τ, conclui-se que $\bigcup \varphi(U) = U$. Então, dados $U, V \in \tau$ tais que $\varphi(U) = \varphi(U)$, tem-se que $U = \bigcup \varphi(U) = \bigcup \varphi(V) = V$. Logo, $\tau \preceq \mathcal{P}(\omega)$. Agora, como $\mathcal{B}$ é enumerável, conclui-se que $\mathcal{B} \preceq \omega$ (pela Proposição 1.1.14). Segue disso que $\mathcal{P}(\mathcal{B}) \preceq \mathcal{P}(\omega)$. Como $\mathcal{P}(\omega) \approx \mathbb{R}$ (pela Proposição 1.1.31), então, em particular, $\mathcal{P}(\omega) \preceq \mathbb{R}$. Portanto, tem-se que $\tau \preceq \mathbb{R}$. ■

Lema 2.1.9 (ZF). *Dado um espaço topológico X, se X for T_0 e valer que X tem base enumerável, então $X \preceq \mathbb{R}$.*

Demonstração:

Seja X um espaço topológico T_0 e SE. Seja τ a topologia sobre X. Como X é SE, segue do Lema 2.1.8 que $\tau \preceq \mathbb{R}$. Agora, defina $\psi : X \longrightarrow \tau$ pondo $\psi(x) := X \setminus \overline{\{x\}}$. É claro que ψ está bem definida, por construção. Além disso, tem-se que ψ é injetora. De fato: sejam $x, y \in X$ tais que $x \neq y$. Já que X é T_0, conclui-se que $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$, o que implica que $\psi(x) \neq \psi(x)$. Logo, $X \preceq \tau$. Portanto, segue que $X \preceq \mathbb{R}$. ■

A demonstração da equivalência dada no lema seguinte é um bom exemplo para o que foi dito na Observação 1.1.22, pois: na prova da implicação “somente se”, apenas finitas escolhas arbitrárias são feitas, enquanto na prova da implicação “se”, não existe escolha arbitrária alguma.

Lema 2.1.10 (ZF). *Dados um espaço topológico X e um $A \subseteq X$, A é um subespaço compacto de X se, e somente se, toda família de subconjuntos abertos de X que cobre A possuir uma subfamília finita que cobre A.*

Demonstração:

Por um lado, suponha que A seja um subespaço compacto de X. Seja $\mathcal{U}$ uma família de subconjuntos abertos de X tal que $A \subseteq \bigcup \mathcal{U}$. Assim, para cada $U \in \mathcal{U}$, tem-se que o conjunto $V_U := A \cap U$ é um aberto em A e que $A = A \cap \bigcup \mathcal{U} = A \cap \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} (A \cap U) = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} V_U$, implicando que o conjunto $\mathcal{C} := \{V_U : U \in \mathcal{U}\}$ é uma cobertura aberta de A. Como A é compacto, então existe uma subfamília finita $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ tal que $A = \bigcup \mathcal{C}'$. Para cada $V \in \mathcal{C}'$, fixe um $U_V \in \mathcal{U}$ tal que $V = A \cap U_V$. Considere então o conjunto $\mathcal{U}' := \{U_V : V \in \mathcal{C}'\}$. Note que $\mathcal{U}'$ é finito, pois $\mathcal{C}'$ é um conjunto finito de índices para $\mathcal{U}'$. Como $A = \bigcup \mathcal{C}' = \bigcup_{V \in \mathcal{C}'} V = \bigcup_{V \in \mathcal{C}'} (A \cap U_V) = A \cap \bigcup_{V \in \mathcal{C}'} U_V = A \cap \bigcup \mathcal{U}'$, tem-se que $A \subseteq \bigcup \mathcal{U}'$. Consequentemente, toda família de subconjuntos abertos de X que cobre A possui uma subfamília finita que cobre A.

Por outro lado, suponha que toda família de subconjuntos abertos de X que cobre A possua uma subfamília finita que cobre A. Fixe arbitrariamente uma cobertura aberta $\mathcal{C}$ de A como subespaço de X. Considere então, para cada $V \in \mathcal{C}$, o conjunto $U_V := \bigcup \{U \subseteq X : U \text{ é um aberto em } X \text{ e } V = A \cap U\}$. É imediato concluir que, para todo $V \in \mathcal{C}$, U_V é um aberto em X tal que $V = A \cap U_V$. Considerando agora o conjunto $\mathcal{U} := \{U_V : V \in \mathcal{C}\}$, tem-se que $\mathcal{U}$ é uma família de subconjuntos abertos de X tal que $A = \bigcup \mathcal{C} = \bigcup_{V \in \mathcal{C}} V = \bigcup_{V \in \mathcal{C}} (A \cap U_V) = A \cap \bigcup_{V \in \mathcal{C}} U_V = A \cap \bigcup \mathcal{U}$, o que implica que $A \subseteq \bigcup \mathcal{U}$. Assim, pode-se fixar uma subfamília finita $\mathcal{U}'$ de $\mathcal{U}$ tal que $A \subseteq \bigcup \mathcal{U}'$ (pela suposição que está sendo feita). Tome então, para cada $U \in \mathcal{U}'$, o conjunto $V_U := A \cap U$. Como $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$, tem-se que, para todo $U \in \mathcal{U}'$, existe um $V \in \mathcal{C}$ tal que $U = U_V$, o que implica que $V = A \cap U = V_U$. Logo, o conjunto $\mathcal{C}' := \{V_U : U \in \mathcal{U}'\}$ é um subconjunto de $\mathcal{C}$. Note que $\mathcal{C}'$ é finito, pois $\mathcal{U}'$ é um conjunto finito de índices para $\mathcal{C}'$. Além disso, como $A \subseteq \bigcup \mathcal{U}'$, tem-se que $A = A \cap \bigcup \mathcal{U}' = A \cap \bigcup_{U \in \mathcal{U}'} U = \bigcup_{U \in \mathcal{U}'} (A \cap U) = \bigcup_{U \in \mathcal{U}'} V_U = \bigcup \mathcal{C}'$. Conclui-se então que $\mathcal{C}'$ é uma subcobertura finita de $\mathcal{C}$. Portanto, já que $\mathcal{C}$ foi fixada arbitrariamente, tem-se que A é um subespaço compacto de X. ■

Com algumas adaptações óbvias, a demonstração do Lema 2.1.10 nos fornece uma prova do seguinte

Lema 2.1.11 (ZF). *Dados um espaço topológico X e um $A \subseteq X$, A é um subespaço enumeravelmente compacto de X se, e somente se, toda família enumerável de* *subconjuntos abertos de X que cobre A possuir uma subfamília finita que cobre A.* ■

Teorema 2.1.12 (ZF). *Todo intervalo fechado e limitado em $\mathbb{R}$ é um subespaço compacto de $\mathbb{R}$.*

Demonstração:

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ quaisquer. Fixe arbitrariamente uma família $\mathcal{C}$ de subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$ que cobre $[a, b]$. Considere agora o conjunto

$$K := \{x \in [a, b] : \exists \mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}\, (\mathcal{C}' \text{ é finito e } [a, x] \subseteq \bigcup \mathcal{C}')\}.$$

Como $[a, b] \subseteq \bigcup \mathcal{C}$, então, para todo $x \in [a, b]$, existe um $U \in \mathcal{C}$ tal que $x \in U$. Fixando um $U \in \mathcal{C}$ tal que $a \in U$, tem-se que $[a, a] = \{a\} \subseteq U = \bigcup \{U\}$. Segue disso, e de o conjunto $\{U\} \subseteq \mathcal{C}$ ser finito, que $a \in K$ e, por conseguinte, que $K \neq \emptyset$. Além disso, tem-se que K é limitado em $\mathbb{R}$, pois, obviamente, $K \subseteq [a, b]$. Logo, existe o supremo de K em $\mathbb{R}$. Seja então $c := \sup (K)$. Sendo assim, tem-se que $c \in \overline{K} \subseteq \overline{[a, b]} = [a, b]$. Afirmamos que $c \in K$ e que $c = b$. Com efeito: já que $c \in [a, b]$, pode-se fixar um $U \in \mathcal{C}$ tal que $c \in U$. De U ser aberto em $\mathbb{R}$, segue que existe um $\varepsilon > 0$ tal que $]c - \varepsilon, c + \varepsilon[\, \subseteq U$. Como c é o supremo de K, então, para um tal $\varepsilon > 0$ fixado, existe um $d \in K$ tal que $c - \varepsilon < d$, além do fato de ser $d \leqslant c < c + \varepsilon$. Assim, para um tal $d \in K$ fixado, tem-se que $[d, c + \varepsilon[\, \subset\,]c - \varepsilon, c + \varepsilon[\, \subseteq U$ e que, para algum $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ finito, $[a, d] \subseteq \bigcup \mathcal{C}'$. Consequentemente,

$$[a, c] \subset [a, c + \varepsilon[\, = [a, d] \cup [d, c + \varepsilon[\, \subseteq \left(\bigcup \mathcal{C}'\right) \cup U. \tag{*}$$

Claramente, tem-se que o conjunto $\mathcal{C}'' := \mathcal{C}' \cup \{U\} \subseteq \mathcal{C}$ é finito, por ser união finita de conjuntos finitos, e que $[a, c] \subseteq \bigcup \mathcal{C}''$, por (*). Logo, $c \in K$. Se fosse $c \neq b$, teríamos que $c < b$. Então, poderíamos fixar um $\varepsilon' > 0$ tal que $\varepsilon' \leqslant \min \left\{\frac{\varepsilon}{2}, b - c\right\}$. Disso, seguiria facilmente que $a < c + \varepsilon' \leqslant b$ e, juntamente com (*), que $[a, c + \varepsilon'] \subset [a, c + \varepsilon[\, \subseteq \bigcup \mathcal{C}''$. Com isso, concluiríamos que $c + \varepsilon' \in K$, uma contradição ao fato de que c é uma cota superior para K. Logo, $c = b$. Ora, pela afirmação que foi provada, tem-se obviamente que $b \in K$, i.e., que existe um subconjunto finito $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ tal que $[a, b] \subseteq \bigcup \mathcal{C}'$. Logo, $\mathcal{C}$ possui uma subfamília finita que cobre $[a, b]$. Portanto, como $\mathcal{C}$ foi fixada arbitrariamente, segue do Lema 2.1.10 que $[a, b]$ é um subespaço compacto de $\mathbb{R}$. ■

Teorema 2.1.13 (ZF). *Dados um espaço métrico M e uma cobertura aberta $\mathcal{C}$ de M, se valer que $\mathcal{C}$ pode ser bem ordenada, então $\mathcal{C}$ admite um refinamento aberto localmente finito e σ-discreto.* ■

Uma prova do Teorema 2.1.13 pode ser encontrada em [Eng89, p. 280]. Conforme notado em [Eng89, p. 281], a prova dada em sua página 280 garante, na verdade, que o resultado expresso no Teorema 2.1.13 é válido para qualquer espaço pseudométrico que possui uma cobertura aberta bem ordenada. É interessante destacar que a referida prova é o cerne de uma das provas de um resultado clássico da Topologia Geral. Precisamente, daquela devida à Mary E. Rudin – que foi publicada em um artigo seu de 1969, intitulado "A new proof that metric spaces are paracompact". A primeira prova de que se tem conhecimento é devida a Arthur H. Stone – e foi publicada em um artigo seu de 1948, intitulado "Paracompactness and product spaces". O resultado ao qual nos referimos não é nada a mais, nada a menos que o seguinte

Corolário 2.1.14 (**ZF**). **AC** *implica que todo espaço métrico é paracompacto.* □

Teorema 2.1.15 ([GoT95], **ZF**). *Todo espaço métrico que possui um subconjunto denso que pode ser bem ordenado é paracompacto.*

Demonstração:

Seja M um espaço métrico que possui um subconjunto denso D que pode ser bem ordenado. Sejam δ o tipo de ordem de D e $\{x_\alpha : \alpha < \delta\}$ a enumeração canônica de D. Fixe arbitrariamente uma cobertura aberta $\mathcal{C}$ de M e tome um $\alpha < \delta$ qualquer. Sendo assim, existe um $U \in \mathcal{C}$ tal que $x_\alpha \in U$. De U ser aberto em M e de $\mathbb{R}$ ser corpo ordenado arquimediano, segue que existe um $k \in \omega \setminus 1$ tal que $B\left(x_\alpha, \dfrac{1}{k}\right) \subseteq U$. Logo, para todo $\alpha < \delta$, $k_\alpha := \min\left\{k \in \omega \setminus 1 : \exists U \in \mathcal{C}\left(B\left(x_\alpha, \dfrac{1}{k}\right) \subseteq U\right)\right\}$ está bem definido.

Agora, tome o conjunto $\mathcal{U} := \left\{B\left(x_\alpha, \dfrac{1}{k_\alpha}\right) : \alpha < \delta\right\}$. Pela construção, é claro que $\mathcal{U}$ é uma família de abertos em M que refina $\mathcal{C}$. Tem-se também que $\mathcal{U}$ pode ser bem ordenada, pois está indexada por um ordinal (veja Proposição 1.1.6). Utilizando-se de maneira adequada a densidade de D em M e, para cada $\alpha < \delta$, a minimalidade de k_α, verifica-se facilmente que $\mathcal{U}$ é uma cobertura aberta de M. Então, pelo Teorema 2.1.13, conclui-se que existe um refinamento aberto localmente finito $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}$ refina $\mathcal{C}$, segue que $\mathcal{V}$ também é um refinamento aberto localmente finito de $\mathcal{C}$. Portanto, já que $\mathcal{C}$ foi fixada arbitrariamente, tem-se que M é paracompacto. ■

Corolário 2.1.16 (**ZF**). *Todo espaço métrico separável é paracompacto.*

Prova:

Seja M um espaço métrico separável. Sendo assim, pode-se fixar um subconjunto enumerável denso D de M. Como D é enumerável, então D pode ser bem ordenado (pela Proposição 1.1.6). Portanto, segue do Teorema 2.1.15 que M é paracompacto. □

Agora, pelo fato de $\mathbb{R}$ ser espaço métrico separável, segue imediatamente do

Corolário 2.1.16 o seguinte

Corolário 2.1.17 (**ZF**)**.** *$\mathbb{R}$ é paracompacto.* □

2.2 Asserções que $\mathbf{ZF} + \mathbf{AC}_\omega$ prova

Na presente seção, são apresentadas algumas asserções que são demonstráveis em $\mathbf{ZF} + \mathbf{AC}_\omega$. Contudo, para a maioria destas asserções, iremos omitir as demonstrações.

Teorema 2.2.1 ($\mathbf{AC}_\omega$)**.** *Todo conjunto infinito é Dedekind-infinito.* ■

Observação 2.2.2. Segue imediatamente da Proposição 1.1.13 e do Teorema 2.2.1 que, sob $\mathbf{AC}_\omega$, as noções de infinitude e de Dedekind-infinitude coincidem. Conclui-se então que, sob $\mathbf{AC}_\omega$, as noções de finitude e de Dedekind-finitude também coincidem. △

Teorema 2.2.3 ($\mathbf{AC}_\omega$)**.** *A união de qualquer família enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.* ■

Corolário 2.2.4 ($\mathbf{AC}_\omega$)**.** *ω_1 é cardinal regular.* □

Teorema 2.2.5 ($\mathbf{AC}_\omega$)**.** *Dados um espaço topológico X, um ponto $z \in X$ e um $A \subseteq X$, se X for primeiro-enumerável e $z \in \overline{A}$, então existe uma sequência $\langle x_n \rangle_{n \geqslant 1}$ em A tal que $x_n \to z$.* ■

Teorema 2.2.6 ($\mathbf{AC}_\omega$)**.** *Todo espaço topológico enumeravelmente compacto e discreto é finito.* ■

Lema 2.2.7 ($\mathbf{AC}_\omega$)**.** *Dado um espaço topológico X, se X for T_1, são equivalentes:*

(*i*) *X é enumeravelmente compacto.*

(*ii*) *Todo subconjunto infinito de X tem um ponto de acumulação.*

(*iii*) *Todo subconjunto infinito enumerável de X tem um ponto de acumulação.*

(*iv*) *Toda família locamente finita de subconjuntos de X é finita.* ■

Teorema 2.2.8 ($\mathbf{AC}_\omega$)**.** *ω_1 é enumeravelmente compacto.* ■

Teorema 2.2.9 ($\mathbf{AC}_\omega$)**.** *Todo espaço topológico T_1, enumeravelmente compacto e paracompacto é compacto.* ■

Corolário 2.2.10 ($\mathbf{AC}_\omega$)**.** *ω_1 não é paracompacto.* □

Teorema 2.2.11 ($\mathbf{AC}_\omega$)**.** *Todo espaço topológico que tem base enumerável é SSE.*

Demonstração:

Seja X um espaço topológico SE. Então, pode-se fixar uma base enumerável $\mathcal{B}_0$ de X. Agora, fixe arbitrariamente uma base $\mathcal{B}$ de X. Para cada $U, V \in \mathcal{B}_0$ tais que $U \subseteq V$, tome o conjunto $\mathcal{B}_{\langle U,V\rangle} := \{B \in \mathcal{B} : U \subseteq B \subseteq V\}$. Com isso, considere o conjunto $\mathcal{U} := \left\{\langle U, V\rangle \in {\mathcal{B}_0}^2 : U \subseteq V \text{ e } \exists\, B \subseteq X \left(B \in \mathcal{B}_{\langle U,V\rangle}\right)\right\}$ e note que este conjunto é enumerável, já que está contido em um produto finito de um conjunto enumerável por si mesmo (veja Teorema 2.1.5). Agora, considere o conjunto $\mathcal{F} := \left\{\mathcal{B}_{\langle U,V\rangle} : \langle U, V\rangle \in \mathcal{U}\right\}$. Ora, para cada $\langle U, V\rangle \in \mathcal{U}$, tem-se que $\mathcal{B}_{\langle U,V\rangle}$ é não vazio. Além disso, tem-se que $\mathcal{F}$ é enumerável, pois está indexado por um conjunto enumerável (veja Proposição 1.1.14). Então, admitindo-se que $\mathbf{AC}_\omega$ valha, pode-se concluir que existe uma função-escolha para $\mathcal{F}$, i.e., uma função $\phi : \mathcal{F} \longrightarrow \bigcup \mathcal{F}$ tal que, para todo $\langle U, V\rangle \in \mathcal{U}$, $\phi\left(\mathcal{B}_{\langle U,V\rangle}\right) \in \mathcal{B}_{\langle U,V\rangle}$. Tome então, para cada $\langle U, V\rangle \in \mathcal{U}$, o conjunto $B_{\langle U,V\rangle} := \phi\left(\mathcal{B}_{\langle U,V\rangle}\right)$. Tem-se obviamente que, para todo $\langle U, V\rangle \in \mathcal{U}$, $U \subseteq B_{\langle U,V\rangle} \subseteq V$.

Agora, afirmamos que o conjunto $\mathcal{B}_1 := \left\{B_{\langle U,V\rangle} : \langle U, V\rangle \in \mathcal{U}\right\} \subseteq \mathcal{B}$ é uma base enumerável de X. Com efeito: é claro que $\mathcal{B}_1$ é enumerável, já que está indexado por um conjunto enumerável. Pela construção, é evidente que todo elemento de $\mathcal{B}_1$ é um aberto em X. Seja W um aberto qualquer em X. Se for $W = \emptyset$, nada a fazer. Se for $W \neq \emptyset$, tome um $w \in W$ qualquer. Como $\mathcal{B}_0$ e $\mathcal{B}$ são bases de X, então fixe um $V_0 \in \mathcal{B}_0$ tal que $w \in V_0 \subseteq W$ e um $B_0 \in \mathcal{B}$ tal que $w \in B_0 \subseteq V_0$. Novamente utilizando que $\mathcal{B}_0$ é uma base de X, fixe um $U_0 \in \mathcal{B}_0$ tal que $w \in U_0 \subseteq B_0$. Logo, $B_0 \in \mathcal{B}_{\langle U_0,V_0\rangle}$ e, por conseguinte, $\langle U_0, V_0\rangle \in \mathcal{U}$. Então, tem-se que $w \in U_0 \subseteq B_{\langle U_0,V_0\rangle} \subseteq V_0 \subseteq W$. Consequentemente, para todo $w \in W$, existe um $B \in \mathcal{B}_1$ tal que $w \in B \subseteq W$. Portanto, como $\mathcal{B}$ foi fixada arbitrariamente, conclui-se que X é SSE. ■

Teorema 2.2.12 ($\mathbf{AC}_\omega$)**.** *Todo espaço topológico que tem base enumerável é separável.*

Demonstração:

Seja X um espaço topológico SE. Sendo assim, pode-se fixar uma base enumerável $\mathcal{B}_0$ de X. Considere então o conjunto $\mathcal{B}_0' := \mathcal{B}_0 \setminus \{\emptyset\}$. Note que $\mathcal{B}_0'$ é enumerável (pelo Corolário 1.1.16) e que é, obviamente, uma família de subconjuntos não vazios de X. Então, supondo-se que $\mathbf{AC}_\omega$ valha, pode-se fixar uma função-escolha ϕ para $\mathcal{B}_0'$. Agora, considere o conjunto $D_0 := im(\phi) = \phi[\mathcal{B}_0']$. Ora, é claro que D_0 é enumerável, já que é imagem de um conjunto enumerável por uma função (veja Corolário 1.1.17). Além disso, como $\mathcal{B}_0$ é uma base de X e D_0 intersecta cada elemento não vazio de $\mathcal{B}_0$, tem-se que D_0 é denso em M. Portanto, segue que M é separável. ■

Teorema 2.2.13 ($\mathbf{AC}_\omega$)**.** *Todo espaço topológico que tem base enumerável é Lindelöf.*

Demonstração:

Seja X um espaço topológico SE. Então, pode-se fixar uma base enumerável $\mathcal{B}_0$ de X. Agora, fixe arbitrariamente uma cobertura aberta $\mathcal{C}$ de X e considere o conjunto $\mathcal{B}_0' := \{B \in \mathcal{B}_0 : \exists U \in \mathcal{C}\,(B \subseteq U)\}$. Como $\mathcal{B}_0$ é enumerável, tem-se que $\mathcal{B}_0'$ também é enumerável (pelo Corolário 1.1.16). Além disso, para cada $B \in \mathcal{B}_0'$, tem-se que o conjunto $\mathcal{C}_B := \{U \in \mathcal{C} : B \subseteq U\}$ é não vazio. Agora, tome o conjunto $\mathcal{F} := \{\mathcal{C}_B : B \in \mathcal{B}_0'\}$ e note que este conjunto é enumerável, pois está indexado por um conjunto enumerável (veja Proposição 1.1.14). Pela construção, tem-se também que $\mathcal{F}$ é uma família de conjuntos não vazios. Então, admitindo-se a validade de $\mathbf{AC}_\omega$, pode-se concluir que existe uma função-escolha para $\mathcal{F}$, i.e., uma função $\phi : \mathcal{F} \longrightarrow \bigcup \mathcal{F}$ tal que, para todo $B \in \mathcal{B}_0'$, $\phi(\mathcal{C}_B) \in \mathcal{C}_B$. Tome então, para cada $B \in \mathcal{B}_0'$, o conjunto $U_B := \phi(\mathcal{C}_B)$. Obviamente, tem-se que, para todo $B \in \mathcal{B}_0'$, $U_B \in \mathcal{C}$ e $B \subseteq U_B$.

Agora, afirmamos que o conjunto $\mathcal{C}_0 := \{U_B : B \in \mathcal{B}_0'\} \subseteq \mathcal{C}$ é uma subcobertura enumerável de $\mathcal{C}$. Com efeito: é claro que $\mathcal{C}_0$ é enumerável, já que está indexado por um conjunto enumerável. Tome um $x \in X$ qualquer. Como $\mathcal{C}$ é uma cobertura de X, então fixe um $U_0 \in \mathcal{C}$ tal que $x \in U_0$. Já que $\mathcal{B}_0$ é uma base de X, pode-se fixar um $B_0 \in \mathcal{B}_0$ tal que $x \in B_0 \subseteq U_0$. Logo, $B_0 \in \mathcal{B}_0'$ e, por conseguinte, $B_0 \subseteq U_{B_0}$. Consequentemente, $x \in U_{B_0} \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{B}_0'} U_B = \bigcup \mathcal{C}_0$. Como $x \in X$ foi tomado qualquer, conclui-se que $X \subseteq \bigcup \mathcal{C}_0$, ou melhor, que $X = \bigcup \mathcal{C}_0$. Portanto, como $\mathcal{C}$ foi fixada arbitrariamente, segue que X é Lindelöf. ■

Teorema 2.2.14 ($\mathbf{AC}_\omega$)**.** *Todo espaço pseudométrico Lindelöf tem base enumerável.*

Demonstração:

Seja X um espaço pseudométrico qualquer. É imediato concluir que, para todo $n \in \omega \setminus 1$, o conjunto $\mathcal{C}_n := \left\{B\left(x, \frac{1}{n}\right) : x \in X\right\}$ é uma cobertura aberta de X. Agora, suponha que X seja Lindelöf. Sendo assim, pode-se concluir que, para todo $n \in \omega \setminus 1$, existe uma subcobertura enumerável $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}_n$. Então, para cada $n \in \omega \setminus 1$, tem-se que o conjunto $\mathcal{F}_n := \{\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{P}(X) : \mathcal{C}' \text{ é uma subcobertura enumerável de } \mathcal{C}_n\}$ é não vazio. Considere o conjunto $\mathcal{G} := \{\mathcal{F}_n : n \in \omega \setminus 1\}$. Obviamente, tem-se que $\mathcal{G}$ é uma família de conjuntos não vazios, por construção. Além disso, é claro que $\mathcal{G}$ é enumerável, pois está indexado por um conjunto enumerável. Então, supondo-se que $\mathbf{AC}_\omega$ valha, pode-se concluir que existe uma função-escolha para $\mathcal{G}$, i.e., uma função $\phi : \mathcal{G} \longrightarrow \bigcup \mathcal{G}$ tal que, para todo $n \in \omega \setminus 1$, $\phi(\mathcal{F}_n) \in \mathcal{F}_n$. Considere então, para cada $n \in \omega \setminus 1$, o conjunto $\mathcal{C}'_n := \phi(\mathcal{F}_n)$. Tem-se obviamente que, para todo $n \in \omega \setminus 1$, $\mathcal{C}'_n$ é uma subcobertura enumerável de $\mathcal{C}_n$.

Afirmamos que o conjunto $\mathcal{B}' := \bigcup_{n \geqslant 1} \mathcal{C}'_n$ é uma base enumerável de X. Com efeito: é claro que todo elemento de $\mathcal{B}'$ é um aberto em X, por construção. Além disso, tem-se que $\mathcal{B}'$ é a união da família enumerável $\{\mathcal{C}'_n : n \in \omega \setminus 1\}$ de conjuntos enumeráveis. Assim, admitindo-se que $\mathbf{AC}_\omega$ valha, pode-se concluir que $\mathcal{B}'$ é enumerável (pelo Teorema 2.2.3). Agora, seja U um aberto qualquer de X. Caso seja $U = \emptyset$, nada a fazer. Caso contrário, tome um $x \in U$ qualquer. De U ser aberto em X e de $\mathbb{R}$ ser corpo ordenado arquimediano, segue que existe um $k \in \omega \setminus 1$ tal que $B\left(x, \dfrac{2}{k}\right) \subseteq U$. Como $\mathcal{C}'_k$ é uma cobertura de X e $\mathcal{C}'_k \subseteq \mathcal{C}_k$, pode-se fixar um $B_0 \in \mathcal{C}'_k$ tal que $x \in B_0$ e um $x_0 \in X$ tal que $B_0 = B\left(x_0, \dfrac{1}{k}\right)$. Logo, conclui-se que $B_0 \in \mathcal{B}'$ e que $B_0 \subseteq B\left(x, \dfrac{2}{k}\right) \subseteq U$. Então, já que $x \in U$ foi tomado qualquer, tem-se que, para todo $x \in U$, existe um $B \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B \subseteq U$. Portanto, segue que X é SE. ■

Corolário 2.2.15 ($\mathbf{AC}_\omega$). *Dado um espaço pseudométrico X, são equivalentes:*

(i) X tem base enumerável.

(ii) X é SSE.

(iii) X é separável.

(iv) X é Lindelöf.

Prova:

$(i) \iff (ii)$: Segue da Proposição 1.2.2 e do Teorema 2.2.11.

$(i) \iff (iii)$: Segue dos Teoremas 2.1.7 e 2.2.12.

$(i) \iff (iv)$: Segue dos Teoremas 2.2.13 e 2.2.14. □

2.3 Asserções que $\mathbf{ZF} + \mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$ prova

Na presente seção, são apresentadas algumas asserções que são demonstráveis em $\mathbf{ZF} + \mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$, sendo a maioria refinamentos de asserções que são demonstráveis em

ZF + $\mathbf{AC}_\omega$.

Teorema 2.3.1 ($\mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$). *Todo espaço topológico enumerável é Lindelöf.*

Demonstração:

Seja X um espaço topológico enumerável. Se X for finito, então $\mathcal{P}(X)$ também é finito, o que, obviamente, implica que X é Lindelöf. Se X for infinito, então $X \approx \omega$. Logo, $\mathcal{P}(X) \approx \mathcal{P}(\omega)$. Disso, segue que $\mathcal{P}(X) \approx \mathbb{R}$ (pela Proposição 1.1.31) e, em particular, que $\mathcal{P}(X) \preceq \mathbb{R}$. Admitindo-se que $\mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$ valha, pode-se então concluir que $\mathbf{AC}_\omega(\mathcal{P}(X))$ vale (pela Proposição 1.1.27). Agora, fixe arbitrariamente uma cobertura (aberta) $\mathcal{C}$ de X. Sendo assim, para cada $x \in X$, tem-se que o conjunto $\mathcal{C}_x := \{U \in \mathcal{C} : x \in U\}$ é não vazio. Considere então o conjunto $\mathcal{F} := \{\mathcal{C}_x : x \in X\}$ e note que este conjunto é enumerável, pois está indexado por um conjunto enumerável (veja Proposição 1.1.14). Pela construção, é claro que $\mathcal{F}$ é uma família de subconjuntos não vazios de $\mathcal{P}(X)$. Logo, $\mathbf{AC}_\omega(\mathcal{P}(X))$ implica que existe uma função-escolha para $\mathcal{F}$, i.e., uma função $\phi : \mathcal{F} \longrightarrow \bigcup \mathcal{F}$ tal que, para todo $x \in X$, $\phi(\mathcal{C}_x) \in \mathcal{C}_x$. Tome então, para cada $x \in X$, o conjunto $U_x := \phi(\mathcal{C}_x)$. Obviamente, tem-se que, para todo $x \in X$, $U_x \in \mathcal{C}$ e $x \in U_x$.

Agora, afirmamos que o conjunto $\mathcal{C}_0 := \{U_x : x \in X\} \subseteq \mathcal{C}$ é uma subcobertura enumerável de $\mathcal{C}$. Com efeito: é claro que $\mathcal{C}_0$ é enumerável, já que está indexado por um conjunto enumerável. Como, para todo $x \in X$, $x \in U_x$, conclui-se então que $X \subseteq \bigcup\limits_{x \in X} U_x$, ou melhor, que $X = \bigcup\limits_{x \in X} U_x$. Portanto, como $\mathcal{C}$ foi fixada arbitrariamente, segue que X é Lindelöf. ■

Argumentando-se tal como na demonstração do Teorema 2.2.11, mas utilizando de forma conveniente o Lema 2.1.8 e a Proposição 1.1.27, prova-se o seguinte refinamento do referido teorema:

Teorema 2.3.2 ($\mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$). *Todo espaço topológico que tem base enumerável é SSE.* ■

Com a mesma argumentação dada na demonstração do Teorema 2.2.12, mas utilizando convenientemente o Lema 2.1.9 e a Proposição 1.1.27, obtém-se uma prova do seguinte

Teorema 2.3.3 ($\mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$). *Todo espaço topológico T_0 que tem base enumerável é separável.* ■

Com os mesmos argumentos dados na prova do Teorema 2.2.13, mas utilizando de maneira conveniente o Lema 2.1.8 e a Proposição 1.1.27, demonstraremos o seguinte refinamento do referido teorema:

Teorema 2.3.4 ([HrS97], $\mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$)**.** *Todo espaço topológico que tem base enumerável é Lindelöf.*

Demonstração:

Seja X um espaço topológico SE. Tal como na parte inicial da demonstração do Teorema 2.2.13, fixe uma base enumerável $\mathcal{B}_0$ de X, fixe arbitrariamente uma cobertura aberta $\mathcal{C}$ de X, considere o conjunto enumerável $\mathcal{B}_0' = \{B \in \mathcal{B}_0 : \exists U \in \mathcal{C}\,(B \subseteq U)\}$ e tome a família enumerável $\mathcal{F} = \{\mathcal{C}_B : B \in \mathcal{B}_0'\}$ de conjuntos não vazios, em que, para todo $B \in \mathcal{B}_0'$, $\mathcal{C}_B = \{U \in \mathcal{C} : B \subseteq U\}$. Seja τ a topologia sobre X. Sendo assim, tem-se que $\tau \preceq \mathbb{R}$ (pelo Lema 2.1.8). Então, como é óbvio que $\mathcal{C} \preceq \tau$, segue que $\mathcal{C} \preceq \mathbb{R}$.

Assim, supondo-se que $\mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$ valha, pode-se concluir que $\mathbf{AC}_\omega(\mathcal{C})$ vale (pela Proposição 1.1.27). Ora, como $\mathcal{F}$ é uma família enumerável de subconjuntos não vazios de $\mathcal{C}$, então $\mathbf{AC}_\omega(\mathcal{C})$ implica que existe uma função-escolha para $\mathcal{F}$, i.e., uma função $\phi : \mathcal{F} \longrightarrow \bigcup \mathcal{F}$ tal que, para todo $B \in \mathcal{B}_0'$, $\phi(\mathcal{C}_B) \in \mathcal{C}_B$. Agora, com os mesmos argumentos dados na parte final da demonstração do Teorema 2.2.13, conclua que o conjunto $\mathcal{C}_0 = \{\phi(\mathcal{C}_B) : B \in \mathcal{B}_0'\}$ é uma subcobertura enumerável de $\mathcal{C}$. Portanto, já que $\mathcal{C}$ foi fixada arbitrariamente, segue que X é Lindelöf. ■

2.4 Equivalências em termos de sequências para $\mathbf{AC}_\omega$ e $\mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$

Na presente seção, iremos apresentar dois resultados que são "folklore" em Teoria dos Conjuntos. Em vários artigos onde tais resultados são enunciados, apenas referências para comentários sobre suas provas são encontradas. Por exemplo, em [Gut08], uma das referências dadas para tais resultados é o clássico "Foundations of Set Theory" – livro de autoria de A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel e A. Lévy –, no qual é feito apenas um breve comentário a respeito em uma de suas notas de rodapé. Contudo, além de enunciados um pouco mais precisos, daremos aqui a nossa prova desses resultados – e esta com um nível de detalhamento que dificilmente é encontrado em outros textos que falem a respeito de $\mathbf{AC}_\omega$ e de $\mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$. Com este propósito, comecemos por enunciar o seguinte

Teorema 2.4.1 (**ZF**)**.** *São equivalentes:*

(*i*) $\mathbf{AC}_\omega$.

(*ii*) *Toda família infinita enumerável de conjuntos não vazios possui uma subfamília infinita que admite uma função-escolha.*

(*iii*) *Para toda família infinita enumerável* $\mathcal{F} = \{X_n : n \in \omega \setminus 1\}$ *de conjuntos não vazios, existe uma sequência* $s = \langle x_k \rangle_{k \geqslant 1}$ *em* $\bigcup \mathcal{F}$ *satisfazendo a condição de que o conjunto* $\{n \in \omega \setminus 1 : im(s) \cap X_n \neq \emptyset\}$ *é infinito.*

Demonstração:

$(i) \Longrightarrow (ii)$: É imediato, já que $\mathbf{AC}_\omega$ implica que toda família infinita enumerável $\mathcal{F}$ de conjuntos não vazios admite uma função-escolha e, evidentemente, por ser uma tal $\mathcal{F}$ uma subfamília infinita de si própria.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$: Seja $\mathcal{F}$ uma família infinita enumerável qualquer de conjuntos não vazios tal que $\mathcal{F} = \{X_n : n \in \omega \setminus 1\}$. Então, supondo-se a validade de (ii), pode-se fixar uma subfamília infinita $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ que admite uma função-escolha $\phi : \mathcal{G} \longrightarrow \bigcup \mathcal{G}$. Considere o conjunto $M := \{n \in \omega \setminus 1 : X_n \in \mathcal{G}\}$ e note que $\mathcal{G} = \{X_n : n \in M\}$, já que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Como $\mathcal{G}$ é uma família infinita, segue que M é um subconjunto infinito de ω. Seja então $\{n_k : k < \omega\}$ a enumeração canônica de M. Com isso, defina a sequência $s = \langle x_k \rangle_{k \geqslant 1}$ em $\bigcup \mathcal{G} \subseteq \bigcup \mathcal{F}$ pondo, para todo $k < \omega$, $x_k := f\left(X_{n_k}\right) \in X_{n_k}$. Pela construção, é claro que s está bem definida e que, para todo $k < \omega$, $im(s) \cap X_{n_k} \neq \emptyset$. Já que $M = \{n_k : k < \omega\}$, tem-se então que $M \subseteq \{n \in \omega \setminus 1 : im(s) \cap X_n \neq \emptyset\}$. Portanto, como M é infinito, segue que o conjunto $\{n \in \omega \setminus 1 : im(s) \cap X_n \neq \emptyset\}$ também é infinito.

