Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática - IM
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PGMAT
Dissertação de Mestrado

Estruturas Complexas Nilpotentes em Álgebras de Lie Solúveis.

Jaqueline Alexsandra de Souza Azevedo

Salvador-Bahia

Setembro de 2013

Estruturas Complexas Nilpotentes em Álgebras de Lie Solúveis

Jaqueline Alexsandra de Souza Azevedo

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. André Luís Godinho Mandolesi.

Salvador-Bahia

Setembro de 2013

Azevedo, Jaqueline Alexsandra de Souza.

Estruturas Complexas Nilpotentes em Álgebras de Lie Solúveis / Jaqueline Alexsandra de Souza Azevedo. – Salvador, 2013.

56 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. André Luís Godinho Mandolesi.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2013.

Referências bibliográficas.

1. Álgebra Linear 2. Álgebras de Lie. 3. Estruturas Complexas. I. Mandolesi, André Luís Godinho. II. Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática. III. Título.

CDU : 512.81

Estruturas Complexas Nilpotentes em Álgebras de Lie Solúveis .

Jaqueline Alexsandra de Souza Azevedo

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 19 de setembro de 2013.

Banca examinadora:

Prof. Dr. André Luís Godinho Mandolesi (Orientador)
UFBA

Prof. Dra. Rita de Cássia de Jesus Silva
UFBA

Prof. Dr. Evandro Carlos Ferreira dos Santos
UFBA

Dedicatória

Este trabalho é dedicado aos meus pais Ana e Hilário e aos meus irmãos Carlos e Everton.

Agradecimentos

Expresso minha gratidão às seguintes pessoas e instituições:

À CAPES, pelo apoio financeiro;

À secretaria e aos professores de pós-graduação do IM-UFBA, pela preocupação em solucionar questões acadêmicas nas quais eu estava diretamente envolvida;

Ao meu orientador André Luís Godinho Mandolesi, pela confiança e incentivo;

À banca examinadora, pelas valorosas contribuições;

Aos meus amigos do IM-UFBA, pelo apoio acadêmico. E aos meus amigos de fora, pela compreensão, os quais não citarei nomes para não cometer injustiças;

Aos meus pais Ana e Hilário e irmãos Carlos e Everton, pela paciência, incentivo a persistência e pela oportunidade que me deram de estudar.

“Sucesso e genialidade, são 10 por cento de inspiração e 90 por cento de transpiração”

(Albert Einstein)

Resumo

Considerando uma Álgebra de Lie $(\mathfrak{g}, [.,.])$ com estrutura complexa J, é possível definir em $\mathfrak{g}$ um novo colchete Lie $[*]_J$, de modo que se pode mostrar que os subespaços $\mathfrak{g}^{1,0}$ e $\mathfrak{g}^{0,1}$ são subálgebras de Lie isomorfas a $(\mathfrak{g}, [*]_J)$. Para tanto, neste trabalho serão consideradas apenas estruturas complexas integráveis.

Será mostrado também, que no caso em que essas subálgebras forem nilpotentes, então $(\mathfrak{g}, [.,.])$ será solúvel. Nesse sentido, será feita uma caracterização da Álgebras de Lie $(\mathfrak{g}, [*]_J)$ com estrutura complexa s-passos nilpotente, afim de estudar o comportamento do colchete de Lie original $[.,.]$, permitindo assim a construção de exemplos de Álgebras de Lie de $\dim = 6$.

Também, será mencionado o conceito de estrutura hipercomplexa, demonstrado alguns resultados algébricos envolvendo tal estrutura e exemplificando em casos de Álgebras de Lie de $\dim = 8$, afim de comentar sua importância em outros contextos matemáticos.

Palavras-chave: Álgebras de Lie; estruturas complexas.

Abstract

Considering a Lie Álgebra $(\mathfrak{g}, [.,.])$ with complex structure J, you can set in $\mathfrak{g}$, a new Lie bracket $[*]_J$, so that it is possible to show that the subspaces $\mathfrak{g}^{1,0}$ and $\mathfrak{g}^{0,1}$ are Lie subalgebras isomorphic to the $(\mathfrak{g}, [*]_J)$. Therefore, this work will be considered only integrated complex structures.

It will be shown also that in the case where these are nilpotent subalgebras, then $(\mathfrak{g}[.,.])$ is soluble. Accordingly, there will be a characterization of Lie algebras $(\mathfrak{g}, [*])$ with complex structure s-step nilpotent, in order to study the behavior of the original Lie bracket $[.,.]$, thus allowing the construction of examples of Lie algebras of $\dim = 6$.

Also, we mention the concept of hypercomplex structure, shown some results involving such algebraic structure and exemplifying in cases of Lie algebras of $\dim = 8$, in order to comment on its importance in other mathematical contexts.

Keywords: Lie Álgebras; Complex Structures.

Sumário

1 Introdução

Iniciado com os trabalhos de Sophus Lie no final do século XIX, as Álgebras de Lie surgiram com o propósito de estender uma teoria, análoga a teoria de Galois, ao estudo das equações diferenciais. A idéia de S. Lie de examinar os grupos de transformações lineares como obtidos através de soluções de equações diferenciais ordinárias, foi importante como ponto de partida para a teoria que chamamos hoje de "Álgebras de Lie".

Atualmente as Álgebras de Lie têm sido apontadas como um importante elemento de estudos, com aplicações em vários campos da Matemática e da Física. Além de serem estruturas algébricas extremamente atraentes por si mesmas, sua importância se deve ao fato delas codificarem muitas informações sobre a geometria dos Grupos de Lie correspondentes a elas.

Em particular, recentemente tem surgido interesse no estudo de estruturas complexas em Álgebras de Lie nilpotentes e solúveis, devido à sua relação com estruturas complexas e hipercomplexas em Grupos de Lie (ver [3]).

Uma estrutura complexa em uma Álgebra de Lie real $\mathfrak{g}$ é um endomorfismo J tal que $J^2 = -I$. No presente trabalho, veremos que no caso de uma estrutura complexa integrável J sobre uma Álgebra de Lie real $\mathfrak{g}$, os auto-espaços $\mathfrak{g}^{1,0}$ e $\mathfrak{g}^{0,1}$ associados aos autovalores i e $-i$, respectivamente, são subálgebras complexas de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, onde $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes \mathfrak{g}$.

Uma importante classe de estruturas complexas são as chamadas abelianas, que satisfazem $[JX, JY] = [X, Y]$, para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. Em [6], I.Dotti e A. Fino provaram que tais estruturas só podem ocorrer em Álgebras de Lie solúveis e em [3], M. Barberis e I. Dotti apresentaram uma caracterização das álgebras solúveis que admitem estruturas complexas abelianas.

Em [2], A. Andrada, M. Barberis e I. Dotti estudaram a estrutura de Grupos de Lie que admitem estruturas complexas abelianas invariantes à esquerda em termos de álgebras associativas comutativas. Analisaram diferentes obstáculos algébricos em Grupos de Lie solúveis que carregam estruturas complexas abelianas invariantes, além de estudar Grupos de Lie que admitem estruturas complexas abelianas invariantes à esquerda. Nesse sentido, frisaram que uma estrutura Hermitiana é Kahler se, e somente se, o Grupo de Lie é produto direto de várias cópias do plano real hiperbólico por um fator euclidiano.

Em sua Tese de Doutorado [11], E. Licurgo considerou a situação em que $\mathfrak{g}^{1,0}$ e $\mathfrak{g}^{0,1}$ são nilpotentes, e mostrou que também nesse caso $\mathfrak{g}$ deve ser solúvel, sendo além disso obtida uma caracterização para Álgebras de Lie de dimensões 2, 4 e 6. No presente trabalho detalhamos as demonstrações destes resultados, utilizando alguns procedimentos que esclareceram várias implicações.

Ainda em [11], E. Licurgo e L.A.B. San Martin construíram exemplos de Álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ com estrutura complexa J para a qual os auto-espaços $\mathfrak{g}^{1,0}$ e $\mathfrak{g}^{0,1}$ são Álgebras de

Lie s-passos nilpotentes. Apresentamos nessa dissertação todos cálculos necessários para a edificação destes exemplos. Como base para a construção desses exemplos, E. Licurgo e L.A.B. San Martin utilizaram manipulações algébricas e, através delas descobriram como se comporta o colchete de Lie para uma dada base da Álgebra de Lie que satisfaz as condições de alguns resultados obtidos por eles e apresentados em [12]. No presente trabalho, explanamos detalhadamente estas manipulações algébricas sobre outra base da mesma Álgebra de Lie, afim de encontrar os mesmos resultados obtidos a menos de uma mudança de base.

Uma variedade Hiper Kahler de Torção (HKT) é uma variedade suave com estrutura hipercomplexa $\{J_1, J_2, J_3\}$ e métrica Riemaniana g, que é hyperhermitiana e existe uma conexão $\bigtriangledown$, tal que $\bigtriangledown g = 0, \bigtriangledown J_{i=1,2,3} = 0$ e o tensor de torção T é tal que $c(X, Y, Z) = g(X, T(Y, Z))$ é uma 3-forma. Em [7], Isabel G. Dotti e A. Fino estudaram as estruturas Hiper Kahler de Torção em Grupos de Lie 8-dimensionais. O conceito de estruturas hipercomplexas foi utilizado de modo a fundamentar os estudos sobre variedades Hiper Kahler de Torção. Nesta dissertação, estudaremos o conceito de estruturas hipercomplexas e detalharemos a construção de exemplos de estruturas hipercomplexas, também apresentados por E. Licurgo e L.A.B. San Martin em [11], abordando breves comentários a respeito de estruturas hipercomplexas sobre Álgebras de Lie nilpotentes 8-dimensionais, utilizando resultados obtidos em [8].

Muitas questões continuam em aberto e diversos problemas precisarão ser resolvidos até que tenhamos uma boa compreensão de quais Álgebras de Lie admitem estruturas complexas integráveis, bem como uma classificação de tais estruturas. Essa é portanto uma área de pesquisa promissora, e nessa dissertação faremos um levantamento de alguns principais resultados já obtidos.

2 Conceitos básicos

Estudaremos neste capítulo os conceitos básicos da teoria das Álgebras de Lie, que serão relevantes para fundamentar os resultados obtidos no capítulo seguinte. Nas primeiras seções estaremos interessados em definições e propriedades de Álgebras de Lie, subálgebras de Cartan e subálgebras de Borel. Na última seção introduziremos o conceito e algumas propriedades de estrutura complexa sobre uma Álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e veremos a relação entre estruturas complexas integráveis e os $\pm i$ auto-espaços de J em $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$.

2.1 Álgebras de Lie

Definição 2.1. *Uma Álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, munido de uma operação bilinear, chamada colchete de Lie*

$$[.,.] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

que satisfaz as seguintes condições:

1. *anti-simetria:*
$$[X, X] = 0 \tag{1}$$

2. *identidade de Jacobi:*
$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0, \tag{2}$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

Exemplo 2.2. *O conjunto $\mathfrak{gl}(\mathfrak{n}, \mathbb{R})$ das matrizes reais $n \times n$ é uma Álgebra de Lie com colchete definido por*

$$[X, Y] = XY - YX. \tag{3}$$

Com efeito, $\mathfrak{gl}(\mathfrak{n}, \mathbb{R})$ é um espaço vetorial com operações usuais de soma e produto por números reais. De (3) temos:

$$\begin{aligned}[C, \alpha_1 A + \alpha_2 B] = C(\alpha_1 A + \alpha_2 B) - (\alpha_1 A + \alpha_2 B)C &= \alpha_1 CA + \alpha_2 CB - \alpha_1 AC - \alpha_2 BC \\ &= \alpha_1(CA - AC) + \alpha_2(CB - BC) \\ &= \alpha_1[C, A] + \alpha_2[C, B],\end{aligned}$$

para quaisquer $A, B, C \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{n}, \mathbb{R})$ e $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Analogamente,

$$[\alpha_1 A + \alpha_2 B, C] = \alpha_1[A, C] + \alpha_2[B, C].$$

Isso mostra a bilinearidade de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{n}, \mathbb{R})$. Também, são satisfeitas as condições (1) e (2) da definição 2.1, para quaisquer matrizes $A, B, C \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{n}, \mathbb{R})$. De fato,

1. *anti-simetria*

$$[A, B] = AB - BA = -(BA - AB) = -[B, A]$$

2. *identidade de Jacobi*

$$\begin{aligned}
[A,[B,C]] + [C,[A,B]] + [B,[C,A]] =& A[B,C] - [B,C]A + C[A,B] - [A,B]C + \\
& + B[C,A] - [C,A]B \\
=& ABC - ACB - BCA + CBA + CAB - \\
& - CBA - ABC + BAC + BCA - BAC - \\
& - CAB + ACB \\
=& 0
\end{aligned}$$

Exemplo 2.3. *Seja V um espaço vetorial de dimensão n e $\mathfrak{gl}(V)$ o espaço das transformações lineares de V. Como $\mathfrak{gl}(V)$ é isomorfo ao espaço das matrizes $n \times n$, a operação*

$$[T_1, T_2] = T_1 \circ T_2 - T_2 \circ T_1,$$

com T_1 e $T_2 \in \mathfrak{gl}(V)$, define em $\mathfrak{gl}(V)$ um colchete de Lie.

Exemplo 2.4. *Seja $\mathfrak{g}$ é um espaço vetorial. É imediato verificar que a operação*

$$[X, Y] = 0,$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{g}$, define um colchete de Lie em $\mathfrak{g}$. As Álgebras de Lie com colchetes assim são chamadas de álgebras abelianas.

Proposição 2.5. *Numa Álgebra de Lie tem-se que*

$$[X, Y] = -[Y, X], \tag{4}$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Demonstração. Para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{g}$ temos que

$$[X + Y, X + Y] = 0.$$

Segue da bilinearidade da Álgebra de Lie que $[X, X] + [X, Y] + [Y, X] + [Y, Y] = 0$. Portanto, $[X, Y] = -[Y, X]$. □

Note que, se o corpo $\mathbb{K}$ é de característica zero, então a condição (1) da definição 2.1 e (4) são equivalentes.

Definição 2.6. *Um subespaço $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ tal que $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ se $X, Y \in \mathfrak{h}$ é chamado de subálgebra de $\mathfrak{g}$.*

Exemplo 2.7. *O conjunto das matrizes quadradas de traço zero, que será denotada por* $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K}) : trX = 0\}$ *é uma subálgebra de* $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$. *De fato,*

$$tr([X,Y]) = tr(AB - BA) = tr(AB) - tr(BA) = 0.$$

Portanto, $[A,B] \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})$. *Quando* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *é comum denotar esta Álgebra apenas por* $\mathfrak{sl}(n)$.

Definição 2.8. *Um subespaço vetorial* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, *tal que* $[X,Y] \in \mathfrak{h}$ *se* $X \in \mathfrak{g}$ *e* $Y \in \mathfrak{h}$ *é chamado de ideal de* $\mathfrak{g}$. *Em particular, todo ideal de* $\mathfrak{g}$ *é uma subálgebra de* $\mathfrak{g}$.

Definição 2.9. *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma Álgebra de Lie e* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ *um ideal. No espaço vetorial quociente* $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, *defina*

$$[\bar{X}, \bar{Y}] = \overline{[X,Y]},$$

onde $\bar{X}$ *denota a classe* $X + \mathfrak{h}$. *A construção desse colchete define em* $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ *uma estrutura de Álgebra de Lie.*

Definição 2.10. *Dada uma Álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$, *podemos definir, por indução, os seguintes subespaços de* $\mathfrak{g}$:

$$\begin{array}{lcl}
\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g} & \quad e \quad & \mathfrak{g}^{1} = \mathfrak{g} \\
\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] & & \mathfrak{g}^{2} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \\
\vdots & & \vdots \\
\mathfrak{g}^{(k)} = [\mathfrak{g}^{(k-1)},\mathfrak{g}^{(k-1)}] & & \mathfrak{g}^{k} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}^{k-1}],
\end{array}$$

onde $[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]$ *denota o subespaço gerado por* $\{[X,Y]; X \in \mathfrak{a}, Y \in \mathfrak{b}\}$, *se* $\mathfrak{a}$ *e* $\mathfrak{b}$ *são subconjuntos de* $\mathfrak{g}$. *Dizemos que* $\mathfrak{g}^{(0)}$, $\mathfrak{g}'$,..., $\mathfrak{g}^{(k)}$,... *é a série derivada de* $\mathfrak{g}$ *e que* $\mathfrak{g}^1$, $\mathfrak{g}^2$,..., $\mathfrak{g}^k$... *é a série central decrescente de* $\mathfrak{g}$.

Proposição 2.11. *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma Álgebra de Lie. Então os subespaços* $\mathfrak{g}^{(k)}$ *e* $\mathfrak{g}^k$ *são ideais de* $\mathfrak{g}$, *para todo* $k \geq 1$.

Demonstração. Óbvio que $\mathfrak{g}$ é ideal de si próprio. Então, sejam $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}$ dois ideais não triviais de $\mathfrak{g}$ e sejam $A = \sum[X_i, Y_i]$ e $B \in \mathfrak{g}$.

Temos que

$$[A,B] = \sum[[X_i, Y_i], B],$$

onde $X \in \mathfrak{i}, Y \in \mathfrak{j}$.

Da identidade de Jacobi, segue que

$$[A,B] = \sum[X_i,[Y_i,B]] - [Y_i[X_i,B]].$$

Como $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}$ são ideais de $\mathfrak{g}$, segue da última igualdade que $[A,B] \in [\mathfrak{i},\mathfrak{j}]$, isto é, $[\mathfrak{i},\mathfrak{j}]$ é ideal de $\mathfrak{g}$ para quaisquer $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}$ ideais de $\mathfrak{g}$. Daí $\mathfrak{g}^{(k)}$ e $\mathfrak{g}^k$ são ideais de $\mathfrak{g}$ para todo $k \geq 0$. □

Proposição 2.12. *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma Álgebra de Lie. Então,* $\mathfrak{g}^{(k)} \subset \mathfrak{g}^{k+1}$ *e* $\mathfrak{g}^{k+1} \subset \mathfrak{g}^{k}$*, para todo* $k \geq 1$.

Demonstração. Se $k = 0$ é óbvio que $\mathfrak{g}^{(k)} \subset \mathfrak{g}^{k+1}$. Para o caso $k = 1$, claro que $\mathfrak{g}^{(k)} \subset \mathfrak{g}^{k+1}$ e $\mathfrak{g}^{k+1} \subset \mathfrak{g}^{k}$. Como $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}^2$, é claro que $[\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^2]$. Daí $\mathfrak{g}^{(2)} \subset \mathfrak{g}^3$, isso prova a proposição para o caso $k = 2$. Suponhamos, por indução, que $\mathfrak{g}^{(k-1)} \subset \mathfrak{g}^k$. Então,

$$\mathfrak{g}^{(k)} = [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k] = \mathfrak{g}^{k+1}.$$

Também, $\mathfrak{g}^{k+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k] \subset \mathfrak{g}^k$, já que $\mathfrak{g}^k$ é ideal de $\mathfrak{g}$. □

Definição 2.13. *Dada uma Álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$*, dizemos que*

1. $\mathfrak{g}$ *é solúvel se existir* $k \geq 1$*, tal que* $\mathfrak{g}^{(k)} = \{0\}$ *e*

2. $\mathfrak{g}$ *é nilpotente se existir* $k \geq 1$*, tal que* $\mathfrak{g}^k = \{0\}$.

Definição 2.14. *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma Álgebra de Lie nilpotente. Dizemos que* $\mathfrak{g}$ *é s-passos nilpotente se* $s + 1$ *é o menor inteiro* k *tal que* $\mathfrak{g}^k = 0$.

Exemplo 2.15. *Agora apresentaremos uma subálgebra* $\mathfrak{h}$ *de* $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ *chamada de álgebra de Heisenberg e definida por*

$$\mathfrak{h} = \{ \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

Ela é uma Álgebra de Lie solúvel. De fato,

$$\mathfrak{h}' = \{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : b \in \mathbb{R}\}$$

e portanto, $\mathfrak{h}^{(2)} = 0$.

É fácil ver que $\mathfrak{h}$ *é também nilpotente. Com efeito,* $\mathfrak{h}^2 = \mathfrak{h}'$ *e* $\mathfrak{h}^3 = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^2] = 0$.

Um fato relevante a se observar com relação à álgebra de Heisenberg é que com respeito à base

$$\{e_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\}$$

de $\mathfrak{h}$, temos que

$$[e_1, e_2] = e_3$$

e o colchete dos demais elementos da base é nulo.

Proposição 2.16. *Toda Álgebra de Lie nilpotente é também solúvel.*

Demonstração. Isso decorre do fato de que $\mathfrak{g}^{(k)} \subset \mathfrak{g}^{k+1}$. □

Existe em $\mathfrak{g}$ de dimensão finita, um único ideal solúvel chamado *radical solúvel*, $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$ que contém todos os ideais solúveis de $\mathfrak{g}$. Ver em [14].

Definição 2.17. *Dada uma Álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, dizemos que $\mathfrak{g}$ é semi-simples se o radical solúvel de $\mathfrak{g}$ é nulo, isto é, se não existem em $\mathfrak{g}$ ideais solúveis além do ideal nulo.*

Exemplo 2.18. *A subálgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) : trX = 0\}$ é semi-simples. De fato, considere a base de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$*

$$\{X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\}$$

Verifica-se facilmente que

$$[X, Z] = Y \qquad [Y, X] = 2X \qquad [Y, Z] = -2Z.$$

Daí, que $\{X, Y, Z\} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})' = [\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}), \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})]$. Portanto $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})' = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Raciocínio análogo mostra que $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})^{(k)} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ para todo $k \geq 0$. Com isso, $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ não é solúvel.

Além disso, todos os ideais de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ são triviais. De fato, seja $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ um ideal. Tome $W \in \mathfrak{h}$ e escreva $W = aX + bY + cZ$, com a, b e c reais não simultaneamente nulos. Obtemos

$$[W, X] = cY - 2bX \qquad e \qquad [X, [X, W]] = -2bZ.$$

Se $b \neq 0$, temos que $Z \in \mathfrak{h}$, já que $\mathfrak{h}$ é ideal. Com isso, $Y = [X, Z] \in \mathfrak{h}$, e por fim $X = \frac{1}{2}[Y, X] \in \mathfrak{h}$.

Se $b = 0$ e $c \neq 0$, temos $Y = \frac{-1}{c}[W, X] \in \mathfrak{h}$.

Se $b = c = 0$, nos resta $W = aX$, e ainda assim teremos $X \in \mathfrak{h}$. E de qualquer modo, $\{X, Y, Z\} \in \mathfrak{h}$, isto é $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

Concluímos que $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ é semi-simples.

As Álgebras de Lie mais palpáveis são as Álgebras $\mathfrak{sl}(\mathfrak{n}, \mathbb{R})$, por essa razão é muito comum utilizá-las para ilustrar resultados de Álgebras de Lie semi-simples em geral.

2.2 Representações

Definição 2.19. *Sejam $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ Álgebras de Lie. Uma transformação linear $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ é um homomorfismo se $\phi[X,Y] = [\phi X, \phi Y]$, para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.*

Definição 2.20. *Sejam $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie, V um espaço vetorial e $\mathfrak{gl}(V)$ a Álgebra de Lie das transformações lineares de V. Uma representação de $\mathfrak{g}$ em V é um homomorfismo*

$$\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V).$$

Um tipo de representação interessante ao nosso estudo é a *representação adjunta* de $\mathfrak{g}$, que é dada por

$$\begin{aligned} ad : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ X &\longmapsto ad(X), \end{aligned}$$

onde $\mathrm{ad}(X)(Y) = [X,Y]$, para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.

É fácil ver que $\mathrm{ad}(X)$ e ad são transformações lineares. E ad é homomorfismo por causa da identidade de Jacobi. De fato,

$$\begin{aligned} ad[X,Y](Z) &= [[X,Y],Z] \\ &= [X,[Y,Z] + [[X,Z],Y] \\ &= ad(X)ad(Y)(Z) - ad(Y)ad(X)(Z) \\ &= [ad(X), ad(Y)](Z). \end{aligned}$$

A última igualdade segue do colchete de Lie definido no exemplo 2.3.

Exemplo 2.21. *Podemos construir a representação adjunta de $\mathfrak{sl}(n)$ do seguinte modo. Considere a base*

$$\{X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\}$$

de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Tomando $H = aX + bY + cZ$, temos que

$$ad(H)X = [H,X] = a[X,X] + b[Y,X] + c[Z,X] = \begin{bmatrix} 0 & 2b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} = 2bX - cY.$$

Analogamente,

$$ad(H)Y = [H,Y] = a[X,Y] + b[Y,Y] + c[Z,Y] = \begin{bmatrix} 0 & -2a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2c & 0 \end{bmatrix} = -2aX + 2cZ$$

e

$$ad(H)Z = [H,Z] = a[X,Z] + b[Y,Z] + c[Z,Z] = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2b & 0 \end{bmatrix} = aY - 2bZ.$$

Logo, a aplicação

$$\begin{bmatrix} b & a \\ c & -b \end{bmatrix} \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \longmapsto \begin{bmatrix} 2b & -2a & 0 \\ -c & 0 & a \\ 0 & 2c & -2b \end{bmatrix} \in \mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$$

é a representação adjunta de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$.

Definição 2.22. *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma Álgebra de Lie. Uma representação* ρ *de* $\mathfrak{g}$ *no espaço vetorial* V *é uma representação nilpotente se* $\rho(X)$ *é nilpotente (isto é,* $\rho(X)^n = 0$ *para algum* $n \in \mathbb{N}$*) para todo* $X \in \mathfrak{g}$.