$(iii) \Longrightarrow (i)$: Seja $\mathcal{F}$ uma família infinita enumerável qualquer de conjuntos não vazios. Fixe então uma indexação $\{X_n : n \in \omega \setminus 1\}$ de $\mathcal{F}$. Considere, para cada $n \in \omega \setminus 1$, o conjunto $Y_n := \prod\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i$. Note que, para todo $n \in \omega \setminus 1$, $Y_n \neq \emptyset$ (por ser produto cartesiano finito de conjuntos não vazios). Considere agora a família de conjuntos não vazios $\mathcal{H} := \{Y_n : n \in \omega \setminus 1\}$. Note que $\mathcal{H}$ é enumerável, pois está indexada por um conjunto enumerável (veja Proposição 1.1.14). Além disso, dados $n, m \in \omega \setminus 1$ tais que $n \neq m$, tem-se claramente que $Y_n \cap Y_m = \emptyset$, o que implica que $Y_n \neq Y_m$ (por ser não vazio cada um destes conjuntos). Segue disso que a dada indexação de $\mathcal{H}$ por $\omega \setminus 1$ é uma enumeração. Consequentemente, $\mathcal{H}$ é uma família infinita enumerável de conjuntos não vazios.

Então, admitindo-se que (iii) valha, pode-se fixar uma sequência $t = \langle y_k \rangle_{k \geqslant 1}$ em $\bigcup \mathcal{H}$ satisfazendo a condição de que o conjunto $M := \{n \in \omega \setminus 1 : im(t) \cap Y_n \neq \emptyset\}$ é infinito. Logo, para todo $n \in M$, $j(n) := \min\{j \in \omega \setminus 1 : y_j \in Y_n\}$ está bem definido. Considere então, para cada $n \in M$, $z(n) := y_{j(n)} \in Y_n$. Agora, note que M é ilimitado em $\omega \setminus 1$, já que M é um subconjunto infinito de $\omega \setminus 1$. Sendo assim, para todo $n \in \omega \setminus 1$, $k(n) := \min\{k \in M : n < k\}$ está bem definido. Logo, para todo $n \in \omega \setminus 1$, $n < k(n)$ e, consequentemente, pode-se tomar a n-ésima coordenada $z_n(k(n))$ de $z(k(n)) \in Y_{k(n)}$.

Agora, defina $\zeta : \omega \setminus 1 \longrightarrow \bigcup_{n \geqslant 1} X_n$ pondo $\zeta(n) := z_n(k(n))$. Pela construção, é claro que ζ está bem definida e que, para todo $n \in \omega \setminus 1$, $\zeta(n) \in X_n$. Logo, $\zeta \in \prod_{i \geqslant 1} X_i$ e, por conseguinte, $\prod_{i \geqslant 1} X_i \neq \emptyset$. Como $\mathcal{F}$ foi tomada qualquer, concluímos que "o produto cartesiano de qualquer família infinita enumerável de conjuntos não vazios é não vazio". Portanto, já que esta última asserção é equivalente a $\mathbf{AC}_\omega$ (veja Proposição 1.1.24), segue da validade de (iii) que $\mathbf{AC}_\omega$ também vale. ■

Teorema 2.4.2 (ZF). *São equivalentes:*

(i) $\mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$.

(ii) *Toda família infinita enumerável de subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$ possui uma subfamília infinita que admite uma função-escolha.*

(iii) *Para toda família infinita enumerável $\mathcal{F} = \{X_n : n \in \omega \setminus 1\}$ de subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$, existe uma sequência $s = \langle x_k \rangle_{k \geqslant 1}$ em $\bigcup \mathcal{F}$ satisfazendo a condição de que o conjunto $\{n \in \omega \setminus 1 : im(s) \cap X_n \neq \emptyset\}$ é infinito.*

(iv) *Para todo conjunto X que pode ser indexado por $\mathbb{R}$ e toda família infinita enumerável $\mathcal{F} = \{X_n : n \in \omega \setminus 1\}$ de subconjuntos não vazios de X, existe uma sequência $s = \langle x_k \rangle_{k \geqslant 1}$ em $\bigcup \mathcal{F}$ satisfazendo a condição de que o conjunto $\{n \in \omega \setminus 1 : im(s) \cap X_n \neq \emptyset\}$ é infinito.*

Demonstração:

$(i) \Longrightarrow (ii)$: A justificativa para a validade desta implicação é análoga à de $(i) \Longrightarrow (ii)$ do Teorema 2.4.1.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$: Prova-se esta implicação com os mesmos argumentos dados na prova de $(ii) \Longrightarrow (iii)$ do Teorema 2.4.1, mas restringindo a argumentação às famílias infinitas enumeráveis de subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$.

$(iii) \Longrightarrow (iv)$: Sejam X um conjunto qualquer que pode ser indexado por $\mathbb{R}$ e $\mathcal{F}$ uma família infinita enumerável qualquer de subconjuntos não vazios de X tal que $\mathcal{F} = \{X_n : n \in \omega \setminus 1\}$. Fixe uma indexação ξ de X por $\mathbb{R}$. Considere então o conjunto $\mathcal{H} := \{\xi^{-1}[X_n] : n \in \omega \setminus 1\}$ e note que este conjunto é enumerável, pois está indexado por um conjunto enumerável (veja Proposição 1.1.14). Como ξ é uma sobrejeção de $\mathbb{R}$ em X e $\mathcal{F}$ é uma família de subconjuntos não vazios de X, então $\mathcal{H}$ é uma família de subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$. Além disso, note que a dada indexação de $\mathcal{H}$ por $\omega \setminus 1$ é uma enumeração, pois: dados $n, m \in \omega \setminus 1$ tais que $\xi^{-1}[X_n] = \xi^{-1}[X_m]$, tem-se, por ser

ξ sobrejetora, que $X_n = \xi\left[\xi^{-1}\left[X_n\right]\right] = \xi\left[\xi^{-1}\left[X_m\right]\right] = X_m$. Consequentemente, $\mathcal{H}$ é uma família infinita enumerável de subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$.

Então, supondo-se que (iii) valha, pode-se fixar uma sequência $t = \langle y_k \rangle_{k \geqslant 1}$ em $\bigcup \mathcal{H}$ satisfazendo a condição de que o conjunto $M := \{n \in \omega \setminus 1 : im(t) \cap \xi^{-1}\left[X_n\right] \neq \emptyset\}$ é infinito. Agora, tome a sequência $s = \langle x_k \rangle_{k \geqslant 1}$ em $\xi\left[\bigcup \mathcal{H}\right] = \bigcup \mathcal{F}$ tal que $s := (\xi \circ t)$. Assim, para cada $n \in M$, tem-se que $\emptyset \neq \xi\left[im(t) \cap \xi^{-1}\left[X_n\right]\right] \subseteq \xi\left[im(t)\right] \cap \xi\left[\xi^{-1}\left[X_n\right]\right] = im(\xi \circ t) \cap X_n = im(s) \cap X_n$. Logo, $M \subseteq \{n \in \omega \setminus 1 : im(s) \cap X_n \neq \emptyset\}$. Portanto, como M é infinito, segue que o conjunto $\{n \in \omega \setminus 1 : im(s) \cap X_n \neq \emptyset\}$ também é infinito.

$(iv) \Longrightarrow (i)$: Seja $\mathcal{F}$ uma família infinita enumerável qualquer de subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$. Fixe então uma indexação $\{X_n : n \in \omega \setminus 1\}$ de $\mathcal{F}$. Considere, para cada $n \in \omega \setminus 1$, o conjunto $Y_n := \prod_{i<n} X_{(i+1)}$. Argumentando-se como no início da prova de $(iii) \Longrightarrow (i)$ do Teorema 2.4.1, conclui-se que $\mathcal{H} := \{Y_n : n \in \omega \setminus 1\}$ é uma família infinita enumerável de conjuntos não vazios. No presente caso, conclui-se também que $\mathcal{H}$ é uma família de subconjuntos de ${}^{<\omega}\mathbb{R}$. De fato: para cada $n \in \omega \setminus 1$, tem-se que $Y_n = \prod_{i<n} X_{(i+1)} \subseteq {}^{n}\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{k<\omega} {}^{k}\mathbb{R}$, já que $\mathcal{F}$ é uma família de subconjuntos de $\mathbb{R}$. Como ${}^{<\omega}\mathbb{R} \approx \mathbb{R}$ (pelo Corolário 2.1.3), tem-se que ${}^{<\omega}\mathbb{R}$ pode ser indexado por $\mathbb{R}$.

Então, admitindo-se que (iv) valha, pode-se fixar uma sequência $t = \langle y_k \rangle_{k \geqslant 1}$ em $\bigcup \mathcal{H}$ satisfazendo a condição de que o conjunto $M := \{n \in \omega \setminus 1 : im(t) \cap Y_n \neq \emptyset\}$ é infinito. Argumentando como na parte final da prova de $(iii) \Longrightarrow (i)$ do Teorema 2.4.1, conclua então que o produto cartesiano da família $\mathcal{F} = \{X_n : n \in \omega \setminus 1\}$ é não vazio. Como $\mathcal{F}$ foi tomada qualquer, concluímos que "o produto cartesiano de qualquer família infinita enumerável de subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$ é não vazio". Portanto, já que esta última asserção é equivalente a $\mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$ (veja Proposição 1.1.25), segue da validade de (iv) que $\mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$ também vale. ■

Capítulo 3

Produtos topológicos em ZF

No presente capítulo, iremos demonstrar a equivalência entre **AC** e o Teorema de Tychonoff e certas equivalências entre **BPI** e algumas restrições do Teorema de Tychonoff. Além disso, provaremos que **BPI** é equivalente ao Teorema de Tychonoff restrito aos espaços compactos cuja topologia é a cofinita.

3.1 Equivalência entre AC e o Teorema de Tychonoff

Para a presente seção, relembremos o enunciado do Teorema (do Produto) de Tychonoff. Este declara que: "o espaço-produto de qualquer família de espaços compactos é compacto". A sigla que adotamos para este teorema é **TT**. É interessante destacar que **TT** é um dos teoremas da Topologia Geral com diversas aplicações não somente nos ramos da própria Topologia – tal como a Teoria das Compactificações – mas também em diversos ramos da Análise Matemática – como, por exemplo, na Análise Funcional. Em sua versão original, **TT** foi provado por Andrey Tychonoff em um artigo seu de 1930 – utilizando argumentos que se valiam de **AC**. Na verdade, a versão original de **TT** garantia apenas a compacidade de potências arbitrárias de $[0, 1]$. Contudo, os argumentos de Tychonoff envolvendo pontos de acumulação puderam ser generalizados. Com estes argumentos generalizados, Eduard Čech provou a versão que apresentamos aqui de **TT** em um artigo seu de 1937 – e assim, estabeleceu a validade da asserção **AC** $\Longrightarrow$ **TT**. Quanto a sua recíproca, sabe-se que Shizuo Kakutani a conjecturou em um artigo seu de 1935. Porém, a primeira prova de **TT** $\Longrightarrow$ **AC** é devida a John L. Kelley – e foi publicada em um artigo seu de 1950, intitulado "The Tychonoff Product Theorem Implies the Axiom of Choice". Sugerimos o artigo [SiJ07] para obtenção de referências a respeito do que é citado acima e a seguir. Agora, passemos a nos concentrar no objetivo desta seção: apresentar uma demonstração de que **TT** implica **AC** em $\mathbf{ZF}^-$ (i.e., **ZF** – Axioma da Regularidade).

Teorema 3.1.1 (Kelley (1950 apud [SiJ07]), $\mathbf{ZF}^-$)**.** **TT** *implica* **AC**.

Demonstração:

Seja $\mathcal{F}$ uma família qualquer de conjuntos não vazios. Fixe então uma indexação $\{A_i : i \in I\}$ de $\mathcal{F}$ por algum conjunto I. Ora, se for $I = \emptyset$, nada mais a fazer, já que $\prod_{i\in I} A_i = \{\emptyset\} \neq \emptyset$. Logo, podemos supor que I é não vazio. Agora, pela não existência do conjunto-universo (veja, por exemplo, o Teorema 1.1 (ii) em [SiJ07]), pode-se fixar um conjunto p tal que $p \notin \bigcup \mathcal{F}$. Com isso, considere, para cada $i \in I$, o conjunto $X_i := A_i \cup \{p\}$ munido da sua topologia cofinita $\sigma_i = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq X_i : X_i \setminus U \text{ é finito}\}$. Verifica-se facilmente que, para todo $i \in I$,

(a) o conjunto $\tau_i := \sigma_i \cup \{\{p\}\}$ é uma topologia sobre X_i.

(b) $A_i = X_i \setminus \{p\}$ e, por conseguinte, A_i é fechado em X_i segundo τ_i.[1]

(c) $\langle X_i, \tau_i \rangle$ é um espaço compacto, já que o é $\langle X_i, \sigma_i \rangle$.

Considere agora, para cada $i \in I$, X_i munido da topologia compacta τ_i. Então, supondo-se que **TT** valha, pode-se concluir que o espaço-produto $Y = \prod_{i\in I} X_i$ é compacto. Considere também, para cada $i \in I$, a projeção na i-ésima coordenada, $\pi_i : Y \longrightarrow X_i$. Como toda projeção é contínua, conclui-se então que, para todo $i \in I$, $\pi_i^{-1}[A_i]$ é fechado em Y. Além disso, verifica-se facilmente que $\prod_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} \pi_i^{-1}[A_i]$. Assim, para provar que $\prod_{i\in I} A_i \neq \emptyset$, basta mostrar que o conjunto $\mathcal{G} := \left\{\pi_i^{-1}[A_i] : i \in I\right\}$ tem a p.i.f., pois $\mathcal{G}$ é uma família não vazia de subconjuntos fechados do espaço compacto Y. Mostremos isso dividindo a prova nos seguintes itens:

(d) Seja J um subconjunto finito e não vazio qualquer de I. Sendo assim, tem-se que $\prod_{i\in J} A_i \neq \emptyset$ (por ser produto cartesiano finito de conjuntos não vazios). Verifica-se

[1] Na prova original de Kelley, é cometido um pequeno erro nesta parte, devido ao fato de Kelley ter considerado $\tau_i := \sigma_i$. Tal erro é descrito pela seguinte observação: se, para algum $j \in I$, X_j for infinito (i.e., A_j for infinito), então $\{p\} \notin \sigma_j$ (i.e., A_j não é fechado em X_j segundo σ_j), pois, obviamente, $\{p\} \neq \emptyset$ e $X_j \setminus \{p\} = A_j$ é infinito. Sendo assim, caso não se adicione o conjunto $\{p\}$ a cada σ_i, fica comprometida a validade de quase todos os argumentos que são dados posteriormente. Cabe aqui destacar que isto foi observado, imediatamente após a publicação da prova de Kelley, em um artigo de Jerzy Łoś e Czesław Ryll-Nardzewski, na edição subsequente da mesma revista em que tal prova foi publicada. Apesar desse pequeno erro – que facilmente pode ser corrigido – a prova original de **TT** $\Longrightarrow$ **AC** permanece devidamente creditada a Kelley. Em um artigo de 1972 de Frank Plastria, intitulado "Two loose results in general topology", foi publicada uma prova corrigida de **TT** $\Longrightarrow$ **AC**, mas que difere da original apenas pela escolha das topologias.

facilmente que $\bigcap_{i \in J} \pi_i^{-1}[A_i] = \prod_{i \in I} Z_i$, em que

$$Z_i = \begin{cases} A_i \,, & \text{se } i \in J; \\ X_i \,, & \text{se } i \in I \setminus J. \end{cases}$$

(e) Fixe então um $a \in \prod_{i \in J} A_i$, i.e., uma função $a : J \longrightarrow \bigcup_{i \in J} A_i$ tal que, para todo $i \in J$, $a_i \in A_i$. Com isso, defina uma extensão $\zeta : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} Z_i = \bigcup_{i \in J} A_i \cup \bigcup_{i \in I \setminus J} X_i$ para a função a pondo

$$\zeta(i) := \begin{cases} a_i \,, & \text{se } i \in J; \\ p \,, & \text{se } i \in I \setminus J. \end{cases}$$

(f) Claramente, tem-se que ζ está bem definida, por construção. Além disso, para todo $i \in J$, $\zeta(i) = a_i \in A_i$ e, para todo $i \in I \setminus J$, $\zeta(i) = p \in X_i$. Conclui-se então que $\zeta \in \prod_{i \in I} Z_i$.[2] Consequentemente, $\bigcap_{i \in J} \pi_i^{-1}[A_i] \neq \emptyset$. Como J é qualquer, segue que a família $\mathcal{G}$ tem a p.i.f.. Então, pela Proposição 1.2.17, conclui-se que $\bigcap_{i \in I} \pi_i^{-1}[A_i] = \bigcap \mathcal{G} \neq \emptyset$.

Consequentemente, $\prod_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} \pi_i^{-1}[A_i] \neq \emptyset$. Como $\mathcal{F}$ foi tomada qualquer, e **AC** é equivalente à asserção "o produto cartesiano de qualquer família de conjuntos não vazios é não vazio" (veja Proposição 1.1.23), segue então da validade de **TT** que **AC** também vale. Portanto, conclui-se que **TT** implica **AC**. ■

Observação 3.1.2. Note que, na demonstração dada acima, poderíamos ter considerado topologias menos finas sobre cada conjunto X_i. Por exemplo, se considerássemos sobre cada conjunto X_i a topologia $\{\emptyset, X_i, \{p\}\}$, teríamos espaços topológicos compactos com os quais poderíamos levar a cabo todos os argumentos dados. No entanto, tais espaços topológicos, em geral, não são T_1 – enquanto os que são considerados na demonstração acima são sempre T_1. Representando-se por $\mathbf{TT}_{T_1}$ o Teorema de Tychonoff restrito aos espaços compactos T_1, os argumentos dados na demonstração acima nos garantem que $\mathbf{TT}_{T_1}$ implica **AC**. Assim, em **ZF** (na verdade, em $\mathbf{ZF}^-$), tem-se a prova de cada uma das implicações a seguir:

$$\mathbf{AC} \Longrightarrow \mathbf{TT} \Longrightarrow \mathbf{TT}_{T_1} \Longrightarrow \mathbf{AC}.$$

[2] Observe que, nesta parte da prova, não são utilizadas infinitas escolhas arbitrárias, já que a função ζ é dada de forma explícita. Por este motivo, vê-se o quanto é crucial a adição daquele conjunto p a cada elemento da família $\mathcal{F}$.

E isto nos garante que **AC** é equivalente a $\mathbf{TT}_{T_1}$ – que, a princípio, poderia ser uma asserção estritamente mais fraca que **TT**, mas que acabamos de provar que é equivalente a este teorema. $\triangle$

Agora, é natural perguntar se é possível enfraquecer ainda mais as hipóteses do Teorema de Tychonoff e mesmo assim manter a equivalência entre este último e **AC**. Por exemplo, o Teorema de Tychonoff restrito aos espaços compactos T_2 – o qual iremos representar por $\mathbf{TT}_{T_2}$ – é equivalente a **AC**? A resposta é não. Precisamente, como será visto na próxima seção, $\mathbf{TT}_{T_2}$ é equivalente à asserção **BPI**, que é estritamente mais fraca que **AC**.

Aproveitando o ensejo, apresentamos a seguir a nossa prova de um resultado interessante que estabelece equivalências para **AC**. Aparentemente, tal resultado é uma contribuição original nossa, pois, até onde sabemos, as equivalências estabelecidas não constam em lista alguma de princípios equivalentes a **AC**. Tais equivalências são as que se encontram enunciadas no seguinte

Teorema 3.1.3 (**ZF**). *São equivalentes:*

(i) **AC**.

(ii) *Dadas uma família $\{X_i : i \in I\}$ de espaços topológicos e uma família $\{A_i : i \in I\}$ de conjuntos não vazios tais que, para todo $i \in I$, $A_i \subseteq X_i$, se $\prod_{i \in I} A_i$ for fechado no espaço-produto $\prod_{i \in I} X_i$, então, para todo $i \in I$, A_i é fechado em X_i.*

(iii) *Dadas uma família $\{X_i : i \in I\}$ de espaços topológicos e uma família $\{A_i : i \in I\}$ de conjuntos não vazios tais que, para todo $i \in I$, $A_i \subseteq X_i$, se $I \neq \emptyset$ e $\prod_{i \in I} A_i$ for fechado no espaço-produto $\prod_{i \in I} X_i$, então existe um $i \in I$ tal que A_i é fechado em X_i.*

Demonstração:

$(i) \Longrightarrow (ii)$: Sejam $\{X_i : i \in I\}$ uma família de espaços topológicos e $\{A_i : i \in I\}$ uma família de conjuntos não vazios tal que, para todo $i \in I$, $A_i \subseteq X_i$. Suponha que $\prod_{i \in I} A_i$ seja fechado no espaço-produto $Y = \prod_{i \in I} X_i$, i.e., que $\overline{\prod_{i \in I} A_i}^{Y} = \prod_{i \in I} A_i$. Admita que **AC** valha. Então, pela Proposição 1.2.16, pode-se concluir que $\overline{\prod_{i \in I} A_i}^{Y} = \prod_{i \in I} \overline{A_i}^{X_i}$. Disso, e da suposição feita, segue que $\prod_{i \in I} \overline{A_i}^{X_i} = \prod_{i \in I} A_i$. Além disso, para cada $i \in I$, tem-se que $\overline{A_i}^{X_i} \neq \emptyset$ (pois, por hipótese, $A_i \neq \emptyset$). Assim, pela Proposição 1.1.26, tem-se que, para todo $i \in I$, $\overline{A_i}^{X_i} = A_i$. Logo, para todo $i \in I$, A_i é fechado em X_i. Portanto, conclui-se que **AC** implica (ii).

$(ii) \implies (iii)$: Supondo que $I \neq \emptyset$ e que $\prod_{i \in I} A_i$ seja fechado no espaço-produto $\prod_{i \in I} X_i$, pode-se fixar um $i_0 \in I$. Então, admitindo-se que (ii) valha, pode-se concluir que A_{i_0} é fechado em X_{i_0}. Portanto, segue que (ii) implica (iii).

$(iii) \implies (i)$: Provaremos a contrapositiva desta implicação. Suponha que **AC** não valha. Assim, tem-se que existe uma família $\mathcal{F} = \{A_i : i \in I\}$ de conjuntos não vazios tal que $\prod_{i \in I} A_i = \emptyset$ (implicando que $I \neq \emptyset$, pois, por vacuidade, se $I = \emptyset$, então $\prod_{i \in I} A_i = \{\emptyset\}$). Então, é claro que $\prod_{i \in I} A_i$ é fechado no espaço-produto $\prod_{i \in I} X_i$. Agora, pela não existência do conjunto-universo, pode-se fixar um conjunto p tal que $p \notin \bigcup \mathcal{F}$. Considere então, para cada $i \in I$, o conjunto $X_i := A_i \cup \{p\}$ munido da sua topologia caótica $\tau_i = \{\emptyset, X_i\}$. Ora, para cada $i \in I$, tem-se que $A_i \neq \emptyset$ e que $p \notin A_i$. Logo, para todo $i \in I$, $X_i \neq \{p\}$ e $X_i \setminus A_i = \{p\} \neq \emptyset$. Assim, para cada $i \in I$, tem-se que $(X_i \setminus A_i) \notin \tau_i$, i.e., que A_i não é fechado em X_i. Portanto, existem uma família $\{X_i : i \in I\}$ de espaços topológicos e uma família $\{A_i : i \in I\}$ de conjuntos não vazios tais que, para todo $i \in I$, $A_i \subseteq X_i$ e que satisfazem a condição de que $I \neq \emptyset$, $\prod_{i \in I} A_i$ é fechado no espaço-produto $\prod_{i \in I} X_i$ e, para todo $i \in I$, A_i não é fechado em X_i. ■

Como na prova de $(iii) \implies (i)$ do Teorema 3.1.3 usamos essencialmente que $\emptyset$ é fechado no espaço-produto $\prod_{i \in I} X_i$, surge naturalmente a questão sobre o que aconteceria se adicionássemos ao item (iii) a hipótese de que $\prod_{i \in I} A_i$ é não vazio. A equivalência com **AC** ainda se manteria? Ou, em caso negativo, será que se poderia provar, em **ZF**, que existe ao menos um $i \in I$ para o qual A_i é fechado em X_i?

Gostaríamos de encerrar a presente seção salientando que, de maneira simples e elegante, a Profa. Ofélia Teresa Alas respondeu "fortemente" as questões e gentilmente nos forneceu a sua resposta através de sua prova – dada a seguir – do interessante

Fato 3.1.4 (ZF). *Dadas uma família $\{X_i : i \in I\}$ de espaços topológicos e uma família $\{A_i : i \in I\}$ de conjuntos não vazios tais que, para todo $i \in I$, $A_i \subseteq X_i$, se I e $\prod_{i \in I} A_i$ forem não vazios e $\prod_{i \in I} A_i$ for fechado no espaço-produto $\prod_{i \in I} X_i$, então, para todo $i \in I$,*

A_i *é fechado em* X_i.

Prova:

Sejam $\{X_i : i \in I\}$ uma família de espaços topológicos e $\{A_i : i \in I\}$ uma família de conjuntos não vazios tal que, para todo $i \in I$, $A_i \subseteq X_i$. Suponha que I e $\prod_{i \in I} A_i$ sejam não vazios e que $\prod_{i \in I} A_i$ seja fechado no espaço-produto $Y = \prod_{i \in I} X_i$. Já que $\prod_{i \in I} A_i$ é não vazio, fixe então um $z \in \prod_{i \in I} A_i$. Suponha, por absurdo, que exista um $j \in I$ tal que A_j não seja fechado em X_j. Sendo assim, pode-se fixar um $p \in \overline{A_j}^{X_j} \setminus A_j$. Defina então $\zeta : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$ pondo

$$\zeta(i) := \begin{cases} z(i)\,, & \text{se } i \in I \setminus \{j\}; \\ p\,, & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Pela construção, tem-se claramente que ζ está bem definida e que, para todo $i \in I$, $\zeta(i) \in X_i$. Logo, ζ é um ponto em Y. Ora, também é claro que $\zeta \notin \prod_{i \in I} A_i$, já que $\zeta(j) = p \notin A_j$. Então, por ser $\overline{\prod_{i \in I} A_i}^{Y} = \prod_{i \in I} A_i$, segue que existe uma vizinhança aberta básica V de ζ em Y tal que $V \cap \prod_{i \in I} A_i = \emptyset$. Fixe então uma família $\{V_i : i \in I\}$ de conjuntos tal que, para todo $i \in I$, V_i é um aberto em X_i e que satisfaz a condição de que $V = \prod_{i \in I} V_i$. Logo, $\prod_{i \in I} (V_i \cap A_i) = \prod_{i \in I} V_i \cap \prod_{i \in I} A_i = V \cap \prod_{i \in I} A_i = \emptyset$. Agora, admita que $V_j \cap A_j \neq \emptyset$. Fixe então um $q \in V_j \cap A_j$. Defina agora $\xi : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$ pondo

$$\xi(i) := \begin{cases} z(i)\,, & \text{se } i \in I \setminus \{j\}; \\ q\,, & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Pela construção, é claro que ξ está bem definida e que, para todo $i \in I$, $\xi(i) \in X_i$, implicando que ξ é um ponto em Y. Além disso, como $\zeta \in V = \prod_{i \in I} V_i$, tem-se que, para todo $i \in I \setminus \{j\}$, $\xi(i) = z(i) = \zeta(i) \in V_i \cap A_i$. Então, já que $\xi(j) = q \in V_j \cap A_j$, pode-se concluir que $\xi \in \prod_{i \in I} (V_i \cap A_i)$, uma contradição. Consequentemente, teremos que $V_j \cap A_j = \emptyset$, outra contradição, pois V_j é uma vizinhança aberta de $p = \zeta(j)$ e $p \in \overline{A_j}^{X_j}$. Portanto, conclui-se que, para todo $i \in I$, A_i é fechado em X_i. $\square$

3.2 Restrições de TT a espaços compactos T_2

3.2.1 Equivalências entre BPI e algumas restrições de TT a espaços compactos T_2

Apresentamos a seguir cinco princípios topológicos que são equivalentes a **BPI** em **ZF**. Os quatro primeiros princípios são restrições de **TT** a espaços compactos T_2, enquanto o último estabelece uma caracterização de compacidade através da convergência de ultrarredes. Na presente subseção, demonstraremos somente as equivalências entre **BPI** e os dois primeiros princípios e admitiremos a validade das equivalências entre **BPI** e os dois últimos. A equivalência entre **BPI** e o terceiro princípio será demonstrada na próxima subseção. Esses princípios topológicos, aos quais nos referimos, são:

($\mathbf{TT}_{T_2}$) o espaço-produto de qualquer família de espaços compactos T_2 é compacto.

($\mathbf{TT}_{T_2,2}$) o espaço-produto de qualquer família de espaços compactos T_2 que possuem 2 pontos é compacto.

($\mathbf{TT}_2$) Dado um conjunto X, se $2 = \{0, 1\}$ estiver munido da topologia discreta, então o espaço-produto 2^X é compacto.

($\mathbf{TT}_I$) Dado um conjunto X, tem-se que o espaço-produto $[0, 1]^X$ é compacto.

(**U**) Dado um espaço topológico X, tem-se que X é compacto se, e somente se, toda ultrarrede em X convergir para algum ponto em X.

É óbvio que $\mathbf{TT}_{T_2}$ implica $\mathbf{TT}_{T_2,2}$ em **ZF**. Sendo assim, basta provar, em **ZF**, que $\mathbf{TT}_{T_2,2}$ implica **BPI** e que este, por sua vez, implica $\mathbf{TT}_{T_2}$ para se estabelecer as equivalências entre **BPI** e tais princípios topológicos. Provaremos essas implicações mais adiante. Agora, demonstremos o seguinte

Teorema 3.2.1 (ZF). *Dados uma família $\{X_i : i \in I\}$ de conjuntos com a topologia discreta, um $J \subseteq I$ tal que J é finito e uma função $g \in \prod_{i \in J} X_i$, se $Y = \prod_{i \in I} X_i$ estiver munido da topologia-produto, então o conjunto $[g] := \{f \in Y : g \subseteq f\}$ é um aberto-fechado no espaço-produto Y.*

Demonstração:

Seja $g \in \prod_{i \in J} X_i$ qualquer. Se for $I = \emptyset$, então $Y = [g] = \{\emptyset\}$ e, obviamente, $[g]$ é um aberto-fechado em Y. Logo, podemos supor que I é não vazio. Como é fácil ver que

$[g] = \{f \in Y : g = f \upharpoonright J\}$, segue de imediato que $[g] = \prod_{i \in I} V_i$, em que

$$V_i = \begin{cases} \{g(i)\}\ , & \text{se } i \in J; \\ X_i\ , & \text{se } i \in I \setminus J. \end{cases}$$

Por hipótese, para cada $i \in I$, tem-se que X_i está munido da topologia discreta. Então, tem-se que, para todo $i \in J$, $\{g(i)\}$ é um aberto-fechado em X_i. Logo, o conjunto $[g]$ é um aberto no espaço-produto Y. Agora, considere, para cada $i \in I$, a projeção na i-ésima coordenada, $\pi_i : Y \longrightarrow X_i$. Portanto, como toda projeção é contínua e é fácil verificar que $\prod_{i \in I} V_i = \bigcap_{i \in J} \pi_i^{-1}[\{g(i)\}]$, segue que $[g]$ é fechado no espaço-produto Y. ■

Corolário 3.2.2 (**ZF**). *Dados um conjunto X, um $F \subseteq X$ tal que F é finito e uma função $g \in {}^F 2$, se $2 = \{0,1\}$ estiver munido da topologia discreta, então o conjunto $[g] = \left\{f \in {}^X 2 : g \subseteq f\right\}$ é um aberto-fechado no espaço-produto 2^X.* □

A segunda nota do artigo [Myc64] é uma generalização do teorema a seguir, para o qual não há disponível uma demonstração em nossas referências (apenas uma sugestão em [Jec73, Problema 16, p. 27]). Por este motivo, adaptamos os argumentos dessa segunda nota para redigir a demonstração que vem a seguir, a qual, possivelmente, era bem conhecida pelo autor do artigo [Myc64] e pela comunidade de topólogos dos anos de 1960, como foi deixado a entender na primeira nota do referido artigo. Apresentemos então a prova que redigimos do seguinte

Teorema 3.2.3 ([Myc64], **ZF**). $\mathbf{TT}_{T_2,2}$ *implica* **BPI**.

Demonstração:

Seja B uma álgebra de Boole qualquer. Considere então, para cada $b \in B$, o conjunto $\{-b, b\}$ munido da topologia discreta. Fixe arbitrariamente um subconjunto finito e não vazio F de B. Tome então o conjunto $Z := \prod_{b \in F} \{-b, b\}$. Afirmamos que o conjunto $W := \{f \in Z : im(f) \text{ tem a p.i.f.}\}$ é não vazio. Com efeito: tome o único $n \in \omega \setminus 1$ tal que $|F| = n$. Fixe então uma enumeração $\{x_k : k < n\}$ de F. Agora, dados um $e \in \{-1, 1\}$ e um $b \in B$, defina eb pondo

$$eb := \begin{cases} b\ , & \text{se } e = 1; \\ -b\ , & \text{se } e = -1. \end{cases}$$

Ora, como $x_0 + (-x_0) = 1 \neq 0$, então é claro que existe um $e_0 \in \{-1, 1\}$ tal que $e_0 x_0 \neq 0$ e, por conseguinte, o conjunto $\{e_0 x_0\}$ tem a p.i.f.. Prossigamos por indução finita sobre $m < n$. Suponha que, para um dado $m < n$ tal que $m + 1 < n$, podemos fixar uma sequência $\langle e_k \rangle_{k \leqslant m}$ em $\{-1, 1\}$ para a qual o conjunto $\{e_k x_k : k \leqslant m\}$ tem a p.i.f.. Então, já que $x_{m+1} + (-x_{m+1}) = 1$, segue da Proposição 1.1.36 que existe um $e_{m+1} \in \{-1, 1\}$ tal que o conjunto $\{e_k x_k : k \leqslant m\} \cup \{e_{m+1} x_{m+1}\} = \{e_k x_k : k \leqslant m + 1\}$ tem a p.i.f.. Logo, pode-se fixar uma sequência $\langle e_k \rangle_{k<n}$ em $\{-1, 1\}$ para a qual o conjunto $\{e_k x_k : k < n\}$ tem a p.i.f.. Defina então $h : F \longrightarrow \bigcup_{b \in F} \{-b, b\}$ pondo, para todo $k < n$, $h(x_k) := e_k x_k$. Pela construção, é claro que h está bem definida e que, para todo $b \in F$, $h(b) \in \{-b, b\}$. Além disso, é óbvio que $im(h) = \{e_k x_k : k < n\}$. Logo, $h \in W$, seguindo o afirmado.

Agora, considere $Y = \prod_{b \in B} \{-b, b\}$ munido da topologia-produto. Sendo assim, segue do Teorema 3.2.1 que, para todo $g \in Z$, o conjunto $[g] = \{f \in Y : g \subseteq f\}$ é um aberto-fechado em Y. Tome agora o conjunto $H_F := \{f \in Y : im\,(f \restriction F) \text{ tem a p.i.f.}\}$. É fácil ver que $H_F = \{f \in Y : (f \restriction F) \in W\} = \bigcup_{g \in W} [g]$. Ora, como W é finito (por ser subconjunto de um produto finito de conjuntos finitos), então que H_F é fechado em Y (por ser união finita de fechados em Y). Já que F foi fixado arbitrariamente, segue que o conjunto $\mathcal{H} := \left\{H_F : F \in [B]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}\right\}$ é uma família de subconjuntos fechados de Y. Note que a família $\mathcal{H}$ é não vazia, pois, obviamente, B é não vazia.

Afirmamos agora que a família $\mathcal{H}$ tem a p.i.f.. Com efeito: tome uma subfamília finita e não vazia $\mathcal{H}'$ qualquer de $\mathcal{H}$. Sendo assim, para cada $G \in \mathcal{H}'$, pode-se fixar um $F_G \in [B]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ tal que $G = H_{F_G}$. Tome então o conjunto $F := \bigcup_{G \in \mathcal{H}'} F_G$ e note F é um subconjunto finito e não vazio de B (por ser união finita de subconjuntos finitos e não vazios de B). Logo, H_F está bem definido e é não vazio. Além disso, é fácil verificar que $H_F \subseteq \bigcap_{G \in \mathcal{H}'} H_{F_G} = \bigcap \mathcal{H}'$. Conclui-se então que $\bigcap \mathcal{H}' \neq \emptyset$. Como $\mathcal{H}'$ foi tomada qualquer, segue o afirmado.

Supondo-se que $\mathbf{TT}_{T_2,2}$ valha, e notando que a topologia discreta é compacta T_2, pode-se concluir que Y é compacto. Então, como $\mathcal{H}$ é uma família não vazia de subconjuntos fechados de Y que tem a p.i.f., pode-se fixar uma função $g_0 \in \bigcap \mathcal{H}$. Ora, é claro que o conjunto $G := im(g_0)$ é não vazio, já que $dom(g_0) = B$. Além disso, prova-se que G tem a p.i.f.. De fato: seja E um subconjunto finito e não vazio qualquer de G. Assim, para cada $x \in E$, pode-se fixar um $b_x \in B$ tal que $g(b_x) = x$. Agora, considere o conjunto $F := \{b_x : x \in E\}$ e note que este conjunto é finito e não vazio, já que está indexado por E. Note ainda que $E = im\,(g_0 \restriction F)$. Então, como H_F está bem definido e $g_0 \in H_F$, conclui-se que E tem a p.i.f.. Finalmente, considere o filtro $F\,(G)$ gerado por G.[3] Assim, para cada $b \in B$ tal que $b \notin F\,(G)$, tem-se que $g_0(b) = -b$ e, por conseguinte, que $-b \in F\,(G)$. Logo, $F(G)$ é um ultrafiltro em B (pela Proposição 1.1.39). Portanto,

[3] Sem muita dificuldade, pode-se verificar que $F(G) = G$.

como B é qualquer, segue que $\mathbf{TT}_{T_2,2}$ implica **BPI**. ■

Teorema 3.2.4 (ZF). BPI *implica* $\mathbf{TT}_{T_2}$.

Demonstração:

Seja $\mathcal{F}$ uma família qualquer de espaços compactos T_2. Fixe então uma indexação $\{X_i : i \in I\}$ de $\mathcal{F}$ por algum conjunto I. Agora, considere o espaço-produto $Y = \prod_{i \in I} X_i$. Se for $I = \emptyset$, então $Y = \{\emptyset\}$, que é compacto, já que a única topologia sobre $\{\emptyset\}$ é o conjunto $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Logo, podemos supor que I é não vazio. Considere então, para cada $i \in I$, a projeção na i-ésima coordenada, $\pi_i : Y \longrightarrow X_i$. Fixe arbitrariamente um ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre Y. Sem muita dificuldade, verifica-se que, para todo $i \in I$, o conjunto $\mathcal{U}_i := \{\pi_i[A] : A \in \mathcal{U}\}$ é um ultrafiltro sobre o espaço-fator X_i. Ora, como cada elemento de $\mathcal{F}$ é um espaço compacto, tem-se que, para todo $i \in I$, $\mathcal{U}_i$ converge em X_i. Como também cada elemento de $\mathcal{F}$ é um espaço T_2, conclui-se que, para todo $i \in I$, existe um único $x \in X_i$ tal que $\mathcal{U}_i$ converge para x. Sendo assim, para cada $i \in I$, denote por x_i o único ponto em X_i que é limite de $\mathcal{U}_i$. Defina então $\zeta : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$ pondo $\zeta(i) := x_i$. Pela construção, é claro que ζ está bem definida e que, para todo $i \in I$, $\zeta(i) \in X_i$. Logo, ζ é um ponto em Y.

Afirmamos que $\mathcal{U}$ converge para ζ. Com efeito: tome uma vizinhança aberta básica V qualquer de ζ em Y. Sendo assim, existe uma família $\{V_i : i \in I\}$ de conjuntos tal que, para todo $i \in I$, V_i é um aberto em X_i e que satisfaz a condição de que o conjunto $J := \{i \in I : V_i \neq X_i\}$ é finito e $V = \prod_{i \in I} V_i$. Então, para cada $i \in I$, tem-se que V_i é uma vizinhança aberta de $\zeta(i)$ em X_i, sendo $\zeta(i)$ o limite de $\mathcal{U}_i$. Logo, para todo $i \in I$, $V_i \in \mathcal{U}_i$. Assim, para cada $i \in I$, pode-se fixar um $A_i \in \mathcal{U}$ tal que $V_i = \pi_i[A_i]$. Com isso, é fácil concluir que $\bigcap_{i \in J} A_i \subseteq V$. Como $\mathcal{U}$ é um filtro sobre Y e J é finito, tem-se então que $V \in \mathcal{U}$. Já que V foi tomada qualquer, segue o afirmado.

Finalmente, como $\mathcal{U}$ foi fixado arbitrariamente, segue que todo ultrafiltro sobre Y converge. Agora, suponha que **BPI** valha. Então, pela Proposição 1.2.18, conclui-se que Y é compacto. Portanto, já que $\mathcal{F}$ é qualquer, segue que **BPI** implica $\mathbf{TT}_{T_2}$. ■

Finalizemos esta subseção apresentando o seguinte diagrama onde constam, na horizontal, as equivalências que acabamos de estabelecer e, na vertical, aquelas que estão sendo admitidas:

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{TT}_I \arrow[d, Leftrightarrow] & \\ \mathbf{TT}_{T_2} \arrow[r, Leftrightarrow] & \mathbf{BPI} \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow] & \mathbf{TT}_{T_2,2} \\ & \mathbf{U} & \end{tikzcd}$$

Diagrama 3.2.1.

3.2.2 Produtos topológicos de 2 em ZF e algumas restrições de BPI

Na presente subseção, demonstraremos a equivalência entre $\mathbf{TT}_2$ e **BPI** em **ZF** e apresentaremos algumas consequências interessantes desta equivalência. Além disso, provaremos, em **ZF**, o notável teorema que garante que: "para todo conjunto X que pode ser bem ordenado, o espaço-produto 2^X é compacto, quando 2 está munido da topologia discreta". Finalmente, apresentaremos, sem demonstração, um resultado que estabelece, em **ZF**, equivalências entre a compacidade do espaço-produto $2^{\mathbb{R}}$, quando 2 está munido da topologia discreta, e algumas asserções que são restrições de **BPI**.

Inicialmente, note que $\mathbf{TT}_{T_2,2}$ implica $\mathbf{TT}_2$ em **ZF**, pois, obviamente, o conjunto 2 com a topologia discreta é um espaço compacto T_2 que possui 2 pontos. Provaremos, mais adiante, que $\mathbf{TT}_2$ implica $\mathbf{TT}_{T_2,2}$ em **ZF** utilizando-se a equivalência entre os seguintes princípios de escolhas:

($\mathbf{C}_2$) Toda família de conjuntos que possuem 2 elementos admite uma função-escolha.

($\mathbf{C}_2'$) Toda família disjunta de conjuntos que possuem 2 elementos admite uma função-escolha.

Antes disso, verifiquemos que, de fato, $\mathbf{C}_2$ e $\mathbf{C}_2'$ são equivalentes: por um lado, é óbvio que $\mathbf{C}_2$ implica $\mathbf{C}_2'$. Por outro lado, seja $\mathcal{F}$ uma família qualquer de conjuntos que possuem 2 elementos. Considere então o conjunto $\mathcal{H} := \{F \times \{F\} : F \in \mathcal{F}\}$. Ora, note que, para todo $F \in \mathcal{F}$, existem $x, y \in \bigcup \mathcal{F}$ tais que $x \neq y$ e $F = \{x, y\}$, implicando que $F \times \{F\} = \{\langle x, F\rangle, \langle y, F\rangle\}$. Além disso, é claro que, para todo $F, G \in \mathcal{F}$ tais que $F \neq G$, $(F \times \{F\}) \cap (G \times \{G\}) = \emptyset$. Então, tem-se que $\mathcal{H}$ é uma família disjunta de conjuntos que possuem 2 elementos. Assim, supondo-se que $\mathbf{C}_2'$ valha, pode-se concluir que existe uma função-escolha para $\mathcal{H}$, i.e., uma função $\phi : \mathcal{H} \longrightarrow \bigcup \mathcal{H}$ tal que, para todo $F \in \mathcal{F}$, $\phi(F \times \{F\}) = \langle \phi_1(F \times \{F\}), \phi_2(F \times \{F\})\rangle \in F \times \{F\}$. Com isso, defina $\phi_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \longrightarrow \bigcup \mathcal{F}$ pondo $\phi_{\mathcal{F}}(F) := \phi_1(F \times \{F\}) \in F$. Pela construção, é óbvio que $\phi_{\mathcal{F}}$

está bem definida e que $\phi_{\mathcal{F}}$ é uma função-escolha para $\mathcal{F}$. Portanto, como $\mathcal{F}$ é qualquer, conclui-se que $\mathbf{C}_2'$ implica $\mathbf{C}_2$.

Teorema 3.2.5 ([Myc64], **ZF**). $\mathbf{TT}_2$ *implica* $\mathbf{C}_2'$.

Demonstração:

Suponha que $2 = \{0, 1\}$ esteja munido da topologia discreta. Seja $\mathcal{F}$ uma família disjunta qualquer de conjuntos que possuem 2 elementos. Se for $\mathcal{F} = \emptyset$, então $\mathcal{F}$ é uma função-escolha para si própria, por vacuidade. Se for $\mathcal{F} \neq \emptyset$, considere então o conjunto $X := \bigcup \mathcal{F}$. Fixe arbitrariamente um $F \in \mathcal{F}$. Considerando o conjunto $A_F := \left\{f \in {}^X 2 : f[F] = 2\right\}$, pode-se concluir que, para todo $f \in A_F$ e todo $j \in 2$, o conjunto $(f \restriction F)^{-1}[\{j\}] \subseteq F$ é unitário. De fato: se existissem um $f \in A_F$ e um $j \in 2$ tais que $(f \restriction F)^{-1}[\{j\}]$ não é unitário, então, como $f[F] = 2$ e $|F| = 2$, teríamos que $(f \restriction F)^{-1}[\{j\}] = F$, implicando que $2 = f[F] = (f \restriction F)[F] \subseteq \{j\}$, uma contradição. Agora, tome $x, y \in X$ tais que $x \neq y$ e $F = \{x, y\}$ e considere as seguintes funções: $g : F \longrightarrow 2$ definida por $g(x) = 0$ e $g(y) = 1$ e $h : F \longrightarrow 2$ definida por $h(x) = 1$ e $h(y) = 0$. Com isso, tem-se que:

$$
\begin{aligned}
A_F &= \left\{f \in {}^X 2 : (f(x) = 0 \text{ e } f(y) = 1) \text{ ou } (f(x) = 1 \text{ e } f(y) = 0)\right\} = \\
&= \left\{f \in {}^X 2 : g \subseteq f\right\} \cup \left\{f \in {}^X 2 : h \subseteq f\right\} = [g] \cup [h],
\end{aligned}
$$

Logo, A_F é fechado no espaço-produto 2^X, pois o são $[g]$ e $[h]$ (pelo Corolário 3.2.2). Então, como $F \in \mathcal{F}$ foi fixado arbitrariamente, tem-se que o conjunto $\mathcal{G} := \{A_F : F \in \mathcal{F}\}$ é uma família não vazia de subconjuntos fechados de 2^X.

Afirmamos que a família $\mathcal{G}$ tem a p.i.f.. Com efeito: tome uma subfamília finita e não vazia $\mathcal{G}'$ qualquer de $\mathcal{G}$. Sendo assim, para cada $G \in \mathcal{G}'$, fixe um $F_G \in \mathcal{F}$ tal que $G = A_{F_G}$. Considere então o conjunto $\mathcal{F}' := \{F_G : G \in \mathcal{G}'\}$ e note que $\mathcal{F}'$ é finito, pois $\mathcal{G}'$ é um conjunto finito de índices para $\mathcal{F}'$. Fixe então uma função-escolha $\phi : \mathcal{F}' \longrightarrow \bigcup \mathcal{F}'$. Com isso, pode-se definir $f : X \longrightarrow 2$ pondo, para todo $x \in X$,

$$
f(x) := \begin{cases} 1, & \text{se } x \in im(\phi); \\ 0, & \text{se } x \notin im(\phi). \end{cases}
$$

É claro que f está bem definida, já que f é a função-característica de $im(\phi) \subseteq X$. Além disso, tem-se que $f \in \bigcap \mathcal{G}'$. De fato: tome um $G \in \mathcal{F}'$ arbitrário e denote por z o elemento $\phi(G)$. Seja w o único elemento de X tal que $z \neq w$ e $G = \{z, w\}$. Como $\mathcal{F}$ é disjunta e $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$, tem-se então que, para todo $F \in \mathcal{F}'$ tal que $F \neq G$, $w \notin F$, implicando que $w \neq \phi(F)$. Logo, $w \notin \{\phi(F) : F \in \mathcal{F}'\} = im(\phi)$. Assim, tem-se que $f[G] = f[\{z, w\}] = \{f(z), f(w)\} = \{1, 0\} = 2$. Por conseguinte, $f \in A_G$. Já que $G \in \mathcal{F}'$

foi tomado arbitrário, segue que $f \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}'} A_F = \bigcap_{G \in \mathcal{G}'} A_{F_G} = \bigcap_{G \in \mathcal{G}'} G = \bigcap \mathcal{G}'$. Finalmente, como $\mathcal{G}'$ foi tomada qualquer, conclui-se o afirmado.

Assim, supondo-se que $\mathbf{TT}_2$ valha, tem-se que o espaço-produto 2^X é compacto e, por conseguinte, que $\bigcap \mathcal{G} \neq \emptyset$. Fixe então um $f_0 \in \bigcap \mathcal{G}$. Note que, para todo $F \in \mathcal{F}$, o conjunto $(f_0 \restriction F)^{-1}[\{0\}]$ é unitário, já que $f_0 \in A_F$. Sendo assim, para cada $F \in \mathcal{F}$, denote por x_F o único elemento de $(f_0 \restriction F)^{-1}[\{0\}] \subseteq F$. Defina então $\phi_0 : \mathcal{F} \longrightarrow \bigcup \mathcal{F}$ pondo $\phi_0(F) := x_F$. Pela construção, é claro que ϕ_0 está bem definida e que é uma função-escolha para $\mathcal{F}$. Portanto, como $\mathcal{F}$ é qualquer, segue que $\mathbf{TT}_2$ implica $\mathbf{C}'_2$. ■

Uma consequência importante do Teorema 3.2.5 e da equivalência entre $\mathbf{C}_2$ e $\mathbf{C}'_2$ é o seguinte

Teorema 3.2.6 ([Myc64], **ZF**). $\mathbf{TT}_2$ *implica* $\mathbf{TT}_{T_2,2}$.

Demonstração:

Seja $\mathcal{F}$ uma família qualquer de espaços compactos T_2 que possuem 2 pontos. Fixe então uma indexação $\{X_i : i \in I\}$ de $\mathcal{F}$ por algum conjunto I. Agora, suponha que $2 = \{0, 1\}$ esteja munido da topologia discreta e que $\mathbf{TT}_2$ valha. Como consequência do Teorema 3.2.5 e da equivalência entre $\mathbf{C}_2$ e $\mathbf{C}'_2$, tem-se então que $\mathbf{C}_2$ vale. Assim sendo, pode-se concluir que existe uma função-escolha para $\mathcal{F}$, i.e., uma função $\phi : \mathcal{F} \longrightarrow \bigcup \mathcal{F}$ tal que, para todo $i \in I$, $\phi(X_i) \in X_i$. Defina então, para cada $i \in I$, $g_i : X_i \longrightarrow 2$ pondo

$$g_i(x) := \begin{cases} 1, & \text{se } x = \phi(X_i); \\ 0, & \text{se } x \neq \phi(X_i). \end{cases}$$

Para cada $i \in I$, é claro que g_i está bem definida, por construção, e que é bijetora, pois $|X_i| = 2$. Notando que a única topologia T_1 sobre um conjunto que possui 2 elementos é a sua topologia discreta, conclui-se que: para cada $i \in I$, g_i é uma bijeção entre conjuntos com a topologia discreta, implicando que g_i é um homeomorfismo. Defina agora, para cada $f \in \prod_{i \in I} X_i$, $f_0 : I \longrightarrow 2$ pondo $f_0(i) := (g_i \circ f)(i)$. Pela construção, é claro que, para todo $f \in \prod_{i \in I} X_i$, f_0 está bem definida. Logo, f_0 é um ponto no espaço-produto 2^I. Considere então $\Phi : \prod_{i \in I} X_i \longrightarrow 2^I$ definida por $\Phi(f) = f_0$. Vê-se facilmente que Φ está bem definida. Sem muita dificuldade, verifica-se que Φ é uma bijeção que transforma base canônica em base canônica. Consequentemente, Φ é um homeomorfismo. Agora, como está sendo suposta a validade de $\mathbf{TT}_2$, pode-se concluir que o espaço-produto 2^I é compacto. Por conseguinte, o espaço-produto $\prod_{i \in I} X_i$ também é compacto. Portanto, como $\mathcal{F}$ é qualquer, conclui-se que $\mathbf{TT}_2$ implica $\mathbf{TT}_{T_2,2}$. ■

O diagrama a seguir apresenta a implicação e as equivalências que estabelecemos nesta subseção mais uma equivalência que foi estabelecida na subseção anterior:

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathbf{BPI} \arrow[d, Leftrightarrow] \\
 & \mathbf{TT}_2 \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \mathbf{TT}_{T_2,2} \\
\mathbf{C}_2 \arrow[r, Leftrightarrow] & \mathbf{C}'_2 &
\end{tikzcd}
$$

Diagrama 3.2.2.

Um fato interessante para ser destacado é que se pode construir um modelo $\mathcal{M}$ de **ZF** no qual "existe uma família enumerável de conjuntos que possuem 2 elementos que não admite função-escolha alguma" (veja o Parágrafo 4 do Capítulo 5 de [Jec73]). Assim, tem-se que $\mathbf{C}_2$ é falsa em $\mathcal{M}$. Como $\mathbf{C}_2$ é equivalente a $\mathbf{C}'_2$ e $\mathbf{TT}_2$ implica $\mathbf{C}'_2$, tem-se então que $\mathbf{TT}_2$ é falso em $\mathcal{M}$. Logo, **BPI** é falso em $\mathcal{M}$, já que **BPI** é equivalente a $\mathbf{TT}_{T_2,2}$ e este último é equivalente a $\mathbf{TT}_2$. Portanto, concluímos que "é consistente que exista uma álgebra de Boole que não possui ideal primo e, consequentemente, que não possui ultrafiltro".

Além disso, temos duas outras consequências, bastante óbvias, da equivalência entre $\mathbf{TT}_2$ e **BPI**. Uma dessas duas é que, em todo modelo de $\mathbf{ZF} + \mathbf{BPI}$, seja qual for o conjunto X, o espaço-produto 2^X é compacto, quando 2 está munido da topologia discreta. A outra é que, em todo modelo de $\mathbf{ZF} + \neg\,\mathbf{BPI}$, existe um conjunto infinito X tal que o espaço-produto 2^X não é compacto, quando 2 está munido da topologia discreta. Em contraste com essas duas consequências, temos o notável

Teorema 3.2.7 ([Ker00], **ZF**). *Dado um conjunto X, se valer que X pode ser bem ordenado e $2 = \{0, 1\}$ estiver munido da topologia discreta, então o espaço-produto 2^X é compacto.*

Demonstração:

Suponha que exista uma boa ordem $\leqslant$ sobre X e que $2 = \{0, 1\}$ esteja munido da topologia discreta. Sendo assim, considere o conjunto 2^X munido da topologia-produto. Se for $X = \emptyset$, então $2^X = \{\emptyset\}$, que é compacto, já que a topologia-produto sobre $\{\emptyset\}$ é o conjunto $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Logo, podemos supor que X é não vazio. Fixe arbitrariamente uma família não vazia $\mathcal{G}$ de subconjuntos fechados de 2^X que tem a p.i.f.. Considere agora, para cada $x \in X$, a projeção na x-ésima coordenada, $\pi_x : 2^X \longrightarrow 2$. Como claramente $\pi_x^{-1}[\{0\}] \cup \pi_x^{-1}[\{1\}] = \pi_x^{-1}[2] = 2^X$, segue do Corolário 1.1.37 que:

(*) para cada $x \in X$ e toda família não vazia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de 2^X que tem a p.i.f., $\mathcal{F} \cup \{\pi_x^{-1}[\{0\}]\}$ tem a p.i.f. ou $\mathcal{F} \cup \{\pi_x^{-1}[\{1\}]\}$ tem a p.i.f..

Então, tomando o ordinal $\delta := \mathrm{t.o.}(X, <)$, prova-se, por indução sobre $\alpha < \delta$, que existe uma família $\{F_\alpha : \alpha < \delta\}$ de subconjuntos de 2^X que satisfaz a seguinte condição:

$$\text{para todo } \alpha < \delta, \text{ a família } \mathcal{G} \cup \{F_\beta : \beta \leqslant \alpha\} \text{ tem a p.i.f..}$$

De fato: seja $\{x_\alpha : \alpha < \delta\}$ a enumeração canônica de X. Para $\alpha = 0$, tem-se, por (*), que $\mathcal{G} \cup \left\{\pi_{x_0}^{-1}[\{0\}]\right\}$ tem a p.i.f. ou $\mathcal{G} \cup \left\{\pi_{x_0}^{-1}[\{1\}]\right\}$ tem a p.i.f.. Logo,

$$j_0 := \min\left\{j \in 2 : \mathcal{G} \cup \left\{\pi_{x_0}^{-1}[\{j\}]\right\} \text{ tem a p.i.f.}\right\} \text{ está bem definido.}$$

Tomando então $F_0 := \pi_{x_0}^{-1}[\{j_0\}]$, é claro que F_0 está bem definido e que $\mathcal{G} \cup \{F_0\}$ tem a p.i.f.. Agora, suponha que, para um dado $\alpha > 0$ tal que $\alpha < \delta$, a família $\{F_\beta : \beta < \alpha\}$ de subconjuntos de 2^X esteja definida de maneira que satisfaça a seguinte condição:

$$(**) \text{ para todo } \beta < \alpha, \text{ a família } \mathcal{G} \cup \{F_\gamma : \gamma \leqslant \beta\} \text{ tem a p.i.f..}$$

Afirmamos que a família $\mathcal{G} \cup \{F_\beta : \beta < \alpha\}$ tem a p.i.f.. Com efeito: tome uma subfamília finita e não vazia $\mathcal{G}'$ qualquer de $\mathcal{G} \cup \{F_\beta : \beta < \alpha\}$. Caso $\mathcal{G}'$ esteja contida em $\mathcal{G}$, então, por $\mathcal{G}$ ter a p.i.f., segue que $\bigcap \mathcal{G}' \neq \emptyset$. Caso contrário, pode-se tomar o conjunto não vazio $\mathcal{G}'' := \mathcal{G}' \cap \{F_\beta : \beta < \alpha\}$. É claro que, para todo $G \in \mathcal{G}''$, $\beta_G := \min\{\beta \in \alpha : G = F_\beta\}$ está bem definido. Disso, e do fato de $\mathcal{G}''$ ser finito, conclui-se que $\beta_{\mathcal{G}'} := \max\{\beta_G : G \in \mathcal{G}''\}$ está bem definido. Logo, para todo $G \in \mathcal{G}''$, $G = F_{\beta_G}$ e $\beta_G \leqslant \beta_{\mathcal{G}'} < \alpha$. Com isso, tem-se de imediato que $\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{G} \cup \{F_\gamma : \gamma \leqslant \beta_{\mathcal{G}'}\}$. Além disso, tem-se, por (**), que $\mathcal{G} \cup \{F_\gamma : \gamma \leqslant \beta_{\mathcal{G}'}\}$ tem a p.i.f.. Então, segue que $\bigcap \mathcal{G}' \neq \emptyset$. Como $\mathcal{G}'$ foi tomada qualquer, conclui-se o afirmado.

Sendo assim, tem-se, novamente por (*), que $(\mathcal{G} \cup \{F_\beta : \beta < \alpha\}) \cup \left\{\pi_{x_\alpha}^{-1}[\{0\}]\right\}$ tem a p.i.f. ou $(\mathcal{G} \cup \{F_\beta : \beta < \alpha\}) \cup \left\{\pi_{x_\alpha}^{-1}[\{1\}]\right\}$ tem a p.i.f.. Logo,

$$j_\alpha := \min\left\{j \in 2 : (\mathcal{G} \cup \{F_\beta : \beta < \alpha\}) \cup \left\{\pi_{x_\alpha}^{-1}[\{j\}]\right\} \text{ tem a p.i.f.}\right\} \text{ está bem definido.}$$

Tomando então $F_\alpha := \pi_{x_\alpha}^{-1}[\{j_\alpha\}]$, tem-se claramente que F_α está bem definido e que $(\mathcal{G} \cup \{F_\beta : \beta < \alpha\}) \cup \{F_\alpha\} = \mathcal{G} \cup \{F_\beta : \beta \leqslant \alpha\}$ tem a p.i.f..

Consequentemente, com os mesmos argumentos que são dados no passo indutivo da indução transfinita, conclui-se que a família $\mathcal{G} \cup \{F_\alpha : \alpha < \delta\}$ também tem a p.i.f..

Agora, defina $f : X \longrightarrow 2$ pondo, para todo $\alpha < \delta$, $f(x_\alpha) := j_\alpha$. É claro que f está bem definida, por construção. Logo, f é um ponto em 2^X. Afirmamos que $f \in \bigcap \mathcal{G}$.

Com efeito: tome uma vizinhança aberta básica V qualquer de f em 2^X. Então, existe uma família $\{V_x : x \in X\}$ de conjuntos tal que, para todo $x \in X$, V_x é um aberto em 2 e que satisfaz a condição de que o conjunto $F := \{x \in X : V_x \neq 2\}$ é finito e $V = \prod_{x \in X} V_x$. Como 2 está munido da topologia discreta, tem-se que, para todo $x \in X$, o conjunto $\{f(x)\}$ é o único aberto em 2 que é diferente de 2 e possui $f(x)$ como elemento. Logo, para todo $x \in F$, $V_x = \{f(x)\}$. Se for $F = \emptyset$, então $V = 2^X$ e, para cada $G \in \mathcal{G}$, tem-se que $G \cap V = G \neq \emptyset$ (pois a família $\mathcal{G}$ tem a p.i.f.). Se for $F \neq \emptyset$, então é fácil ver que $V = \bigcap_{x \in F} \pi_x^{-1}[V_x] = \bigcap_{x \in F} \pi_x^{-1}[\{f(x)\}]$. Para cada $x \in X$, seja $\alpha(x)$ o único $\alpha < \delta$ tal que $x = x_\alpha$. Assim, tem-se que $V = \bigcap_{x \in F} \pi^{-1}_{x_{\alpha(x)}}\left[\left\{f\left(x_{\alpha(x)}\right)\right\}\right] = \bigcap_{x \in F} \pi^{-1}_{x_{\alpha(x)}}\left[\left\{j_{\alpha(x)}\right\}\right] = \bigcap_{x \in F} F_{\alpha(x)}$. Tome um $G \in \mathcal{G}$ qualquer e considere o conjunto $\mathcal{F}_G := \{G\} \cup \left\{F_{\alpha(x)} : x \in F\right\}$. Como a família $\mathcal{G} \cup \{F_\alpha : \alpha < \delta\}$ tem a p.i.f. e, obviamente, $\mathcal{F}_G$ é uma subfamília finita e não vazia desta família, segue que $G \cap V = G \cap \left(\bigcap_{x \in F} F_{\alpha(x)}\right) = \bigcap \mathcal{F}_G \neq \emptyset$. Então, para cada $G \in \mathcal{G}$, tem-se que $G \cap V \neq \emptyset$. Consequentemente, para todo $G \in \mathcal{G}$ e toda vizinhança aberta básica V de f em 2^X, $G \cap V \neq \emptyset$. Logo, para todo $G \in \mathcal{G}$, $f \in \overline{G}^{2^X}$. Já que todo elemento de $\mathcal{G}$ é fechado em 2^X, segue então o afirmado. Portanto, como $\mathcal{G}$ foi fixada arbitrariamente e $\bigcap \mathcal{G} \neq \emptyset$, tem-se, pela Proposição 1.2.17, que o espaço-produto 2^X é compacto. ■

Corolário 3.2.8 (**ZF**). *Dado um cardinal κ, se $2 = \{0, 1\}$ estiver munido da topologia discreta, então o espaço-produto 2^κ é compacto.* □

Finalizemos esta subseção apresentando um resultado bem interessante – porém, com a demonstração omitida no presente trabalho – que estabelece, em **ZF**, equivalências entre a compacidade do espaço-produto $2^{\mathbb{R}}$, quando 2 está munido da topologia discreta, e, por exemplo, duas asserções que são restrições de **BPI** (por serem restrições de **UT**). Este resultado está expresso no seguinte

Teorema 3.2.9 ([Ker05], **ZF**). *São equivalentes:*

(i) Dada uma álgebra de Boole B, se $B \preceq \mathbb{R}$, então todo filtro em B pode ser estendido a um ultrafiltro.

(ii) Todo filtro sobre ω pode ser estendido a um ultrafiltro.

(iii) Dado um espaço topológico X, se X for compacto T_2, então o espaço-produto $X^{\mathbb{R}}$ é compacto.

(iv) O espaço-produto $[0, 1]^{\mathbb{R}}$ é compacto.

(*v*) *O espaço-produto de qualquer família de subespaços finitos de* $\mathbb{R}$ *é compacto.*

(*vi*) *Se* $2 = \{0, 1\}$ *estiver munido da topologia discreta, então o espaço-produto* $2^{\mathbb{R}}$ *é compacto.*

(*vii*) *Dados uma linguagem proposicional* $\mathcal{L}$ *e um conjunto* Σ *de sentenças de* $\mathcal{L}$*, se* Σ *for consistente e o conjunto das sentenças de* $\mathcal{L}$ *for dominado por* $\mathbb{R}$*, então existe uma valoração que satisfaz* Σ*.* ■

3.3 Relações entre AC, BPI e a restrição de TT aos espaços compactos cuja topologia é a cofinita

Como já foi mencionado na Seção 3.1, Kelley apresentou, em 1950, uma prova da asserção **TT** $\Longrightarrow$ **AC** que continha um pequeno erro – observado no artigo de 1951 de Łoś e Ryll-Nardzewski –, que pode ser facilmente corrigido, tal como o fizemos ao provar, com os argumentos de Kelley, que **TT** implica **AC** em $\mathbf{ZF}^-$. Representando por $\mathbf{TT}_{\mathrm{cf}}$ o Teorema de Tychonoff restrito aos espaços compactos cuja topologia é a cofinita, poderíamos concluir, com os argumentos originais de Kelley, que $\mathbf{TT} \Longrightarrow \mathbf{TT}_{\mathrm{cf}} \Longrightarrow \mathbf{AC}$. Contudo, podemos questionar se asserção $\mathbf{TT}_{\mathrm{cf}} \Longrightarrow \mathbf{AC}$ é falsa, devido ao fato de um dos argumentos de Kelley estar incorreto. Na presente seção, mostraremos que realmente $\mathbf{TT}_{\mathrm{cf}}$ não implica **AC**. Para este propósito, iremos provar, em **ZF**, a equivalência entre $\mathbf{TT}_{\mathrm{cf}}$ e a asserção **BPI**, que é estritamente mais fraca que **AC**, utilizando os mesmos argumentos dados no artigo [Sch06]. Tal como o autor deste artigo, destaquemos que **BPI** é mencionado apenas para "identificar" vários princípios maximais e topológicos que lhe são equivalentes em **ZF** – destacando que algumas dessas equivalências estão demonstradas na seção anterior. Concentremos agora a nossa atenção em dois de tais princípios equivalentes a **BPI**. São eles os seguintes princípios topológicos:

($\mathbf{TT}_2$) Dado um conjunto X, se $2 = \{0, 1\}$ estiver munido da topologia discreta, então o espaço-produto 2^X é compacto.

(**U**) Dado um espaço topológico X, tem-se que X é compacto se, e somente se, toda ultrarrede em X convergir para algum ponto em X.

Como obviamente as topologias discreta e cofinita sobre um mesmo conjunto finito coincidem, tem-se de imediato que $\mathbf{TT}_{\mathrm{cf}}$ implica $\mathbf{TT}_2$ em **ZF**. Então, para verificar a equivalência entre $\mathbf{TT}_{\mathrm{cf}}$ e **BPI**, basta provar que **U** implica $\mathbf{TT}_{\mathrm{cf}}$, pois já temos que as seguintes implicações são válidas:

$$\mathbf{TT}_{\mathrm{cf}} \Longrightarrow \mathbf{TT}_2 \Longrightarrow \mathbf{BPI} \Longrightarrow \mathbf{U}. \qquad (*)$$

Lembrando que estamos admitindo a validade da equivalência entre **U** e **BPI**. Agora, para provarmos que **U** implica $\mathbf{TT}_{\mathrm{cf}}$ em **ZF**, comecemos com as seguintes definições:

Definição 3.3.1. Sejam Δ um conjunto e $\leqslant$ uma relação binária sobre Δ. Diz-se que Δ é **direcionado** por $\leqslant$ se $\langle \Delta, \leqslant \rangle$ for uma pré-ordem satisfazendo a seguinte condição: para todo subconjunto finito Φ de Δ, existe uma cota superior em Δ para Φ segundo $\leqslant$. Agora, sejam X um conjunto e $\nu : \Delta \longrightarrow X$ uma função. Diz-se que ν é uma **rede** em X se Δ for direcionado por $\leqslant$.[4] Caso ν seja uma rede em X, para cada $\delta \in \Delta$, denota-se $\nu(\delta)$ por x_δ. Neste caso, representa-se ν por $\langle x_\delta \rangle_{\delta \in \Delta}$. $\triangle$

Definição 3.3.2. Sejam X um conjunto, $\langle x_\delta \rangle_{\delta \in \Delta}$ uma rede em X e $z \in X$. Se X for um espaço topológico, diz-se que $\langle x_\delta \rangle_{\delta \in \Delta}$ **converge** para z, e representa-se por $x_\delta \to z$, se, para toda vizinhança aberta V de z em X, existir um $\delta_0 \in \Delta$ tal que, para todo $\delta \geqslant \delta_0$ em Δ, $x_\delta \in V$. Agora, seja $\phi(x)$ uma propriedade que se aplica a cada $x \in X$. Diz-se que $\langle x_\delta \rangle_{\delta \in \Delta}$ **satisfaz residualmente** $\phi(x)$, ou que $\phi(x_\delta)$ **residualmente**, se existir um $\delta_0 \in \Delta$ tal que, para todo $\delta \geqslant \delta_0$ em Δ, $\phi(x_\delta)$ vale. Diz-se que $\langle x_\delta \rangle_{\delta \in \Delta}$ é uma **ultrarrede** se, para todo $A \subseteq X$, ou $x_\delta \in A$ residualmente ou $x_\delta \in X \setminus A$ residualmente.[5] Por fim, diz-se que $\langle x_\delta \rangle_{\delta \in \Delta}$ é **residualmente constante** se existir um $x \in X$ tal que $x_\delta = x$ residualmente. $\triangle$

É claro que, para todo conjunto X e toda rede $\langle x_\delta \rangle_{\delta \in \Delta}$ em X, se $\langle x_\delta \rangle_{\delta \in \Delta}$ for residualmente constante, então existe um único $x \in X$ tal que $x_\delta = x$ residualmente. Portanto, se existir um $x \in X$ que testemunhe que $\langle x_\delta \rangle_{\delta \in \Delta}$ é residualmente constante, diremos especificamente que $\langle x_\delta \rangle_{\delta \in \Delta}$ é **residualmente constante de valor** x. Agora, prossigamos apresentando o seguinte

Lema 3.3.3 (ZF). *Dados um conjunto X e uma ultrarrede $\langle x_\delta \rangle_{\delta \in \Delta}$ em X, se existir um $F \subseteq X$ tal que F é finito e $x_\delta \in F$ residualmente, então $\langle x_\delta \rangle_{\delta \in \Delta}$ é residualmente*

[4] Em virtude desta definição, segue de imediato que toda sequência $\langle x_n \rangle_{n \geqslant 1}$ e, para todo ordinal α, toda α-sequência $\langle x_\xi \rangle_{\xi < \alpha}$ são redes em seus respectivos contradomínios.

[5] É interessante destacar que, dado um conjunto X, a cada rede em X podemos associar um filtro sobre X e vice-versa da seguinte maneira: dada uma rede $\nu = \langle x_\delta \rangle_{\delta \in \Delta}$ em X, considere o conjunto $\mathcal{F}(\nu) := \{A \subseteq X : x_\delta \in A \text{ residualmente}\}$. Verifica-se que $\mathcal{F}(\nu)$ é um filtro sobre X e que $\mathcal{F}(\nu)$ é um ultrafiltro se, e somente se, ν for uma ultrarrede. Agora, dado um filtro $\mathcal{F}$ sobre X, considere sobre o conjunto $\Delta(\mathcal{F}) := \{\langle A, x \rangle : A \in \mathcal{F} \text{ e } x \in A\}$ a relação binária $\leqslant$ que é definida pela seguinte sentença: para todo $\langle A, x \rangle, \langle B, y \rangle \in \Delta(\mathcal{F})$, $\langle A, x \rangle \leqslant \langle B, y \rangle$ se, e somente se, $B \subseteq A$. Mostra-se que $\Delta(\mathcal{F})$ é direcionado por $\leqslant$. Considere $\nu(\mathcal{F}) : \Delta(\mathcal{F}) \longrightarrow X$ definida por $\nu(\mathcal{F}) \langle A, x \rangle = x$. Pela construção, tem-se que $\nu(\mathcal{F})$ está bem definida, implicando que $\nu(\mathcal{F})$ é uma rede em X. Além disso, verifica-se que, para todo filtro $\mathcal{G}$ sobre X, $\mathcal{F}(\nu(\mathcal{G})) = \mathcal{G}$.

constante.