Teorema 2.23. *(Engel) Seja* $\mathfrak{g}$ *uma Álgebra de Lie.* $\mathfrak{g}$ *é nilpotente se, e somente se,* $ad(X)$ *é nilpotente, para todo* $X \in \mathfrak{g}$.

Demonstração. Ver em [14]. □

Proposição 2.24. *Seja* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ *uma subálgebra nilpotente de* $\mathfrak{g}$*. A representação adjunta de* $\mathfrak{h}$ *em si mesma é nilpotente.*

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned} ad : \mathfrak{h} &\longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{h}) \\ Y &\longmapsto ad(Y) : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h}. \end{aligned}$$

Se a subálgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é nilpotente, segue do teorema de Engel que ad(Y) é nilpotente, para todo $Y \in \mathfrak{h}$. A afirmação segue imediatamente da definição de representações nilpotentes. □

O conceito de *peso*, que consideraremos relevante para importantes efeitos posteriores, será construído a partir dos resultados que seguem.

Considere V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$ e seja $T : V \longrightarrow V$ uma transformação linear, cuja fatoração do polinômio minimal é dada por $m_T(t) = p_1(t)^{r_1} \dots p_k(t)^{r_k}$. O Teorema da Decomposição Primária decompõe V numa soma direta de subespaços invariantes por T na forma

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_s$$

que são os auto-espaços generalizados

$$V_i = \{v \in V : p_i(T)^k v = 0 \text{ para algum } k \geq 1\}$$

No caso em que $\mathbb{K}$ é algebricamente fechado, temos $p_i(T) = T - \lambda_i$, com λ_i autovalor de T e os subespaços da decomposição primária são escritos como

$$V_i = \{v \in V : (T - \lambda_i)^k v = 0 \text{ para algum } k \geq 1\}.$$

Destacaremos a relação que estes auto-espaços tem com os autovalores de T denotando-os por V_{λ_i}.

Proposição 2.25. *Suponha que o corpo de escalares é algebricamente fechado. Sejam T_1 e T_2 transformações lineares de V e V_{λ_i} os auto-espaços generalizados de T_1. Então $T_2(V_{\lambda_i}) \subset V_{\lambda_i}$ para todo i se e só se $ad(T_1)^q(T_2) = 0$ para algum $q \geq 1$.*

Demonstração. Ver [14]. □

Se $\mathfrak{g}$ é uma Álgebra de Lie nilpotente e ρ uma representação de $\mathfrak{g}$ em V, dados $X, Y \in \mathfrak{g}$ temos $\mathrm{ad}(X)^q(Y) = 0$ para algum $q \geq 1$, e portanto $\mathrm{ad}(\rho(X))^q(\rho(Y)) = 0$.

Fixando $X \in \mathfrak{g}$, podemos considerar a decomposição primária de V numa soma direta de subespaços generalizados de $\rho(X)$ na forma

$$V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_s$$

Da proposição anterior e de $\mathrm{ad}(\rho(X))^q(\rho(Y)) = 0$, temos que cada subespaço V_i é $\rho(Y)$-invariante para todo $Y \in \mathfrak{g}$ e, portanto, $\mathfrak{g}$ se representa em cada um deles. Então podemos tomar a decomposição primária de V_i como soma direta de subespaços invariantes por restrições de $\rho(Y)$, com $Y \in \mathfrak{g}$. Temos dois casos a considerar:

1° caso

Se V_i é gerado por um único elemento, imediatamente teremos $\rho(Y) = \lambda_i(Y)v$, para $v \in V_i$. E daí que

$$(\rho(Y) - \lambda_i(Y))v = 0.$$

2° caso

Se algum V_i se decompõe para algum $\rho(Y)$, podemos tomar uma nova decomposição de V e repetir o argumento anterior. Como a cada nova decomposição a dimensão dos subespaços diminui, após finitos passos obtemos uma decomposição final

$$V = W_1 \oplus \ldots \oplus Wn,$$

tal que dado $Y \in \mathfrak{g}$, $i = 1, ..., n$, existe autovalor $\lambda_i(Y)$ para $\rho(Y)$ tal que W_i está contido no auto-espaço generalizado associado a $\lambda_i(Y)$ e segue da decomposição primária, que se $v \in W_i$

$$(\rho(Y) - \lambda_i(Y))^k v = 0$$

para algum $k \geq 1$.

Ainda, considerando ρ_i a restrição da representação ao subespaço V_{λ_i}, observamos que para todo $X \in \mathfrak{g}$ $(\rho_i(X) - \lambda_i(X))^k v = 0$, para algum k, sempre que $v \in V_{\lambda_i}$. Isto é $\rho_i(X) - \lambda_i(X)$ é nilpotente para todo $X \in \mathfrak{g}$. E daí que $tr(\rho_i(X) - \lambda_i(X)) = 0$ e

$$\lambda_i(X) = \frac{tr \rho_i(X)}{\dim V_{\lambda_i}}.$$

Com isso mostramos facilmente que λ_i é linear.

Com tudo que vimos, segue o teorema abaixo.

Teorema 2.26. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$, um corpo algebricamente fechado, e ρ uma representação de $\mathfrak{g}$, uma Álgebra de Lie nilpotente, em V. Então existem funcionais lineares λ_1,..., λ_s de $\mathfrak{g}$ tais que se*

$$V_{\lambda_i} = \{v \in V; \forall X \in \mathfrak{g}, \exists\, n \geq 1 \mid (\rho(X) - \lambda_i(X))^n v = 0\},$$

então V_{λ_i} é invariante pela representação ρ, isto é $\rho(X)(V_{\lambda_i}) \subset V_{\lambda_i}, \forall X \in \mathfrak{g}, 1 \leq i \leq s$ e

$$V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}.$$

Demonstração. A discussão acima já garante a existência dos subespaços $W_1, \ldots, W_s$ invariantes pela representação ρ, e aplicações lineares $\lambda_i : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K}$ tais que

$$V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_s,$$

e $W_i \subset V_{\lambda_i}$ como no enunciado.

Se houver vários $W's$ em um mesmo V_{λ_i} podemos somá-los em um único $W_i \subset V_{\lambda_i}$, e agora podemos tomar $\lambda_i \neq \lambda_j$, sempre que $i \neq j$. Os funcionais lineares $\lambda_i - \lambda_j$ são não nulos, então podemos tomar $X \in \mathfrak{g}$ não nulo, tal que $\lambda_i(X) \neq \lambda_j(X)$, para $i \neq j$. Para X dessa forma, cada $\lambda_i(X)$ é autovalor de $\rho(X)$. Seja $V_{\lambda_i(X)}$ seu auto-espaço correspondente. Sabemos que auto-espaços correspondentes a autovalores distintos são disjuntos, e $W_i \subset V_{\lambda_i(X)}$, então de $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_s$ segue que $W_i = V_{\lambda_i(X)}$. Mas, por definição, $V_{\lambda_i(X)} \supset V_{\lambda_i}$, logo $W_i \supset V_{\lambda_i}$. Portanto, $W_i = V_{\lambda_i}$. □

O teorema 2.26 motiva a seguinte definição.

Definição 2.27. *Um funcional linear $\lambda : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K}$ para o qual*

$$0 \neq V_\lambda = \{v \in V; \forall X \in \mathfrak{g}, \exists\, n \geq 1, (\rho(X) - \lambda(X))^n v = 0\}$$

é chamado de peso . O subespaço V_λ é dito subespaço de peso *associado a λ.*

Observação 2.28. *O teorema 2.26 garante que representações de Álgebras de Lie nilpotentes e de dimensão finita admitem pesos, no caso em que o corpo dos escalares é algebricamente fechado.*

Definição 2.29. *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma Álgebra de Lie. Uma aplicação linear* $D : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ *é chamada de derivação, se satisfaz*

$$D[X,Y] = [DX,Y] + [X,DY],$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Exemplo 2.30. *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma Álgebra de Lie e seja* $X \in \mathfrak{g}$. *A identidade de Jacobi nos permite concluir que a aplicação linear* $ad(X) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ *é uma derivação.*

Proposição 2.31. *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma Álgebra de Lie de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado. Se* $D : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ *é uma derivação e*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_m}$$

é a decomposição primária de $\mathfrak{g}$, *onde*

$$\mathfrak{g}_{\lambda_i} = \{X \in \mathfrak{g} : (D - \lambda_i)^n X = 0 \text{ para algum } n \geq 1\},$$

então $[\mathfrak{g}_{\lambda_i}, \mathfrak{g}_{\lambda_j}] \subset \mathfrak{g}_{\lambda_i+\lambda_j}$ *e* $\mathfrak{g}_{\lambda_i+\lambda_j} = 0$ *se* $\lambda_i + \lambda_j$ *não é autovalor de* D.

Demonstração. Vamos fixar $\mathfrak{g}_{\lambda_i}$ como na decomposição da proposição e tome $X_0 = 0$. Se $X \in \mathfrak{g}_{\lambda_i}$, então $\exists\, n \geq 1$, tal que

$$0 = (D - \lambda_i)^n X = (D - \lambda_i)(D - \lambda_i)^{n-1} X.$$

Considere o menor inteiro n que satisfaz a condição acima. Chamando $X_1 = (D-\lambda_i)^{n-1}X$, obteremos $(D - \lambda_i)X_1 = 0 = X_0$, isto é, $DX_1 = X_0 + \lambda_i X_1$. Mais uma vez, vamos chamar $(D-\lambda_i)^{n-2}X = X_2$, temos que $X_1 = (D-\lambda_i)^{n-1}X = (D-\lambda_i)(D-\lambda_i)^{n-2}X = (D-\lambda_i)X_2$, isto é, $DX_2 = X_1 + \lambda_i X_2$. Repetindo o raciocínio, podemos obter conjuntos $\{X_1, \ldots, X_s\}$ *linearmente independentes*, tais que

$$DX_j = X_{j-1} + \lambda_i X_j \qquad j = 1, \ldots, s \qquad (X_0 = 0),$$

e existe uma base de $\mathfrak{g}_{\lambda_i}$ formada por tais conjuntos. Sejam $\{X_1, \ldots, X_s\} \subset \mathfrak{g}_{\lambda_i}$ e $\{Y_1, \ldots, Y_t\} \subset \mathfrak{g}_{\lambda_j}$ conjuntos *linearmente independentes* como acima. Mostraremos por indução sobre $k + l$ que

$$[X_k, Y_l] \in \mathfrak{g}_{\lambda_i+\lambda_j} \qquad k = 1, \ldots, s \quad l = 1, \ldots, t.$$

Como D é uma derivação, temos

$$\begin{aligned} D[X_k, Y_l] &= [DX_k, Y_l] + [X_k, DY_l] \\ &= [X_{k-1} + \lambda_i X_k, Y_l] + [X_k, Y_{l-1} + \lambda_j Y_l] \\ &= [X_{k-1}, Y_l] + [X_k, Y_{l-1}] + (\lambda_i + \lambda_j)[X_k, Y_l], \end{aligned}$$

de onde concluímos que

$$(D - (\lambda_i + \lambda_j))[X_k, Y_l] = [X_{k-1}, Y_l] + [X_k, Y_{l-1}].$$

Se $k = l = 1$, obtemos $(D - (\lambda_i + \lambda_j))[X_1, Y_1] = 0$, então $[X_1, Y_1] \in \mathfrak{g}_{\lambda_i+\lambda_j}$. A hipótese de indução é que

$$[X_{k-1}, Y_l] \in \mathfrak{g}_{\lambda_i+\lambda_j} \qquad e \qquad [X_k, Y_{l-1}] \in \mathfrak{g}_{\lambda_i+\lambda_j}.$$

Ou seja, $[X_{k-1}, Y_l] \in \mathrm{Ker}(D-(\lambda_i+\lambda_j))^q$, para algum q e $[X_k, Y_{l-1}] \in \mathrm{Ker}(D-(\lambda_i+\lambda_j))^r$, para algum r. De onde afirmamos que $[X_{k-1}, Y_l] + [X_k, Y_{l-1}] \in \mathrm{Ker}(D - (\lambda_i + \lambda_j))^n$, $n = \max\{q, r\}$.

Portanto,

$$\begin{aligned} 0 &= (D - (\lambda_i + \lambda_j))^n([X_{k-1}, Y_l] + [X_k, Y_{l-1}]) \\ &= (D - (\lambda_i + \lambda_j))^{n+1}[X_k, Y_l], \end{aligned}$$

isto é, $[X_k, Y_l] \in \mathfrak{g}_{\lambda_i+\lambda_j}$. □

Considere a derivação ad(X), para cada $X \in \mathfrak{g}$, na proposição acima. Sempre podemos admitir a existência do auto-espaço generalizado não-nulo $\mathfrak{g}_0(X)$ associado ao autovalor $\lambda = 0$, já que $\mathrm{ad}(X)X = 0$, e daí $X \in \mathfrak{g}_0(X)$.