Demonstração:

Suponha que exista um $F \subseteq X$ tal que F seja finito e $x_\delta \in F$ residualmente. Então, pode-se fixar um $\delta_0 \in \Delta$ tal que, para todo $\delta \geqslant \delta_0$ em Δ, $x_\delta \in F$. Admita que $\langle x_\delta \rangle_{\delta \in \Delta}$ não seja residualmente constante. Assim sendo, para todo $x \in F$, não é verdade que $x_\delta \in \{x\}$ residualmente. Como $\langle x_\delta \rangle_{\delta \in \Delta}$ é uma ultrarrede em X, segue então que, para todo $x \in F$, $x_\delta \in X \setminus \{x\}$ residualmente. Logo, para cada $x \in F$, pode-se fixar um $\delta_x \in \Delta$ tal que, para todo $\delta \geqslant \delta_x$ em Δ, $x_\delta \in X \setminus \{x\}$. Ora, o conjunto $\Delta_F := \{\delta_0\} \cup \{\delta_x : x \in F\}$ é um subconjunto finito de Δ. Então, pode-se fixar uma cota superior δ_F em Δ para Δ_F. Consequentemente, teremos que, para todo $\delta \geqslant \delta_F$ em Δ, $x_\delta \in \displaystyle\bigcap_{x \in F} X \setminus \{x\} = X \setminus \bigcup_{x \in F} \{x\} = X \setminus F$, uma contradição. Portanto, conclui-se que $\langle x_\delta \rangle_{\delta \in \Delta}$ é residualmente constante. ■

Lema 3.3.4 (**ZF**). *Dados um conjunto $I \neq \emptyset$, uma família $\{X_i : i \in I\}$ de conjuntos e uma rede $\langle x_\delta \rangle_{\delta \in \Delta}$ no produto cartesiano $\displaystyle\prod_{i \in I} X_i$, se $\langle x_\delta \rangle_{\delta \in \Delta}$ for uma ultrarrede, então, para todo $i \in I$, $\langle x_\delta(i) \rangle_{\delta \in \Delta}$ é uma ultrarrede em X_i.*

Demonstração:

Seja $\langle x_\delta \rangle_{\delta \in \Delta}$ uma rede qualquer em $Y = \displaystyle\prod_{i \in I} X_i$. Pode-se verificar facilmente que:

(**) dada uma família $\{Z_i : i \in I\}$ de conjuntos tal que, para todo $i \in I$, $Z_i \subseteq X_i$, se $x_\delta \in \displaystyle\prod_{i \in I} Z_i$ residualmente, então, para todo $i \in I$, $x_\delta(i) \in Z_i$ residualmente.

Agora, suponha que $\langle x_\delta \rangle_{\delta \in \Delta}$ seja uma ultrarrede. Fixe arbitrariamente um $j \in I$ e um $A \subseteq X_j$. Então, dado um $i \in I$, considere o conjunto

$$Z_i := \begin{cases} X_i\,, & \text{se } i \neq j; \\ A\,, & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Considere agora o conjunto $Z := \displaystyle\prod_{i \in I} Z_i \subseteq Y$. Suponha que não seja verdade que $x_\delta(j) \in A$ residualmente. Então, já que $Z_j = A$, segue de (**) que não é verdade que $x_\delta \in Z$ residualmente. Como $\langle x_\delta \rangle_{\delta \in \Delta}$ é uma ultrarrede em Y, segue então que $x_\delta \in Y \setminus Z$ residualmente. Com isso, pode-se fixar um $\delta_0 \in \Delta$ tal que, para todo $\delta \geqslant \delta_0$ em Δ, $x_\delta \in Y \setminus Z$. Logo, para todo $\delta \geqslant \delta_0$ em Δ, existe um $k \in I$ tal que $x_\delta(k) \notin Z_k$. Ora, se fosse $k \neq j$, teríamos que $Z_k = X_k$, uma contradição. Assim, tem-se que $k = j$ e, por conseguinte, que $Z_k = A$. Consequentemente, para todo $\delta \geqslant \delta_0$ em Δ, $x_\delta(j) \notin A$. Logo, $x_\delta(j) \in X_j \setminus A$ residualmente. Então, como $A \subseteq X_j$ foi fixado arbitrariamente, segue que

$\langle x_\delta(j)\rangle_{\delta\in\Delta}$ é uma ultrarrede em X_j. Portanto, já que $j \in I$ foi fixado arbitrariamente, conclui-se que, para todo $i \in I$, $\langle x_\delta(i)\rangle_{\delta\in\Delta}$ é uma ultrarrede em X_i. ■

Lema 3.3.5 (**ZF**). *Dados um conjunto $I \neq \emptyset$, uma família $\{X_i : i \in I\}$ de espaços topológicos, uma rede $\langle x_\delta\rangle_{\delta\in\Delta}$ no espaço-produto $Y = \prod_{i\in I} X_i$ e um ponto $z \in Y$, $x_\delta \to z$ em Y se, e somente se, para todo $i \in I$, $x_\delta(i) \to z(i)$ em X_i.*

Demonstração:

Por um lado, suponha que $x_\delta \to z$ em Y. Fixe arbitrariamente um $j \in I$ e uma vizinhança aberta U de $z(j)$ em X_j. Então, dado um $i \in I$, considere o conjunto

$$V_i := \begin{cases} X_i\,, & \text{se } i \neq j; \\ U\,, & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Pela construção, é óbvio que o conjunto $V := \prod_{i\in I} V_i$ é uma vizinhança aberta de z em Y. Como $x_\delta \to z$ em Y, pode-se então fixar um $\delta_0 \in \Delta$ tal que, para todo $\delta \geqslant \delta_0$ em Δ, $x_\delta \in V$. Logo, para todo $\delta \geqslant \delta_0$ em Δ, $x_\delta(j) \in U$ e, por conseguinte, $x_\delta(j) \to z(j)$ em X_j. Já que $j \in I$ foi fixado arbitrariamente, segue então que, para todo $i \in I$, $x_\delta(i) \to z(i)$ em X_i.

Por outro lado, suponha que, para todo $i \in I$, $x_\delta(i) \to z(i)$ em X_i. Tome uma vizinhança aberta básica V qualquer de z em Y. Sendo assim, existe uma família $\{V_i : i \in I\}$ de conjuntos tal que, para todo $i \in I$, V_i é um aberto em X_i e que satisfaz a condição de que o conjunto $J := \{i \in I : V_i \neq X_i\}$ é finito e $V = \prod_{i\in I} V_i$. Ora, para cada $i \in I$, tem-se que V_i é uma vizinhança aberta de $z(i)$ em X_i e, por hipótese, que $x_\delta(i) \to z(i)$ em X_i. Então, para cada $i \in J$, pode-se fixar um $\delta_i \in \Delta$ tal que, para todo $\delta \geqslant \delta_i$ em Δ, $x_\delta(i) \in V_i$. Como o conjunto $\Delta_J := \{\delta_i : i \in J\}$ é um subconjunto finito de Δ, pode-se então fixar uma cota superior δ_J em Δ para Δ_J. Logo, para todo $i \in J$ e todo $\delta \geqslant \delta_J$ em Δ, $x_\delta(i) \in V_i$. Além disso, é óbvio que, para todo $i \in I \setminus J$ e todo $\delta \in \Delta$, $x_\delta(i) \in V_i$. Consequentemente, para todo $\delta \geqslant \delta_J$ em Δ, $x_\delta \in V$. Portanto, como V foi tomada qualquer, conclui-se que $x_\delta \to z$ em Y. ■

Mesmo com enunciado e prova muito simples, o resultado a seguir é de relevante importância para se estabelecer a equivalência entre $\mathbf{TT}_{\mathrm{cf}}$ e **BPI**. Este resultado – devido a Alexey Muranov (cf. [Sch06, Seção 3, p. 287]) – está enunciado no seguinte

Lema 3.3.6 ([Sch06], **ZF**). *Dados um conjunto X e uma ultrarrede $\langle x_\delta\rangle_{\delta\in\Delta}$ em X, se X estiver munido da topologia cofinita, então $\langle x_\delta\rangle_{\delta\in\Delta}$ converge para qualquer ponto* *em X ou $\langle x_\delta \rangle_{\delta\in\Delta}$ é residualmente constante.*

Demonstração:

Suponha que X esteja munido da topologia cofinita. Admita que exista um ponto $z \in X$ tal que $\langle x_\delta \rangle_{\delta\in\Delta}$ não convirja para z. Então, existe uma vizinhança aberta V de z em X para a qual não é verdade que $x_\delta \in V$ residualmente. Como $\langle x_\delta \rangle_{\delta\in\Delta}$ é uma ultrarrede em X, tem-se que $x_\delta \in X \setminus V$ residualmente. Tem-se também que $X \setminus V$ é finito, já que V é um aberto não vazio da topologia cofinita sobre X. Portanto, segue do Lema 3.3.3 que $\langle x_\delta \rangle_{\delta\in\Delta}$ é residualmente constante. ■

Teorema 3.3.7 ([Sch06], **ZF**). **U** *implica* $\mathbf{TT}_{\mathrm{cf}}$.

Demonstração:

Seja $\mathcal{F}$ uma família qualquer de espaços compactos cuja topologia é a cofinita. Fixe então uma indexação $\{X_i : i \in I\}$ de $\mathcal{F}$ por algum conjunto I. Com isso, considere o espaço-produto $Y = \prod_{i\in I} X_i$. Se for $Y = \emptyset$, então Y é compacto, pois a única topologia sobre $\emptyset$ é o conjunto $\{\emptyset\}$. Se for $I = \emptyset$, então $Y = \{\emptyset\}$, que também é compacto, já que a única topologia sobre $\{\emptyset\}$ é o conjunto $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Logo, podemos supor que Y e I são ambos não vazios. Fixe então um $z \in Y$. Agora, tome uma ultrarrede qualquer $\langle x_\delta \rangle_{\delta\in\Delta}$ em Y. Pelo Lema 3.3.4, tem-se que, para todo $i \in I$, $\langle x_\delta(i) \rangle_{\delta\in\Delta}$ é uma ultrarrede em X_i. Então, segue do Lema 3.3.6 que, para todo $i \in I$, $\langle x_\delta(i) \rangle_{\delta\in\Delta}$ converge para qualquer ponto em X_i ou é residualmente constante. Com isso, pode-se definir $\zeta : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} X_i$ pondo

$$\zeta(i) := \begin{cases} z(i)\,, & \text{se } \langle x_\delta(i) \rangle_{\delta\in\Delta} \text{ convergir para qualquer ponto em } X_i; \\ c_i\,, & \text{se } \langle x_\delta(i) \rangle_{\delta\in\Delta} \text{ for residualmente constante de valor } c_i. \end{cases}$$

Pela construção, tem-se claramente que ζ está bem definida e que, para todo $i \in I$, $x_\delta(i) \to \zeta(i)$ em X_i. Assim, pelo Lema 3.3.5, conclui-se que $x_\delta \to \zeta$. Como $\langle x_\delta \rangle_{\delta\in\Delta}$ foi tomada qualquer, tem-se que toda ultrarrede em Y converge para algum ponto em Y. Então, supondo-se que o princípio **U** valha, pode-se concluir que Y é compacto. Portanto, segue que **U** implica $\mathbf{TT}_{\mathrm{cf}}$. ■

Finalmente, em virtude do Teorema 3.3.7 e das implicações em (*), podemos encerrar a presente seção com seu principal resultado, o qual se encontra enunciado no seguinte

Teorema 3.3.8 (**ZF**). $\mathbf{TT}_{\mathrm{cf}}$ *é equivalente a* **BPI**. ■

Capítulo 4

Espaços (pseudo)métricos e topológicos em ZF

No presente capítulo, iremos apresentar alguns "horrores" da Análise Real e da Topologia da Reta no modelo básico de Cohen, dez condições sob as quais $\mathbb{N}$ é Lindelöf e alguns resultados sobre: espaços (pseudo)métricos e topológicos na ausência de $\mathbf{AC}_\omega$, espaços topológicos SE e SSE na ausência de $\mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$. Além disso, apresentaremos alguns resultados resultados de consistência relacionados, por exemplo, à paracompacidade de ω_1 e sobre a não metrizabilidade de ω_1 em **ZF**.

4.1 Sobre o modelo básico de Cohen

No início dos anos de 1960, Paul J. Cohen revolucionou a Teoria dos Conjuntos ao criar o método de "forcing", que é hoje largamente empregado em provas de consistência e de independência. Este método foi introduzido por Cohen exatamente para provar que a negação de **AC** e de **CH** (a Hipótese do Contínuo, a qual declara que: "$2^{\aleph_0} = \aleph_1$") são asserções consistentes, respectivamente, com **ZF** e com **ZFC**. Com relação à negação de **AC**, Cohen utilizou o seu método de "forcing" para construir um modelo de **ZF** no qual **AC** é falso. Este modelo, denotado a partir de agora por $\mathcal{M}1$, é comumente chamado na literatura matemática de o "modelo básico de Cohen". Trabalhando em $\mathcal{M}1$, Cohen obteve um resultado que veio a se tornar o primeiro de uma sucessão de "horrores" da Análise Real e da Topologia da Reta na ausência de **AC**. Este resultado – de enunciado muito simples, mas de consequências "desastrosas" – está expresso no seguinte

Fato 4.1.1. *Em $\mathcal{M}1$, existe um subconjunto infinito de $\mathbb{R}$ que é Dedekind-finito.* $\square$

Fixando então um tal subconjunto infinito de $\mathbb{R}$ e denotando-o por C, segue imediatamente da Proposição 1.1.19 que, em $\mathcal{M}1$, todo subconjunto infinito de C é não enumerável (em particular, tem-se que C é não enumerável). Mais que isso: em virtude do Teorema 2.2.1, conclui-se do Fato 4.1.1 que $\mathbf{AC}_\omega$ é falso em $\mathcal{M}1$. Logo, $\mathbf{AC}$ é, de fato, falso em $\mathcal{M}1$.

Para continuar com o "circo de horrores" no modelo de Cohen, iremos provar alguns fatos que são consequências do Fato 4.1.1 – muitos deles tão "chocantes" quanto este último. São eles:

Fato 4.1.2. *Em $\mathcal{M}1$, $\mathbb{R}$ não pode ser bem ordenado.*

Prova:

Suponha, por absurdo, que exista uma boa ordem sobre $\mathbb{R}$ em $\mathcal{M}1$. Denotando por $\leqslant$ uma tal boa ordem, tem-se então que C está bem ordenado por $\leqslant$. Logo, existe um único isomorfismo de ordem $f : C \longrightarrow \mathrm{t.o.}(C, <)$. Como C é infinito, segue que $\omega \leqslant \mathrm{t.o.}(C, <)$, i.e., que $\omega \subseteq \mathrm{t.o.}(C, <)$. Então, por ser f bijetora, tem-se claramente que $f^{-1}[\omega] \subseteq C$ é equipotente a ω e, por conseguinte, que C possui um subconjunto infinito enumerável, uma contradição. Portanto, tem-se que, em $\mathcal{M}1$, $\mathbb{R}$ não pode ser bem ordenado. $\square$

Fato 4.1.3. *Em $\mathcal{M}1$, existem um ponto $x \in \mathbb{R}$ e um $A \subseteq \mathbb{R}$ tais que $x \in \overline{A}$, mas toda sequência em A não converge para x.*

Prova:

Iniciamente, afirmamos que:

(*) dado um $X \subseteq \mathbb{R}$, se X for infinito e Dedekind-finito, então existe um elemento de X que é ponto de acumulação de X.

Com efeito: suponha que $X \subset \mathbb{R}$ seja infinito e Dedekind-finito e admita que qualquer elemento de X seja ponto isolado. Tome a base enumerável $\mathcal{B} = \{]a, b[: a, b \in \mathbb{Q} \text{ e } a < b\}$ de $\mathbb{R}$. Note que $\mathcal{B}$ é infinita, pois, obviamente, o conjunto $\{]n, n+1[: n < \omega\} \subset \mathcal{B}$ é infinito. Sendo assim, pode-se fixar uma enumeração $\{I_n : n < \omega\}$ de $\mathcal{B}$. Como $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{R}$ e cada ponto em X é suposto isolado, tem-se então que, para todo $x \in X$, existe um $k < \omega$ tal que $I_k \cap X = \{x\}$. Defina então $\phi : X \longrightarrow \omega$ pondo $\phi(x) := \min\{k \in \omega : I_k \cap X = \{x\}\}$. Pela construção, é claro que ϕ está bem definida e que é injetora, i.e., que $X \preceq \omega$. Disso, segue que X é enumerável (pela Proposição 1.1.14). Consequentemente, teremos que X é um subconjunto infinito enumerável de si próprio, contradizendo a Proposição 1.1.19.

Então, pode-se fixar um $x_0 \in C$ que é ponto de acumulação de C. Agora, considere o conjunto $A_0 := C \setminus \{x_0\}$. Como C é Dedekind-finito, então A_0 também é

Dedekind-finito (pelo Corolário 1.1.20). Assim, tem-se que toda sequência em A_0 assume um número finito de valores, pois: dado um conjunto Dedekind-finito X, se existisse uma sequência s em X assumindo um número infinito de valores, então $im(s)$ seria um subconjunto infinito enumerável de X, uma contradição. Então, toda sequência em A_0 que converge é quase constante. Disso, segue que toda sequência em A_0 não converge para x_0, já que $x_0 \notin A_0$. Portanto, basta tomar $x = x_0$ e $A = A_0$ para concluir que, em $\mathcal{M}1$, existem um ponto $x \in \mathbb{R}$ e um $A \subseteq \mathbb{R}$ tais que $x \in \overline{A}$, mas toda sequência em A não converge para x. $\square$

Fato 4.1.4. *Em $\mathcal{M}1$, existe um $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que toda sequência em A possui uma subsequência convergente, mas A não é fechado nem limitado em $\mathbb{R}$.*

Prova:

Considere o ponto $x_0 \in C$ que é obtido na prova do Fato 4.1.3, juntamente com o conjunto $A_0 = C \setminus \{x_0\}$. É evidente que $x_0 \notin A_0$. Além disso, tem-se que x_0 é um ponto de acumulação de A_0, já que é um ponto de acumulação de C. Logo, $x_0 \in \overline{A_0} \setminus A_0$ e, por conseguinte, A_0 não é fechado em $\mathbb{R}$. Agora, note que toda sequência em A_0 possui uma subsequência constante (logo convergente), visto que toda sequência em A_0 assume um número finito de valores. Se A_0 for ilimitado em $\mathbb{R}$, nada mais a fazer. Se A_0 for limitado em $\mathbb{R}$, há dois casos a considerar: caso x_0 seja um ponto de acumulação de A_0 à esquerda, considere $f :]x_0 - 1, x_0[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2}(2x - 2x_0 + 1)\right)$. Claramente, tem-se que f está bem definida e que é estritamente crescente. Além disso, vê-se facilmente que f é um homeomorfismo.

Afirmamos que o conjunto $B := f\left[A_0 \cap]x_0 - 1, x_0[\right]$ é infinito e Dedekind-finito. Com efeito: já que x_0 é um ponto de acumulação de A_0 à esquerda, tem-se então que o conjunto $A_0 \cap]x_0 - 1, x_0[$ é infinito. Disso, e de f ser injetora, segue que B é infinito. Suponha, por absurdo, que B seja Dedekind-infinito. Sendo assim, existe um conjunto B_0 que é subconjunto infinito enumerável de B (pela Proposição 1.1.19). Como f é uma bijeção, tem-se que o conjunto $f^{-1}[B_0] \subseteq A_0 \cap]x_0 - 1, x_0[$ é infinito enumerável. Ora, já que A_0 é Dedekind-finito, então $A_0 \cap]x_0 - 1, x_0[$ também é Dedekind-finito (pelo Corolário 1.1.20). Consequentemente, teremos um conjunto Dedekind-finito que possui um subconjunto infinito enumerável, contradizendo a Proposição 1.1.19. Afirmamos agora que B é ilimitado em $\mathbb{R}$. De fato: tome um $c \in \mathbb{R}$ arbitrário. Já que f é sobrejetora, então existe um $b \in]x_0 - 1, x_0[$ tal que $c = f(b)$. Como x_0 é um ponto de acumulação de A_0 à esquerda, tem-se que $A_0 \cap]b, x_0[\neq \emptyset$. Fixe então um $a_0 \in A_0 \cap]b, x_0[$. Assim, tem-se que $a_0 \in A_0 \cap]x_0 - 1, x_0[$ e que $b < a_0$. Como f é estritamente crescente, segue que $f(b) < f(a_0)$, i.e., que $c < f(a_0)$. Logo, existe um $y \in B$ tal que $c < y$. Então, já que $c \in \mathbb{R}$ foi tomado arbitrário, conclui-se que B é ilimitado superiormente.

Agora, já que $A_0 \cap]x_0 - 1, x_0[$ é infinito e Dedekind-finito, pode-se fixar, por (*), um $z_0 \in A_0 \cap]x_0 - 1, x_0[$ que é um ponto de acumulação deste conjunto em $\mathbb{R}$ e, por conseguinte, em $]x_0 - 1, x_0[$. Como f é contínua e injetora, segue da Proposição 1.2.21 que $f(z_0) \in B$ é um ponto de acumulação de B. Tome então o conjunto $A_1 := B \setminus \{f(z_0)\}$. Ora, é claro que $B = A_1 \cup \{f(z_0)\}$. Assim, tem-se que A_1 é ilimitado em $\mathbb{R}$, já que o é B. Além disso, com os mesmos argumentos dados para A_0, conclui-se que A_1 não é fechado em $\mathbb{R}$ e que toda sequência em A_1 possui uma subsequência convergente.

Finalmente, caso x_0 seja um ponto de acumulação de A_0 à direita, considere $g :]x_0, x_0 + 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2}(2x - 2x_0 - 1)\right)$. Tal como f, tem-se claramente que g está bem definida e que é estritamente, além de ser um homeomorfismo. Então, com argumentos análogos aos que foram dados para f, obtém-se um conjunto A_1 que satisfaz o que é desejado. Portanto, basta tomar $A = A_0$, se A_0 for ilimitado em $\mathbb{R}$, ou $A = A_1$, se for o contrário, para concluir que, em $\mathcal{M}1$, existe um $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que toda sequência em A possui uma subsequência convergente, mas A não é fechado nem limitado em $\mathbb{R}$. $\square$

Fato 4.1.5. *Em $\mathcal{M}1$, existem um ponto $x \in \mathbb{R}$ e uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que f é sequencialmente contínua em x, mas f não é contínua em x.*

Prova:

Novamente, considere o ponto $x_0 \in C$ que é obtido na prova do Fato 4.1.3, juntamente com o conjunto $A_0 = C \setminus \{x_0\}$. Seja então $\chi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função-característica de A_0, i.e., a função tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\chi(x) := \begin{cases} 1\,, & \text{se } x \in A_0; \\ 0\,, & \text{se } x \notin A_0. \end{cases}$$

Afirmamos que χ não é contínua em x_0. Com efeito: já que $x_0 \in \overline{A_0}$ e, para todo $\delta > 0$, $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ é uma vizinhança aberta de x_0 em $\mathbb{R}$, segue então que existe um $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap A_0$. Além disso, tem-se que $x_0 \notin A_0$. Logo, fixando um $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon \leqslant 1$, conclui-se que, para todo $\delta > 0$, existe um $x \in A_0$ de forma que $|x - x_0| < \delta$ e $|\chi(x) - \chi(x_0)| = |1 - 0| = 1 \geqslant \varepsilon$.[1]

Agora, tomando uma sequência qualquer $\langle x_n \rangle_{n \geqslant 1}$ em $\mathbb{R}$ que converge para x_0, considere o conjunto $M := \{n \in \omega \setminus 1 : x_n \in A\}$. Note que M é finito, pois: se M fosse infinito, iríamos concluir que existe uma sequência em A_0 convergindo para x_0 (pelo

[1] Cabe aqui destacar que, em **ZF**, prova-se facilmente o seguinte fato mais geral: "dados espaços topológicos X e Y, uma função $f : X \longrightarrow Y$ e um ponto $x_0 \in X$, se Y for T_1 e existir um ponto $z \in Y \setminus \{f(x_0)\}$ que pertence a imagem por f de qualquer vizinhança aberta de x_0 em X, então f não é contínua em x_0".

Teorema 2.1.6), contradizendo o fato de que toda sequência em A_0 não converge para x_0. Logo, se for $M = \emptyset$, teremos que, para todo $n \in \omega \setminus 1$, $x_n \notin A_0$. Se for $M \neq \emptyset$, então M terá elemento máximo. Com isso, tome

$$k\,(M) := \begin{cases} 0\,, & \text{se } M = \emptyset; \\ \max\,(M)\,, & \text{se } M \neq \emptyset. \end{cases}$$

Pela construção, é claro que $k\,(M)$ está bem definido. Além disso, é fácil ver que, para todo natural $n > k\,(M)$, $x_n \notin A_0$. Então, para todo natural $n > k\,(M)$, $\chi(x_n) = 0$. Disso, é imediato concluir que, para toda vizinhança aberta V de 0 em $\mathbb{R}$, o conjunto $\{n \in \omega \setminus 1 : \chi(x_n) \notin V\}$ é finito, i.e., que $\chi(x_n) \to 0$. Já que $\chi(x_0) = 0$, tem-se então que $\chi(x_n) \to \chi(x_0)$. Como a sequência s foi tomada qualquer, segue que χ é sequencialmente contínua em x_0. Portanto, basta tomar $x = x_0$ e $f = \chi$ para concluir que, em $\mathcal{M}1$, existem um ponto $x \in \mathbb{R}$ e uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que f é sequencialmente contínua em x, mas f não é contínua em x. $\square$

Fato 4.1.6. *Em $\mathcal{M}1$, existe um espaço métrico que tem base enumerável, mas não é separável.*

Prova:

Considere, em $\mathcal{M}1$, o conjunto C munido da topologia de subespaço de $\mathbb{R}$. Tome a base enumerável $\mathcal{B} = \{]a, b[: a, b \in \mathbb{Q} \text{ e } a < b\}$ de $\mathbb{R}$. Assim, tem-se que o conjunto $\mathcal{B}_C := \{C \cap I : I \in \mathcal{B}\}$ é uma base de C e que é enumerável, pois está indexado por um conjunto enumerável (veja Proposição 1.1.14). Além disso, note que C não possui subconjunto enumerável denso algum, pois: se existisse um tal subconjunto enumerável de C, este seria infinito (já que C é um subespaço infinito de $\mathbb{R}$), uma contradição. Portanto, tem-se que, em $\mathcal{M}1$, C é um subespaço de $\mathbb{R}$ que tem base enumerável, mas não é separável. $\square$

É interessante aqui observar que o Fato 4.1.6 implica a negação do item (6) do Teorema 4.2.1 da seção a seguir. Como consequência disso, tem-se que, em $\mathcal{M}1$, o espaço métrico discreto enumerável $\mathbb{N}$ não é Lindelöf. Contudo, $\mathbb{N}$ é separável, pois, obviamente, é um subconjunto enumerável denso de si próprio. Pelo Teorema 2.1.7, tem-se então que $\mathbb{N}$ tem base enumerável. Portanto, segue do Fato 4.1.6 o seguinte

Fato 4.1.7. *Em $\mathcal{M}1$, existe um espaço métrico que é separável e, consequentemente, tem base enumerável, mas não é Lindelöf.* $\square$

Finalmente, para encerrar a presente seção, destaquemos que todas as informações dadas aqui – a exceção do que foi observado anteriormente – foram obtidas na palestra

"Cem Anos do Axioma da Escolha - IV: Horrores da matemática sem o Axioma da Escolha", que o Prof. Samuel Gomes da Silva proferiu em outubro de 2008 (por ocasião da IV Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática) e para qual adotou o livro [Jec73] (em especial, o seu Capítulo 10) como uma das referências principais.

4.2 Sob quais condições $\mathbb{N}$ é Lindelöf

Nesta seção, iremos estabelecer sob quais condições o espaço discreto enumerável $\mathbb{N}$ é Lindelöf. Para isso, provaremos, em **ZF**, o seguinte

Teorema 4.2.1 ([HrS97]). *São equivalentes:*

(0) *Todo espaço topológico enumerável é Lindelöf.*

(1) $\mathbb{N}$ *é Lindelöf.*

(2) $\mathbb{Q}$ *é Lindelöf.*

(3) $\mathbb{R}$ *é Lindelöf.*

(4) *Todo espaço topológico que tem base enumerável é Lindelöf.*

(5) *Todo subespaço de* $\mathbb{R}$ *é separável.*

(6) *Todo espaço topológico* T_0 *que tem base enumerável é separável.*

(7) *Dados um ponto* $x \in \mathbb{R}$ *e um* $A \subseteq \mathbb{R}$, $x \in \overline{A}$ *se, e somente se, existir uma sequência* $\langle x_n \rangle_{n \geqslant 1}$ *em* A *tal que* $x_n \to x$.

(8) *Dados um ponto* $x \in \mathbb{R}$ *e uma função* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, f *é contínua em* x *se, e somente se,* f *for sequencialmente contínua em* x.

(9) *Todo subconjunto ilimitado de* $\mathbb{R}$ *possui um subconjunto enumerável ilimitado.*

(10) $\mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$.

Demonstração:

Observemos que as implicações (10) $\Longrightarrow$ (0), (10) $\Longrightarrow$ (4) e (10) $\Longrightarrow$ (6) já estão demonstradas (veja Teoremas 2.3.1, 2.3.4 e 2.3.3). Para demonstrar as equivalências acima, provaremos as demais implicações que estão presentes no esquema de prova dado pelo diagrama a seguir:

$$\begin{tikzcd}
& & 8 \arrow[r, Rightarrow] & 7 \arrow[r, Rightarrow] & 9 & \\
0 \arrow[r, Rightarrow] & 1 \arrow[r, Rightarrow] & 9 \arrow[u, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & 5 \arrow[l, Rightarrow] & 6 \arrow[l, Rightarrow] & 10 \arrow[l, Rightarrow] \\
& & 10 \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & 4 \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & 2 \arrow[r, Rightarrow] & 1 \\
& & 0 & 3 \arrow[r, Rightarrow] & 1 &
\end{tikzcd}$$

Diagrama 4.2.1.

Destaquemos que as implicações (1) $\Longrightarrow$ (9) $\Longrightarrow$ (10) $\Longrightarrow$ (4) são contribuições originais dos autores do artigo [HrS97], as quais são cruciais para estabelecer todas as equivalências acima. Destaquemos também que nesse artigo não é fornecida a prova das outras implicações presentes no diagrama acima – mas salientando que as implicações (10) $\Longrightarrow$ (0) $\Longrightarrow$ (1) e (10) $\Longrightarrow$ (6) $\Longrightarrow$ (5) são inclusões nossas e, portanto, não estão presentes em [HrS97]. Contudo, daremos aqui a nossa contribuição apresentando também a prova de todas aquelas implicações que ainda não foram demonstradas.

(0) $\Longrightarrow$ (1) : É imediato, já que $\mathbb{N}$ é um espaço enumerável.

(2) $\Longrightarrow$ (1), (3) $\Longrightarrow$ (1) : Sabemos que ser Lindelöf é uma propriedade hereditária para subespaços fechados (pela Proposição 1.2.12) e que $\mathbb{N}$ é um subespaço fechado tanto de $\mathbb{R}$ quanto de $\mathbb{Q}$. Portanto, admitindo-se a validade de (3) ou de (2), pode-se concluir que $\mathbb{N}$ é Lindelöf.

(4) $\Longrightarrow$ (2), (4) $\Longrightarrow$ (3) : Sabemos que $\mathbb{R}$ é SE. Ora, já que ser SE é uma propriedade hereditária (pela Proposição 1.2.11), temos então que $\mathbb{Q}$ é SE. Portanto, supondo-se que (4) valha, conclui-se que $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ são Lindelöf.

(6) $\Longrightarrow$ (5) : Como $\mathbb{R}$ é T_0 e SE, e as propriedades ser T_0 e ser SE são hereditárias (pela Proposição 1.2.11), segue que todo subespaço de $\mathbb{R}$ é T_0 e SE. Portanto, supondo-se que (6) valha, pode-se concluir que todo subespaço de $\mathbb{R}$ é separável.

(5) $\Longrightarrow$ (9) : Seja A um subconjunto ilimitado qualquer de $\mathbb{R}$. Valendo (5), podemos concluir que A é um subespaço separável de $\mathbb{R}$. Sendo assim, podemos fixar um subconjunto enumerável denso B de A. Afirmamos que B é ilimitado. De fato: se B fosse limitado, então $\overline{B}^{\mathbb{R}}$ também seria limitado. Como $A = \overline{B}^{A}$ e tem-se que $\overline{B}^{A} \subseteq \overline{B}^{\mathbb{R}}$, concluiríamos então que A é um subconjunto limitado de $\mathbb{R}$, uma contradição.

(9) $\Longrightarrow$ (8) : Sejam um ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ e uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ arbitrariamente fixados. Por um lado, admitindo-se que f seja contínua em x_0, conclui-se facilmente que f é sequencialmente contínua em x_0. Por outro lado, admita que f seja sequencialmente contínua em x_0 e suponha que f não seja contínua em x_0. Desta suposição, segue que

existe um $\varepsilon > 0$ satisfazendo a seguinte condição:

$$(*) \text{ para todo } \delta > 0, \text{ existe um } x \in \mathbb{R} \text{ tal que } |x - x_0| < \delta \text{ e } |f(x) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon.$$

Fixando um tal $\varepsilon > 0$, considere o conjunto $A_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R} : |f(x) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon\}$. Ora, é claro que $x_0 \notin A_\varepsilon$. Logo, para todo $x \in A_\varepsilon$, $y_x := \dfrac{1}{x - x_0}$ é um elemento de $\mathbb{R}$ (que é unicamente determinado por x). Considere agora o conjunto $A := \{y_x : x \in A_\varepsilon\} \subset \mathbb{R}$. Afirmamos que A é ilimitado em $\mathbb{R}$. Com efeito: seja $c > 0$ qualquer. Por (*), conclui-se que existe um $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x - x_0| < \dfrac{1}{c}$ e $|f(x) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon$. Claramente, segue disso que $x \in A_\varepsilon$ e que $|y_x| = \dfrac{1}{|x - x_0|} > c$. Logo, existe um $y \in A$ tal que $c < |y|$. Como $c > 0$ é qualquer, segue o afirmado.

Então, admitindo-se que (9) valha, pode-se concluir que existe um conjunto B que é subconjunto enumerável ilimitado de A. Como B é enumerável, pode-se então fixar uma indexação $\{y_k : k < \omega\}$ de B. Já que B é ilimitado, tem-se que, para todo $n \in \omega \setminus 1$, existe um $k < \omega$ tal que $n < |y_k|$. Sendo assim, para todo $n \in \omega \setminus 1$, $k(n) := \min\{k \in \omega \setminus 1 : n < |y_k|\}$ está bem definido. Defina então a sequência $\langle y_n^* \rangle_{n \geqslant 1}$ em A pondo, para todo $n \in \omega \setminus 1$, $y_n^* := y_{k(n)}$. Para cada $n \in \omega \setminus 1$, denote por x_n^* o único elemento de A_ε tal que $y_n^* := \dfrac{1}{x_n^* - x_0}$. Ora, a sequência $\langle x_n^* \rangle_{n \geqslant 1}$ em A_ε é tal que, para todo $n \in \omega \setminus 1$, $|x_n^* - x_0| = \dfrac{1}{|y_n^*|} = \dfrac{1}{|y_{k(n)}|} < \dfrac{1}{n}$. Disso, e de $\mathbb{R}$ ser corpo ordenado arquimediano, conclui-se facilmente que $x_n^* \to x_0$. Como f é sequencialmente contínua em x_0, tem-se então que $f(x_n^*) \to f(x_0)$. Portanto, para $\varepsilon > 0$ fixado acima, existe um natural $k \geqslant 1$ tal que, para todo natural $n \geqslant k$, $|f(x_n^*) - f(x_0)| < \varepsilon$, contradizendo o fato de que, para todo $n \in \omega \setminus 1$, $x_n^* \in A_\varepsilon$.

(8) $\Longrightarrow$ (7) : Sejam um ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ e um $A \subseteq \mathbb{R}$ arbitrariamente fixados. Por um lado, admitindo-se que exista uma sequência $\langle x_n \rangle_{n \geqslant 1}$ em A tal que $x_n \to x_0$, é imediato concluir que $x_0 \in \overline{A}$. Por outro lado, admita que $x_0 \in \overline{A}$ e suponha que toda sequência em A não convirja para x_0. Em particular, segue desta suposição que toda sequência constante em A não converge para x_0, o que implica que $x_0 \notin A$. Agora, seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função-característica de A, i.e., a função tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} 1\,, & \text{se } x \in A; \\ 0\,, & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Ora, das hipóteses que estão sendo assumidas, tem-se que: $x_0 \in \overline{A}$ e $x_0 \notin A$. Logo, com os mesmos argumentos que são dados na prova do Fato 4.1.5, pode-se concluir que f não é contínua em x_0. Além disso, com esses mesmos argumentos, conclui-se que f é sequencialmente contínua em x_0. Portanto, admitindo-se que (8) valha, obtém-se uma contradição.

$(7) \implies (9)$: Seja A um subconjunto ilimitado de $\mathbb{R}$. Sem perda de generalidade, podemos supor que A é ilimitado superiormente.[2] Seja agora $f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{2x-1}{1-|2x-1|}$. Sem muita dificuldade, verifica-se que f está bem definida e que é uma sobrejeção estritamente crescente (implicando que f é bijetora). Sendo assim, afirmamos que $1 \in \overline{f^{-1}[A]}$. Com efeito: tome uma vizinhança aberta V qualquer de 1 em $\mathbb{R}$ e fixe um $\varepsilon > 0$ tal que $]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[\subseteq V$. Como A é ilimitado superiormente em $\mathbb{R}$, segue que existe um $y \in A$ tal que $f(1-\varepsilon) < y$. Já que f é sobrejetora, pode-se então fixar um $x \in]0,1[$ tal que $y = f(x)$. Logo, $f(1-\varepsilon) < f(x)$. Como f é estritamente crescente, então $1-\varepsilon < x$. Assim, tem-se que $x \in]1-\varepsilon, 1[\subset]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[\subseteq V$. Além disso, tem-se que $x \in f^{-1}[A]$, já que $f(x) = y$ e $y \in A$. Consequentemente, $V \cap f^{-1}[A] \neq \emptyset$. Como V foi tomada qualquer, conclui-se o afirmado.

Então, supondo-se que (7) valha, pode-se concluir que existe uma sequência $\langle x_n \rangle_{n \geqslant 1}$ em $f^{-1}[A]$ tal que $x_n \to 1$. Denote por s uma tal sequência e considere o conjunto $B := f[im(s)] \subseteq f[f^{-1}[A]] = A$. Como é claro que $B = (f \circ s)[\omega \setminus 1]$, segue então que B é enumerável, já que é imagem de um conjunto enumerável por uma função (veja Corolário 1.1.17). Tem-se também que B é ilimitado. De fato: tome um $c \in \mathbb{R}$ arbitrário. Como f é sobrejetora, então existe um $b \in]0,1[$ tal que $c = f(b)$. Agora, fixe um $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon \leqslant 1 - b$. Já que $x_n \to 1$, então existe um natural $k \geqslant 1$ tal que, para todo natural $n \geqslant k$, $x_n \in]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[$. Disso, e de como $\varepsilon > 0$ foi fixado, segue que $b \leqslant 1 - \varepsilon < x_k$, implicando que $b < x_k$. Já que f é estritamente crescente, segue que $f(b) < f(x_k)$, i.e., que $c < f(x_k)$. Logo, existe um $y \in B$ tal que $c < y$. Portanto, já que $c \in \mathbb{R}$ foi tomado arbitrário, conclui-se que B é ilimitado superiormente.

$(1) \implies (9)$: Seja A um subconjunto ilimitado de $\mathbb{R}$. Tal como na prova de $(7) \implies (9)$, podemos supor, sem perda de generalidade, que A é ilimitado superiormente. Fixe uma sobrejeção $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ (ao menos uma existe, já que $\mathbb{Q}$ é enumerável) e defina $g : A \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ pondo $g(x) := \{n \in \mathbb{N} : f(n) < x\}$. É claro que g está bem definida, por construção. Tem-se também que g é injetora. De fato: sejam $x, y \in A$ tais que $x \neq y$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $x < y$. Sendo assim, tem-se que o intervalo $]x, y[$ é não degenerado. Então, $\mathbb{Q} \cap]x, y[\neq \emptyset$, i.e., existe um $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$. Como f é sobrejetora, então existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $r = f(n)$. Assim, tem-se que $x < f(n) < y$ e, consequentemente, que $n \in g(y) \setminus g(x)$. Logo, $g(x) \neq g(y)$. Agora, tome um $n \in \mathbb{N}$ qualquer. Como A é ilimitado superiormente, então existe um $x \in A$ tal

[2] Pelo seguinte fato: sendo A um subconjunto ilimitado inferiormente de $\mathbb{R}$, é fácil verificar que $-A := \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$ é um subconjunto ilimitado superiormente de $\mathbb{R}$. Assim, provando-se que "todo subconjunto ilimitado superiormente de $\mathbb{R}$ possui um subconjunto enumerável ilimitado", pode-se concluir que $-A$ possui um subconjunto enumerável ilimitado. Denotando-se por B um tal subconjunto de $-A$, conclui-se facilmente que $-B$ é um subconjunto enumerável ilimitado de A.

que $f(n) < x$, o que implica que $n \in g(x)$. Por conseguinte, tem-se que $\mathbb{N} \subseteq \bigcup_{x \in A} g(x)$, ou melhor, que $\mathbb{N} = \bigcup_{x \in A} g(x)$. Logo, o conjunto $\mathcal{C} := im(g)$ é uma cobertura de $\mathbb{N}$. Ora, toda cobertura de $\mathbb{N}$ é aberta, já que $\mathbb{N}$ é um espaço discreto.

Assim, supondo-se que (1) valha, pode-se concluir que existe uma subcobertura enumerável $\mathcal{C}_0$ de $\mathcal{C}$. Como g é injetora, tem-se que, para todo $U \in \mathcal{C}$, existe um único $x \in A$ tal que $U = g(x)$. Para cada $U \in \mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{C}$, denotaremos por x_U o único elemento de A tal que $U = g(x_U)$. Afirmamos que o conjunto $B := \{x_U : U \in \mathcal{C}_0\} \subseteq A$ é enumerável e ilimitado. Com efeito: claramente, temos que B é enumerável, pois está indexado por um conjunto enumerável (veja Proposição 1.1.14). Suponha, por absurdo, que B seja limitado. Sendo assim, existe um $c > 0$ tal que, para todo $U \in \mathcal{C}_0$, $|x_U| \leqslant c$. Como $\mathbb{N}$ é ilimitado superiormente em $\mathbb{R}$, então existe um $r \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ tal que $c < r$. Por ser f sobrejetora, segue que existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $r = f(n)$. Logo, para todo $U \in \mathcal{C}_0$, $x_U \leqslant |x_U| \leqslant c < f(n)$. Portanto, concluímos que existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $U \in \mathcal{C}_0$, $n \notin g(x_U) = U$, implicando que $\mathcal{C}_0$ não é cobertura de $\mathbb{N}$, uma contradição.

(9) $\Longrightarrow$ (10) : Seja $\mathcal{F}$ uma família enumerável qualquer de subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$. Fixe então uma indexação $\{X_n : n \in \omega \setminus 1\}$ de $\mathcal{F}$. Para cada $n \in \omega \setminus 1$, tome a injeção $f_n : \mathbb{R}^n \longrightarrow]n, n+1[$ que é construída da seguinte maneira: considere o conjunto

$$\mathcal{A} := \left\{ s \in {}^{(\omega\setminus 1)}2 : s = \langle x_n \rangle_{n \geqslant 1} \text{ não é constante e } \{n \in \omega \setminus 1 : x_n = 0\} \text{ é infinito} \right\}.$$

Defina então $\beta : \mathcal{A} \longrightarrow]0,1[$ pondo $\beta(s) := \sum_{n \geqslant 1} \frac{x_n}{2^n}$. Pode-se verificar facilmente que β está bem definida e que é bijetora.[3] Considere agora $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow]0,1[$ definida por $\psi(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{1+|x|}\right)$. Sem muita dificuldade, verifica-se que ψ também está bem definida e que é bijetora. Tomando $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{A}$ definida por $\phi(x) = (\beta^{-1} \circ \psi)(x)$, segue que ϕ é bijetora, já que o são β e ψ. Considerando então $\phi^n : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{A}^n$ definida

[3] Este fato pode ser justificado com a seguinte observação: como $\mathcal{A} \subset {}^{(\omega\setminus 1)}2$, conclui-se que, de fato, β está definida em $\mathcal{A}$ e que $im(\beta) \subseteq [0,1]$. Prova-se que todo irracional em $[0,1]$ admite uma única representação diádica e que tal representação não possui um número finito de termos iguais a 0 (já que todo "diádico exato" é, evidentemente, um racional). Note que a única representação diádica de 0 é a sequência constante nula, a qual não pertence a $\mathcal{A}$. Note também que a única representação diádica de 1 é a sequência constante de valor 1, que também não pertence a $\mathcal{A}$. Além disso, mostra-se que todo racional em $]0,1[$ ou admite exatamente duas representações diádicas (se for "diádico exato") ou admite uma única representação diádica (se for o contrário). Caso seja "diádico exato", suas representações diádicas são sequências não constantes tais que uma é quase constante de valor 0 e a outra é quase constante de valor 1. Caso contrário, sua única representação diádica possui uma infinidade de termos iguais a 0. Consequentemente, todo racional em $]0,1[$ admite uma única representação diádica que pertence a $\mathcal{A}$. Portanto, conclui-se que β é uma função injetora e que $im(\beta) =]0,1[$.

por $\phi^n \langle x_1, \ldots, x_n \rangle := \langle \phi(x_1), \ldots, \phi(x_n) \rangle$, tem-se claramente que ϕ^n está bem definida e verifica-se facilmente que ϕ^n é uma bijeção. Defina agora $\varphi_n :]0,1[\longrightarrow]n, n+1[$ e $\sigma_n : \mathcal{A}^n \longrightarrow \mathcal{A}$ pondo, respectivamente, $\varphi_n(x) := x + n$ e

$$\sigma_n \langle s(1), \ldots, s(n) \rangle := \langle x_1(1), \ldots, x_1(n), x_2(1), \ldots, x_2(n), x_3(1), \ldots, x_3(n), \ldots \rangle,$$

sendo, para todo $k \in \omega$ tal que $1 \leqslant k \leqslant n$, $s(k) = \langle x_n(k) \rangle_{n \geqslant 1}$. É claro que φ_n e σ_n estão bem definidas, por construção. Além de se ter claramente que φ_n é bijetora, também é fácil verificar que σ_n é injetora (e não é sobrejetora). Finalmente, tomando $f_n : \mathbb{R}^n \longrightarrow]n, n+1[$ definida por $f_n(x) = (\varphi_n \circ \beta \circ \sigma_n \circ \phi^n)(x)$, segue que f_n é injetora, já que o são φ_n, β, σ_n e ϕ^n.

Agora, para prosseguir com a prova, considere, para cada $n \in \omega \setminus 1$, o conjunto $A_n := f_n \left[\prod_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i \right] \subseteq]n, n+1[$. Note que, para todo $n \in \omega \setminus 1$, $\prod_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i \neq \emptyset$ (por ser produto cartesiano finito de conjuntos não vazios). Sendo assim, para cada $n \in \omega \setminus 1$, tem-se que $A_n \neq \emptyset$. Além disso, dados $n, m \in \omega \setminus 1$ tais que $n < m$ (i.e., $n + 1 \leqslant m$), tem-se que $A_n \cap A_m = \emptyset$, já que $]n, n+1[\cap]m, m+1[= \emptyset$. Considere agora o conjunto $A := \bigcup_{n \geqslant 1} A_n \subseteq \mathbb{R}$. Afirmamos que A é ilimitado em $\mathbb{R}$. Com efeito: seja $c > 0$ qualquer. De $\mathbb{R}$ ser corpo ordenado arquimediano, segue que existe um $m \in \omega \setminus 1$ tal que $c < m$. Ora, como $A_m \neq \emptyset$, pode-se então fixar um $y \in A_m \subseteq]m, m+1[$. Assim, tem-se que $m < y$ e, por conseguinte, que $c < y$ e $y = |y|$. Logo, existe um $y \in A$ tal que $c < |y|$. Como $c > 0$ é qualquer, segue o afirmado.

Então, valendo (9), pode-se concluir que existe um conjunto B que é subconjunto enumerável ilimitado de A. Já que B é enumerável, pode-se então fixar uma indexação $\{y_k : k < \omega\}$ de B. Como A é a união da família disjunta $\{A_n : n \in \omega \setminus 1\}$, segue que, para todo $k < \omega$, existe um único $m \in \omega \setminus 1$ tal que $y_k \in A_m$. Assim, para cada $k < \omega$, denote por $m(k)$ o único elemento de $\omega \setminus 1$ tal que $y_k \in A_{m(k)}$. Por ser $f_{m(k)}$ injetora, segue que existe um único $z \in \prod_{1 \leqslant i \leqslant m(k)} X_i$ tal que $y_k = f_{m(k)}(z)$. Então, para cada $k < \omega$, denote por $z(k)$ o único elemento de $\prod_{1 \leqslant i \leqslant m(k)} X_i$ tal que $y_k = f_{m(k)}(z(k))$. Afirmamos agora que, para todo $n \in \omega \setminus 1$, existe um $k < \omega$ tal que $n \leqslant m(k)$. De fato: suponha que exista um $n \in \omega \setminus 1$ tal que, para todo $k < \omega$, $m(k) < n$ (i.e., $m(k) + 1 \leqslant n$). Sendo assim, para um tal $n \in \omega \setminus 1$ fixado, tem-se que $B = \{y_k : k < \omega\} \subseteq \bigcup_{k < \omega} A_{m(k)} \subseteq \bigcup_{k < \omega}]m(k), m(k)+1[\subseteq]1, n[$, implicando que B é limitado, uma contradição. Logo, para todo $n \in \omega \setminus 1$, $k(n) := \min\{k \in \omega \setminus 1 : n \leqslant m(k)\}$ está bem definido. Então, já que $n \leqslant m(k(n))$, pode-se tomar a n-ésima coordenada $z_n(k(n))$ de $z(k(n)) \in \prod_{1 \leqslant i \leqslant m(k(n))} X_i$.

Finalmente, defina $\zeta : \omega \setminus 1 \longrightarrow \bigcup_{n \geqslant 1} X_n$ pondo $\zeta(n) := z_n(k(n))$. Pela construção, é claro que ζ está bem definida e que, para todo $n \in \omega \setminus 1$, $\zeta(n) \in X_n$. Logo, $\zeta \in \prod_{i \geqslant 1} X_i$, implicando que $\prod_{i \geqslant 1} X_i \neq \emptyset$. Já que $\mathcal{F}$ foi tomada qualquer, concluímos que "o produto cartesiano de qualquer família enumerável de subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$ é não vazio". Portanto, como esta última asserção é equivalente a $\mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$ (veja Proposição 1.1.25), segue da validade de (9) que $\mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$ também vale. ■

Observação 4.2.2. Note que os argumentos dados na prova da implicação (9) $\Longrightarrow$ (10) do teorema acima são semelhantes aos que são dados na demonstração de $(iii) \Longrightarrow (i)$ do Teorema 2.4.1, no sentido de que se valem de uma técnica utilizada em alguns dos trabalhos de Horst Herrlich, a qual pode ser esboçada assim: partindo-se de um conjunto ilimitado, constrói-se uma função-escolha que testemunha a não vacuidade do produto cartesiano de uma família de conjuntos não vazios dada. △

Gostaríamos de encerrar a presente seção apresentando a interessante equivalência que conjecturamos, mas que foi provada pela Profa. Ofélia Teresa Alas, a qual gentilmente nos forneceu a sua demonstração. Esta equivalência é a que está enunciada no seguinte

Teorema 4.2.3. *São equivalentes:*

(i) $\mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$.

(ii) *Todo espaço métrico que tem base enumerável é separável.*

Demonstração:

$(i) \Longrightarrow (ii)$: Sabemos que $\mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$ é equivalente ao item (6) do Teorema 4.2.1 e temos que este item implica (ii), já que todo espaço métrico é T_0. Consequentemente, $\mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$ implica (ii).

$(ii) \Longrightarrow (i)$: Seja A um suconjunto ilimitado qualquer de $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ é SE, e ser SE é uma propriedade hereditária (pela Proposição 1.2.11), temos então que A é SE. Assim, supondo-se que (ii) valha, pode-se concluir que A é separável. Logo, existe um subconjunto enumerável denso D de A. Note que D é ilimitado, pois A o é. Como A é qualquer, concluímos que (ii) implica o item (9) do Teorema 4.2.1, o qual é equivalente a $\mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$. Portanto, temos que (ii) implica $\mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$. ■

4.3 $\mathbf{AC}_\omega$ e espaços (pseudo)métricos e topológicos

Na presente seção, usaremos o Teorema de Metrização de Bing–Nagata–Smirnov para mostrar que, em um dado modelo de **ZF**, onde não vale $\mathbf{AC}_\omega$ restrito às famílias (enumeráveis) de conjuntos que possuem 2 elementos, existe um espaço métrico compacto que não tem base enumerável. Além disso, iremos enunciar e demonstrar, em **ZF**, algumas equivalências para $\mathbf{AC}_\omega$ que garantem a separabilidade dos espaços: SE, pseudométricos Lindelöf e pseudométricos compactos. Finalmente, apresentaremos, sem demonstração, dois resultados que estão relacionados a uma noção topológica que envolve limites de sequências convergentes.

Comecemos destacando que, durante os anos de 1950 e de 1951, Jun-iti Nagata, Yuri M. Smirnov e R. H. Bing apresentaram (cada um independentemente dos outros) uma generalização para o Teorema de Metrização de Urysohn, provando (todos eles) o seguinte Teorema Geral de Metrização: "dado um espaço topológico X, tem-se que X é metrizável se, e somente se, X for regular e possuir uma base σ-localmente finita". Na verdade, o teorema de metrização que Bing apresentou tem enunciado ligeiramente diferente, pois declara que: "dado um espaço topológico X, tem-se que X é metrizável se, e somente se, X for regular e possuir uma base σ-localmente discreta". Para provar a implicação "somente se" do Teorema Geral de Metrização é necessário o uso de **AC**, em contraste com a prova do Teorema de Metrização de Urysohn, para a qual não é preciso utilizar princípio de escolha algum (cf. [GoT95, Corolário 4.8, p. 86]). Contudo, a implicação "se" do Teorema Geral de Metrização pode ser provada em **ZF**. Sugerimos o artigo [Dal03] para obtenção de mais informações e das referências a respeito do que citamos. Para o que segue, precisaremos do seguinte e notável

Teorema 4.3.1 (Teorema de Metrização de Bing–Nagata–Smirnov, **ZF**)**.** *Todo espaço topológico regular que possui uma base σ-localmente finita é metrizável.* ■

Uma prova deste teorema de metrização pode ser encontrada, por exemplo, em [Eng89, p. 282].

Agora, desejamos destacar que Cohen, utilizando mais uma vez o seu método de "forcing", construiu um modelo de **ZF** – diferente do modelo $\mathcal{M}1$ – no qual "existe uma família enumerável de conjuntos que possuem 2 elementos que não admite função-escolha alguma". Este é justamente aquele modelo $\mathcal{M}$ que citamos e com qual trabalhamos na Subseção 3.2.2, página 59. Tal modelo é comumente chamado na literatura matemática de o "segundo modelo de Cohen". A partir de agora, denotaremos este modelo por $\mathcal{M}7$. Cientes disso, podemos então enunciar o seguinte e interessante

Fato 4.3.2 ([GoT95])**.** *Em $\mathcal{M}7$, existe um espaço métrico compacto (logo Lindelöf) que não tem base enumerável e, consequentemente, não é separável.*

Prova:

Inicialmente, denote por $\mathbf{C}_{2,\omega}$ a asserção "toda família enumerável de conjuntos que possuem 2 elementos admite uma função-escolha" e por $\mathbf{C}'_{2,\omega}$ a asserção "toda família disjunta enumerável de conjuntos que possuem 2 elementos admite uma função-escolha". Note que se pode utilizar os argumentos dados na prova da equivalência entre $\mathbf{C}_2$ e $\mathbf{C}'_2$ (veja a Subseção 3.2.2, página 56) para também provar a equivalência entre $\mathbf{C}_{2,\omega}$ e $\mathbf{C}'_{2,\omega}$. Então, segue da não validade de $\mathbf{C}_{2,\omega}$ em $\mathcal{M}7$ que $\mathbf{C}'_{2,\omega}$ também não é válida em $\mathcal{M}7$.

Assim, pode-se fixar em $\mathcal{M}7$ uma família disjunta enumerável $\mathcal{F}$ de conjuntos que possuem 2 elementos que não admite função-escolha alguma. Já que $\mathcal{F}$ é necessariamente infinita, pode-se fixar uma enumeração $\{A_n : n < \omega\}$ de $\mathcal{F}$. Note agora que o conjunto $\bigcup \mathcal{F}$ é não enumerável, pois: supondo-se que $\bigcup \mathcal{F}$ seja enumerável, pode-se fixar uma indexação $\{x_k : k < \omega\}$ de $\bigcup \mathcal{F}$. Com isso, para cada $n < \omega$, tem-se que, para todo $x \in A_n$, existe um $k < \omega$ tal que $x = x_k$. Logo, para todo $n < \omega$, $k(n) := \min\{k \in \omega : x_k \in A_n\}$ está bem definido. Sendo assim, para cada $n < \omega$, tem-se que $x_{k(n)} \in A_n$. Defina então $\phi : \mathcal{F} \longrightarrow \bigcup \mathcal{F}$ pondo, para todo $n < \omega$, $\phi(A_n) := x_{k(n)}$. Pela construção, é claro que ϕ está bem definida e que é uma função-escolha para $\mathcal{F}$, o que é uma contradição.

Em virtude da não existência do conjunto-universo, fixe um conjunto p tal que $p \notin \bigcup \mathcal{F}$. Considere então o conjunto não enumerável $X := \{p\} \cup \bigcup \mathcal{F} = \{p\} \cup \bigcup_{n<\omega} A_n$. Considere agora, para cada $k < \omega$, os seguintes conjuntos:

$$W_k := \{p\} \cup \bigcup_{n \geqslant k} A_n \text{ e}$$
$$\mathcal{B}_k := \{\{x\} : x \in A_k\} \cup \{W_k\}.$$

Verifica-se facilmente que o conjunto $\mathcal{B}_* := \bigcup_{k<\omega} \mathcal{B}_k = \{\{x\} : x \in \bigcup \mathcal{F}\} \cup \{W_k : k < \omega\}$ é base para uma topologia τ sobre X. De agora em diante, considere X munido dessa topologia τ. Sendo assim, tem-se que, para todo $x \in \bigcup \mathcal{F}$, o conjunto $\{x\}$ é um aberto em X. Então, para qualquer base $\mathcal{B}$ de X, tem-se que $\bigcup \mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$, implicando que $\mathcal{B}$ é não enumerável. Logo, X não tem base enumerável. Agora, para cada $k < \omega$, tem-se que A_k é finito e é claro que $\mathcal{B}_k \approx A_k \cup \{W_k\}$. Segue disso que, para todo $k < \omega$, $\mathcal{B}_k$ é finito. Logo, $\mathcal{B}_*$ é uma família σ-finita. Por conseguinte, $\mathcal{B}_*$ é uma família σ-localmente finita. Dividamos a prova nos três seguintes itens:

(a) Mostremos que X é um espaço T_2: fixe arbitrariamente $x, y \in X$ tais que $x \neq y$. Suponha que tenhamos $x, y \in \bigcup \mathcal{F}$. Tomando os conjuntos $U := \{x\}$ e $V := \{y\}$, tem-se obviamente que: U e V são abertos em X, $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.

Suponha agora que tenhamos $x \notin \bigcup \mathcal{F}$ ou $y \notin \bigcup \mathcal{F}$. Disso, é imediato concluir que $x = p$ ou $y = p$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $y = p$, o que implica que $x \neq p$. Já que $\{A_n : n < \omega\}$ é uma enumeração da família disjunta $\mathcal{F}$, então existe um único $n(x) < \omega$ tal que $x \in A_{n(x)}$. Tomando os conjuntos $U := \{x\}$ e $V := W_{(n(x)+1)}$, tem-se claramente que: U e V são abertos em X, $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$. Como $x, y \in X$ foram fixados arbitrariamente, segue que X é T_2.

(b) Mostremos que X é um espaço metrizável: tome um $x \in \bigcup \mathcal{F}$ e um $k < \omega$ quaisquer. Como X é T_1, visto que é T_2, segue que o conjunto $\{x\}$ é fechado em X. Agora, note que

$$X \setminus W_k = \bigcup_{n<k} A_n = \bigcup_{n<k} \left(\bigcup_{x \in A_n} \{x\} \right) \in \tau.$$

Assim, tem-se que o conjunto W_k é fechado em X. Como $x \in \bigcup \mathcal{F}$ e $k < \omega$ foram tomados quaisquer, conclui-se então que todo elemento de $\mathcal{B}_*$ é um aberto-fechado em X, o que implica que X é zero-dimensional. Ora, já que todo espaço topológico zero-dimensional é $T_{3\frac{1}{2}}$, então X é $T_{3\frac{1}{2}}$. Por conseguinte, X é T_3. Como X é T_1, segue que X é regular. Visto que $\mathcal{B}_*$ é uma base σ-localmente finita de X, conclui-se então, pelo Teorema de Metrização de Bing–Nagata–Smirnov (Teorema 4.3.1), que X é metrizável.

(c) Mostremos que X é um espaço compacto: fixe arbitrariamente uma cobertura aberta $\mathcal{C}$ de X. Sendo assim, existe um $U \in \mathcal{C}$ tal que $p \in U$. Como U é uma vizinhança aberta de p e $\mathcal{B}_*$ é uma base de X, segue que existe um $B \in \mathcal{B}_*$ tal que $p \in B \subseteq U$. Então, já que $p \notin \bigcup \mathcal{F}$, tem-se que existe um $k < \omega$ tal que $B = W_k$. Assim, tem-se que $X \setminus B = \bigcup_{n<k} A_n$. Note que o conjunto $X \setminus B$ é finito (por ser união finita de conjuntos finitos). Para cada $x \in X \setminus B$, fixe um $U_x \in \mathcal{C}$ tal que $x \in U_x$. Com isso, tem-se que $X \subseteq U \cup \bigcup_{x \in X \setminus B} U_x$, ou melhor, que $X = U \cup \bigcup_{x \in X \setminus B} U_x$. Logo, o conjunto $\mathcal{C}' := \{U\} \cup \{U_x : x \in X \setminus B\}$ é uma subcobertura finita de $\mathcal{C}$. Como $\mathcal{C}$ foi fixada arbitrariamente, segue que X é compacto.

Portanto, tem-se que, em $\mathcal{M}7$, existe um espaço topológico metrizável que é compacto (logo Lindelöf) e que não tem base enumerável e, consequentemente, não é separável. $\square$

Teorema 4.3.3 ([BeH98]). *São equivalentes:*

(i) $\mathbf{AC}_\omega$.

(ii) *Todo espaço topológico que tem base enumerável é separável.*

(iii) *Todo espaço pseudométrico Lindelöf é separável.*

(iv) *Todo espaço pseudométrico compacto é separável.*

Demonstração:

Gostaríamos de salientar que o item *(iv)* não está incluso no artigo [BeH98] como uma equivalência de $\mathbf{AC}_\omega$. Presumimos que os autores desse artigo não o incluíram porque possivelmente desejavam apenas confrontar as equivalências entre $\mathbf{AC}_\omega$ e os itens *(ii)* e *(iii)* com aquelas que são estabelecidas pelo Corolário 2.2.15.

Além disso, observemos que não faz sentido generalizar o item *(iii)* para todo espaço topológico Lindelöf nem o item *(iv)* para todo espaço topológico compacto, pois existem contra-exemplos para tais generalizações. Por exemplo, dado um espaço discreto não enumerável X, a sua compactificação de Alexandroff $Y = X \cup \{\infty\}$ (que existe, pelo fato de X ser localmente compacto T_2 e não ser compacto) é, obviamente, um espaço compacto (logo Lindelöf) que não é separável (já que todo elemento de X é um ponto isolado em Y).

Agora, provemos as equivalências entre os itens acima:

$(i) \Longrightarrow (ii)$, $(i) \Longrightarrow (iii)$, $(i) \Longrightarrow (iv)$: As duas primeiras implicações já estão demonstradas (veja Teorema 2.2.12 e Corolário 2.2.15). A última implicação é imediata, pois já se tem que (i) implica (iii) e, obviamente, este último implica (iv).

$(ii) \Longrightarrow (i)$, $(iii) \Longrightarrow (i)$, $(iv) \Longrightarrow (i)$: Provaremos a contrapositiva destas implicações. Suponha que $\mathbf{AC}_\omega$ não valha. Assim, pelo Teorema 2.4.1, tem-se que existe uma família infinita enumerável $\mathcal{F} = \{X_n : n \in \omega \setminus 1\}$ de conjuntos não vazios tal que

(*) toda sequência $s = \langle x_k \rangle_{k \geqslant 1}$ em $\bigcup \mathcal{F}$ satisfaz a condição de que o conjunto $\{n \in \omega \setminus 1 : im(s) \cap X_n \neq \emptyset\}$ é finito.

Para cada $n \in \omega \setminus 1$, considere o conjunto $B_n := X_n \times \{n\}$. Considere então o conjunto $X := \{\langle 0, 0\rangle\} \cup \bigcup\limits_{n \geqslant 1} B_n$ e defina $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ pondo

$$d(\langle x, n\rangle, \langle y, m\rangle) := \begin{cases} 0\,, & \text{se } n = m; \\[2ex] \dfrac{1}{n+m}\,, & \text{se } n \neq m \text{ e } n \cdot m = 0; \\[2ex] \left|\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{m}\right|, & \text{se } n \neq m \text{ e } n \cdot m \neq 0. \end{cases}$$

Note que d está bem definida, por construção. Sem muita dificuldade, verifica-se que $\langle X, d\,\rangle$ é um espaço pseudométrico (implicando que X é um espaço topológico com a topologia induzida pela pseudométrica d). Dividamos a prova nos três seguintes itens:

(a) Mostremos que X é um espaço SE: pode-se verificar facilmente que, para cada $n \in \omega \setminus 1$ e todo $z \in B_n$, $B_n = B\left(z, \dfrac{1}{n(n+1)}\right)$. Logo, para todo $n \in \omega \setminus 1$, B_n é um aberto em X. Além disso, vê-se facilmente que:

(**) para cada $n \in \omega \setminus 1$ e todo $z \in B_n$, B_n é o mínimo segundo $\subseteq$ para a propriedade "U é um aberto em X e $z \in U$".

Consequentemente, para todo $n \in \omega \setminus 1$ e toda base $\mathcal{B}$ de X, $B_n \in \mathcal{B}$. Considere então o conjunto $\mathcal{B}_0 := \{B_n : n \in \omega \setminus 1\} \cup \left\{B\left(\langle 0,0\rangle, \dfrac{1}{n}\right) : n \in \omega \setminus 1\right\}$. Note que $\mathcal{B}_0$ é enumerável, por ser união finita de conjuntos indexados por um conjunto enumerável (veja Proposição 1.1.14 e Teorema 2.1.4). Afirmamos que $\mathcal{B}_0$ é uma base de X. Com efeito: para todo $n \in \omega \setminus 1$, B_n e $B\left(\langle 0,0\rangle, \dfrac{1}{n}\right)$ são abertos em X. Logo, todo elemento de $\mathcal{B}_0$ é um aberto em X. Tome agora um aberto U qualquer em X. Se for $U = \emptyset$, nada a fazer. Se for $U \neq \emptyset$, tome um $z \in U$ qualquer. Há dois casos a considerar:

(1) Caso ocorra que $z \neq \langle 0,0\rangle$, teremos, pela construção acima, que existe um único $n \in \omega \setminus 1$ tal que $z \in B_n$. Por (**), concluiremos que $B_n \subseteq U$.

(2) Caso ocorra que $z = \langle 0,0\rangle$, seguirá de U ser aberto em X e de $\mathbb{R}$ ser corpo ordenado arquimediano que existe um $k \in \omega \setminus 1$ tal que $B\left(\langle 0,0\rangle, \dfrac{1}{k}\right) \subseteq U$.

Dos dois casos acima, segue que, para todo $z \in U$, existe um $B \in \mathcal{B}_0$ tal que $z \in B \subseteq U$.

(b) Mostremos que X é um espaço compacto:[4] fixe arbitrariamente uma cobertura aberta $\mathcal{C}$ de X. Sendo assim, existe um $U \in \mathcal{C}$ tal que $\langle 0,0\rangle \in U$. Com isso, tem-se que existe um $k \in \omega \setminus 1$ tal que $B\left(\langle 0,0\rangle, \dfrac{1}{k}\right) \subseteq U$. Note que, para todo $\langle x,n\rangle \in X$,

$$d\left(\langle x,n\rangle, \langle 0,0\rangle\right) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } n = 0; \\ \\ \dfrac{1}{n}\,, & \text{se } n \neq 0. \end{cases}$$

Assim, para cada $\langle x,n\rangle \in X$, tem-se que $\langle x,n\rangle \in B\left(\langle 0,0\rangle, \dfrac{1}{k}\right)$ se, e só se, $n = 0$ ou $n > k$. Logo, para cada natural i tal que $i > k$, tem-se que $B_i \subseteq B\left(\langle 0,0\rangle, \dfrac{1}{k}\right) \subseteq U$,

[4] Note que o argumento que segue é análogo àquele usualmente dado para se provar, em **ZF**, que: "dados um espaço topológico X e uma sequência $\langle x_n\rangle_{n\geqslant 1}$ em X, se existir um ponto $x_0 \in X$ tal que $x_n \to x_0$, então o conjunto $\{x_0\} \cup \{x_n : n \in \omega \setminus 1\}$ é um subespaço compacto de X".

implicando que $X \setminus \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant k} B_i \subseteq U$. Agora, para cada natural i tal que $1 \leqslant i \leqslant k$, fixe um $z_i \in B_i$ e um $U_i \in \mathcal{C}$ tais que $z_i \in U_i$. Então, segue de (**) que, para todo natural i tal que $1 \leqslant i \leqslant k$, $B_i \subseteq U_i$, implicando que $\bigcup_{1 \leqslant i \leqslant k} B_i \subseteq \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant k} U_i$. Com isso, tem-se que $X \subseteq U \cup \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant k} U_i$, ou melhor, que $X = U \cup \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant k} U_i$. Logo, o conjunto $\mathcal{C}' := \{U\} \cup \{U_i : 1 \leqslant i \leqslant k\}$ é uma subcobertura finita de $\mathcal{C}$. Como $\mathcal{C}$ foi fixada arbitrariamente, segue que X é compacto.

(c) Mostremos que o espaço X não é separável, i.e., que todo subconjunto enumerável de X não é denso em X: tome um subconjunto enumerável Y qualquer de X e considere o conjunto $Z := Y \setminus \{\langle 0, 0 \rangle\}$. Se for $Z = \emptyset$, então $\overline{Y} \subseteq \{\langle 0, 0 \rangle\} \subset X$, implicando que Y não é denso em X. Se for $Z \neq \emptyset$, então, como Z é enumerável (pelo Corolário 1.1.16), fixe uma indexação $\{z_k : k \in \omega \setminus 1\}$ de Z. Tome a sequência $s = \langle x_k \rangle_{k \geqslant 1}$ tal que, para todo $k \in \omega \setminus 1$, x_k é a 1ª coordenada de z_k. Assim, tem-se que $Z \subseteq im(s) \times (\omega \setminus 1)$. Agora, note que s é uma sequência em $\bigcup \mathcal{F}$, por construção. Então, por (*), tem-se que o conjunto $\{n \in \omega \setminus 1 : im(s) \cap X_n \neq \emptyset\}$ é finito. Já que $\omega \setminus 1$ é infinito, pode-se então fixar um $m \in \omega \setminus 1$ tal que $im(s) \cap X_m = \emptyset$. Disso, segue que $Y \cap B_m = Z \cap B_m \subseteq (im(s) \times (\omega \setminus 1)) \cap (X_m \times \{m\}) = \emptyset$ (usando-se, na primeira igualdade, o fato de que $\langle 0, 0 \rangle \notin B_m$). Logo, Y não intersecta um subconjunto aberto e não vazio de X. Consequentemente, Y não é denso em X.

Portanto, tem-se que existe um espaço pseudométrico (logo topológico) SE que é Lindelöf (já que é compacto) e não é separável. ■

Agora, apresentemos as noções de "subconjunto sequencialmente fechado" e de "espaço topológico sequencial". Comecemos então pela seguinte

Definição 4.3.4. Sejam X um espaço topológico e $A \subseteq X$. Diremos que A é **sequencialmente fechado** em X se valer a seguinte condição: para todo $x \in X$, se existir uma sequência $\langle x_n \rangle_{n \geqslant 1}$ em A tal que $x_n \to x$, então $x \in A$. △

Em virtude da Definição 4.3.4, é imediato concluir que "todo subconjunto fechado de um dado espaço topológico é sequencialmente fechado". No entanto, a recíproca não é válida, já que "existem espaços topológicos que possuem subconjuntos sequencialmente fechados que não são fechados". Por exemplo, considere sobre $\omega_1 + 1$ a topologia que é gerada pelos unitários de todos os ordinais menores que ω_1 e por todos os subconjuntos coenumeráveis de $\omega_1 + 1$ que possuem ω_1 como elemento (ou, mais geralmente, considere o espaço topológico que é obtido pelo processo de Lindelöfzação por um ponto aplicado ao espaço discreto que possui $\aleph_1$ pontos)[5]. Segundo esta topologia, é claro que toda sequência em ω_1 que converge tem de convergir para algum ponto em ω_1 (pois o complementar em $\omega_1 + 1$ da imagem de qualquer sequência em ω_1 é uma vizinhança aberta de ω_1), mas ω_1 não é fechado (já que ω_1 é um ponto isolado, devido ao fato de toda vizinhança aberta de ω_1 ser não enumerável). Este exemplo simples é providencial, pois enseja a seguinte

Definição 4.3.5. Seja X um espaço topológico. Diremos que X é **sequencial** se todo subconjunto sequencialmente fechado de X for fechado. $\triangle$

Assim definido, temos que ω_1+1 não é sequencial quando munido da topologia que acabamos de considerar. Mais geralmente, temos que não é sequencial o espaço topológico que é obtido pelo processo de Lindelöfzação por um ponto aplicado a um espaço discreto não enumerável.