2.3 Subálgebras de Cartan

Agora, introduziremos o conceito de subálgebra de Cartan, a fim de nos auxiliar na construção de alguns resultados contidos no decorrer do nosso trabalho.

Definição 2.32. *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie. Uma subálgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é dita subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$ se satisfaz*

1. *$\mathfrak{h}$ é nilpotente e*

2. *seu normalizador em $\mathfrak{g}$ é o próprio $\mathfrak{h}$,isto é, $\{X \in \mathfrak{g}; ad(X)\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}\} = \mathfrak{h}$. Esta condição é equivalente a*

2'. *Se $X \in \mathfrak{g}$ e $[X, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ então $X \in \mathfrak{h}$*

Exemplo 2.33. *Considere a Álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$. Então, o conjunto das matrizes diagonais $\mathfrak{h} = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\}$ é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$. De fato, é fácil ver que $\mathfrak{h}$ é* *nilpotente, pois é abeliano. Ainda, se* $X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \theta \end{pmatrix}$, *temos*

$$[\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \theta \end{pmatrix}] = \begin{pmatrix} 0 & (a-b)\beta \\ (b-a)\gamma & 0 \end{pmatrix}$$

e este colchete está em $\mathfrak{h}$ *se, e só se,* $\gamma = \beta = 0$. *Daí,* $X \in \mathfrak{h}$.

Seja $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ uma subálgebra de Cartan. No teorema (2.26), vamos tomar $V = \mathfrak{g}$ e ρ a representação adjunta de $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{g}$. Como a representação adjunta de $\mathfrak{h}$ em si mesma é nilpotente, o funcional nulo é sempre um peso dessa representação. Denotamos por $\mathfrak{g}_0$ o subespaço correspondente.

Teorema 2.34. *Seja* $V \neq 0$ *um espaço vetorial de dimensão finita e* $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}l(V)$ *uma subálgebra. Suponha que todo* $X \in \mathfrak{g}$ *é nilpotente. Então, existe* $v \in V, v \neq 0$ *tal que* $Xv = 0$ *para todo* $X \in \mathfrak{g}$.

Demonstração. Seja $\dim \mathfrak{g} = 1$ e $X \in \mathfrak{g}, X \neq 0$. Como X é nilpotente, existe $k \geq 1$ tal que $X^k = 0$ e $X^{k-1} \neq 0$. Seja $\omega \in V$ tal que $X^{k-1}\omega = v \neq 0$. Então $Xv = 0$, o que mostra o resultado acima para as Álgebras de Lie de dimensão um. A demonstração segue por indução sobre a dimensão de $\mathfrak{g}$ e está detalhadamente contida em [14]. □

Proposição 2.35. *Sob as condições da definição 2.32,* $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$.

Demonstração. Da discussão acima, temos

$$g_0 = \{X \in \mathfrak{g}; \forall H \in \mathfrak{h}; (ad(H))^n(X) = 0\}$$

A representação adjunta de $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{g}_0$ é nilpotente, e induz uma representação também nilpotente,

$$\begin{aligned} \rho : \mathfrak{h} &\longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_0/\mathfrak{h}) \\ H &\longmapsto \rho(H) : \mathfrak{g}_0/\mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{g}_0/\mathfrak{h}. \\ &\qquad\qquad v + \mathfrak{h} \longmapsto ad(H)v + \mathfrak{h}, \end{aligned}$$

isto é, a transformação linear $\rho(H)$ é nilpotente, para todo $H \in \mathfrak{h}$.

Pelo teorema 2.34, existe $\tilde{v} \in \mathfrak{g}_0/\mathfrak{h}$ não nulo, que é autovetor simultâneo de $\rho(H)$ para todo $H \in \mathfrak{h}$, com $\rho(H)\tilde{v} = \tilde{0} \equiv \mathfrak{h}$. Seja $v \in \mathfrak{g}_0$ tal que $\tilde{v} = v + \mathfrak{h}$. Como $\mathfrak{h} = \rho(H)\tilde{v} = ad(H)v + \mathfrak{h}$, nos resta que $\mathrm{ad}(H)v \in \mathfrak{h}$. Então v está no normalizador de $\mathfrak{h}$, que é o próprio $\mathfrak{h}$, daí $v \in \mathfrak{h}$. Isso significa que $\tilde{v} = \tilde{0}$, que não é autovetor. Nos resta $\mathfrak{g}_0/\mathfrak{h} = 0$, isto é $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$. □

Os pesos não-nulos da representação adjunta de $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{g}$ são chamados de *raízes*. Seu conjunto será denotado por $\prod$. Segue do Teorema 2.26 e da afirmação acima, que dada uma Álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensão finita sobre o corpo dos complexos, dada uma subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ e denotando por $\prod$ o conjunto de raízes do par ($\mathfrak{h}$,$\mathfrak{g}$), podemos escrever

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\lambda \in \prod} \mathfrak{g}_\lambda,$$

onde $\mathfrak{g}_\lambda = \{X \in \mathfrak{g}; \forall H \in \mathfrak{h}; (ad(H) - \lambda(H))^n(X) = 0$, para algum $n \geq 1\}$.

2.4 Elementos regulares

Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie n-dimensional. Para definir um elemento regular, tome $X \in \mathfrak{g}$. Denotaremos por p_X o o polinômio característico de ad(X) da forma

$$p_X(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}(X)\lambda^{n-1} + \ldots + p_1(X)\lambda + p_0(X),$$

onde cada $p_i(\cdot)$ é um polinômio de grau $n-i$ nas coordenadas de X, já que os coeficientes do polinômio característico são polinômios no espaço das transformações lineares e ad é linear em X. Em geral, esses coeficientes são dados pelo traço de algum produto exterior da transformação linear.

Definição 2.36. *O posto de uma Álgebra de Lie de dimensão finita é o menor índice i em que p_i não é identicamente nulo, onde p_i denota, os coeficientes do polinômio característico. Um elemento $X \in \mathfrak{g}$ é dito regular se $p_i(X) \neq 0$ onde i é o posto de $\mathfrak{g}$.*

A Álgebra de Cartan é exatamente o subespaço $\mathfrak{g}_0$ que aparece na decomposição primária da transformação linear ad(X), para um elemento regular X genérico em $\mathfrak{h}$.

Exemplo 2.37. *Seja $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ com a base*

$$\{X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\}$$

Tomando $H = aX + bY + cZ$, a matriz de sua adjunta nesta base é

$$ad(H) = \begin{bmatrix} 2b & -2a & 0 \\ -c & 0 & a \\ 0 & 2c & -2b \end{bmatrix}$$

e, portanto, $p_H(\lambda) = \lambda^3 - 4(b^2 + ac)\lambda$. Da definição acima, temos que o posto de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ é um e H é elemento regular se e só se $b^2 + ac \neq 0$. Em particular Y é um elemento regular.

Teorema 2.38. *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie de dimensão finita sobre um corpo de característica zero e $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ uma subálgebra de Cartan. Então, existe um elemento regular $X \in \mathfrak{h}$.*

Antes de demonstrar o teorema acima, faremos uma breve discussão sobre a ação dos automorfismos sobre as subálgebras de Cartan.

2.5 Conjugação entre Álgebras de Cartan

Definição 2.39. *Duas subálgebras de Cartan são ditas conjugadas, se uma é a imagem da outra por automorfismo de $\mathfrak{g}$.*

Apresentaremos agora um fato relevante, que se refere a Álgebras de Cartan, a ser utilizado no capitulo seguinte.

Teorema 2.40. *Numa Álgebra de Lie sobre um corpo algebricamente fechado, as subálgebras de Cartan são duas a duas conjugadas por automorfismos.*

Demonstraremos este resultado por procedimento puramente algébrico. Nesse sentido, vamos recorrer ao *Teorema Polinomial da Aplicação Aberta.* Por questões didáticas, é conveniente comentar com alguns detalhes as propriedades básicas dos polinômios sobre espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$ algebricamente fechado e de característica zero .

Definição 2.41. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$. Um polinômio em V é uma aplicação $p : V \longrightarrow \mathbb{K}$ que é constante ou pode ser escrita como soma de produto finitos de funcionais lineares de V. O conjunto dos polinômios será chamado de $\mathbb{K}[V]$.*

Definição 2.42. *Seja agora, W outro espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$. Uma aplicação $P : V \longrightarrow W$ é dita polinomial se $\lambda \circ P$ é um polinômio em V para todo funcional linear $\lambda \in \mathbb{K}$.*

O Teorema da Aplicação Aberta é utilizado para garantir que a imagem de um aberto por uma aplicação que possui diferencial sobrejetora contém um conjunto aberto. No contexto algébrico, um conjunto é aberto se for o complementar do conjunto dos zeros de um polinômio. Neste sentido enunciamos o teorema da Aplicação Aberta a aplicações polinomiais.

Teorema 2.43. *(Teorema da Aplicação Aberta a aplicações polinomiais)*

Seja $P : V \longrightarrow W$ uma aplicação polinomial e suponha que dP_x é sobrejetora para algum $x \in V$. Seja p um polinômio não-nulo em V. Então, exite um polinômio $q \in \mathbb{K}[W]$ tal que para todo $y \in W$ tal que $q(y) \neq 0$ existe $x \in V$ com $p(x) \neq 0$ e tal que $P(x) = y$.

Demonstração. Ver [14] $\square$

Nossa intenção aqui, é aplicar o Teorema da Aplicação Aberta para aplicações polinomiais a transformação

$$(X, Y) \longmapsto e^{ad(X)}Y,$$

onde $e^{ad(X)} = \sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{n!}ad(X)^n$.

Como as subálgebras de Cartan são nilpotentes, temos que $\text{ad}(X)^k = 0$, para algum $k \geq 0$. Com isso, é suficiente considerar exponenciais que são dadas por somas finitas.

Proposição 2.44. *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie. Se D é uma derivação nilpotente de $\mathfrak{g}$, então e^{tD} é um automorfismo de $\mathfrak{g}$, para todo $t \in \mathbb{K}$.*

Demonstração. Dados $X, Y \in \mathfrak{g}$, considere as curvas

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{K} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ t &\longmapsto e^{tD}[X, Y] \end{aligned} \qquad \qquad \begin{aligned} \beta : \mathbb{K} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ t &\longmapsto [e^{tD}X, e^{tD}Y] \end{aligned}$$

Como D é nilpotente, essas curvas são polinomiais.

Derivando, temos

$$\alpha'(t) = De^{tD}[X, Y] = D\alpha(t).$$

Considerando as transformações T_1 e T_2 dadas respectivamente por $T_1(t) = e^{tD}X$ e $T_2(t) = e^{tD}Y$,utilizando o colchete do exemplo 2.3, obtemos

$$\begin{aligned} \beta'(t) &= [T_1, T_2]'_t \\ &= [T'_1, T_2]_t + [T_1, T'_2]_t \\ &= [De^tX, e^tY] + [e^tX, De^tY] \\ &= D\beta(t) \end{aligned}$$

Ora, como $\alpha(0) = \beta(0)$ as duas curvas satisfazem o mesmo Problema de Valor Inicial. Então, segue do teorema de Unicidade de Solução que $\alpha(t) = \beta(t)\, \forall\, t \in \mathbb{K}$. Isto é,

$$e^{tD}[X, Y] = [e^{tD}X, e^{tD}Y].$$

Também,

$$\det e^{tD} = e^{tr(tD)} = 1,$$

já que o traço de uma transformação linear nilpotente se anula. Portanto, e^tD é um isomorfismo. $\square$

Agora, dada uma subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$, tomando X num subespaço de raízes $\mathfrak{g}_{\lambda_i}$ e Y num subespaço de raízes $\mathfrak{g}_{\lambda_j}$, segue da proposição 2.31 que $[X,Y] \in \mathfrak{g}_{\lambda_i+\lambda_j}$, isto é, $\mathrm{ad}(X)Y \in \mathfrak{g}_{\lambda_i+\lambda_j}$. Por indução sobre $k \geq 1$, temos $\mathrm{ad}(X)^k Y \in \mathfrak{g}_{k.\lambda_i+\lambda_j}$. Mas, existe um número finito de raízes, então existe $k \geq 1$, tal que $\mathrm{ad}(X)^k Y = 0$, e daí que $\mathrm{ad}(X)$ é nilpotente.

O Teorema da Aplicação Aberta será explorado no seguinte contexto. Sejam $\{X_1, ..., X_n\}$ uma união de bases dos $\mathfrak{g}_\lambda' s$ e $\{H_1, ..., H_m\}$ uma base de $\mathfrak{h}$. A aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K}^n \times \mathfrak{h} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ (t, H) &\longmapsto e^{t_1 ad(X_1)}.e^{t_2 ad(X_2)} \ldots e^{t_n ad(X_n)}(H), \end{aligned}$$

onde $t = (t_1, ..., t_n) \in \mathbb{K}^n$ é uma aplicação polinomial, pois $\mathrm{ad}(X_i)$ é nilpotente para cada $i = 1, ..., n$ e φ é linear em H.