Agora, prossigamos apresentando dois teoremas bem interessantes – porém, com as demonstrações omitidas no presente trabalho – onde estão presentes as noções de subconjunto sequencialmente fechado e espaço topológico sequencial e cujos enunciados nos dizem o que pode ocorrer, por exemplo, com os subespaços sequencialmente compactos de $\mathbb{R}$ na ausência de uma certa restrição de $\mathbf{AC}_\omega$. São eles:

Teorema 4.3.6 ([Gut03])**.** *São equivalentes:*

(*i*) $\mathbf{AC}_\omega$ *restrito às famílias (enumeráveis) de subconjuntos sequencialmente fechados de* $\mathbb{R}$.

(*ii*) $\mathbb{R}$ *é sequencial.*

(*iii*) *Todo subconjunto sequencialmente fechado de* $\mathbb{R}$ *é separável.*

(*iv*) *Todo subespaço sequencialmente compacto de* $\mathbb{R}$ *é Lindelöf.*

(*v*) *Todo subespaço sequencialmente compacto de* $\mathbb{R}$ *é compacto.*

(*vi*) *Todo subespaço sequencialmente compacto de* $\mathbb{R}$ *é fechado.*

(*vii*) *Todo subespaço sequencialmente compacto de* $\mathbb{R}$ *é limitado.*

(*viii*) *Todo subespaço sequencialmente compacto de* $\mathbb{R}$ *é separável.* ■

[5] Em **ZF**, o processo de Lindelöfzação por um ponto aplicado a um espaço discreto não enumerável não nos fornece necessariamente um espaço Lindelöf. Contudo, sob $\mathbf{AC}_\omega$, pode-se mostrar que é Lindelöf o espaço topológico que é obtido pelo processo de Lindelöfzação por um ponto aplicado a um espaço discreto não enumerável.

Teorema 4.3.7 ([Gut08]). *São equivalentes:*

(i) $\mathbf{AC}_\omega$.

(ii) Todo espaço métrico é sequencial.

(iii) Todo espaço topológico primeiro-enumerável é sequencial. ■

Gostaríamos de encerrar a presente seção formulando duas questões que surgem naturalmente quando observamos as equivalências no Teorema 4.3.3 – e para as quais ainda não se conhece qualquer resposta na literatura. São elas:

Questão 4.3.8. A asserção "todo espaço métrico Lindelöf é separável" é equivalente a $\mathbf{AC}_\omega$? △

Questão 4.3.9. Caso a resposta para a questão anterior seja negativa, existe algum princípio de escolha estritamente mais fraco que $\mathbf{AC}_\omega$ que seja equivalente à referida asserção ? △

4.4 $\mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$ e espaços topológicos SE e SSE

Na presente seção, iremos enunciar e demonstrar, em **ZF**, algumas equivalências para $\mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$ que estão relacionadas às noções topológicas de: espaço SE, espaço SSE, espaço pseudométrico separável e subespaço Lindelöf de $\mathbb{R}$. Além disso, iremos provar, em **ZF**, que todos os subespaços SSE de $\mathbb{R}$ são separáveis. Inicialmente, daremos a nossa contribuição apresentando uma construção, em **ZF**, de um exemplo possivelmente conhecido, mas para o qual não conseguimos obter a construção em nenhuma de nossas referências. Este exemplo é o seguinte e interessante

Exemplo 4.4.1. *Existe um espaço topológico compacto SE que é SSE.*

Construção:

De início, lembre-se que o conjunto $[\omega]^{<\omega}$ é enumerável (pelo Corolário 2.1.3). Como obviamente $[\omega \setminus 1]^{<\omega} \subset [\omega]^{<\omega}$, então segue do Corolário 1.1.16 que $[\omega \setminus 1]^{<\omega}$ é enumerável. Fixe então uma indexação $\{X_k : k < \omega\}$ de $[\omega \setminus 1]^{<\omega}$. Agora, considere o conjunto $A := \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \omega \setminus 1\right\}$ munido da topologia de subespaço de $\mathbb{R}$. Tome a sequência $\langle x_n \rangle_{n \geqslant 1}$ em $\mathbb{R}$ tal que, para todo $n \in \omega \setminus 1$, $x_n := \frac{1}{n}$. Como $x_n \to 0$, segue então que A é um subespaço compacto de $\mathbb{R}$.[6] Além disso, tem-se que, para todo $n \in \omega \setminus 1$, $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ é um aberto em A, pois, obviamente,

$$\{1\} = \left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[\cap A \text{ e, para todo } n \in \omega \setminus 2, \ \left\{\frac{1}{n}\right\} = \left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}\right[\cap A.$$

Considere então o conjunto $\mathcal{B}_0 := \left\{\left\{\frac{1}{n}\right\} : n \in \omega \setminus 1\right\} \cup \left\{\left[0, \frac{1}{n}\right[\cap A : n \in \omega \setminus 1\right\}$ e note que este conjunto é enumerável, por ser união finita de conjuntos indexados por um conjunto enumerável (veja Proposição 1.1.14 e Teorema 2.1.4).

Afirmamos que $\mathcal{B}_0$ é uma base de A. Com efeito: para cada $n \in \omega \setminus 1$, tem-se que $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ e $\left[0, \frac{1}{n}\right[\cap A = \left]-1, \frac{1}{n}\right[\cap A$ são abertos em A, i.e., todo elemento de $\mathcal{B}_0$ é um aberto em A. Tome um aberto U qualquer em A. Sendo assim, existe um aberto V em $\mathbb{R}$ tal que $U = V \cap A$. Se for $U = \emptyset$, nada a fazer. Se for $U \neq \emptyset$, tome um $z \in U$ qualquer. Há dois casos a considerar:

(1) Se ocorrer que $z \neq 0$, teremos obviamente que existe um único $n \in \omega \setminus 1$ tal que $z \in \left\{\frac{1}{n}\right\} \subseteq U$.

(2) Se ocorrer que $z = 0$, então V será uma vizinhança aberta de 0 em $\mathbb{R}$. De $\mathbb{R}$ ser corpo ordenado arquimediano, seguirá que existe um $k \in \omega \setminus 1$ tal que $\left]-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right[\subseteq V$, implicando que $\left[0, \frac{1}{k}\right[\cap A = \left]-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right[\cap A \subseteq V \cap A = U$.

Dos dois casos acima, segue que, para todo $z \in U$, existe um $B \in \mathcal{B}_0$ tal que $z \in B \subseteq U$.

Agora, seja $\mathcal{B}$ uma base qualquer de A.[7] Considere, para cada $m, n \in \omega \setminus 1$ tais que $m \leqslant n$, o conjunto $\mathcal{B}_{\langle m,n\rangle} := \left\{B \in \mathcal{B} : \left[0, \frac{1}{n}\right[\cap A \subseteq B \subseteq \left[0, \frac{1}{m}\right[\cap A\right\}$. Considere então o conjunto $M := \left\{\langle m, n\rangle \in (\omega \setminus 1)^2 : m \leqslant n \text{ e } \exists\, B \subseteq A \left(B \in \mathcal{B}_{\langle n,m\rangle}\right)\right\}$ e note que este conjunto é enumerável, já que está contido em um produto finito de um conjunto enumerável por si mesmo (veja Teorema 2.1.5). Note ainda que, para todo $\langle m, n\rangle \in M$, $\mathcal{B}_{\langle m,n\rangle} \neq \emptyset$. Considere agora, para cada $F \in [\omega \setminus 1]^{<\omega}$, o conjunto $A_F := \left\{\frac{1}{n} : n \in F\right\}$. Facilmente se verifica que, para todo $\langle m, n\rangle \in M$,

$$\mathcal{B}_{\langle m,n\rangle} = \left\{B \in \mathcal{B} : \exists\, F \subseteq n \setminus m \left(B = \left(\left[0, \frac{1}{n}\right[\cap A\right) \cup A_F\right)\right\}.$$

[6] Veja a nota de rodapé da página 83.

[7] Note que A admite ao menos uma base $\mathcal{B}$ de tamanho $\mathfrak{c}$. De fato: basta fixar uma base $\mathcal{B}_*$ de A (por exemplo, $\mathcal{B}_* = \mathcal{B}_0$) e tomar a família $\mathcal{B} := \mathcal{B}_* \cup \mathcal{P}(A \setminus \{0\})$. Facilmente se verifica que essa família também é uma base de A e que tem tamanho $\mathfrak{c}$.

Além disso, para todo $F \subseteq n \setminus m$, existe um $k < \omega$ tal que $F = X_k$ (pois, obviamente, $\mathcal{P}(n \setminus m) \subset [\omega \setminus 1]^{<\omega}$). Consequentemente, para todo $\langle m, n \rangle \in M$,

$$k(m,n) := \min \left\{ k \in \omega : \left(\left[0, \frac{1}{n} \right[\cap A \right) \cup A_{X_k} \in \mathcal{B}_{\langle m,n \rangle} \right\} \text{ está bem definido.}$$

Tome, para cada $\langle m, n \rangle \in M$, o conjunto $B_{\langle m,n \rangle} := \left(\left[0, \frac{1}{n} \right[\cap A \right) \cup A_{X_{k(m,n)}} \in \mathcal{B}_{\langle m,n \rangle}$. Então, para cada $\langle m, n \rangle \in M$, tem-se que $\left[0, \frac{1}{n} \right[\cap A \subseteq B_{\langle m,n \rangle} \subseteq \left[0, \frac{1}{m} \right[\cap A$.

Agora, afirmamos que o conjunto $\mathcal{B}_1 := \left\{ B_{\langle m,n \rangle} : \langle m, n \rangle \in M \right\} \subseteq \mathcal{B}$ é uma base local enumerável para o ponto 0. De fato: é claro que $\mathcal{B}_1$ é enumerável, pois está indexado por um conjunto enumerável. Pela própria definição dada para $\mathcal{B}_1$, é evidente que todo elemento de $\mathcal{B}_1$ é uma vizinhança aberta de 0 em A. Seja W uma vizinhança aberta qualquer de 0 em A. Com aquele argumento dado em (2), conclui-se que existe um $m \in \omega \setminus 1$ tal que $\left[0, \frac{1}{m} \right[\cap A \subseteq W$. Como $\mathcal{B}$ é uma base de A e $\left[0, \frac{1}{m} \right[\cap A$ é uma vizinhança aberta de 0 em A, então existe um $B \in \mathcal{B}$ tal que $0 \in B \subseteq \left[0, \frac{1}{m} \right[\cap A$. Novamente com aquele argumento dado em (2), conclui-se que existe um $n \in \omega \setminus 1$ tal que $\left[0, \frac{1}{n} \right[\cap A \subseteq B$, já que B é uma vizinhança aberta de 0 em A. Consequentemente, existe um $\langle m, n \rangle \in M$ tal que $\left[0, \frac{1}{n} \right[\cap A \subseteq B_{\langle m,n \rangle} \subseteq \left[0, \frac{1}{m} \right[\cap A \subseteq W$. Logo, existe um $B \in \mathcal{B}_1$ tal que $B \subseteq W$. Disso, é fácil concluir que o conjunto $\mathcal{B}_2 := \left\{ \left\{ \frac{1}{n} \right\} : n \in \omega \setminus 1 \right\} \cup \mathcal{B}_1$ é uma base de A. Como $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}$ e, para cada $n \in \omega \setminus 1$, tem-se que $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ está contido em qualquer base de A, segue de imediato que $\mathcal{B}_2$ está contido em $\mathcal{B}$. Além disso, é claro que $\mathcal{B}_2$ é enumerável, por ser união finita de conjuntos enumeráveis.[8]

Uma outra maneira de concluir que $\mathcal{B}$ possui uma subfamília enumerável que também é base do subespaço A é a seguinte: para cada $n \in \omega \setminus 1$ e cada $F \in [\omega \setminus 1]^{<\omega}$, considere o conjunto $B_{\langle n,F \rangle} := \left(\left[0, \frac{1}{n} \right[\cap A \right) \cup A_F$. Com isso, considere agora o conjunto $\mathcal{V}_0 := \left\{ B_{\langle n,F \rangle} : \langle n, F \rangle \in (\omega \setminus 1) \times [\omega \setminus 1]^{<\omega} \right\}$ e observe que este conjunto é enumerável, pois está indexado por um produto finito de conjuntos enumeráveis. Assim, tem-se que o conjunto $\mathcal{B}_3 := \left\{ \left\{ \frac{1}{n} \right\} : n \in \omega \setminus 1 \right\} \cup (\mathcal{B} \cap \mathcal{V}_0)$ é enumerável, por ser união finita de conjuntos enumeráveis. Sem muita dificuldade, verifica-se também que $\mathcal{B}_3$ é uma base de A que está contida em $\mathcal{B}$.

Portanto, da argumentação que foi dada, segue que A, como subespaço de $\mathbb{R}$, é

[8] Esta primeira forma de argumentar para a construção do exemplo é, de fato, bastante trabalhosa, mas é dada com o intuito de estabelecer uma comparação com o argumento dado para a demonstração do Teorema 2.2.11, na qual $\mathbf{AC}_\omega$ é utilizado.

um espaço topológico compacto SE que é SSE. $\square$

Observação 4.4.2. Note que, apesar do uso de $\mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$ na prova do Teorema 2.3.2, o Exemplo 4.4.1 nos mostra que existem casos em que não é necessário usar princípio de escolha algum para se provar que certos espaços topológicos SE são SSE. Porém, isto não é verdade para o espaço $\mathbb{R}$, como será visto no Teorema 4.4.5, logo mais adiante. $\triangle$

É interessante destacar que, utilizando argumento análogo ao que é dado no penúltimo paragráfo da construção do Exemplo 4.4.1, pode-se provar uma das implicações do seguinte complemento ao Teorema 4.3.3:

Teorema 4.4.3. *São equivalentes:*

(i) $\mathbf{AC}_\omega$.

(ii) *Todo espaço topológico SSE é separável.*

Demonstração:

$(i) \Longrightarrow (ii)$: Já está demonstrada (veja Corolário 2.2.15).

$(ii) \Longrightarrow (i)$: Tal como na prova de $(ii) \Longrightarrow (i)$ do Teorema 4.3.3, suponha que $\mathbf{AC}_\omega$ não valha e considere o espaço pseudométrico não separável, $X = \{\langle 0, 0\rangle\} \cup \bigcup_{n \geqslant 1} B_n$, que é construído a partir desta suposição. Agora, como o conjunto $[\omega]^{<\omega}$ é enumerável e, obviamente, $[\omega \setminus 1]^{<\omega} \subset [\omega]^{<\omega}$, tem-se então que $[\omega \setminus 1]^{<\omega}$ é enumerável. Considere, para cada $F \in [\omega \setminus 1]^{<\omega}$, o conjunto $X_F := \bigcup_{n \in F} B_n$. Considere agora, para cada $n \in \omega \setminus 1$ e cada $F \in [\omega \setminus 1]^{<\omega}$, o conjunto $B_{\langle n, F\rangle} := B\left(\langle 0, 0\rangle, \dfrac{1}{n}\right) \cup X_F$. Tome então o conjunto $\mathcal{V}_0 := \left\{B_{\langle n,F\rangle} : \langle n, F\rangle \in (\omega \setminus 1) \times [\omega \setminus 1]^{<\omega}\right\}$ e observe que este conjunto é enumerável, pois está indexado por um produto finito de conjuntos enumeráveis. Tome agora uma base $\mathcal{B}$ qualquer de X. Considere então o conjunto $\mathcal{B}_1 := \{B_n : n \in \omega \setminus 1\} \cup (\mathcal{B} \cap \mathcal{V}_0)$. Note que $\mathcal{B}_1$ é enumerável, por ser união finita de conjuntos enumeráveis. Verifica-se, sem muita dificuldade, que $\mathcal{B}_1$ é uma base de X que está contida em $\mathcal{B}$. Então, já que $\mathcal{B}$ foi tomada qualquer, conclui-se que X é SSE. Consequentemente, existe um espaço pseudométrico (logo topológico) SSE que não é separável. Portanto, a implicação segue por contraposição. $\blacksquare$

Como já foi visto, o Teorema 4.2.1 nos garante que $\mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$ é equivalente à asserção "todo subespaço de $\mathbb{R}$ é separável". Contudo, tal equivalência não é de longe a única entre $\mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$ e asserções topológicas que envolvem certas famílias de subespaços de $\mathbb{R}$, conforme nos diz o seguinte e importante

Lema 4.4.4. *São equivalentes:*

(i) $\mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$.

(ii) $\mathbf{AC}_\omega$ *restrito às famílias (enumeráveis) de subconjuntos densos de* $\mathbb{R}$.

(iii) *Todo subespaço de* $\mathbb{R}$ *é separável.*

(iv) *Todo subespaço SE de* $\mathbb{R}$ *é separável.*

(v) *Todo subespaço denso de* $\mathbb{R}$ *é separável.*

Demonstração:

$(i) \Longleftrightarrow (iii)$: Já está demonstrada (veja o Teorema 4.2.1).

$(i) \Longrightarrow (ii)$: É imediato, já que toda família de subconjuntos densos de $\mathbb{R}$ é obviamente constituída por subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$.

Para prosseguir com a demonstração, considere inicialmente a base enumerável $\mathcal{B} = \{]a, b[: a, b \in \mathbb{Q} \text{ e } a < b\}$ de $\mathbb{R}$. Fixe então uma indexação $\{]a_n, b_n[: n < \omega\}$ de $\mathcal{B}$. Para cada $n < \omega$, tome o correspondente $]a_n, b_n[\in \mathcal{B}$ e defina $\varphi_n :]0, 1[\longrightarrow]a_n, b_n[$ pondo $\varphi_n(x) = (b_n - a_n)x + a_n$. Claramente, para todo $n < \omega$, φ_n está bem definida e é um homeomorfismo. Considere $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow]0, 1[$ definida por $\psi(x) = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{x}{1+|x|}\right)$. Sem muita dificuldade, verifica-se que ψ está bem definida e que é um homeomorfismo. Finalmente, para cada $n < \omega$, tome $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow]a_n, b_n[$ definida por $f_n(x) = (\varphi_n \circ \psi)(x)$. É claro que, para todo $n < \omega$, f_n é um homeomorfismo, pois o são φ_n e ψ. Agora, prossigamos com a prova das seguintes implicações:

$(iii) \Longleftrightarrow (iv)$: Por um lado, valendo (iii), é imediato concluirmos que todo subespaço SE de $\mathbb{R}$ é separável. Por outro lado, como $\mathbb{R}$ é SE, então todo subespaço de $\mathbb{R}$ é SE (pela Proposição 1.2.11). Portanto, supondo-se que (iv) valha, podemos concluir que todo subespaço de $\mathbb{R}$ é separável.

$(ii) \Longrightarrow (v)$: Seja D um subespaço denso qualquer de $\mathbb{R}$. Para cada $n < \omega$, temos claramente que $f_n^{-1} :]a_n, b_n[\longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e sobrejetora (por ser a inversa de um homeomorfismo) e que $D \cap]a_n, b_n[$ é denso em $]a_n, b_n[$ (pois a interseção de um subespaço aberto com um subconjunto denso é denso em um tal subespaço). Sendo assim, para cada $n < \omega$, concluímos que o conjunto $D_n := f_n^{-1}\big[D \cap]a_n, b_n[\big]$ é um subconjunto denso de $\mathbb{R}$ (já que a imagem de um subconjunto denso por uma função contínua e sobrejetora é um denso no contradomínio). Considere então o conjunto $\mathcal{F} := \{D_n : n < \omega\}$. Temos obviamente que $\mathcal{F}$ é uma família enumerável de subconjuntos densos de $\mathbb{R}$. Com isso, se admitirmos que (ii) valha, podemos então concluir que existe uma função-escolha para $\mathcal{F}$, i.e., uma função $\phi : \mathcal{F} \longrightarrow \bigcup \mathcal{F}$ tal que, para todo $n < \omega$, $\phi(D_n) \in D_n$. Considere agora, para cada $n < \omega$, $d_n := f_n(\phi(D_n))$. Afirmamos que o conjunto $D_0 := \{d_n : n < \omega\}$ é um subconjunto enumerável denso de D. Com efeito: claramente, temos que D_0 é enumerável. Ora, para cada $n < \omega$, é evidente que $d_n \in f_n[D_n] = D \cap]a_n, b_n[\subseteq D$. Segue obviamente disso que $D_0 \subseteq D$ e que D_0 intersecta cada elemento do conjunto $\mathcal{B}_D := \{D \cap I : I \in \mathcal{B}\}$. Como $\mathcal{B}_D$ é uma base de D (visto que $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{R}$), então D_0 é denso em D. Consequentemente, D é um subespaço separável de $\mathbb{R}$.

$(v) \Longrightarrow (i)$: Seja $\mathcal{F}$ uma família infinita enumerável qualquer de subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$. Fixe então uma enumeração $\{X_n : n < \omega\}$ de $\mathcal{F}$. Com isso, tome o conjunto $D := \bigcup_{n<\omega} f_n[X_n] \subseteq \mathbb{R}$. Observe que, para cada $n < \omega$, o correspondente $]a_n, b_n[\in \mathcal{B}$ é tal que $D \cap]a_n, b_n[\supseteq D \cap f_n[X_n] = f_n[X_n] \neq \emptyset$ (pois, por hipótese, $X_n \neq \emptyset$). Como $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{R}$, então D é um subespaço denso de $\mathbb{R}$. Assim, supondo-se que (v) valha, pode-se concluir que existe um conjunto D_0 que é subconjunto enumerável denso de D. Logo, conclui-se que D_0 também é denso em $\mathbb{R}$ (pois um denso em um subespaço denso é denso). Considere agora o conjunto $M := \{n \in \omega : D_0 \cap f_n[X_n] \neq \emptyset\}$. Afirmamos que M é infinito. De fato: suponha que M seja finito. Para ver que isto nos levará a uma contradição, note inicialmente que:

$$D_0 = D_0 \cap D = D_0 \cap \bigcup_{n<\omega} f_n[X_n] = D_0 \cap \left(\bigcup_{n\in M} f_n[X_n] \;\cup \bigcup_{n\in\omega\setminus M} f_n[X_n] \right) \subseteq$$

$$\subseteq \bigcup_{n\in M} f_n[X_n] \;\cup \bigcup_{n\in\omega\setminus M} (D_0 \cap f_n[X_n]) \subseteq \bigcup_{n\in M}]a_n, b_n[\cup \emptyset = \bigcup_{n\in M}]a_n, b_n[.$$

Com isso, temos que D_0 está contido em uma união de subconjuntos limitados de $\mathbb{R}$. Sendo M finito, seguirá que D_0 é limitado em $\mathbb{R}$, contradizendo o fato de D_0 ser denso em $\mathbb{R}$ (já que $\mathbb{R}$ é ilimitado em si mesmo). Então, fixando-se uma indexação $\{d_k : k < \omega\}$ de D_0, conclui-se que, para todo $n \in M$, $k(n) := \min\{k \in \omega : d_k \in f_n[X_n]\}$ está bem definido. Considere agora o conjunto $\mathcal{F}_M := \{X_n : n \in M\} \subseteq \mathcal{F}$. Ora, é claro que $\mathcal{F}_M$ é uma subfamília infinita de $\mathcal{F}$, por ser imagem do conjunto infinito M pela enumeração de $\mathcal{F}$. Obviamente, para todo $n \in M$, $d_{k(n)} \in f_n[X_n]$. Com isso, defina $\phi : \mathcal{F}_M \longrightarrow \bigcup \mathcal{F}_M$ pondo, para todo $n \in M$, $\phi(X_n) := f_n^{-1}\left(d_{k(n)}\right)$. Como é fácil verificar que $n = m$ implica $f_n = f_m$, e temos que $\{X_n : n < \omega\}$ é uma enumeração de $\mathcal{F}$, segue então que ϕ está bem definida. Além disso, temos que ϕ é uma função-escolha para $\mathcal{F}_M$, já que, para todo $n \in M$, $\phi(X_n) \in f_n^{-1}[f_n[X_n]] = X_n$. Como $\mathcal{F}$ foi tomada qualquer, concluímos que "toda família infinita enumerável de subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$ possui uma subfamília infinita que admite uma função-escolha". Ora, sabemos que esta asserção é equivalente a $\mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$ (pelo Teorema 2.4.2). Portanto, segue da validade de (v) que $\mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$ também vale. $\blacksquare$

A importância do Lema 4.4.4 é devida a sua utilização na prova de um dos principais resultados desta seção, que é dado pelo seguinte

Teorema 4.4.5. *São equivalentes:*

(i) $\mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$.

(ii) *Todo espaço topológico SE é SSE.*

(iii) *Todo espaço pseudométrico separável é SSE.*

(iv) $[0,1]$ *é SSE.*

(v) $\mathbb{R}$ *é SSE.*

Demonstração:

$(i) \implies (ii)$: Já está demonstrada (veja Teorema 2.3.2).

$(ii) \implies (iii)$: Sabemos que todo espaço pseudométrico separável é SE (pelo Teorema 2.1.7). Portanto, admitindo-se a validade de (ii), pode-se concluir que todo espaço pseudométrico separável é SSE.

$(iii) \implies (iv)$: Como $\mathbb{Q}$ é um subconjunto enumerável denso de $\mathbb{R}$, então o conjunto $\mathbb{Q} \cap [0,1] \subset \mathbb{Q}$ é enumerável (pelo Corolário 1.1.16) e subconjunto denso de $[0,1]$ (já que o conjunto $\mathcal{B} = \{]x,y[\, \cap [0,1] : x,y \in \mathbb{R}\} \setminus \{\emptyset\}$ é uma base de $[0,1]$ tal que todo elemento de $\mathcal{B}$ intersecta $\mathbb{Q}$). Assim, tem-se que $[0,1]$ é um subespaço separável de $\mathbb{R}$. Portanto, admitindo-se que (iii) valha, pode-se concluir que $[0,1]$ é SSE.

$(iv) \implies (v)$: Já sabemos que $]0,1[$ é homeomorfo a $\mathbb{R}$. Então, para provar que (iv) implica que $\mathbb{R}$ é SSE, é basta mostrar que (iv) implica que $]0,1[$ é SSE. Para mostrar isso, tome uma base $\mathcal{B}$ qualquer de $]0,1[$ e considere o conjunto

$$\mathcal{B}' := \left\{ \left[0, \frac{1}{n}\right[: n \in \omega \setminus 1 \right\} \cup \left\{ \left]1 - \frac{1}{n}, 1\right] : n \in \omega \setminus 1 \right\} \cup \mathcal{B}.$$

Afirmamos que $\mathcal{B}'$ é uma base de $[0,1]$. Com efeito: é imediato concluir que todo elemento de $\mathcal{B}$ é um aberto em $[0,1]$, pois, obviamente, $]0,1[$ é um aberto em $[0,1]$. Além disso, é claro que, para todo $n \in \omega \setminus 1$, $\left[0, \frac{1}{n}\right[= \left]-1, \frac{1}{n}\right[\cap [0,1]$ e $\left]1 - \frac{1}{n}, 1\right] = \left]1 - \frac{1}{n}, 2\right[\cap [0,1]$ são abertos em $[0,1]$. Logo, todo elemento de $\mathcal{B}'$ é um aberto em $[0,1]$. Seja U um aberto em $[0,1]$, i.e., $U = V \cap [0,1]$, para algum aberto V em $\mathbb{R}$. Caso seja $U = \emptyset$, nada a fazer. Caso contrário, tome um $z \in U$ qualquer. Temos então três casos a considerar:

(1) Se for $z = 0$, como $U \subseteq V$, então V será uma vizinhança aberta de 0 em $\mathbb{R}$. Disso, e de $\mathbb{R}$ ser corpo ordenado arquimediano, concluiremos que existe um $k \in \omega \setminus 1$ tal que $\left]-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right[\subseteq V$. Com isso, teremos que $\left[0, \frac{1}{k}\right[= \left]-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right[\cap [0,1] \subseteq V \cap [0,1] = U$.

(2) Se for $z = 1$, com argumento análogo ao do caso anterior, iremos concluir que existe um $k \in \omega \setminus 1$ tal que $\left]1 - \frac{1}{k}, 1 + \frac{1}{k}\right[\subseteq V$. Por conseguinte, teremos que $\left]1 - \frac{1}{k}, 1\right] = \left]1 - \frac{1}{k}, 1 + \frac{1}{k}\right[\cap [0,1] \subseteq V \cap [0,1] = U$.

(3) Se for $z \neq 0$ e $z \neq 1$, teremos que $z \in U \setminus \{0,1\} = V \cap ([0,1] \setminus \{0,1\}) = V \cap \,]0,1[$. Como obviamente $V \cap \,]0,1[$ é um aberto em $]0,1[$, então existirá um $B \in \mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$ tal que $z \in B \subseteq U \setminus \{0,1\} \subseteq U$.

Dos três casos acima, segue que, para todo $z \in U$, existe um $B \in \mathcal{B}'$ tal que $z \in B \subseteq U$.

Então, admitindo-se a validade de (iv), pode-se concluir que existe uma base enumerável $\mathcal{B}'_0$ de $[0,1]$ contida em $\mathcal{B}'$. Sendo assim, considere o conjunto $\mathcal{B}_0 := \mathcal{B}'_0 \cap \mathcal{B}$. Ora, é claro que $\mathcal{B}_0$ é enumerável, já que $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}'_0$. Mais do que isso: temos que $\mathcal{B}_0$ é uma base de $]0,1[$. De fato: como $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$, temos claramente que todo elemento de $\mathcal{B}_0$ é um aberto em $]0,1[$. Seja W um aberto qualquer em $]0,1[$. Como $]0,1[$ é um aberto em $[0,1]$, é imediato concluir que W também é um aberto em $[0,1]$. Se for $W = \emptyset$, nada a fazer. Se for $W \neq \emptyset$, tome um $w \in W$ qualquer. De $\mathcal{B}'_0$ ser base de $[0,1]$, concluímos que existe um $B \in \mathcal{B}'_0$ tal que $w \in B \subseteq W$. Já que $W \subseteq \,]0,1[$, então $0 \notin B$ e $1 \notin B$. Disso, e de termos $\mathcal{B}'_0 \subseteq \mathcal{B}'$, segue de imediato que $B \in \mathcal{B}$. Logo, $B \in \mathcal{B}'_0 \cap \mathcal{B} = \mathcal{B}_0$. Portanto, temos que $]0,1[$ é SSE.

$(v) \Longrightarrow (i)$: Suponha que (v) valha. Conforme o Lema 4.4.4, para se concluir a validade de $\mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$, é suficiente provar que todo subespaço denso de $\mathbb{R}$ é separável. Para provar isso, tome um subespaço denso D qualquer de $\mathbb{R}$. Sendo assim, pode-se mostrar facilmente que o conjunto $\mathcal{B} := \{]a,b[\, : a, b \in D \text{ e } a < b\}$ é uma base de $\mathbb{R}$. Então, da validade de (v), conclui-se que existe uma base enumerável $\mathcal{B}_0$ de $\mathbb{R}$ contida em $\mathcal{B}$. Fixe então uma indexação $\{]a_n, b_n[\, : n < \omega\}$ de $\mathcal{B}_0$. Agora, defina $\varphi : \mathcal{B} \longrightarrow D$ pondo $\varphi(]a,b[) := a$. É claro que φ está bem definida, por construção. Considere então o conjunto $D_0 := \varphi[\mathcal{B}_0] \subseteq D$ e note que este conjunto é enumerável, já que é imagem de um conjunto enumerável por uma função (veja Corolário 1.1.17). Afirmamos que D_0 é denso em D. Com efeito: para concluir o afirmado, basta mostrar que D_0 é denso em $\mathbb{R}$ (já que $\overline{D_0}^D = \overline{D_0}^{\mathbb{R}} \cap D$). Mostremos isso: fixe arbitrariamente um $n < \omega$ e considere o correspondente $]a_n, b_n[\, \in \mathcal{B}_0$. Tome um $z \in \,]a_n, b_n[$ qualquer e fixe um $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon \leqslant \frac{1}{2} \min\{z - a_n, b_n - z\}$. Tome agora o conjunto $V := \,]z - \varepsilon, z + \varepsilon[\, \subset \,]a_n, b_n[$. Como $\mathcal{B}_0$ é uma base de $\mathbb{R}$ e V é, obviamente, uma vizinhança aberta de z em $\mathbb{R}$, conclui-se que existe um $k < \omega$ tal que o correspondente $]a_k, b_k[\, \in \mathcal{B}_0$ satisfaz a condição de que $z \in \,]a_k, b_k[\, \subseteq V \subset \,]a_n, b_n[$. Segue facilmente disso que $a_k \in \,]a_n, b_n[$. Além disso, pela definição de φ, é claro que $a_k = \varphi(]a_k, b_k[) \in D_0$. Consequentemente, $]a_n, b_n[\, \cap D_0 \neq \emptyset$. Como $n < \omega$ foi tomado arbitrário, conclui-se que D_0 é denso em $\mathbb{R}$ e, por conseguinte, que D é separável. Portanto, já que D foi tomado qualquer, segue que todo subespaço denso de $\mathbb{R}$ é separável. ■

Observação 4.4.6. Para as demonstrações do Lema 4.4.4 e do Teorema 4.4.5, demos a nossa contribuição apresentando a justificativa de todos os detalhes das provas dadas pelo autor do artigo [Gut04], no qual obtivemos os resultados que estão expressos no lema e no teorema referidos. △

Corolário 4.4.7. *São equivalentes:*

(i) $\mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$.

(ii) *Todo subespaço Lindelöf de* $\mathbb{R}$ *é SSE.*

Prova:

$(i) \Longrightarrow (ii)$: Pelo fato de $\mathbb{R}$ ser SE, tem-se que todo subespaço de $\mathbb{R}$ é SE (pela Proposição 1.2.11). Então, valendo $\mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$, pode-se concluir, pelo Teorema 4.4.5, que todo subespaço de $\mathbb{R}$ é SSE.

$(ii) \Longrightarrow (i)$: Basta verificar que a contrapositiva vale. Suponha que $\mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$ não valha. Sendo assim, segue do Teorema 4.4.5 que $[0,1]$ não é SSE. Ora, temos que $[0,1]$ é Lindelöf, por ser compacto (veja Teorema 2.1.12). Portanto, existe um subespaço Lindelöf de $\mathbb{R}$ que não é SSE. □

Corolário 4.4.8. *Se todo espaço métrico Lindelöf for SSE,*[9] *então* $\mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$ *vale.* □

O Corolário 4.4.8 é uma consequência imediata do Corolário 4.4.7, pois segue obviamente da sua hipótese que todo subespaço Lindelöf de $\mathbb{R}$ é SSE.

Agora, com o propósito de motivar o último dos principais resultados desta seção, vamos nos reportar ao Teorema 4.4.3. A princípio, pode parecer surpreendente que o item (ii) desse teorema, quando restrito aos subespaços de $\mathbb{R}$, possa ser provado em **ZF**. Contudo, isso é justamente o que garante o último dos principais resultados apresentados nesta seção, o qual passamos a enunciar no seguinte

[9] Observe que não faz sentido enunciar este corolário com a hipótese mais geral de que todo espaço topológico Lindelöf é SSE, devido ao seguinte fato: a compactificação de Alexandroff de um dado espaço discreto não enumerável é um espaço Lindelöf (por ser compacto) que não tem base enumerável alguma (já que possui um subconjunto não enumerável de pontos isolados).

Teorema 4.4.9. *Todo subespaço SSE de $\mathbb{R}$ é separável.*

Demonstração:

Seja A um subespaço SSE de $\mathbb{R}$. Como é evidente que $\emptyset$ é um subespaço SSE separável de $\mathbb{R}$, podemos então supor que A é não vazio. Sem perda de generalidade, podemos supor também que todo $a \in A$ é ponto de acumulação de A, pois, se $a \in A$ for ponto isolado, então $\{a\}$ pertencerá a qualquer base de A.[10] Agora, considere os seguintes conjuntos:

$$\mathcal{B}_1 := \{]a,b[\cap A : a,b \in A\};$$
$$\mathcal{B}_2 := \{[c,d[\cap A : c,d \in A \text{ e } \exists\, \delta > 0\ (]c-\delta,c[\cap A = \emptyset)\};$$
$$\mathcal{B}_3 := \{]e,f] \cap A : e,f \in A \text{ e } \exists\, \delta > 0\ (]f,f+\delta[\cap A = \emptyset)\}.$$

Afirmamos que o conjunto $\mathcal{B} := (\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3) \setminus \{\emptyset\}$ é uma base de A. Com efeito: todos os elementos de $\mathcal{B}$ são abertos em A, pois: dados $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$ quaisquer, temos que $]a,b[\cap A$ é claramente um aberto em A e, caso existam $\delta, \delta' > 0$ tais que $]c-\delta,c[\cap A = \emptyset =]f,f+\delta'[\cap A$, teremos também que $[c,d[\cap A =]c-\delta,d[\cap A$ e $]e,f] \cap A =]e,f+\delta'[\cap A$ são abertos em A. Seja U um aberto em A, i.e., $U = V \cap A$, para algum aberto V em $\mathbb{R}$. Caso seja $U = \emptyset$, nada a fazer. Caso contrário, teremos que $V \neq \emptyset$, o que implica que V é uma união de intervalos abertos e limitados em $\mathbb{R}$. Assim, podemos supor, sem perda de generalidade, que U é um aberto básico não vazio de A da forma $]x,y[\cap A$, com $x,y \in \mathbb{R}$ e $x < y$. Seja então $w \in U =]x,y[\cap A$ qualquer. Como $w \in A$, então w é um ponto de acumulação de A. Logo, $]x,y[\cap (A \setminus \{w\}) \neq \emptyset$, pois, obviamente, $]x,y[$ é uma vizinhança aberta de w em $\mathbb{R}$. Consequentemente, temos três casos a considerar. São eles:

(1) Existem $a,b \in A$ tais que $a \in]x,w[$ e $b \in]w,y[$. Disso, segue imediatamente que $w \in]a,b[\cap A \subseteq]x,y[\cap A = U$.