Tomando as derivadas parciais em relação a t_i, tem-se

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_i}(0, H) = ad(X_i)(H) = -[H, X_i] = -\lambda_i(H)X_i,$$

onde λ_i é a raiz correspondente a X_i. Complementando essas derivadas parciais com as derivadas direcionais na direção de $H \in \mathfrak{h}$, vê-se que $d\varphi_{(0,H)}$ é sobrejetiva se $\lambda(H) \neq 0$ para toda raiz λ.

Seja p um polinômio não nulo em $\mathbb{K}^n \times \mathfrak{h}$ com $p = p_i \circ \varphi$, onde $p_i(X)$ é polinômio não nulo em $\mathfrak{g}$ que é o coeficiente do termo de menor grau do polinômio característico de $\mathrm{ad}(X)$, e i é o posto de $\mathfrak{g}$. Segue do Teorema da Aplicação Aberta que existe $q \in \mathbb{K}(\mathfrak{g})$, tal que dado $Y \in \mathfrak{g}$ com $q(Y) \neq 0$ existe $(t, H) \in \mathbb{K}^n \times \mathfrak{h}$ com $p(t, H) \neq 0$ e $\varphi(t, H) = Y$.

Agora, $0 \neq p(t, H) = p_i(\varphi(t, H)) = p_i(Y)$ e daí que Y é regular. De modo que H também é regular, pois

$$Y = e^{t_1 ad(X_1)}.e^{t_2 ad(X_2)} \ldots e^{t_n ad(X_n)}(H)$$

e imagens de elementos regulares por automorfismos são regulares. Isso mostra que $\mathfrak{h}$ contém elementos regulares. Como queríamos no teorema 2.38.

Com tudo que vimos, para toda subálgebra de Cartan dada, existe um polinômio não nulo $q \in \mathfrak{g}$ tal que o conjunto

$$C_q = \{Y \in \mathfrak{g} : q(Y) \neq 0\}$$

é formado por elementos regulares e para todo $Y \in C_q$, existe um automorfismo ψ de $\mathfrak{g}$ tal que $\psi(Y) \in \mathfrak{h}$.

Tome outra subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}'$, tem-se um polinômio q' com mesmas propriedades. Como qq' é um polinômio não nulo, existe $Y \in \mathfrak{g}$ tal que $q(Y) \neq 0 \neq q'(Y)$. Para este Y existem ψ e ψ' tais que $\psi(Y) \in \mathfrak{h}$ e $\psi'(Y) \in \mathfrak{h}'$, e daí que

$$\psi'\psi^{-1}(\psi(Y)) \in \mathfrak{h}'.$$

Mas $\psi(Y)$ é um elemento regular em $\mathfrak{h}$, logo $\psi'\psi^{-1}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}'$, o que mostra que $\mathfrak{h}'$ é imagem de $\mathfrak{h}$ por automorfismo, isto é, duas subálgebras de Cartan são conjugadas entre si por automorfismos de $\mathfrak{g}$.

2.6 Subálgebra de Borel

Nosso objetivo agora é definir a *subálgebra de Borel.* O primeiro passo consiste numa discussão sobre a ordem lexicográfica em espaços vetoriais.

Definição 2.45. *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo ordenado $\mathbb{K}$ e $\{v_1, ..., v_n\}$ uma base de V. Sejam $v, w \in V$ escritos na forma*

$$v = a_1v_1 + ... + a_nv_n$$
$$w = b_1v_1 + ... + b_nv_n,$$

com $a_i, b_i \in \mathbb{K}$. A ordem lexicográfica em V em relação a base $\{v_1, ..., v_n\}$ é dada por $v \leq w$ se $v = w$ ou se $a_i < b_i$, onde i representa o primeiro índice em que as coordenadas de v e w são diferentes. Essa ordem define de fato uma ordem que é compatível com a estrutura de espaço vetorial (isto é, $v \leq w \Rightarrow v+u \leq w+u$ e $xv \leq xw$ se $x > 0$ e $v \leq w$).

Exemplo 2.46. *A relação $R = \{(a + bi, c + di) : b < d$ ou $b = d$ e $a \leq c\}$, definida no conjunto dos números complexos, é uma ordem lexicográfica para o conjunto $\mathbb{C}$. Considerando $z_1 = -5 - i, z_2 = 6 - i, z_3 = -2 + 3i, z_4 = 3 + 3i$ e $z_5 = -2 + 4i$, temos a seguinte ordem lexicográfica $z_1 \leq z_2 \leq z_3 \leq z_4 \leq z_5$.*

Denotaremos por $\prod^+ \subset \prod$ o conjunto de todas as raízes positivas. Isto é, o conjunto dos pesos não-nulos da representação adjunta de $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{g}$ que são funcionais lineares no espaço vetorial $\mathfrak{h}$ que levam todo elemento positivo $X \in \mathfrak{h}$ (escolhendo uma ordem lexicográfica em $\mathfrak{h}$) em um elemento não-negativo em $\mathbb{C}$ (escolhendo uma ordem lexicográfica no conjunto $\mathbb{C}$).

Definição 2.47. *Para uma escolha de raízes positivas $\prod^+ \subset \prod$, seja $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$, onde $\mathfrak{n}^+ = \sum_{\lambda \in \prod^+} \mathfrak{g}_\lambda$. A subálgebra $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$ é chamada de subálgebra de Borel gerada por $\prod^+$.*

Observação 2.48. *Em Álgebras de Lie semi-simples as subálgebras de Borel são justamente as subálgebras solúveis maximais, no sentido que toda subálgebra solúvel está contida em alguma subálgebra de Borel. Ainda todas as subálgebras maximais são conjugadas por um automorfismo interno de $\mathfrak{g}$ a subálgebra $\mathfrak{b}$. Ver ([11])*

2.7 Estruturas Complexas

Definição 2.49. *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie. Dizemos que $\mathfrak{g}$ é uma Álgebra de Lie complexa se for espaço vetorial complexo e $[iX, Y] = i[X, Y]$, para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.*

Definição 2.50. *Uma estrutura complexa sobre uma Álgebra de Lie real $\mathfrak{g}$ é um endomorfismo J do espaço vetorial $\mathfrak{g}$ tal que $J^2 = -I$. No que segue vamos supor sempre que J é integrável, isto é, $N_J = 0$, onde N_J é o tensor de Nijenhuis de J:*

$$N_J(X, Y) = J[X, Y] - [JX, Y] - [X, JY] - J[JX, JY].$$

Definição 2.51. *Dizemos que uma estrutura complexa J sobre $\mathfrak{g}$ é adaptada se*

$$[JX, Y] = J[X, Y].$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Observação 2.52. *Se J é uma estrutura complexa adaptada, então J é integrável. De fato,*

$$\begin{aligned} J[X, Y] - [JX, Y] - [X, JY] - J[JX, JY] &= J[X, Y] - J[X, Y] - J[X, Y] - J^2[X, JY] \\ &= J[X, Y] - J[X, Y] - J[X, Y] + J[X, Y] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Observação 2.53. *No caso de J ser uma estrutura complexa adaptada $\mathfrak{g}$ passa a ser uma Álgebra de Lie Complexa se definirmos a multiplicação por escalares complexos através de J. Tomado $iX \equiv JX$, temos*

$$[iX, Y] = [JX, Y] = J[X, Y] = i[X, Y].$$

A princípio, vamos considerar $\mathfrak{g}$ como espaço vetorial real, $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} = n$. Sejam $\{1, i\}, \{X_1, ..., X_n\}$ bases de $\mathbb{C}$ e $\mathfrak{g}$, respectivamente. A complexificada de $\mathfrak{g}$ é dada por

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes \mathfrak{g}.$$

Então, $\{X_1, ..., X_n, iX_1, ..., iX_n\}$ constitui uma base de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = 2n$ e podemos escrever $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g}$. Se $\mathfrak{g}$ é Álgebra de Lie real, é fácil estender o colchete de Lie a $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ de modo que ela se torne uma Álgebra de Lie Complexa.

Dada uma estrutura complexa integrável J sobre $\mathfrak{g}$, sua complexificada $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g}$ pode ser escrita como $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}^{1,0} \oplus \mathfrak{g}^{0,1}$, onde

$$\mathfrak{g}^{1,0} = \{X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}; JX = iX\} \qquad e \qquad \mathfrak{g}^{0,1} = \{X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}; JX = -iX\}$$

são os $\pm$ i-auto-espaços de J.

Proposição 2.54. *Os auto-espaços $\mathfrak{g}^{1,0}$ e $\mathfrak{g}^{0,1}$ são subálgebras de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$.*

Demonstração. Como J é integrável ($N_J(X,Y)=0$), temos para $X,Y\in\mathfrak{g}^{1,0}$

$$\begin{aligned}0=J[X,Y]-[JX,Y]-[X,JY]-J[JX,JY]&=J[X,Y]-[iX,Y]-[X,iY]-J[iX,iY]\\&=J[X,Y]-i[X,Y]-i[X,Y]+J[X,Y]\\&=2J[X,Y]-2i[X,Y].\end{aligned}$$

Assim $J[X,Y]=i[X,Y]$ e daí, $[X,Y]\in\mathfrak{g}^{1,0}$, para quaisquer $X,Y\in\mathfrak{g}^{1,0}$. Analogamente $J[X,Y]=-i[X,Y]$, para quaisquer $X,Y\in\mathfrak{g}^{0,1}$.

□

Definição 2.55. *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie e J uma estrutura complexa sobre $\mathfrak{g}$. J é dita abeliana se satisfaz*

$$[JX,JY]=[X,Y],\forall X,Y\in\mathfrak{g}.$$

Definição 2.56. *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie real e J_1 e J_2 estruturas complexas sobre $\mathfrak{g}$. Dizemos que o par $\{J_1,J_2\}$é uma estrutura hipercomplexa sobre $\mathfrak{g}$, se*

$$J_1\circ J_2=-J_2\circ J_1.$$

Uma estrutura hipercomplexa $\{J_1,J_2\}$ é dita abeliana, se J_1 e J_2 são estruturas complexas abelianas.

Observação 2.57. *Algumas vezes uma estrutura hipercomplexa é apresentada como uma tripla de estruturas complexas $\{J_1,J_2,J_3\}$ satisfazendo a relação dos quatérnios*

$$J_3=J_1J_2=-J_2J_1.$$

Proposição 2.58. *Sejam J_1 e J_2 estruturas complexas integráveis sobre uma Álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Se $\{J_1,J_2\}$ é estrutura hipercomplexa sobre $\mathfrak{g}$ e J_1 é abeliana, então J_2 também é abeliana.*

Demonstração. Da integrabilidade de J_2 e de $J_2^2=-I$, temos

$$-[X,Y]=J_2[J_2X,Y]+J_2[X,J_2Y]-[J_2X,J_2Y],$$

para todo $X,Y\in\mathfrak{g}$. Com isso, basta mostrarmos que $J_2[J_2X,Y]+J_2[X,J_2Y]=0$, isto é $[J_2X,Y]=-[X,J_2Y]$. Do fato de J_1 e J_2 serem hipercomplexas, J_2 ser integrável e J_1 ser abeliana, temos

$$\begin{aligned}[J_2X,Y]+[X,J_2Y]+J_2[J_2X,J_2Y]&=J_2[X,Y]=J_2[J_1X,J_1Y]\\&=[J_2J_1X,J_1Y]+[J_1X,J_2J_1Y]+J_2[J_2J_1X,J_2J_1Y]\\&=[-J_1J_2X,J_1Y]+[J_1X,-J_1J_2Y]+J_2[J_1J_2X,J_1J_2Y]\\&=-[J_2X,Y]-[X,J_2Y]+J_2[J_2X,J_2Y].\end{aligned}$$

Logo, $[J_2X,Y]=-[X,J_2Y]$. □

3 Auto-espaços nilpotentes

Neste capítulo estaremos interessados em caracterizar e exemplificar Álgebras de Lie, com estrutura complexa cujos subespaços sejam subálgebras nilpotentes. Por questões didáticas, na primeira seção faremos um estudo mais detalhado sobre estruturas complexas J definindo em $\mathfrak{g}$ um novo colchete de Lie, de modo que $\mathfrak{g}$, munida deste colchete, seja uma álgebra de Lei isomorfa às subálgebras $\mathfrak{g}^{1,0}$ e $\mathfrak{g}^{0,1}$. Na segunda seção veremos que dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, tal que $\mathfrak{g}^{1,0}$ (ou equivalentemente $\mathfrak{g}^{0,1}$) é uma subálgebra nilpotente de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, então $\mathfrak{g}$ é solúvel. Neste sentido, iremos nos dedicar a estruturas complexas para as quais os $\pm\, i$ auto-espaços são subálgebras de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, para tanto consideraremos apenas Álgebras de Lie que admitem estruturas complexas integráveis. Na terceira seção caracterizaremos as Álgebras de Lie solúveis até dimensão 6 que admitem estruturas complexas com auto-espaços nilpotentes. Por fim, na quarta seção faremos a construção detalhada de vários exemplos que satisfazem as condições dos resultados obtidos durante todo o capítulo.

3.1 O colchete*

Para estudar a estrutura complexa J definimos em $\mathfrak{g}$ um novo colchete de Lie $[*]_J$, tal que $\mathfrak{g}^{1,0}$ e $\mathfrak{g}^{0,1}$ sejam Álgebras de Lie isomorfas a ($\mathfrak{g}$,$[*]_J$)

Definição 3.1. *Seja* $(\mathfrak{g}, [.,.])$ *uma Álgebra de Lie com uma estrutura complexa integrável* J*. Definimos*

$$\begin{aligned}
[*]_J : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\
(X, Y) &\longmapsto [X * Y]_J = \frac{1}{2}([X, Y] - [JX, JY])
\end{aligned}$$

Proposição 3.2. $(\mathfrak{g}, [*]_J)$*, como definida acima, é uma Álgebra de Lie.*

Demonstração. A anti-simetria é óbvia.

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, temos

$$\begin{aligned}
[\alpha X + \beta Y * Z]_J &= \frac{1}{2}([\alpha X + \beta Y, Z] - [J(\alpha X + \beta Y,), JZ]) \\
&= \frac{1}{2}(\alpha[X, Y] + \beta[Y, Z] - [\alpha JX + \beta JY, JZ]) \\
&= \alpha[X * Z]_J + \beta[Y * Z]_J.
\end{aligned}$$

Isso prova a bilinearidade.

Também se verifica a identidade de Jacobi de $[*]_J$. De fato, para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, temos

$$
\begin{aligned}
[X*[Y*Z]_J]_J =& [X*\frac{1}{2}([Y,Z]-[JY,JZ])]_J \\
=& \frac{1}{2}([X,\frac{1}{2}([Y,Z]-[JY,JZ])]-[JX,J(\frac{1}{2}([Y,Z]-[JY,JZ]))]) \\
=& \frac{1}{2}([X,\frac{1}{2}([Y,Z]-[JY,JZ])]-[JX,\frac{1}{2}([JY,Z])+[Y,JZ]) \\
=& \frac{1}{4}([X,[Y,Z]]+[JZ,[X,JY]]+[JY,[JZ,X]]+[Z,[JX,JY]]+ \\
& +[JY,[Z,JX]]+[JZ,[JX,Y]]+[Y,[JZ,JX]])
\end{aligned}
$$

Do mesmo modo, obtemos

$$
\begin{aligned}
[Z*[X*Y]_J]_J = \frac{1}{4}([Z,[X,Y]]+[JY,[Z,JX]]+[JX,[JY,Z]]+[Y,[JZ,JX]]+[JX,[Y,JZ]]+ \\
+[JY,[JZ,X]]+[X,[JY,JZ]])
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
[Y*[Z*X]_J]_J = \frac{1}{4}([Y,[Z,X]]+[JX,[Y,JZ]]+[JZ,[JX,Y]]+[X,[JY,JZ]]+[JZ,[X,JY]]+ \\
+[JX[,JY,Z]+[Z,[JX,JY]]).
\end{aligned}
$$

Das três últimas equações, concluímos que

$$
\begin{aligned}
[X*[Y*Z]_J]_J+[Z*[X*Y]_J]_J+[Y*[Z*X]_J]_J =& \frac{1}{4}([X,[Y,Z]]+[Z,[X,Y]]+[Y,[Z,X]])+ \\
&+\frac{1}{2}([X,[JY,JZ]]+[JZ,[X,JY]]+ \\
&+[JY,[JZ,X]]+[Z,[JX,JY]]+ \\
&+[JY,[Z,JX]]+[JX,[Y,JZ]]+ \\
&+[JZ,[JX,Y]]+[Y,[JZ,JX]]+ \\
&+[JX,[JY,Z]]).
\end{aligned}
$$

Agora usaremos a validade da identidade de Jacobi para o colchete $[.,.]$

$$
\begin{aligned}
[X*[Y*Z]_J]_J+[Z*[X*Y]_J]_J+[Y*[Z*X]_J]_J =& \frac{1}{2}\{([X,[JY,JZ]]+[JZ,[X,JY]]+ \\
&+[JY,[JZ,X]])+[Z,[JX,JY]]+ \\
&+[JY,[Z,JX]]+[JX,[JY,Z]])+ \\
&+[JX,[Y,JZ]]+[JZ,[JX,Y]]+ \\
&+[Y,[JZ,JX]] \\
&=0
\end{aligned}
$$

□

No que segue denotamos a Álgebra de Lie $(\mathfrak{g}, [*]_J)$ por $\mathfrak{g}_*$.

Fato 3.3. *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie e J uma estrutura complexa sobre $\mathfrak{g}$. Então $\mathfrak{g}_*$ é abeliana se, e só se, J é abeliana.*

Demonstração. $[X * Y]_J = 0$ se, e só se, $[X, Y] - [JX, JY] = 0; X, Y \in \mathfrak{g}$

□

Proposição 3.4. *Seja $(\mathfrak{g}, [.,.])$ uma Álgebra de Lie com estrutura complexa integrável J. Então J é adaptada a $(\mathfrak{g}, [*]_J)$. Consequentemente, $\mathfrak{g}_*$ é uma Álgebra de Lie complexa, se definirmos a multiplicação por i através de J.*

Demonstração. Dados $X, Y \in \mathfrak{g}$, temos

$$\begin{aligned} J[X * Y]_J &= \frac{1}{2}(J[X, Y] - J[JX, JY]) \\ &= \frac{1}{2}([JX, Y] + [X, JY]) \\ &= \frac{1}{2}([JX, Y] - [JJX, JY]) = [JX * Y]_J. \end{aligned}$$

□

Proposição 3.5. *Seja $(\mathfrak{g}, [.,.])$ uma Álgebra de Lie com estrutura complexa J. Então as Álgebras de Lie $\mathfrak{g}^{1,0}$, $\mathfrak{g}^{0,1}$ e $(\mathfrak{g}, [*]_J)$ são isomorfas.*

Demonstração. Tome $Z \in \{X - iJX; X \in \mathfrak{g}\}$.

$$JZ = JX - iJ^2X = JX - i(-X) = JX + iX = i(X - iJX) = iZ,$$

isto é $\{X - iJX; X \in \mathfrak{g}\} \subseteq \mathfrak{g}^{1,0}$.

Tome $Z \in \mathfrak{g}^{1,0}$, e sejam $X, Y \in \mathfrak{g}$ tais que $Z = X + iY$. Temos que

$$JZ = iZ \Longrightarrow JX + iJY = i(X + iY) = -Y + iX.$$

Nos resta que $-JX = Y$, e daí $Z = X - iJX$. Logo, $\{X - iJX; X \in \mathfrak{g}\} \supseteq \mathfrak{g}^{1,0}$. Com isso, mostramos que $\mathfrak{g}^{1,0} = \{X - iJX; X \in \mathfrak{g}\}$.

Considere

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathfrak{g}, [*]_J) &\longrightarrow \mathfrak{g}^{1,0} \\ X &\longmapsto \frac{1}{2}(X - iJX) \end{aligned}$$

É fácil ver que $\varphi(JX) = i\varphi(X)$, então φ é $\mathbb{C}$-linear.

Como J é adaptada a $(\mathfrak{g}, [*]_J)$, temos que

$$\begin{aligned}
\varphi[X*Y]_J &= \frac{1}{2}([X*Y]_J - iJ[X*Y]_J) \\
&= \frac{1}{4}([X,Y]-[JX,JY]) - \frac{1}{4}iJ([X,Y]-[JX,JY]) \\
&= \frac{1}{4}([X,Y]-[JX,JY]-i[JX,Y]-[X,JY]) \\
&= \frac{1}{4}([X,Y]+[X,-iJY]+[-iJX,Y]+[-iJX,-iJY]) \\
&= [\frac{1}{2}(X-iJX), \frac{1}{2}(Y-iJY)] = [\varphi(X), \varphi(Y)].
\end{aligned}$$

Logo φ é homeomorfismo, e portanto isomorfismo entre $(\mathfrak{g}, [*]_J)$ e $\mathfrak{g}^{1,0}$. Analogamente, $\mathfrak{g}^{0,1}$ é isomorfo a $(\mathfrak{g}, [*]_J)$. Basta definir o isomorfismo $\psi(X) = \dfrac{1}{2}(X + iJX)$ e observar que $\mathfrak{g}^{0,1} = \{X + iJX; X \in \mathfrak{g}\}$. $\square$

Das proposições 3.4 e 3.5, temos o seguinte corolário.

Corolário 3.6. *Seja $(\mathfrak{g}, [.,.])$ uma Álgebra de Lie com estrutura complexa integrável J. Então os $\pm i$ auto-espaços $\mathfrak{g}^{0,1}$ e $\mathfrak{g}^{1,0}$ de J são subálgebras complexas de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g}$.*

Definição 3.7. *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie e J uma estrutura complexa sobre $\mathfrak{g}$. J é dita s-passos nilpotente se é integrável e $\mathfrak{g}_*$ é s-passos nilpotente.*

Uma estrutura hipercomplexa dada por um par $\{J_1, J_2\}$ de estruturas complexas é s-passos nilpotente se tanto J_1 como J_2 são s-passos nilpotente para o mesmo s.

3.2 $\mathfrak{g}$ é solúvel se $\mathfrak{g}_*$ é nilpotente

O principal resultado que obteremos nesta seção é que se $\mathfrak{g}_*$ é nilpotente, então $\mathfrak{g}$ é solúvel. Veremos, nas próximas seções, exemplos onde $\mathfrak{g}_*$ é nilpotente e $\mathfrak{g}$ é solúvel, mas não é nilpotente.

Teorema 3.8. *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie com estrutura complexa, tal que $\mathfrak{g}_*$ é nilpotente. Então $\mathfrak{g}$ é solúvel.*

A demonstração deste Teorema é baseada em um lema de Goto. Por questões didáticas, seguem algumas definições cujo conhecimento é fundamental para a demonstração do Lema de Goto.

Definição 3.9. *Seja A um subconjunto de $\mathfrak{g}$. Chamamos de centralizador de A em $\mathfrak{g}$ e denotamos por $z(A)$ o conjunto*

$$z(A) = \{X \in \mathfrak{g} : [X,Y] = 0, \forall\, Y \in A\}$$

O centralizador de $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{g}$ será chamado de centro de $\mathfrak{g}$ e será denotado por

$$c(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} : [X, Y] = 0, \forall\, Y \in \mathfrak{g}\}$$

Definição 3.10. *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie sobre um corpo $\mathbb{K}$. Diremos que $X \in \mathfrak{g}$ é um elemento semi-simples de $\mathfrak{g}$ se $ad(X)$ é diagonalizável para alguma extensão de $\mathbb{K}$.*

Observação 3.11. *Se $\mathfrak{g}$ é semi-simples, então as subálgebras de Cartan de $\mathfrak{g}$ são as subálgebras abelianas maximais cujos elementos são semi-simples. Ver [11].*

Lema 3.12. *(Goto) Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie semi-simples sobre um corpo algebricamente fechado e de característica zero, e seja $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}$ uma subálgebra nilpotente. Então*

$$\dim \mathfrak{n} \leq \dim \mathfrak{b} - \dim \mathfrak{h} = \frac{\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{h}}{2},$$

onde $\mathfrak{b}$ é uma subálgebra de Borel e $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Cartan.

Demonstração. Se $\mathfrak{n}$ é nilpotente, então $\mathfrak{n}$ é solúvel. Daí está contida em alguma subálgebra de Borel $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$, já que $\mathfrak{g}$ é semi-simples. Considere $\mathfrak{s}$ o conjunto de todos os elementos semi-simples de $\mathfrak{n}$ e seja $X \in \mathfrak{s}$. Como $\mathfrak{n}$ é nilpotente e $\mathrm{ad}(X)$ é diagonalizável em $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, nos resta que $\mathrm{ad}(X) = 0$, sempre que restrita a $\mathfrak{n}$. Segue que $\mathfrak{s} \subset c(\mathfrak{n})$ e $\mathfrak{s}$ é abeliana.