(2) Existe $d \in A$ tal que $d \in]w,y[$ e $]x,w[\cap A = \emptyset$. Conclui-se facilmente disso que $[w,d[\cap A \subseteq]x,y[\cap A = U$. Tomando $\delta = w - x > 0$, tem-se evidentemente que $]w-\delta,w[\cap A =]x,w[\cap A = \emptyset$.

(3) Existe $e \in A$ tal que $e \in]x,w[$ e $]w,y[\cap A = \emptyset$. Facilmente se conclui disso que $]e,w] \cap A \subseteq]x,y[\cap A = U$. Tomando $\delta = y - w > 0$, tem-se obviamente que $]w,w+\delta[\cap A =]w,y[\cap A = \emptyset$.

---

[10] Em virtude da Proposição 1.2.2, tem-se que A é SE e, por conseguinte, que o conjunto dos pontos isolados de A (que, eventualmente, estejamos descartando) é, no máximo, infinito enumerável – e não há conflito algum entre a nossa suposição e a hipótese de A ser SSE.

Pelos três casos acima, tem-se que, para todo $w \in U$, existe um $B \in \mathcal{B}$ tal que $w \in B \subseteq U$. Então, já que o subespaço A é SSE, segue que existe uma base enumerável $\mathcal{B}_0$ de A contida em $\mathcal{B}$.

Para prosseguirmos com a demonstração, provemos agora o seguinte

Fato 4.4.10. *Dado $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $A \neq \emptyset$ e dados intervalos $I, J \subset \mathbb{R}$ com extremos inferiores, respectivamente, $a_I, a_J \in A$ tais que $a_I \notin I$ e $a_J \notin J$, se $I \cap A = B = J \cap A$ e $B \neq \emptyset$, então $a_I = a_J$.*

Prova:

Suponha, por absurdo, que tenhamos $a_I < a_J$ (para o caso $a_I > a_J$, a prova segue de forma análoga). Como $B \neq \emptyset$, podemos fixar um $c \in B$. Logo, $c \in J$ e $a_I < a_J < c$. Disso, de termos que $c \in I$ e de I ser intervalo com extremo inferior a_I, seguirá que $a_J \in I$. Já que $a_J \in A$, teremos então que $a_J \in I \cap A = B$. Portanto, como também $B = J \cap A \subseteq J$, concluiremos que $a_J \in J$, uma contradição. $\square$

Agora, observe que todos os elementos de $\mathcal{B}$ são obviamente não vazios (pela própria definição de $\mathcal{B}$). Com isso, podemos definir $f : \mathcal{B} \longrightarrow A$ pondo

$$f(B) := \begin{cases} \min(B)\ , & \text{se } B \text{ tiver elemento mínimo;} \\ a_I\ , & \text{se } B \text{ não tiver elemento mínimo} \\ & \text{e existir um intervalo limitado } I, \\ & \text{com extremo inferior } a_I, \text{ tal que} \\ & B = I \cap A,\ a_I \in A \text{ e } a_I \notin I. \end{cases}$$

Notemos que f está bem definida, pois: se $B \in \mathcal{B}$ tiver elemento mínimo, então é claro que $f(B)$ existirá, será unicamente determinado e pertencerá a $B \subseteq A$. Se $B \in \mathcal{B}$ não tiver elemento mínimo, então, pela definição de $\mathcal{B}$, teremos que $B = I \cap A$, para algum intervalo limitado I, com extremo inferior $a_I \in A$ e $a_I \notin I$. Ora, se tivermos outro intervalo limitado J, com extremo inferior $a_J \in A$ e $a_J \notin J$, tal que $B = J \cap A$, então o Fato 4.4.10 nos garante que $a_I = a_J$. Consequentemente, além de existir e pertencer a A, também teremos $f(B)$ unicamente determinado.

Considere então o conjunto $D := f[\mathcal{B}_0] \subseteq A$. É claro que D é enumerável, pois é imagem de um conjunto enumerável por uma função (veja Corolário 1.1.17). Além disso, temos que D é denso em A. De fato: isto é consequência de um resultado mais geral, enunciado no seguinte

Fato 4.4.11. *Dados $\mathcal{B}$ e $f : \mathcal{B} \longrightarrow A$ como acima definidos e $\mathcal{B}_* \subseteq \mathcal{B}$, se $\mathcal{B}_*$ for uma base* *do subespaço A, então $f[\mathcal{B}_*]$ é denso em A.*

Prova:

Dado $U \in \mathcal{B}_*$ qualquer, como $\mathcal{B}_* \subseteq \mathcal{B}$, segue disso que $U \neq \emptyset$ e que existe um intervalo limitado I tal que $U = I \cap A$. Tome então um $v \in U$ qualquer. Como $U \subseteq A$, então $v \in A$ e, por conseguinte, v é ponto de acumulação de A. Ora, disso, e de U ser aberto em A, segue que $\{v\} \subset U$. Sendo assim, existe um $w \in U$ tal que $w \neq v$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $v < w$. Como $\mathbb{R}$ é T_2, e ser T_2 é uma propriedade hereditária (pela Proposição 1.2.11), segue que o subespaço A também é T_2. Assim, existem U_1 e U_2 abertos em A tais que $v \in U_1$, $w \in U_2$ e $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Agora, observe que $U \cap U_1$ e $U \cap U_2$ são claramente abertos em A e que $v \in U \cap U_1$ e $w \in U \cap U_2$. Ora, temos que $\mathcal{B}_*$ é, por hipótese, uma base do subespaço A. Por conseguinte, existem $V, W \in \mathcal{B}_*$ tais que $v \in V \subseteq U \cap U_1$ e $w \in W \subseteq U \cap U_2$. É imediato ver que $V \cap W = \emptyset$, pois claramente $V \subseteq U_1$ e $W \subseteq U_2$. Caso W tenha elemento mínimo, teremos então que $f(W) \in W$. Como obviamente $W \subseteq U$, seguirá disso que $f(W) \in U$. Caso contrário, teremos que $f(W) \notin W$ e que $f(W)$ será o extremo inferior de algum intervalo limitado J tal que $W = J \cap A$. Como $w \in W$, seguirá então que $f(W) < w$. Se tivéssemos $f(W) < v$, concluiríamos que $v \in \,]f(W), w[\, \cap A \subseteq J \cap A = W$. Assim, teríamos que $v \in V \cap W$, uma contradição. Logo, deveremos ter $v \leqslant f(W)$. Com isso, concluiremos que $f(W) \in [v, w[\, \cap A$. Como $v, w \in U = I \cap A$, então $v, w \in I$. Ora, sendo I um intervalo, teremos então que $[v, w[\, \subseteq I$ e, por conseguinte, que $[v, w[\, \cap A \subseteq I \cap A = U$. Consequentemente, teremos que $f(W) \in U$. Logo, para todo $U \in \mathcal{B}_*$, $U \cap f[\mathcal{B}_*] \neq \emptyset$. Como $\mathcal{B}_*$ é uma base do subespaço A, segue portanto que $f[\mathcal{B}_*]$ é denso em A. □

Finalmente, basta tomar $\mathcal{B}_* = \mathcal{B}_0$ para que o Fato 4.4.11 nos garanta que D é um subconjunto denso de A. Portanto, visto que D é enumerável, concluímos que A é um subespaço separável de $\mathbb{R}$. ■

Observação 4.4.12. A justificativa de todos os detalhes dos argumentos dados para a demonstração do Teorema 4.4.9 é contribuição nossa, pois o autor do artigo [Gut04], no qual foi obtido o referido teorema, apenas indica como pode ser feita a prova deste último. Além disso, ao redigirmos tal prova com todos os seus detalhes, conjecturamos a seguinte generalização para o Teorema 4.4.9: "todo subespaço SSE de uma ordem total munida da topologia da ordem é separável". △

4.5 Paracompacidade e metrizabilidade de ω_1 em ZF

No início da década de 1960, Solomon Feferman e Azriel Lévy utilizaram o método de "forcing" para construir um modelo de **ZF** no qual ω_1 é singular. Na verdade, ω_1 é singular em qualquer modelo de **ZF** em que $\mathbb{R}$ pode ser escrito como uma união enumerável de conjuntos enumeráveis (cf. [GoT95, Seção 3, p. 83]). Além disso, em todo modelo de **ZF** no qual ω_1 é singular, pode-se mostrar que ω_1 (com a topologia da ordem) é paracompacto. Como também se tem que ω_1 não é paracompacto naqueles modelos em que, pelo menos, $\mathbf{AC}_\omega$ valha (veja Corolário 2.2.10), então **ZF** não é capaz de decidir a paracompacidade de ω_1. Em outras palavras, isto nos diz que a boa ordem sobre ω_1 não é suficiente para implicar a paracompacidade de ω_1 em **ZF** – porém, o mesmo não ocorre com relação à não metrizabilidade de ω_1. Na presente seção, iremos apresentar alguns resultados que garantem justamente a validade desses fatos. Destaquemos que todos os resultados desta seção encontram-se no artigo [GoT95]. Contudo, contribuímos aqui com algumas alterações e várias complementações nas demonstrações. No que segue, $\mathcal{M}$ denota um dado modelo de **ZF** no qual valha a asserção "ω_1 é singular".

Teorema 4.5.1. *É consistente que ω_1 seja paracompacto.*

Demonstração:

Sendo $\mathcal{M} \models \mathbf{ZF}$ + "ω_1 é singular", podemos então fixar em $\mathcal{M}$ uma sequência $\langle \alpha_n \rangle_{n<\omega}$ estritamente crescente e cofinal em ω_1. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\alpha_0 = 0$.[11] Afirmamos que o conjunto $\mathcal{C} := \{\{0\}\} \cup \{]\alpha_n, \alpha_{n+1}] : n < \omega\}$ é uma família disjunta que cobre ω_1. Com efeito: como $\langle \alpha_n \rangle_{n<\omega}$ é estritamente crescente em ω_1, segue imediatamente que $\mathcal{C}$ é uma família disjunta de subconjuntos de ω_1. Além disso, por ser $\langle \alpha_n \rangle_{n<\omega}$ cofinal em ω_1, tem-se que $\omega_1 = \bigcup \{\alpha_n : n < \omega\} = \{0\} \cup \bigcup\limits_{n<\omega}]\alpha_n, \alpha_{n+1}] = \bigcup \mathcal{C}$.

Agora, fixe arbitrariamente uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ de ω_1 e um $n < \omega$. Defina então a sequência $\langle \delta_m \rangle_{m<\omega}$ em ω_1 pondo

$$\delta_0 := \alpha_{n+1} \text{ e, para todo } m < \omega,$$
$$\delta_{m+1} := \begin{cases} 0\,, & \text{se } \delta_m = 0; \\ \min\{\beta : \beta < \delta_m \text{ e } \exists V \in \mathcal{U}\,(]\beta, \delta_m] \subseteq V)\}\,, & \text{se } \delta_m > 0. \end{cases}$$

Afirmamos que $\langle \delta_m \rangle_{m<\omega}$ está bem definida. De fato: supondo que $m = 0$ ou, para um dado $m < \omega$, que $\delta_m = 0$, é claro que δ_{m+1} está bem definido. Suponha agora que, para um dado $m < \omega$, δ_m esteja bem definido e que $\delta_m > 0$. Já que $\mathcal{U}$ cobre ω_1, segue que existe

[11] Caso seja $\alpha_0 > 0$, basta considerar, em lugar de $\langle \alpha_n \rangle_{n<\omega}$, a sequência $\langle \alpha_n^* \rangle_{n<\omega}$ em ω_1 tal que $\alpha_0^* := 0$ e, para todo $n < \omega$, $\alpha_{n+1}^* := \alpha_n$. É fácil ver que tal sequência está bem definida e que é estritamente crescente e cofinal em ω_1.

um $V \in \mathcal{U}$ tal que $\delta_m \in V$. Para um tal V, existe um $\beta < \delta_m$ tal que $]\beta, \delta_m] \subseteq V$ (pois o conjunto $\{\{0\}\} \cup \{]\beta, \alpha] : \beta < \alpha < \omega_1\}$ é uma base para a topologia da ordem sobre ω_1). Logo, δ_{m+1} está bem definido.

Pela construção acima, tem-se que, para todo $m < \omega$, $\delta_m \leqslant \alpha_{n+1}$ e, se $\delta_m > 0$, então $\delta_{m+1} < \delta_m$. Sendo assim, existe um $k < \omega$ tal que $\delta_k \leqslant \alpha_n$. De fato: suponha que, para todo $k < \omega$, $\alpha_n < \delta_k$. Então, seguirá que, para todo $k < \omega$, $\delta_k > 0$ e que $\delta_k \in]\alpha_n, \alpha_{n+1}]$. Por conseguinte, a sequência $\langle \delta_k \rangle_{k<\omega}$ seria estritamente decrescente em $]\alpha_n, \alpha_{n+1}]$, contradizendo o fato de tal conjunto está bem ordenado por $<$. Logo, $k(n) := \min\{k \in \omega : \delta_k \leqslant \alpha_n\}$ está bem definido. Com isso, defina a sequência finita $\langle \gamma_j \rangle_{j \leqslant k(n)}$ em ω_1 pondo

$$\gamma_{k(n)} := \alpha_n \text{ e, para todo natural } j < k(n),\ \gamma_j := \delta_j.$$

Claramente, tem-se que $\langle \gamma_j \rangle_{j \leqslant k(n)}$ está bem definida, por construção. Pela minimalidade de $k(n)$, tem-se também que, para todo natural $j < k(n)$, $\alpha_n < \delta_j$. Disso, facilmente se conclui que, para todo natural $j < k(n)$, $\gamma_{k(n)} < \gamma_{j+1} < \gamma_j$. Logo, $\langle \gamma_j \rangle_{j \leqslant k(n)}$ é estritamente decrescente em ω_1. Já que $n < \omega$ foi fixado arbitrariamente, pode-se então considerar, para cada $n < \omega$, o conjunto $\mathcal{U}_n := \{]\gamma_{j+1}, \gamma_j] : j < k(n)\}$. Assim, para cada $n < \omega$, tem-se que $\mathcal{U}_n$ é uma família disjunta tal que

$$]\alpha_n, \alpha_{n+1}] = \big]\gamma_{k(n)}, \delta_0\big] = \big]\gamma_{k(n)}, \gamma_0\big] = \bigcup_{j<k(n)}]\gamma_{j+1}, \gamma_j] = \bigcup \mathcal{U}_n.$$

Afirmamos agora que o conjunto $\mathcal{V} := \{\{0\}\} \cup \bigcup_{n<\omega} \mathcal{U}_n$ é um refinamento aberto localmente finito de $\mathcal{U}$. Com efeito: claramente, tem-se que $\mathcal{V}$ é uma família de subconjuntos abertos de ω_1. Tem-se também que $\mathcal{V}$ cobre ω_1, pois

$$\omega_1 = \{0\} \cup \bigcup_{n<\omega}]\alpha_n, \alpha_{n+1}] = \{0\} \cup \bigcup_{n<\omega} \left(\bigcup \mathcal{U}_n\right) = \{0\} \cup \bigcup \left(\bigcup_{n<\omega} \mathcal{U}_n\right) = \bigcup \mathcal{V}.$$

Além disso, pela construção feita acima, segue que, para todo $U \in \mathcal{V}$, existe um $V \in \mathcal{U}$ tal que $U \subseteq V$, i.e., que $\mathcal{V}$ refina $\mathcal{U}$. Agora, tome um $\xi < \omega_1$ qualquer. Se for $\xi = 0$, então $\{0\}$ é uma vizinhança aberta de ξ em ω_1 que intersecta exatamente um elemento de $\mathcal{V}$, que é, obviamente, o próprio $\{0\}$. Se for $\xi > 0$, então, já que a família $\mathcal{C}$ é disjunta e cobre ω_1, segue que existe um único $m < \omega$ tal que $\xi \in]\alpha_m, \alpha_{m+1}]$. Agora, note que $]\alpha_m, \alpha_{m+1}]$ é uma vizinhança aberta de ξ em ω_1 que intersecta apenas um número finito de elementos de $\mathcal{V}$. De fato: para cada $n < \omega$, denote por $\langle \gamma_j^{(n)} \rangle_{j \leqslant k(n)}$ a sequência $\langle \gamma_j \rangle_{j \leqslant k(n)}$ construída acima. Assim, para cada $n < \omega$, tem-se que $]\alpha_n, \alpha_{n+1}] = \big]\gamma^{(n)}_{k(n)}, \gamma^{(n+1)}_{k(n+1)}\big]$ e que $\langle \gamma_j^{(n)} \rangle_{j \leqslant k(n)}$ é estritamente decrescente. Disso, é imediato concluir que $]\alpha_m, \alpha_{m+1}]$ intersecta somente os elementos de $\mathcal{V}$ que pertencem a $\mathcal{U}_m$. Portanto, como $\xi < \omega_1$ foi tomado qualquer, conclui-se que ω_1 é paracompacto em $\mathcal{M}$. ■

Observação 4.5.2. Sabe-se que, naqueles modelos de **ZF** em que, pelo menos, $\mathbf{AC}_\omega$ valha, ω_1 é enumeravelmente compacto (conforme Teorema 2.2.8) e, consequentemente, $\aleph_1$-compacto (devido ao Lema 2.2.7). Entretanto, o teorema a seguir nos garante que: naqueles modelos de **ZF** em que ω_1 é singular, tem-se que ω_1 é $\aleph_1$-compacto e DCCC, ainda que não seja enumeravelmente compacto em tais modelos. △

Teorema 4.5.3. *É consistente que ω_1 não seja enumeravelmente compacto, e ainda assim seja $\aleph_1$-compacto e DCCC.*[12]

Demonstração:

Como antes, fixe em $\mathcal{M}$ uma sequência $\langle \alpha_n \rangle_{n<\omega}$ estritamente crescente e cofinal em ω_1. Com isso, tem-se claramente que a família $\{[0, \alpha_n] : n < \omega\}$ é uma cobertura aberta enumerável de ω_1 que não possui subcobertura finita alguma. Conclui-se então que ω_1 não é enumeravelmente compacto em $\mathcal{M}$.

Agora, tome em $\mathcal{M}$ um subconjunto não enumerável A qualquer de ω_1 e considere, para cada $n < \omega$, o conjunto $A_n := A \cap \alpha_n$. Afirmamos que existe um $n < \omega$ tal que A_n é infinito. Com efeito: suponha, por absurdo, que, para todo $n < \omega$, A_n seja finito. Ora, para cada $n < \omega$, tem-se que A_n está bem ordenado por $<$. Então, para todo $n < \omega$, existe um único isomorfismo de ordem $f_n : A_n \longrightarrow \mathrm{t.o.}(A_n, <)$. Também, para cada $n < \omega$, tem-se que $\mathrm{t.o.}(A_n, <) = |A_n| < \omega$ (devido à suposição de A_n ser finito). Como $\omega_1 = \bigcup\{\alpha_n : n < \omega\}$, então é claro que $A = A \cap \omega_1 = \bigcup\{A_n : n < \omega\}$. Assim, tem-se que, para todo $\xi \in A$, existe um $k < \omega$ tal que $\xi \in A_k$. Logo, para todo $\xi \in A$, $k(\xi) := \min\{k \in \omega : \xi \in A_k\}$ está bem definido. Defina agora $f : A \longrightarrow \omega^2$ pondo $f(\xi) := \langle k(\xi), f_{k(\xi)}(\xi) \rangle$. Pela construção, tem-se claramente que f está bem definida. Além disso, tem-se que f é injetora, já que, para todo $n < \omega$, f_n é injetora. Logo, $A \preceq \omega^2$. Como $\omega^2 \preceq \omega$ (veja Proposição 1.1.29), segue então que $A \preceq \omega$. Disso, conclui-se que A é enumerável (pela Proposição 1.1.14), uma contradição. Agora, note que, para cada $n < \omega$, tem-se que $A_n \subset \alpha_n + 1$ e que $\alpha_n + 1$ é um subespaço compacto de ω_1 (pelo Teorema A.2.2). Assim, fixando um $m < \omega$ tal que A_m é infinito, conclui-se que A_m tem um ponto de acumulação em $\alpha_m + 1$ (pela Proposição 1.2.19) e, por conseguinte, em ω_1.

[12] Cabe aqui destacar que, segundo o artigo [GoT95], segue como corolário deste teorema o seguinte resultado: "é consistente que ω_1 seja Lindelöf". Porém, tanto o Prof. Samuel Gomes da Silva quanto a Profa. Ofélia Teresa Alas observaram que, sem o uso de algum princípio de escolha conveniente, não parece razoável que este resultado valha – mas concluíram que a seguinte versão fraca deste resultado é válida: "é consistente que toda cobertura aberta de ω_1 admita um refinamento aberto enumerável". Em contato por e-mail, o autor do artigo em questão, Prof. Chris Good, atenciosamente nos respondeu dizendo que possivelmente há um erro na prova que ele apresenta em seu artigo e que, provavelmente, o referido resultado não seja válido.

Como $A_m \subseteq A$, segue então que A tem um ponto de acumulação. Consequentemente, como A foi tomado qualquer, tem-se que ω_1 é $\aleph_1$-compacto em $\mathcal{M}$.

Finalmente, tome em $\mathcal{M}$ uma família discreta $\mathcal{U}$ qualquer de subconjuntos abertos de ω_1. Admita que $\mathcal{U}$ seja não enumerável. Sendo assim, o conjunto $\mathcal{U}' := \mathcal{U} \setminus \{\emptyset\}$ é não enumerável e está bem definida $\phi : \mathcal{U}' \longrightarrow \bigcup \mathcal{U}'$ dada por $\phi(U) := \min\{\beta \in \omega_1 : \beta \in U\}$. Já que $\mathcal{U}'$ é uma família disjunta e ϕ é uma função-escolha para $\mathcal{U}'$, tem-se então que ϕ é injetora. Logo, $im(\phi)$ é não enumerável (pois $\mathcal{U}'$ é não enumerável). Agora, pelo fato de ω_1 ser T_1 e por ser $\mathcal{U}'$ localmente finita, tem-se que $im(\phi)$ é um subconjunto fechado e discreto de ω_1 (pelo Corolário 1.2.24). Consequentemente, teremos um subconjunto não enumerável de ω_1 que não tem ponto de acumulação algum, contradizendo o fato de ω_1 ser $\aleph_1$-compacto em $\mathcal{M}$. Conclui-se então que $\mathcal{U}$ é enumerável. Portanto, já que $\mathcal{U}$ foi tomada qualquer, segue que ω_1 é DCCC em $\mathcal{M}$. ■

Diferentemente da paracompacidade e da compacidade enumerável de ω_1 – que são independentes de **ZF** –, temos que **ZF** é capaz de decidir a metrizabilidade de ω_1. Para verificar este fato, comecemos por demonstrar o interessante resultado – devido a Robin Knight (cf. [GoT95, Seção 4, p. 84]) – que se encontra enunciado no seguinte

Teorema 4.5.4 (ZF). $\omega_1 + 1$ *não é metrizável.*[13]

Demonstração:

Suponha, por absurdo, que $\omega_1 + 1$ (com a topologia da ordem) seja um espaço métrico associado a uma métrica d. Defina então $f : {}^{<\omega}\omega \longrightarrow \omega_1 + 1$ pondo $f(\emptyset) := \omega_1$ e, para todo $n < \omega$ e toda sequência $s \in {}^{<\omega}\omega$,

$$f(s^\frown\langle n\rangle) := \begin{cases} 0\,, & \text{se } f(s) = 0; \\ f(s) - 1\,, & \text{se } f(s) \text{ for sucessor;} \\ \min\left(B\left(f(s), \dfrac{1}{2^n}\right) \cap [0, f(s)[\right)\,, & \text{se } f(s) \text{ for limite.} \end{cases}$$

Note que f está bem definida, pois: admitindo-se que cada uma das cláusulas da definição acima esteja bem definida, verifica-se, por indução finita sobre os domínios das sequências, que, para toda sequência $s \in {}^{<\omega}\omega$, $f(s)$ está bem definida. Se for $f(s) = 0$ ou $f(s)$ sucessor, é claro que, para todo $n < \omega$, $f(s^\frown\langle n\rangle)$ está bem definida. Suponha então que $f(s)$ seja limite. Sendo assim, $f(s)$ é um ponto de acumulação de $f(s) = [0, f(s)[$. Como está

[13] Sob $\mathbf{AC}_\omega$, esta asserção é uma consequência imediata do seguinte fato: como ω_1 é ordinal limite, tem-se que ω_1 é um ponto de acumulação de ω_1 em $\omega_1 + 1$, o que implica que $\omega_1 \in \overline{\omega_1}^{\omega_1+1}$. Contudo, sob $\mathbf{AC}_\omega$, tem-se que ω_1 não é limite de sequência alguma em ω_1 (pelo Corolário 2.2.4) e que, em um espaço métrico qualquer, todo ponto aderente a um dado subconjunto desse espaço é limite de alguma sequência nesse subconjunto (pelo Teorema 2.2.5).

sendo suposto que a métrica d induz a topologia da ordem sobre ω_1+1, segue então que $B\left(f(s), \dfrac{1}{2^n}\right) \cap [0, f(s)[\neq \emptyset$. Logo, conclui-se que, para todo $n<\omega$ e toda sequência $s \in {}^{<\omega}\omega$, $f\left(s^\frown\langle n\rangle\right)$ está bem definida.

Afirmamos que, para toda sequência $s \in {}^{<\omega}\omega$ tal que $f(s)$ é limite, o conjunto $\{f\left(s^\frown\langle n\rangle\right) : n<\omega\}$ é cofinal em $f(s)$. Com efeito: pela definição dada para f, tem-se que, para todo $n<\omega$ e toda sequência $s \in {}^{<\omega}\omega$ tal que $f(s)$ é limite, $f\left(s^\frown\langle n\rangle\right) < f(s)$. Assim sendo, basta mostrar que, para todo $\xi < f(s)$, ξ não é uma cota superior para $\{f\left(s^\frown\langle n\rangle\right) : n<\omega\}$. Para verificar isso, tome um $\xi < f(s)$ qualquer. Considere então o conjunto $F := [0,\xi]$. Claramente, tem-se que F é fechado em ω_1+1 e que $f(s) \notin F$. Segue disso que $d(f(s), F) > 0$. De $\mathbb{R}$ ser corpo ordenado arquimediano, segue facilmente que existe um $m<\omega$ tal que $\dfrac{1}{2^m} < d(f(s), F)$. Com isso, pode-se concluir que $f\left(s^\frown\langle m\rangle\right) \notin F$. De fato: se tivéssemos $f\left(s^\frown\langle m\rangle\right) \in F$, então teríamos $d(f(s), F) \leqslant d\left(f(s), f\left(s^\frown\langle m\rangle\right)\right)$. Como, por construção, $f\left(s^\frown\langle m\rangle\right) \in B\left(f(s), \dfrac{1}{2^m}\right)$, então $d\left(f(s), f\left(s^\frown\langle m\rangle\right)\right) < \dfrac{1}{2^m}$. Logo, concluiríamos que $d(f(s), F) < \dfrac{1}{2^m}$, uma contradição. Agora, por construção, tem-se também que $f\left(s^\frown\langle m\rangle\right) \in [0, f(s)[$. Consequentemente, $f\left(s^\frown\langle m\rangle\right) \in [0, f(s)[\setminus F =]\xi, f(s)[$ e, por conseguinte, ξ não é uma cota superior para $\{f\left(s^\frown\langle n\rangle\right) : n<\omega\}$. Conclui-se então que $f(s) = \sup\{f\left(s^\frown\langle n\rangle\right) : n<\omega\}$.

Afirmamos também que f é sobrejetora. De fato: suponha, por absurdo, que exista um $\alpha < \omega_1$ tal que $\alpha \notin im(f)$. Então, por arimética ordinal, existe um único $\zeta \leqslant \omega_1$ tal que $\alpha + \zeta = \omega_1$. Verifiquemos que, para todo $\xi \leqslant \zeta$, $\alpha + \xi \notin im(f)$. A prova disto é por indução sobre $\xi \leqslant \zeta$. Se for $\xi = 0$, é claro que $\alpha + \xi \notin im(f)$. Suponha então que ξ seja sucessor. Se $\alpha+\xi \in im(f)$, então existe um $s \in {}^{<\omega}\omega$ tal que $f(s) = \alpha+\xi$. Logo, $f\left(s^\frown\langle 0\rangle\right) = f(s) - 1 = (\alpha+\xi) - 1 = \alpha + (\xi - 1)$, o que implica que $\alpha + (\xi-1) \in im(f)$. Por contraposição, se $\alpha+(\xi-1) \notin im(f)$, então $\alpha+\xi \notin im(f)$. Suponha agora que ξ seja limite e que, para todo $\beta < \xi$, $\alpha + \beta \notin im(f)$. Admita que $\alpha+\xi \in im(f)$. Sendo assim, existe um $s \in {}^{<\omega}\omega$ tal que $f(s) = \alpha+\xi$. Com isso, tem-se que $\alpha < f(s)$ e, sendo ξ limite, que $f(s)$ é limite. Como $f(s) = \sup\{f\left(s^\frown\langle n\rangle\right) : n<\omega\}$, então existe um $m<\omega$ tal que $\alpha < f\left(s^\frown\langle m\rangle\right)$. Assim, por aritmética ordinal, segue que existe um único $\beta < \xi$ tal que $f\left(s^\frown\langle m\rangle\right) = \alpha+\beta$, implicando que $\alpha+\beta \in im(f)$, uma contradição. Então, conclui-se que $\alpha+\xi \notin im(f)$. Consequentemente, teremos que $[\alpha, \omega_1] \cap im(f) = \emptyset$, contrário ao fato de que $\omega_1 \in im(f)$. Logo, $im(f) = \omega_1 \cup \{\omega_1\} = \omega_1 + 1$ e, com isso, segue o afirmado.

Finalmente, como $\omega_1 + 1 \approx 1 + \omega_1 \approx \omega_1$, teremos então que ω_1 pode ser indexado por ${}^{<\omega}\omega$ e, por conseguinte, que ω_1 é enumerável (veja Corolário 2.1.3 e Proposição 1.1.14), uma contradição. Portanto, conclui-se que $\omega_1 + 1$ não é metrizável. ■

Teorema 4.5.5 (ZF). *Se* $\mathrm{cf}(\omega_1) = \omega$*, então* ω_1 *não é metrizável.*

Demonstração:

Sendo $\mathrm{cf}(\omega_1) = \omega$, podemos então fixar uma sequência $\langle \alpha_n \rangle_{n<\omega}$ (estritamente crescente e) cofinal em ω_1. Suponha, por absurdo, que ω_1 (com a topologia da ordem) seja um espaço métrico associado a uma métrica d. Defina então $f : {}^{<\omega}\omega \longrightarrow \omega_1$ pondo $f(\emptyset) := 0$ e, para todo $n < \omega$ e toda sequência $s \in {}^{<\omega}\omega \setminus \{\emptyset\}$,

$$f(\langle n \rangle) := \alpha_n \text{ e}$$

$$f(s^\frown\langle n \rangle) := \begin{cases} 0\,, & \text{se } f(s) = 0; \\ f(s) - 1\,, & \text{se } f(s) \text{ for sucessor;} \\ \min\left(B\left(f(s), \dfrac{1}{2^n}\right) \cap [0, f(s)[\right)\,, & \text{se } f(s) \text{ for limite.} \end{cases}$$

Tal como na demonstração do Teorema 4.5.4, pode-se verificar que f está bem definida. Além disso, tem-se que f é sobrejetora. De fato: se existisse um $\alpha < \omega_1$ tal que $\alpha \notin im(f)$, poderíamos concluir, utilizando os mesmos argumentos dados na prova do Teorema 4.5.4, que $[\alpha, \omega_1[\cap im(f) = \emptyset$. Como $\langle \alpha_n \rangle_{n<\omega}$ é cofinal em ω_1, teríamos que existe um $m < \omega$ tal que $\alpha < \alpha_m$, implicando que $\alpha_m \notin im(f)$, contrário ao fato de que $f(\langle m \rangle) = \alpha_m$. Consequentemente, teremos que ω_1 pode ser indexado por ${}^{<\omega}\omega$ e, por conseguinte, que ω_1 é enumerável (veja Corolário 2.1.3 e Proposição 1.1.14), uma contradição. Portanto, supondo-se que $\mathrm{cf}(\omega_1) = \omega$, tem-se que ω_1 não é metrizável. ∎

Visto que os únicos valores possíveis para $\mathrm{cf}(\omega_1)$ são ω e o próprio ω_1, então, para se estabelecer a não metrizabilidade de ω_1 em **ZF**, é suficiente mostrar que, sob a hipótese de que $\mathrm{cf}(\omega_1) = \omega_1$, tem-se também que ω_1 não é metrizável. É o que faremos agora, iniciando com o

Lema 4.5.6 (ZF). *Se* $\mathrm{cf}(\omega_1) = \omega_1$*, então valem os seguintes itens:*

(i) *Dados* F *e* G *subconjuntos fechados e ilimitados de* ω_1*, tem-se que* $F \cap G \neq \emptyset$.[14]

(ii) *Dado um subconjunto aberto* U *de* ω_1*, se existir um subconjunto fechado e ilimitado* F *de* ω_1 *contido em* U*, então existe um* $\alpha < \omega_1$ *tal que* $]\alpha, \omega_1[\subseteq U$.

Demonstração:

(i) : Sejam F e G subconjuntos fechados e ilimitados quaisquer de ω_1. Como F e G são subconjuntos não vazios de ω_1, então $\alpha_0 := \max\{\min(F), \min(G)\}$ está

[14] Tal como os autores do artigo [GoT95], daremos a prova deste item por simples cortesia, já que se pode provar, em **ZF**, o seguinte resultado mais geral: "dado um ordinal limite γ, se $\mathrm{cf}(\gamma) > \omega$, então a interseção de qualquer família bem ordenada de subconjuntos fechados e ilimitados de γ que tem tamanho menor do que $\mathrm{cf}(\gamma)$ é um subconjunto fechado e ilimitado de γ" (uma prova deste resultado é a demonstração do Lema 6.8 (a) em [Kun80, p. 78]).

bem definido. Suponha que, para algum $n < \omega$, esteja bem definida a sequência de ordinais $\langle \alpha_k \rangle_{k<n}$ em ω_1. Assim, tem-se que $\beta_n := \max\{\alpha_k : k < n\}$ está bem definido. Já que se tem F e G ilimitados em ω_1, então existem $\gamma \in F$ e $\delta \in G$ tais que $\beta_n < \gamma$ e $\beta_n < \delta$. Logo, $\gamma_n := \min\{\gamma \in F : \beta_n < \gamma\}$ e $\delta_n := \min\{\delta \in G : \beta_n < \delta\}$ estão bem definidos. Então, segue que $\alpha_{n+1} := \max\{\gamma_n, \delta_n\}$ está bem definido. Consequentemente, a sequência $\langle \alpha_n \rangle_{n<\omega}$ em ω_1 está bem definida, por indução finita. Como, por hipótese, $\mathrm{cf}(\omega_1) = \omega_1$, então $\alpha_* := \sup\{\alpha_n : n < \omega\} < \omega_1$. Pela construção de $\langle \alpha_n \rangle_{n<\omega}$, tem-se claramente que, para todo $n < \omega$, $\alpha_n < \alpha_{n+1}$. Disso, segue facilmente que α_* é limite.

Agora, afirmamos que $F \cap \alpha_*$ e $G \cap \alpha_*$ são ilimitados em α_*. Com efeito: tome um $\xi < \alpha_*$ qualquer. Ora, já que $\alpha_* = \sup\{\alpha_n : n < \omega\}$, então existe um $m < \omega$ tal que $\xi < \alpha_m$. Como, por construção, $\alpha_m \leqslant \beta_m$, $\beta_m < \gamma_m$ e $\beta_m < \delta_m$, segue então que $\xi < \gamma_m$ e $\xi < \delta_m$. Também, por construção, tem-se que $\gamma_m \in F$ e $\delta_m \in G$. Logo, existem $\gamma \in F$ e $\delta \in G$ tais que $\xi < \gamma$ e $\xi < \delta$. Já que $\xi < \alpha_*$ foi tomado qualquer, segue o afirmado. Então, como F e G são fechados e ilimitados em ω_1 e $\alpha_* < \omega_1$ é um ordinal limite, segue da Proposição 1.2.15 que $\alpha_* \in F \cap G$. Portanto, tem-se que $F \cap G \neq \emptyset$.