Como $\mathfrak{s}$ é abeliana e seus elementos são semi-simples, temos que $\mathfrak{s}$ está contida em alguma subálgebra de Cartan $\tilde{\mathfrak{h}}$ de $\mathfrak{b}$. Como $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{b}$ é subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$, ela é abeliana maximal com elementos semi-simples, logo é também subálgebra de Cartan de $\mathfrak{b}$. Assim, $\mathfrak{h}$ e $\tilde{\mathfrak{h}}$ são conjugadas por algum automorfismo de $\mathfrak{b}$, e trocando $\mathfrak{n}$ e $\mathfrak{s}$ por suas imagens através desse automorfismo podemos sem perda de generalidade assumir $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{h} \subset \mathfrak{b}$. Logo

$$\mathfrak{s} \subset \mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}.$$

Por outro lado, os elementos de $\mathfrak{h}$ são semi-simples. Segue da forma como $\mathfrak{s}$ foi definida que

$$\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n} \subset \mathfrak{s}.$$

Portanto $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n} = \mathfrak{s}$

Seja $\Gamma = \{\lambda \in \Pi^+ : \lambda(S) = 0, \forall S \in \mathfrak{s}\}$ e seja $\mathfrak{l}_1 = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\lambda \in \Gamma} \mathfrak{g}_\lambda$. Afirmamos que $\mathfrak{l}_1$ é o centralizador de $\mathfrak{s}$ em $\mathfrak{b}$. De fato, se $B \in z(\mathfrak{s})$, em particular $B \in \mathfrak{b}$. Seja $B = H + \sum_{\lambda \in \Pi^+} G_\lambda$, com $H \in \mathfrak{h}$ e $G_\lambda \in \mathfrak{g}_\lambda$. Tome $S \in \mathfrak{s}$, então

$$0 = ad(S)B = ad(S)H + \sum_{\lambda \in \Pi^+} ad(S)G_\lambda = 0 + \sum_{\lambda \in \Pi^+} \lambda(S)G_\lambda,$$

para todo $S \in \mathfrak{s}$. Nos resta que se $G_\lambda \neq 0$, então $\lambda(S) = 0$, isto é, $\lambda \in \Gamma$ e $B \in \mathfrak{l}_1$. A última igualdade na equação acima segue do fato de $\mathfrak{h}$ ser abeliana e de $\mathrm{ad}(S)$ ser diagonalizável.

Pois, neste caso, sempre que $(ad(S) - \lambda(S))^n X = 0$, teremos $(ad(S) - \lambda(S))X = 0$, e daí $\mathrm{ad}(S)X = \lambda(S)X$, para todo $X \in \mathfrak{g}_\lambda$.

Analogamente, se $L = H + \sum_{\lambda\in\Gamma} G_\lambda$, segue que

$$ad(S)L = ad(S)H + \sum_{\lambda\in\Gamma} ad(S)G_\lambda = 0 + \sum_{\lambda\in\Gamma} \lambda(S)G_\lambda,$$

pelo mesmo motivo de antes. Ainda de $\lambda \in \Gamma$, temos $\lambda(S) = 0$, e $ad(S)L = 0$. Logo $L \in z(\mathfrak{s})$.

Portanto, $\mathfrak{h} + \mathfrak{n} \subset z(\mathfrak{s}) = \mathfrak{l}_1$ e assim

$$\dim \mathfrak{l}_1 \geq \dim \mathfrak{n} + \dim \mathfrak{h} - \dim \mathfrak{h} \cap \mathfrak{n} = \dim \mathfrak{n} + \dim \mathfrak{h} - \dim \mathfrak{s}.$$

Por outro lado, se pomos $\mathfrak{l}_2 = \sum_{\lambda\in\Pi^+\setminus\Gamma} \mathfrak{g}_\lambda$ então $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+ = \mathfrak{l}_1 \oplus \mathfrak{l}_2$. Seja $\sigma = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ o sistema simples de raízes contido em Π^+. σ é base do dual de $\mathfrak{h}$ e $\sigma|_\mathfrak{s} = \{\lambda_1|_\mathfrak{s}, ..., \lambda_n|_\mathfrak{s}\}$ gera o dual de $\mathfrak{s}$. Mas se $\lambda_i \in \Gamma$, então $\lambda_i \mid_\mathfrak{s} = 0$, de modo que devem existir pelo menos r raízes $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \sigma, r \geq \dim \mathfrak{s}^* = \dim \mathfrak{s}$, que não estão em Γ. De modo que os espaços de raízes $\mathfrak{g}_{\lambda_i}, i = 1, ..., r$ estão contidos em $\mathfrak{l}_2$, isso mostra que $\dim \mathfrak{l}_2 \geq \dim \mathfrak{s}$.

Combinando as desigualdades temos

$$\dim \mathfrak{b} = \dim \mathfrak{l}_1 + \dim \mathfrak{l}_2 \geq \dim \mathfrak{l}_1 + \dim \mathfrak{s} \geq \dim \mathfrak{n} + \dim \mathfrak{h}.$$

Assim, $\dim \mathfrak{n} \leq \dim \mathfrak{b} - \dim \mathfrak{h}$.

Por fim, seja $\mathfrak{n}^- = \sum_{\lambda\in\prod^-} \mathfrak{g}_\lambda$ e $\prod^- = -\prod^+$. Então,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{n}^-.$$

Como $\mathfrak{n}^-$ e $\mathfrak{n}^+$ são subálgebras isomorfas, logo têm as mesma dimensões, ver [14]. É fácil ver que

$$\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{h} = 2 \dim \mathfrak{n}^+,$$

e por outro lado $\dim \mathfrak{b} - \dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{n}^+$. Isso conclui a demonstração do Lema. □

Proposição 3.13. *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie sobre $\mathbb{K}$ e $\bar{\mathbb{K}}$ uma extensão de $\mathbb{K}$. $\mathfrak{g}$ é solúvel se e só se $\mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}} = \bar{\mathbb{K}} \otimes \mathfrak{g}$ é solúvel.*

Demonstração. De fato, as álgebras derivadas tanto de $\mathfrak{g}$ quanto de $\mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}}$ são gerados por colchetes sucessivos de elementos de $\mathfrak{g}$; as álgebras derivadas de $\mathfrak{g}$ são obtidas por combinações lineares com coeficientes em $\mathbb{K}$ enquanto as de $\mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}}$ por combinações lineares com coeficientes em $\bar{\mathbb{K}}$. Daí que

$$(\mathfrak{g}^{(n)})^{\bar{\mathbb{K}}} = (\mathfrak{g}^{\bar{\mathbb{K}}})^{(n)}$$

para todo $n \geq 0$. □

Proposição 3.14. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ um ideal. Suponha que tanto $\mathfrak{h}$ quanto $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ sejam solúveis. Então $\mathfrak{g}$ é solúvel.*

Ver demonstração [14].

Proposição 3.15. *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie que não é solúvel e $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ seu radical solúvel. Então $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ é semi-simples.*

Demonstração. Seja $\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ o homomorfismo canônico e tome um ideal solúvel $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$. Então, $\pi^{-1}(\mathfrak{i})$ é um ideal que contém $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ e $\mathfrak{i} = \pi^{-1}(\mathfrak{i})/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$. Assim, $\pi^{-1}(\mathfrak{i})$ é solúvel e, portanto, está contido em $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$, isto é $\mathfrak{i} = 0$, então $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ é semi-simples. □

Estamos preparados para demonstrar o teorema 3.8.

Demonstração. (Teorema 3.8) Escrevendo a complexificada $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ de $\mathfrak{g}$ como soma direta de duas subálgebras nilpotentes, por isomorfismo de $\mathfrak{g}_*$.

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}^{1,0} \oplus \mathfrak{g}^{0,1}$$

Suponhamos que $\mathfrak{g}$ não é solúvel. Da proposição 3.13 teríamos que $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ não é solúvel. Se $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ é o radical solúvel de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, a proposição 3.15 garante que a Álgebra de Lie $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ é semi-simples. Considere $\mathfrak{n}_1$ e $\mathfrak{n}_2$ as respectivas projeções de $\mathfrak{g}^{1,0}$ e $\mathfrak{g}^{0,1}$ sobre $\mathfrak{m}$. As projeções $\mathfrak{n}_1$ e $\mathfrak{n}_2$continuam nilpotentes e $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2$. Logo, pelo lema 3.12, $\dim \mathfrak{n}_1 < \frac{1}{2} \dim \mathfrak{m}$ e $\dim \mathfrak{n}_2 < \frac{1}{2} \dim \mathfrak{m}$. Contradição a menos que $\mathfrak{m} = \{0\}$.

Portanto $\mathfrak{g}$ é solúvel. □

3.3 Caracterização de $\mathfrak{g}*$ até dimensão complexa 3

Considerando apenas estruturas complexas integráveis, iremos caracterizar as Álgebras de Lie $\mathfrak{h}$ nilpotentes, tais que existe $\mathfrak{g}$ com $\mathfrak{g}_* = \mathfrak{h}$. Esta caracterização será feita separadamente, considerando $\mathfrak{h}$ de dimensões complexas 1,2 e 3.

Se $\mathfrak{h}$ é Álgebra de Lie Complexa 1-dimensional, então $\mathfrak{h}$ é abeliana.

Proposição 3.16. *Seja $\mathfrak{h}$ uma Álgebra de Lie nilpotente 2-dimensional, sobre um corpo $\mathbb{K}$. Então $\mathfrak{h}$ é abeliana.*

Demonstração. Se $\dim \mathfrak{h} = 2$, afirmamos que $\dim \mathfrak{h}^1 = 1$ ou $\dim \mathfrak{h}^1 = 0$. Caso contrário, teríamos $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^1$. Daí

$$\mathfrak{h}^2 = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^1] = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = \mathfrak{h}^1 = \mathfrak{h}, \text{ de modo que } \mathfrak{h}^n = \mathfrak{h}, \text{ para todo } n \geqslant 1$$

o que não é possível, já que $\mathfrak{h}$ é nilpotente. Um raciocínio análogo mostra que $\dim \mathfrak{h}^2 = 0$. Suponha $\dim \mathfrak{h}^1 = 1$ e seja $\{X\}$ uma base de $\mathfrak{h}^1$. Seja $Y \in \mathfrak{h} \backslash \mathfrak{h}^1$ tal que $\{X, Y\}$ é uma base de $\mathfrak{h}$. Temos que $[X, Y] \in \mathfrak{h}^1$, já que $\mathfrak{h}^1$ é ideal de $\mathfrak{h}$. Tome $c \in \mathbb{K}$ tal que $[X, Y] = cX$. Se $c \neq 0$, então $X = \frac{1}{c}[X, Y]$ e $[X, Y] = [\frac{1}{c}[X, Y], Y] \in \mathfrak{h}^2 = \{0\}$. Nos resta que $c = 0 \Rightarrow [X, Y] = 0$. Logo $\mathfrak{h}$ é abeliana.

□

Da afirmação acima, segue que se $\mathfrak{h}$ é uma Álgebra de Lie Complexa nilpotente 2-dimensional, então $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_*$ para $\mathfrak{g}$ abeliana de dimensão real 4.

Proposição 3.17. *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie 2-dimensional. Então $\mathfrak{g}$ é abeliana ou existe uma base $\{X, Y\}$ de $\mathfrak{g}$ tal que $[X, Y] = Y$.*

Demonstração. Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie não abeliana e tome $\{X, Y\}$ uma base de $\mathfrak{g}$. Temos que $[X, Y] \neq 0$. Seja $[X, Y] = Y'$ e tome $X' \in \mathfrak{g}$, tal que $\{X', Y'\}$ forme uma base de $\mathfrak{g}$. Podemos escrever X' e Y' com relação a base $\{X, Y\}$. Sejam $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ em $\mathbb{K}$ tais que $X' = \alpha X + \beta Y$ e $Y' = \gamma X + \delta Y$. Daí,

$$[X', Y'] = [\alpha X + \beta Y, \gamma X + \delta Y] = (\alpha\gamma - \beta\delta)[X, Y] = (\alpha\gamma - \beta\delta)Y'.$$

Como $\mathfrak{g}$ é Álgebra de Lie não abeliana, temos $(\alpha\gamma - \beta\delta) \neq 0$. Então podemos definir $A = (\alpha\gamma - \beta\delta)^{-1}X'$ e $B = Y'$. Como

$$[A, B] = (\alpha\gamma - \beta\delta)^{-1}[X', Y'] = (\alpha\gamma - \beta\delta)^{-1}(\alpha\gamma - \beta\delta)Y' = Y' = B,$$

a base que procuramos é $\{A, B\}$. □

Teorema 3.18. *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie tridimensional cuja álgebra derivada $\mathfrak{g}'$ é unidimensional. Suponha $\mathfrak{g}' \subset c(\mathfrak{g})$. Então existe uma base $\{X, Y, Z\}$ de $\mathfrak{g}$ tal que $[Y, Z] = X, [X, Y] = 0$ e $[X, Z] = 0$ ou seja, $\mathfrak{g}$ é isomorfa à Álgebra de Heinsenberg.*

Demonstração. Sejam $\{X\}$ e $\{X, Y_1, Z\}$ bases de $\mathfrak{g}'$ e $\mathfrak{g}$ respectivamente. Como $\mathfrak{g}' \subset c(\mathfrak{g})$ e $X \in \mathfrak{g}'$ temos $[X, W] = 0$ para qualquer $W \in \mathfrak{g}$, e, em particular $[X, Y_1] = 0$ e $[X, Z] = 0$. Como $[Z, Y_1] \in \mathfrak{g}'$, temos que $[Z, Y_1] = aX$. Se $a = 0$, teremos $[Z, Y_1] = 0$. E daí para quaisquer $U, V \in \mathfrak{g}$ vale

$$[U, V] = [a_1X + a_2Y_1 + a_3Z, b_1X + b_2Y_1 + b_3Z] = 0.$$

Concluímos que $\dim(\mathfrak{g}') = 0$, contradizendo a hipótese. Logo, $a \neq 0$.