(ii) : Seja U um subconjunto aberto de ω_1 tal que algum subconjunto fechado e ilimitado F de ω_1 esteja contido em U. Suponha, por absurdo, que, para todo $\alpha < \omega_1$, $]\alpha, \omega_1[\nsubseteq U$. Logo, para todo $\alpha < \omega_1$, existe um $\beta \in]\alpha, \omega_1[$ tal que $\beta \in \omega_1 \setminus U$. Assim, considerando o conjunto $G := \omega_1 \setminus U$, tem-se que, para todo $\alpha < \omega_1$, existe um $\beta \in G$ tal que $\alpha < \beta$, i.e., que G é ilimitado em ω_1. É claro que G é fechado em ω_1, já que U é um aberto em ω_1. Então, pelo item (i), teremos que $\emptyset \neq F \cap G \subseteq U \cap (\omega_1 \setminus U)$, uma contradição. Portanto, conclui-se que existe um $\alpha < \omega_1$ tal que $]\alpha, \omega_1[\subseteq U$. ■

Teorema 4.5.7 (ZF). *Se* $\mathrm{cf}(\omega_1) = \omega_1$*, então* ω_1 *não é perfeito e, consequentemente, não é metrizável.*

Demonstração:

Considere o conjunto $F := \{\beta \in \omega_1 : \beta \text{ é limite}\}$. Afirmamos que F é fechado e ilimitado em ω_1. Com efeito: tome um $\xi < \omega_1$ qualquer. Assim, tem-se que ξ é enumerável. Disso, e de ω ser limite e enumerável, segue que $\xi + \omega$ é limite e enumerável. Logo, $\xi + \omega \in F$. Como $\xi < \xi + \omega$, então existe um $\beta \in F$ tal que $\xi < \beta$. Já que ξ foi tomado qualquer, segue então que F é ilimitado em ω_1. Além disso, F é fechado em ω_1, pois $\omega_1 \setminus F = \{0\} \cup \{\beta \in \omega_1 : \beta \text{ é sucessor}\} = \bigcup\{\{\beta\} : \beta \in \omega_1 \text{ e } \beta \text{ é um ponto isolado}\}$ é um aberto em ω_1 (por ser união de subconjuntos abertos de ω_1).

Agora, tome uma família enumerável $\mathcal{U}$ qualquer de subconjuntos abertos de ω_1 cuja interseção contenha F. Fixe então uma indexação $\{U_n : n < \omega\}$ de $\mathcal{U}$. Como, por hipótese, $\mathrm{cf}(\omega_1) = \omega_1$, então segue do item (ii) do Lema 4.5.6 que, para todo $n < \omega$, existe um $\alpha < \omega_1$ tal que $]\alpha, \omega_1[\subseteq U_n$. Então, tem-se que $\alpha_n := \min\{\alpha \in \omega_1 :]\alpha, \omega_1[\subseteq U_n\}$

está bem definido. Considere agora $\alpha_* := \sup\{\alpha_n : n < \omega\}$. Como $\alpha_* + 1 < \omega_1$ é sucessor, tem-se então que $\alpha_* + 1 \notin F$. Ora, para cada $n < \omega$, tem-se que $\alpha_n \leqslant \alpha_*$ e $]\alpha_n, \omega_1[\subseteq U_n$. Logo, para todo $n < \omega$, $]\alpha_*, \omega_1[\subseteq U_n$. Segue disso que $\alpha_* + 1 \in \bigcap\limits_{n<\omega} U_n$. Assim, tem-se que $\alpha_* + 1 \in \left(\bigcap\limits_{n<\omega} U_n\right) \setminus F$. Como $\mathcal{U}$ foi tomada qualquer, segue então que F é um subconjunto fechado de ω_1 que não é G_δ em ω_1. Portanto, tem-se que ω_1 não é perfeito e, consequentemente, não é metrizável (pela Proposição 1.2.14). ■

Finalmente, podemos encerrar a presente seção com a já esperada consequência dos Teoremas 4.5.5 e 4.5.7, a qual está expressa no seguinte

Teorema 4.5.8 (ZF). *ω_1 não é metrizável.* ■

Apêndice A

Relações entre AC, BPI e a existência de subconjuntos não mensuráveis de $\mathbb{R}$

No presente apêndice, iremos apresentar as construções de Vitali e de Sierpiński (com as quais provaremos a existência de subconjuntos não Lebesgue-mensuráveis de $\mathbb{R}$ na presença, respectivamente, de **AC** e de **BPI**) e, ao final, apresentaremos um breve comentário sobre os modelos de Halpern–Lévy e de Solovay.

A.1 Construção de Vitali

No início dos anos de 1900, Giuseppe Vitali construiu o primeiro exemplo de subconjunto não Lebesgue-mensurável de $\mathbb{R}$ de que se tem conhecimento. Precisamente, a construção de Vitali foi publicada em seu trabalho de 1905, intitulado "Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta". Na presente seção, apresentaremos a construção de um subconjunto não Lebesgue-mensurável de $\mathbb{R}$ que segue essencialmente a mesma linha de argumentação da construção original de Vitali. Com este intuito, comecemos por dar a seguinte

Definição A.1.1. Sejam X um conjunto, E uma relação de equivalência sobre X e $S \subseteq X$. Diz-se que S é um **sistema completo de representantes módulo** E se, para todo $x \in X$, existir um único $y \in S$ tal que $\langle x, y \rangle \in E$. Por simplicidade, será adotada a sigla SCR para "sistema completo de representantes". △

Um resultado que estabelece a equivalência entre **AC** e a existência de sistemas completos de representantes é o seguinte e interessante

Fato A.1.2 (ZF). *São equivalentes:*

(i) **AC**.

(ii) *Dados um conjunto X e uma relação de equivalência E sobre X, existe um SCR módulo E.* □

Utilizando-se a versão de **AC** que declara que: "para toda família disjunta de conjuntos não vazios, existe um conjunto que possui exatamente um elemento em comum com cada elemento dessa família", pode-se provar facilmente o Fato A.1.2. Agora, para seguirmos com a construção de Vitali, considere a relação binária R sobre $[0, 1]$ que é definida pela seguinte sentença:

$$\text{para todo } x, y \in [0, 1]\,, \langle x, y\rangle \in R \text{ se, e somente se, } (x - y) \in \mathbb{Q}.$$

É fácil ver que R é uma relação de equivalência. Diremos então que um $V \subseteq [0, 1]$ é um **conjunto de Vitali** se V for um SCR módulo R. Em virtude desta definição, segue imediatamente do Fato A.1.2 o seguinte

Lema A.1.3 (AC). *Existe um conjunto de Vitali.* ■

Com este último resultado em mãos, podemos então encerrar a presente seção apresentando a construção de Vitali para o seguinte

Exemplo A.1.4 (Vitali (1905 apud [Jec73]), **AC**). *Existe um subconjunto não Lebesgue-mensurável de $\mathbb{R}$.*

Construção:

Pelo Lema A.1.3, pode-se fixar um conjunto de Vitali $V \subseteq [0, 1]$. Para cada $x \in \mathbb{R}$, considere o conjunto $V + x := \{z \in \mathbb{R} : \exists\, u \in V\, (z = u + x)\}$. Afirmamos que a família $\{V + x : x \in \mathbb{Q}\}$ é disjunta. Com efeito: suponha que existam $x, y \in \mathbb{Q}$ tais que $(V + x) \cap (V + y) \neq \emptyset$. Sendo assim, existe um $z \in (V + x) \cap (V + y)$. Então, pode-se fixar $u, v \in V$ tais que $u + x = z = v + y$, o que implica que $u - v = y - x$. Já que $x, y \in \mathbb{Q}$, então $(x - y) \in \mathbb{Q}$, i.e., $\langle u, v\rangle \in R$. Já que V é um SCR módulo R, $u, v \in V$ e $\langle u, u\rangle \in R$, segue que $u = v$. Logo, $y - x = 0$, i.e., $x = y$. Então, por contraposição, tem-se que, para todo $x, y \in \mathbb{Q}$ tais que $x \neq y$, $(V + x) \cap (V + y) = \emptyset$, concluindo-se o afirmado. Por conseguinte, a família $\{V + x : x \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]\}$ é disjunta.

Agora, afirmamos que $[0, 1] \subseteq \bigcup_{x \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (V + x) \subseteq [-1, 2]$. Com efeito: tome um $z \in [0, 1]$ qualquer. Como V é um SCR módulo R, então existe um único $w \in V$ tal que $\langle z, w\rangle \in R$, i.e., $(z - w) \in \mathbb{Q}$. Considere então $y := z - w$. Note que $y \in [-1, 1]$, já que $z, w \in V \subseteq [0,1]$. Logo, $y \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$. Como $z = w + y$, tem-se então que $z \in \bigcup_{x \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (V + x)$. Como z foi tomado qualquer, segue que $[0,1] \subseteq \bigcup_{x \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (V + x)$. Tome agora um $z \in \bigcup_{x \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (V + x)$ arbitrário. Então, existe um $y \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$ tal que $z \in V + y$. Por conseguinte, existe um $u \in V$ tal que $z = u + y$. Já que $u \in [0,1]$ e $y \in [-1,1]$, é claro que $z \in [-1,2]$. Como z foi tomado arbitrário, segue que $\bigcup_{x \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (V + x) \subseteq [-1,2]$.

Notando que $\mathbb{Q} \cap [-1,1] \subseteq \mathbb{Q}$ é enumerável (pelo Corolário 1.1.16), fixe uma indexação $\{x_n : n \in \omega \setminus 1\}$ de $\mathbb{Q} \cap [-1,1]$. Com isso, tem-se que:

$$[0,1] \subseteq \bigcup_{n \geqslant 1} (V + x_n) \subseteq [-1,2]. \tag{*}$$

Agora, denote por m a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$ e suponha, por absurdo, que V seja Lebesgue-mensurável. Já que m é invariante por translações, pode-se então concluir que, para todo $n \in \omega \setminus 1$, $V + x_n$ é Lebesgue-mensurável e $m(V + x_n) = m(V)$. Como m é monótona e associa a cada intervalo em $\mathbb{R}$ o seu comprimento, segue então de (*) que:

$$1 = m([0,1]) \leqslant m\left(\bigcup_{n \geqslant 1} (V + x_n)\right) \leqslant m([-1,2]) = 3. \tag{**}$$

Além disso, pelo fato de m ser σ-aditiva e de a família $\{V + x_n : n \in \omega \setminus 1\}$ ser disjunta, tem-se que $m\left(\bigcup_{n \geqslant 1} (V + x_n)\right) = \sum_{n \geqslant 1} m(V + x_n) = \sum_{n \geqslant 1} m(V)$. Então, por (**), conclui-se que $1 \leqslant \sum_{n \geqslant 1} m(V) \leqslant 3$. Se for $m(V) = 0$, então $1 \leqslant \sum_{n \geqslant 1} m(V) = 0$, o que é um absurdo. Se for $m(V) > 0$, então $3 \geqslant \sum_{n \geqslant 1} m(V) = \infty$, o que é outro absurdo. Portanto, tem-se que V não é Lebesgue-mensurável. $\square$

A.2 Construção de Sierpiński

Em 1938, Wacław Sierpiński apresentava, em seu artigo intitulado "Fonctions additives non complètement additives et fonctions non mesurables", sua construção de um subconjunto não Lebesgue-mensurável de $\mathbb{R}$. Conforme [Jec73, Problema 10, p. 7], usa-se, para a referida construção, uma versão fraca de **AC** que pode ser substituída pela asserção **UF** (que declara que: "para todo conjunto infinito X, existe um ultrafiltro livre sobre X"). Destaquemos que **UF** é uma consequência de **BPI**, pois **UT** implica **UF** em **ZF**. Na presente seção, utilizaremos **UF** para apresentar uma construção que difere ligeiramente da construção original de Sierpiński, mas que segue essencialmente a mesma linha de argumentação desta última. Antes dessa construção, façamos as seguintes considerações:

Vimos na prova de (9) $\Longrightarrow$ (10) do Teorema 4.2.1 que, entre o conjunto

$$\mathcal{A} = \big\{ s \in {}^{(\omega\setminus 1)}2 : s = \langle x_n \rangle_{n \geqslant 1} \text{ não é constante e } \{n \in \omega \setminus 1 : x_n = 0\} \text{ é infinito} \big\}$$

e o intervalo $]0,1[$, existe a seguinte bijeção: $\beta : \mathcal{A} \longrightarrow\ ]0,1[$ definida por $\beta(s) = \displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{x_n}{2^n}$. Denotando por s_0 a sequência constante nula e tomando o conjunto $\mathcal{A}' := \mathcal{A} \cup \{s_0\}$, vê-se facilmente que a seguinte função também é uma bijeção:

$$\varphi : \mathcal{A}' \longrightarrow [0,1[\text{ definida por } \varphi(s) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{x_n}{2^n}, \text{ i.e., } \varphi(s) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } s = s_0; \\ \beta(s)\,, & \text{se } s \in \mathcal{A}. \end{cases}$$

Em outras palavras, pode-se concluir que: para todo $x \in [0,1[$, existe uma única sequência $s = \langle x_n \rangle_{n \geqslant 1} \in \mathcal{A}'$ para a qual $x = \varphi(s)$. Agora, observe que, dada uma sequência $s = \langle x_n \rangle_{n \geqslant 1}$ em 2, se $1 = \displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{x_n}{2^n}$, então s é constante de valor 1, implicando que $s \notin \mathcal{A}'$. Por tal motivo, e por termos a bijeção φ, que iremos nos restringir ao intervalo $[0,1[$ em quase toda a argumentação que segue.

Sejam $x \in [0,1[$ e $s_x \in \mathcal{A}'$ a única sequência tal que $x = \varphi(s_x)$. Diremos que s_x é **a representação diádica** de x. Além disso, diremos que x é **diádico exato** se s_x for quase constante de valor 0. Com isso, tem-se que:

(*) para todo $x \in [0,1[$, se x não for diádico exato, então $(1-x) \in [0,1[$ e $s_{(1-x)} = \langle y_n \rangle_{n \geqslant 1}$ é tal que, para todo $n \in \omega \setminus 1$, $y_n = 1 - x_n$.

Tome, para cada $x \in [0,1[$, o conjunto $A_x := \{n \in \omega \setminus 1 : s_x(n) = x_n = 1\}$ e note que este conjunto está bem definido, já que s_x é unicamente determinada por x. Considere então, para cada ultrafiltro livre $\mathcal{U}$ sobre $\omega \setminus 1$, o conjunto $X_{\mathcal{U}} := \{x \in [0,1[: A_x \in \mathcal{U}\}$. Considere agora o conjunto $X'_{\mathcal{U}} := \{y \in [0,1] : \exists\, x \in X_{\mathcal{U}}\, (y = 1 - x)\}$. Considere também o conjunto $E := \{x \in [0,1[: x \text{ é diádico exato}\}$. Utilizando-se (*), verifica-se facilmente que: para todo $x \in [0,1[$, se x não for diádico exato, então $A_{(1-x)}$ está bem definido e $A_{(1-x)} = (\omega \setminus 1) \setminus A_x$. Conclui-se disso e do Corolário 1.1.40 que: para todo ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre $\omega \setminus 1$ e todo $x \in [0,1[$, se x não for diádico exato, então ou $A_x \in \mathcal{U}$ ou $A_{(1-x)} \in \mathcal{U}$. Com isso, mostra-se que: para todo ultrafiltro livre $\mathcal{U}$ sobre $\omega \setminus 1$,

$$\{E, X_{\mathcal{U}}, X'_{\mathcal{U}}\} \text{ é uma família disjunta tal que } [0,1[\, = E \cup X_{\mathcal{U}} \cup X'_{\mathcal{U}}. \tag{$\dagger$}$$

Em toda a argumentação que segue, trabalharemos com a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$ e a denotaremos por m.[1] Agora, sejam $d \in [0,1]$, $x \in \mathbb{R}$ e $A \subseteq \mathbb{R}$. Considere, para cada $\varepsilon > 0$,

$$d_x(A)(\varepsilon) := \frac{m(A \cap [x-\varepsilon, x+\varepsilon])}{m([x-\varepsilon, x+\varepsilon])} = \frac{m(A \cap [x-\varepsilon, x+\varepsilon])}{2\varepsilon} \leqslant 1.$$

Diremos que A **tem densidade** d **em** x se existir $\lim_{\varepsilon \to 0} d_x(A)(\varepsilon)$ e este for igual a d. Neste caso, d será denotado por $d_x(A)$. Tome a sequência $\langle \varepsilon_n \rangle_{n \geqslant 1}$ em $]0,1[$ tal que, para todo $n \in \omega \setminus 1$, $\varepsilon_n := \dfrac{1}{2^{n+1}}$. Como $\varepsilon_n \to 0$, se valer que A tem densidade d em x, então $d_x(A) = \lim_{n\to\infty} d_x(A)(\varepsilon_n) = \lim_{n\to\infty} m\left(A \cap \left[x - \dfrac{1}{2^{n+1}}, x + \dfrac{1}{2^{n+1}}\right]\right) 2^n$. Finalmente, considere o conjunto $\phi(A) := \{x \in \mathbb{R} : d_x(A) = 1\}$. Um resultado importante para o nosso propósito, pois estabelece uma relação entre A e $\phi(A)$ em termos da medida de Lebesgue, é o seguinte

Teorema A.2.1 (Teorema da Densidade de Lebesgue, **ZF**)**.** *Dado um $A \subseteq \mathbb{R}$, se A for Lebesgue-mensurável, então $m(A \triangle \phi(A)) = 0$.* ∎

Uma prova do Teorema da Densidade de Lebesgue pode ser encontrada no livro [Oxt80, p. 17].

Prossigamos com a nossa argumentação. Para cada $z \in \mathbb{R}$, denote por $\lfloor z \rfloor$ a parte inteira de z e por $z \bmod 1$ a parte fracionária de z, i.e., a diferença $z - \lfloor z \rfloor$. Agora, seja

[1] É interessante destacar que poderíamos ter adotado uma argumentação mais conjuntista, como esta que segue: considere o conjunto $Fn(\omega, 2) := \{f : f$ é função, $dom(f) \subseteq \omega$, $|dom(f)| < \omega$ e $im(f) \subseteq 2\}$. Tome, para cada $g \in Fn(\omega,2)$, o conjunto $[g] := \{f \in {}^{\omega}2 : g \subseteq f\}$. Considere então a σ-álgebra $\mathcal{B}$ gerada pelo conjunto $\{[g] : g \in Fn(\omega,2)\}$. A medida-produto μ em ${}^{\omega}2$ é definida em $\mathcal{B}$ de forma que satisfaça a seguinte condição: para todo $g \in Fn(\omega,2)$, $\mu([g]) = 2^{-|dom(g)|}$. É um fato notável que se pode utilizar a medida μ para obter uma construção alternativa da medida de Lebesgue em $[0,1]$. Isto é feito da seguinte maneira: para cada $g \in Fn(\omega,2)$, associa-se ao "boreliano básico" $[g]$ um subintervalo $\left[\dfrac{j}{2^k}, \dfrac{j+1}{2^k}\right[$ de $[0,1]$, para certos $j < \omega$ e $k \in \omega \setminus 1$, através da função $\phi : {}^{\omega}2 \longrightarrow [0,1]$ definida por $\phi(f) = \sum_{n<\omega} \dfrac{f(n)}{2^{n+1}}$. Por exemplo, para a sequência finita $g = \langle 0,1,0 \rangle \in Fn(\omega,2)$, $\phi[[g]] = \left[\dfrac{2}{2^3}, \dfrac{3}{2^3}\right[= \left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{8}\right[$. A função ϕ preserva a medida dos "intervalos básicos", i.e., para todo $g \in Fn(\omega,2)$, se $\phi[[g]] = \left[\dfrac{j}{2^k}, \dfrac{j+1}{2^k}\right[$, para certos $j < \omega$ e $k \in \omega \setminus 1$, então $\mu([g]) = m\left(\left[\dfrac{j}{2^k}, \dfrac{j+1}{2^k}\right[\right) = \dfrac{1}{2^k}$. Desse modo, tem-se que a construção usual da medida-produto μ em ${}^{\omega}2$ (por extensão da medida definida em $\mathcal{B}$, via medida exterior) nos fornece uma medida em ${}^{\omega}2$ que coincide com a de Lebesgue definida sobre todos os "intervalos básicos" e, por conseguinte, sobre todos os borelianos de $[0,1]$. Logo, a medida-produto μ é equivalente à medida de Lebesgue m em $[0,1]$, pois a medida de Lebesgue é a única que estende a medida de comprimento dos intervalos a todos os borelianos. Portanto, em virtude dessa argumentação, poderíamos ter considerado o conjunto ${}^{\omega}2$ munido da medida-produto μ (que é a medida de Lebesgue neste conjunto) em lugar de $[0,1]$ munido da medida de Lebesgue m.

$A \subseteq [0,1[$. Diremos que A é um **conjunto de cauda** se valer a seguinte condição: para todo $x \in A$ e todo $y \in [0,1[$, se y for diádico exato, então $(x+y) \bmod 1 \in A$. Por esta razão, costuma-se dizer que um conjunto de cauda é aquele que satisfaz a condição de "invariância por translações por diádicos exatos". Pode-se provar facilmente a seguinte caracterização: para todo $A \subseteq [0,1[$, A é um conjunto de cauda se, e somente se, valer a seguinte condição: para todo $x \in A$ e todo $y \in [0,1[$, se as representações diádicas $\langle x_n \rangle_{n \geqslant 1}$ e $\langle y_n \rangle_{n \geqslant 1}$, respectivamente, de x e de y possuírem uma mesma "cauda" (i.e., se existir um natural $k \geqslant 1$ tal que, para todo natural $n \geqslant k$, $x_n = y_n$), então $y \in A$.

Como consequência desta caracterização, tem-se que: para todo ultrafiltro livre $\mathcal{U}$ sobre $\omega \setminus 1$, o conjunto $X_{\mathcal{U}}$ é um conjunto de cauda. De fato: tome $x \in X_{\mathcal{U}}$ e $y \in [0,1[$ quaisquer. Sejam $\langle x_n \rangle_{n \geqslant 1}$ e $\langle y_n \rangle_{n \geqslant 1}$, respectivamente, as representações diádicas de x e de y. Suponha que exista um natural $k \geqslant 1$ tal que, para todo natural $n \geqslant k$, $x_n = y_n$. Agora, note que, para todo $n \in A_x \setminus A_y$, $x_n \neq y_n$. Assim, pode-se concluir que, para todo $n \in A_x \setminus A_y$, $n < k$. Por conseguinte, $A_x \setminus A_y$ é finito. Como $\mathcal{U}$ é um ultrafiltro livre sobre $\omega \setminus 1$ e $A_x \in \mathcal{U}$, conclui-se então que $A_y \in \mathcal{U}$ (pela Proposição 1.1.42). Logo, $y \in X_{\mathcal{U}}$. Portanto, já que $x \in X_{\mathcal{U}}$ e $y \in [0,1[$ foram tomados quaisquer, segue que $X_{\mathcal{U}}$ é um conjunto de cauda.

Além disso, como consequência do Teorema da Densidade de Lebesgue, tem-se o seguinte, e essencial para o nosso propósito,

Teorema A.2.2 (Lei zero-um de Kolmogorov, **ZF**). *Dado um $A \subseteq [0,1[$, se A for um conjunto de cauda Lebesgue-mensurável, então ou $m(A) = 0$ ou $m(A) = 1$.*

Demonstração:

Suponha que $A \subseteq [0,1[$ seja um conjunto de cauda Lebesgue-mensurável e que $m(A) > 0$. Como A é Lebesgue-mensurável, segue do Teorema da Densidade de Lebesgue que $m(A \bigtriangleup \phi(A)) = 0$. Já que $m(A) \leqslant m(A \cup \phi(A)) = m(A \bigtriangleup \phi(A)) + m(A \cap \phi(A))$, então $m(A) \leqslant m(A \cap \phi(A))$. Logo, $m(A \cap \phi(A)) > 0$, implicando que $A \cap \phi(A) \neq \emptyset$. Fixe então um $x \in A \cap \phi(A)$. Já que $m(A \cap \phi(A)) > 0$, podemos supor que $x > 0$. Agora, tome um $\varepsilon > 0$ qualquer. Como $d_x(A) = 1$, então segue que existe um natural $k \geqslant 1$ tal que, para todo natural $n \geqslant k$,

$$1 - \varepsilon < d_x(A)(\varepsilon_n) = m\left(A \cap \left[x - \frac{1}{2^{n+1}}, x + \frac{1}{2^{n+1}}\right]\right) 2^n \leqslant 1.$$

Em particular, tem-se que $m\left(A \cap \left[x - \frac{1}{2^{k+1}}, x + \frac{1}{2^{k+1}}\right]\right) 2^k > 1 - \varepsilon$. Note que um tal natural $k \geqslant 1$ pode ser tomado de forma que se tenha $x \geqslant \frac{1}{2^{k+1}}$. Como m é invariante por translações, A é um conjunto de cauda e $x \in A$, pode-se verificar, sem muita dificuldade, que: para todo intervalo $I \subseteq [0,1[$ tal que $m(I) = \dfrac{1}{2^k}$,

$$m\left(A \cap \left[x - \frac{1}{2^{k+1}}, x + \frac{1}{2^{k+1}}\right]\right) = m(A \cap I). \tag{††}$$

Para cada natural $j < 2^k$, considere o intervalo $I_j := \left[\dfrac{j}{2^k}, \dfrac{j+1}{2^k}\right[$ e note que $m(I_j) = \dfrac{1}{2^k}$. Note também que a família $\left\{I_j : j < 2^k\right\}$ é disjunta e que $[0,1[= \bigcup_{j<2^k} I_j$. Então, usando-se o fato de a família $\left\{A \cap I_j : j < 2^k\right\}$ ser disjunta e a igualdade de medidas dada por (††), tem-se que:

$$1 = m([0,1[) \geqslant m(A) = m(A \cap [0,1[) = m\left(A \cap \bigcup_{j<2^k} I_j\right) = m\left(\bigcup_{j<2^k} (A \cap I_j)\right) =$$

$$= \sum_{j<2^k} m(A \cap I_j) = \sum_{j<2^k} m\left(A \cap \left[x - \frac{1}{2^{k+1}}, x + \frac{1}{2^{k+1}}\right]\right) =$$

$$= m\left(A \cap \left[x - \frac{1}{2^{k+1}}, x + \frac{1}{2^{k+1}}\right]\right) 2^k > 1 - \varepsilon.$$

Logo, $1 - \varepsilon < m(A) \leqslant 1$. Como $\varepsilon > 0$ foi tomado qualquer, se fosse $m(A) < 1$, então poderíamos tomar $\varepsilon = 1 - m(A) > 0$ e concluir que $m(A) = 1 - \varepsilon < m(A)$, o que é um absurdo. Portanto, tem-se que $m(A) = 1$. ■

Com a Lei zero-um de Kolmogorov, podemos então alcançar o nosso propósito de apresentar uma versão da construção original de Sierpiński. Assim sendo, podemos finalmente encerrar a presente seção apresentando o seguinte

Exemplo A.2.3 (Sierpiński (1938 apud [Jec73]), **UF**). *Existe um subconjunto não Lebesgue-mensurável de* $\mathbb{R}$.

Construção:

Suponha que **UF** valha. Fixe então um ultrafiltro livre $\mathcal{U}$ sobre $\omega \setminus 1$. Por (†), tem-se que $\{E, X_{\mathcal{U}}, X'_{\mathcal{U}}\}$ é uma família disjunta tal que $[0,1[= E \cup X_{\mathcal{U}} \cup X'_{\mathcal{U}}$. Suponha, por absurdo, que $X_{\mathcal{U}}$ seja Lebesgue-mensurável. Considere a função $\rho : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ definida por $\rho(x) = 1 - x$. Note que ρ é a reflexão em torno do ponto $\dfrac{1}{2}$. Note ainda que $\rho[X_{\mathcal{U}}] = X'_{\mathcal{U}}$. Como m é invariante por reflexões em torno de um ponto e $X_{\mathcal{U}}$ é suposto Lebesgue-mensurável, pode-se então concluir que $X'_{\mathcal{U}}$ é Lebesgue-mensurável e que $m(X'_{\mathcal{U}}) = m(X_{\mathcal{U}})$. Visto que $X_{\mathcal{U}}$ é um conjunto de cauda, segue da Lei zero-um de Kolmogorov que: ou $m(X_{\mathcal{U}}) = 0$ ou $m(X_{\mathcal{U}}) = 1$. Além disso, vê-se facilmente que:

$$E \preceq \left\{s \in {}^{(\omega\setminus 1)}2 : s \text{ é quase constante de valor } 0\right\} \preceq {}^{<\omega}2 \preceq {}^{<\omega}\omega.$$

Já que ${}^{<\omega}\omega \approx \omega$ (pelo Corolário 2.1.3), tem-se então que $E \preceq \omega$. Disso, segue que E é enumerável (pela Proposição 1.1.14) e, por conseguinte, que E é Lebesgue-mensurável, com $m(E) = 0$. Então, por ser a união $E \cup X_{\mathcal{U}} \cup X'_{\mathcal{U}}$ disjunta e igual a $[0,1[$, $m(E) = 0$, $m(X'_{\mathcal{U}}) = m(X_{\mathcal{U}})$ e $m(X_{\mathcal{U}}) \in \{0,1\}$, conclui-se que:

$$1 = m([0,1[) = m(E \cup X_{\mathcal{U}} \cup X'_{\mathcal{U}}) = m(E) + m(X_{\mathcal{U}}) + m(X'_{\mathcal{U}}) =$$

$$= 2\,m(X_{\mathcal{U}}) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } m(X_{\mathcal{U}}) = 0; \\ 2\,, & \text{se } m(X_{\mathcal{U}}) = 1. \end{cases}$$

O que é um absurdo. Portanto, tem-se que $X_{\mathcal{U}}$ é um subconjunto de $[0,1[$ que não é Lebesgue-mensurável. □

A.3 Sobre os modelos de Halpern–Lévy e de Solovay

No final dos anos de 1960, James D. Halpern e Azriel Lévy usaram o método de "forcing" para construir um modelo de **ZF** no qual **BPI** é verdadeiro, mas **AC** é falso. Com a construção deste modelo – comumente chamado na literatura matemática de o "modelo de Halpern–Lévy" – pôde-se garantir que **BPI** é uma asserção estritamente mais fraca que **AC**. Assim, pôde-se encarar **BPI** não apenas como uma consequência de **AC**, mas também como um princípio maximal que pode continuar válido mesmo na ausência de **AC**. É óbvio que, em tal modelo, são válidas todas as asserções equivalentes a **BPI** (por exemplo, $\mathbf{TT}_{T_2}$ e o Teorema de Banach–Alaoglu da Análise Funcional), bem como todas as suas consequências importantes para a Análise Matemática (como o Teorema de Hahn–Banach e a existência de subconjuntos não Lebesgue-mensuráveis de $\mathbb{R}$).

É interessante destacar que: no modelo de Halpern–Lévy, existe um conjunto com uma propriedade bastante "estranha" a nossa intuição, mas certamente uma propriedade bem interessante. Tal conjunto é "um subconjunto denso de $\mathbb{R}$ que é Dedekind-finito". Como justificado mais adiante, a existência desse conjunto garante que **DC** é falso no modelo de Halpern–Lévy. Mais que isso: no modelo de Halpern–Lévy, podemos utilizar esse subconjunto infinito de $\mathbb{R}$ que não possui subconjunto infinito enumerável para obter contra-exemplos para as "caracterizações por sequências" para pontos aderentes a um conjunto e para continuidade em um ponto, tal como o fizemos no Capítulo 4, quando trabalhamos no modelo básico de Cohen.

Quanto ao chamado "modelo de Solovay", este é um modelo de

$$\mathbf{ZF} + \mathbf{DC} + \text{“todo subconjunto de } \mathbb{R} \text{ é Lebesgue-mensurável”},$$

que foi apresentado por Robert M. Solovay em 1970. Neste modelo, é válida a asserção "todo conjunto infinito é Dedekind-infinito", já que **DC** implica $\mathbf{AC}_\omega$ que, por sua vez, implica a referida asserção. Com esta mesma justificativa, conclui-se que **DC** é falso no modelo de Halpern–Lévy. Em contraste com este último, no modelo de Solovay são válidas as "caracterizações por sequências" para pontos aderentes a um conjunto e para continuidade em um ponto, visto que $\mathbf{AC}_\omega$ é suficiente para demonstrar tais resultados. Contudo, no modelo de Solovay, tem-se que **BPI** é falso, pois este princípio (na verdade, a sua consequência **UF**) é suficiente, como vimos, para a construção de um subconjunto não Lebesgue-mensurável de $\mathbb{R}$. Pelo mesmo motivo, tem-se também que **AC** é falso no modelo de Solovay.

Um aspecto muito importante do modelo de Solovay são as relações que este tem com os chamados "grandes cardinais" ou "cardinais inacessíveis". A primeira delas é que existe um grande cardinal em tal modelo. Este fato é devido ao seguinte resultado que Stanisław Ulam apresentou em um trabalho seu de 1930:

> "Se existirem um conjunto X e uma medida μ sobre X que seja não trivial (i.e., todo subconjunto unitário de X tem medida nula com relação a μ), σ-aditiva, probabilística e que esteja definida em todos os subconjuntos de X, então existe um cardinal inacessível."

A segunda delas é que o modelo de Solovay foi construído assumindo-se que existe um modelo de **ZFC** + "existe um cardinal inacessível". Um fato notável é que não se pode evitar grandes cardinais, se desejarmos construir um modelo em que **DC** valha e no qual todo subconjunto de $\mathbb{R}$ é Lebesgue-mensurável. Isto foi justificado por Saharon Shelah em um trabalho seu de 1984, intitulado "Can you take Solovay's inaccessible away ?".

A conclusão a que chegamos com este breve comentário a respeito dos modelos de Halpern–Lévy e de Solovay está expressa no seguinte diagrama de não implicações:

$$\mathbf{DC} \overset{\text{Solovay}}{\not\Longrightarrow} \mathbf{AC} \overset{\text{Halpern–Lévy}}{\not\Longleftarrow} \mathbf{BPI}$$

$$\mathbf{DC} \overset{\text{Solovay}}{\not\Longrightarrow} \mathbf{BPI} \overset{\text{Halpern–Lévy}}{\not\Longrightarrow} \mathbf{DC}$$

Diagrama A.3.

Finalizemos a presente seção destacando que todas as informações dadas aqui foram obtidas na palestra "Cem Anos do Axioma da Escolha - IV: Horrores da matemática sem o Axioma da Escolha", a qual foi proferida pelo Prof. Samuel Gomes da Silva em outubro de 2008 (por ocasião da IV Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática).

Referências

[BeH98] BENTLEY, Herschel L.; HERRLICH, Horst. Countable choice and pseudometric spaces, *Topology Appl.*, v. **85**, no. 1 - 3, p. 153 -164, 1998.

[End77] ENDERTON, Herbert B. *Elements of Set Theory*. New York: Academic Press, c1977.

[Eng89] ENGELKING, Ryszard. *General Topology*. rev. compl. ed. Berlin: Heldermann, 1989. (Sigma Series in Pure Mathematics, **6**)

[Dal03] DE LA CRUZ, Omar et al. Metric spaces and the axiom of choice, *Math. Log. Quart.*, v. **49**, no. 5, p. 455 - 466, 2003.

[GoT95] GOOD, Chris; TREE, Ian J. Continuing horrors of topology without choice, *Topology Appl.*, v. **63**, no. 1, p. 79 - 90, 1995.

[Gut08] GUTIERRES, Gonçalo. On countable choice and sequential spaces, *Math. Log. Quart.*, v. **54**, no. 2, p. 145 -152, 2008.

[Gut04] GUTIERRES, Gonçalo. On first and second countable spaces and the axiom of choice, *Topology Appl.*, v. **143**, no. 1 - 3, p. 93 -103, 2004.

[Gut03] GUTIERRES, Gonçalo. Sequential topological conditions in $\mathbb{R}$ in the absence of the axiom of choice, *Math. Log. Quart.*, v. **49**, no. 3, p. 293 - 298, 2003.

[HrS97] HERRLICH, Horst; STRECKER, George E. When is $\mathbb{N}$ Lindelöf?, *Comment. Math. Univ. Carolinae*, v. **38**, no. 3, p. 553 - 556, 1997.

[Jec03] JECH, Thomas J. *Set Theory: The Third Millennium Edition, Revised and Expanded*. New York: Springer, c2003. (Springer Monographs in Mathematics)

[Jec73] JECH, Thomas J. *The Axiom of Choice*. Amsterdam: North-Holland, 1973. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, **75**)

[Ker00] KEREMEDIS, Kyriakos. The Compactness of $2^{\mathbb{R}}$ and the Axiom of Choice, *Math. Log. Quart.*, v. **46**, no. 4, p. 569 - 571, 2000.

[Ker05] KEREMEDIS, Kyriakos. Tychonoff Products of Two-Element Sets and Some Weakenings of the Boolean Prime Ideal Theorem, *Bull. Polish Acad. Sci. Math.*, v. **53**, no. 4, p. 349 - 359, 2005.

[Kun80] KUNEN, Kenneth. *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs.* Amsterdam: North-Holland, 1980. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, **102**)

[Myc64] MYCIELSKI, Jan. Two Remarks on Tychonoff's Product Theorem, *Bull. Polish Acad. Sci. Math.*, v. **12**, no. 8, p. 439 - 441, 1964.

[Oxt80] OXTOBY, John C. *Measure and Category: A Survey of the Analogies between Topological and Measure Spaces.* 2. ed. New York: Springer, 1980. (Graduate Texts in Mathematics, **2**)

[Sch06] SCHECHTER, Eric. Kelley's specialization of Tychonoff's Theorem is equivalent to the Boolean Prime Ideal Theorem, *Fund. Math.*, v. **189**, no. 3, p. 285 - 288, 2006.

[SiJ07] SILVA, Samuel G.; JESUS, João Paulo C. Cem anos do Axioma da Escolha: boa ordenação, Lema de Zorn e o Teorema de Tychonoff, *Matemática Universitária*, no. 42, p. 16 - 34, jun. 2007.

[Wil70] WILLARD, Stephen. *General Topology.* Reading, MA: Addison–Wesley, 1970. (Addison–Wesley Series in Mathematics)

Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática / Colegiado da Pós-Graduação em Matemática

Av. Adhemar de Barros, s/n, Campus Universitário de Ondina, Salvador - BA
CEP: 40170-110
<http://www.pgmat.ufba.br>