Definimos $Y = \frac{1}{a}Y_1$. Então, {X,Y,Z} também é uma base de $\mathfrak{g}$ e $[X, Y] = 0, [X, Z] = 0$ e

$$[Y, Z] = \frac{1}{a}[Y_1, Z] = \frac{1}{a}aX = X.$$

□

Lema 3.19. *Se $\mathfrak{h}$ é uma Álgebra de Lie nilpotente 3-dimensional, então $\mathfrak{h}$ é no máximo 2-passos nilpotente. Em particular, $\mathfrak{h}$ é abeliana ou isomorfa à álgebra de Heisenberg.*

Demonstração. Como $\mathfrak{h}$ é nilpotente, não é possível que $\dim \mathfrak{h}^2 = 3$. Se $\dim \mathfrak{h}^2 = 0$, então $\mathfrak{h}$ é abeliana e consequentemente, $\mathfrak{h}$ é 1-passo nilpotente.

Se $\dim \mathfrak{h}^2 = 1$, não é possível que $\dim \mathfrak{h}^3 = 1$, caso contrário $\mathfrak{h}^2 = \mathfrak{h}^3$, o que contradiz o fato de $\mathfrak{h}$ ser nilpotente. Neste caso nos resta que $\dim \mathfrak{h}^3 = 0$, isto é $\mathfrak{h}$ é 2-passos nilpotente e do teorema 3.18, $\mathfrak{h}$ é isomorfa à álgebra de Heisenberg.

Se $\dim \mathfrak{h}^2 = 2$, então $\mathfrak{h}^2$ é abeliana ou existe uma base $\{X, Y\}$ de $\mathfrak{h}^2$ tal que $[X, Y] = Y$. Neste caso $Y \in \mathfrak{h}^k$, para todo k, o que contradiz o fato de $\mathfrak{h}$ ser nilpotente. Assim, nos resta que $\mathfrak{h}^2$ é abeliana. Como $\mathfrak{h}^2$ é ideal de $\mathfrak{h}$, segue que $[X, Y] \in \mathfrak{h}^2$, para todo $X \in \mathfrak{h} \backslash \mathfrak{h}^2$ e para todo $Y \in \mathfrak{h}^2$. Daí $\mathrm{ad}(X)\mathfrak{h}^2 \subset \mathfrak{h}^2$, e como $\mathrm{ad}(X)$ restrita a $\mathfrak{h}^2$ é nilpotente e lembrando que para cada transformação linear nilpotente existe uma base em relação à qual a matriz associada é estritamente triangular superior, definimos, neste caso, a base $\{Y, Z\}$ de $\mathfrak{h}^2$ tal que $\mathrm{ad}(X)Y = 0$, $\mathrm{ad}(X)Z = Y$, isto é, $[X, Y] = 0$ e $[X, Z] = Y$. Mas $\mathfrak{h}^2$ é abeliana, então $[Y, Z] = 0$. Dados $U, V \in \mathfrak{h}$, temos

$$\begin{aligned}
[U, V] &= [\alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z, \beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_3 Z] \\
&= \alpha_1 \beta_3 [X, Z] + \alpha_3 \beta_1 [Z, X] \\
&= (\alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_1)[X, Z] \\
&= \gamma [X, Z] \\
&= \gamma Y.
\end{aligned}$$

Como $\mathfrak{h}^2 = [U, V] = \gamma Y$, isso contradiz o fato de que $\dim \mathfrak{h}^2 = 2$.

Logo, nos resta que só é possível que $\dim \mathfrak{h}^2 = 0$, então $\mathfrak{h}$ é abeliana e 1-passo nilpotente ou $\dim \mathfrak{h}^2 = 1$, e neste caso $\mathfrak{h}$ é isomorfo a álgebra de Heisenberg e 2-passos nilpotente . □

Se $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_*$ é Álgebra de Lie Complexa nilpotente e não abeliana 3-dimensional, segue do lema acima que $\mathfrak{g}_*$ é isomorfa à álgebra de Heisenberg. Ainda, $\mathfrak{g}^{1,0}$ e $\mathfrak{g}^{0,1}$ são isomorfas a álgebra de Heisenberg.

Observação 3.20. *Considere uma base $\{X_1, X_2, X_3\}$ de $\mathfrak{g}^{1,0}$, onde $X_k = Y_k - iJY_k$, com $k = 1, 2, 3$. Note que $\{Y_1, Y_2, Y_3, JY_1, JY_2, JY_3\}$ é uma base de $\mathfrak{g}$.*

Com efeito, se $\alpha_k, \beta_k (k = 1, 2, 3)$ são reais tais que $\sum_{k=1}^{3} \alpha_k Y_k + \sum_{k=1}^{3} \beta_k JY_k = 0$ então,

$$\sum_{k=1}^{3} \alpha_k \left(\frac{X_k + \bar{X}_k}{2} \right) + \sum_{k=1}^{3} \beta_k \left(\frac{\bar{X}_k - X_k}{2i} \right) = 0.$$

Daí,

$$\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\alpha_k}{2}-\frac{\beta_k}{2i}\right)X_k+\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\alpha_k}{2}+\frac{\beta_k}{2i}\right)\bar{X}_k=0.$$

Como $\bar{X}_k \in \mathfrak{g}^{0,1}$ *e* $\mathfrak{g}^{1,0}\cap\mathfrak{g}^{0,1}=0$, *segue que* $\alpha_k=\beta_k=0$.

Como $\mathfrak{g}^{1,0}$ é isomorfa à álgebra de Heisenberg podemos supor, sem perda de generalidade que a base $\{X_1, X_2, X_3\}$ de $\mathfrak{g}^{1,0}$, como acima, é tal que

$$[X_1, X_2] = X_3$$

é o único colchete não nulo dos elementos desta base. Assim,

$$[Y_1 - iJY_1, Y_2 - iJY_2] = Y_3 - iJY_3,$$

daí,

$$[Y_1, Y_2] - i[Y_1, JY_2] - i[JY_1, Y_2] + i^2[JY_1, JY_2] = Y_3 - iJY_3,$$

então

$$[Y_1, Y_2] - [JY_1, JY_2] = Y_3 \qquad e \qquad [Y_1, JY_2] + [JY_1, Y_2] = JY_3$$

Deste modo,

$$\begin{aligned}[Y_1 * Y_2] &= \frac{1}{2}([Y_1, Y_2] - [JY_1, JY_2])\\ &= \frac{1}{2}Y_3\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}[Y_1 * JY_2] &= \frac{1}{2}([Y_1, JY_2] - [JY_1, J^2Y_2])\\ &= \frac{1}{2}([Y_1, JY_2] - [JY_1, -Y_2])\\ &= \frac{1}{2}([Y_1, JY_2] + [JY_1, Y_2])\\ &= \frac{1}{2}JY_3.\end{aligned}$$

Também, usando o fato de que $J^2 = -I$, segue que

$$\begin{aligned}[JY_1 * JY_2] &= \frac{1}{2}([JY_1, JY_2] - [J^2Y_1, J^2Y_2])\\ &= \frac{1}{2}([JY_1, JY_2] - [-Y_1, -Y_2])\\ &= \frac{1}{2}(-[Y_1, Y_2] + [JY_1, JY_2])\\ &= -\frac{1}{2}([Y_1, Y_2] - [JY_1, JY_2])\\ &= -\frac{1}{2}Y_3\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}[JY_1 * Y_2] &= \frac{1}{2}([JY_1, Y_2] - [J^2Y_1, JY_2]) \\ &= \frac{1}{2}([JY_1, Y_2] - [-Y_1, JY_2]) \\ &= \frac{1}{2}([Y_1, JY_2] + [JY_1, Y_2]) \\ &= \frac{1}{2}([Y_1, JY_2] + [JY_1, -J(JY_2)]) \\ &= \frac{1}{2}([Y_1, JY_2] - [JY_1, J(JY_2)]) \\ &= [Y_1 * JY_2] = \frac{1}{2}JY_3.\end{aligned}$$

Finalmente, de $[X_1, X_3] = [X_2, X_3] = 0$, temos $[Y_1 - iJY_1, Y_3 - iJY_3] = 0$. Então,

$$[Y_1, Y_3] - i[Y_1, JY_3] - i[JY_1, Y_3] + i^2[JY_1, JY_3] = 0.$$

Daí que,

$$[Y_1, Y_3] - [JY_1, JY_3] = 0$$

e

$$[Y_1, JY_3] + [JY_1, Y_3] = 0.$$

As igualdades acima nos fornecem, por exemplo

$$[Y_1 * Y_3] = \frac{1}{2}([Y_1, Y_3] - [JY_1, JY_3]) = 0.$$

Analogamente, verifica-se a nulidade dos demais colchetes de $\mathfrak{g}_*$.

A discussão acima nos ajuda a articular o teorema seguinte.

Teorema 3.21. *Seja $\mathfrak{g}$ é uma Álgebra de Lie 6-dimensional com estrutura complexa J não-abeliana. Se J é s-passos nilpotente, então s=2 e existe $\{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6\}$ base de $\mathfrak{g}$, tal que os colchetes não nulos de $(\mathfrak{g}, [*]_J)$ satisfazem*

$$[Z_1 * Z_2] = [Z_3 * Z_4] = -Z_5 \qquad e \qquad [Z_1 * Z_3] = [Z_4 * Z_2] = -Z_6.$$

Demonstração. Se J é s-passos nilpotente, segue que $\mathfrak{g}_*$ é s-passos nilpotente. Como $\mathfrak{g}_*$ é 3-dimensional sobre $\mathbb{C}$, temos do lema 3.19, que $\mathfrak{g}_*$ é 2-passos nilpotente. Ainda, J é adaptada a $\mathfrak{g}_*$, logo é integrável . Segue da definição 3.7 que J é 2-passos nilpotente. Também, o auto-espaço $\mathfrak{g}^{1,0}$ é subálgebra complexa de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, pois J é integrável. Se J é estrutura complexa não-abeliana, então $\mathfrak{g}_*$ é Álgebra de Lie não-abeliana. De $\mathfrak{g}^{1,0} \simeq \mathfrak{g}_*$, segue o isomorfismo entre $\mathfrak{g}^{1,0}$ e a álgebra de Heisenberg. Segue da discussão acima que $\mathfrak{g}$ admite uma base $\{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6\}$, com colchetes não-nulos dados por

$$[Z_1 * Z_2] = [Z_3 * Z_4] = -Z_5 \qquad e \qquad [Z_1 * Z_3] = [Z_4 * Z_2] = -Z_6. \tag{5}$$

A verificação é imediata, basta tomar

$$Z_1 = Y_1 \qquad Z_2 = Y_2 \qquad Z_3 = JY_2$$
$$Z_4 = JY_1 \qquad Z_5 = \frac{-Y_3}{2} \qquad Z_6 = \frac{-JY_3}{2}$$

$\square$

Abaixo segue um exemplo que satisfaz tanto as condições do Teorema 3.21, quanto do Lema 3.19.

Exemplo 3.22. *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie e seja $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ uma base de $\mathfrak{g}$, cujos colchetes satisfazem*

$$[e_1, e_2] = -e_3 \qquad [e_1, e_3] = -e_4 \qquad [e_2, e_3] = -e_5 \qquad [e_1, e_4] = [e_2, e_5] = -e_6$$

A estrutura complexa J, sobre $\mathfrak{g}$, tal que

$$Je_1 = -e_2 \qquad Je_4 = -e_5 \qquad Je_3 = -e_6,$$

é 2-passos nilpotente. De fato, note que J não é abeliana, caso contrário teríamos por exemplo,

$$\begin{aligned} -e_4 = [e_1, e_3] &= [Je_1, Je_3] \\ &= [-e_2, -e_6] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Considerando a base $\{w_1 = e_1 - iJe_1, w_2 = e_4 - iJe_4, w_3 = e_3 - iJe_3\}$ de $\mathfrak{g}^{1,0}$, temos

$$\begin{aligned} [w_1, w_2] &= [e_1 - iJe_1, e_4 - iJe_4] \\ &= [e_1, e_4] - i[e_1, Je_4] - i[Je_1, e_4] - [Je_1, Je_4] \\ &= -e_6 - i[e_1, -e_5] - i[-e_2, e_4] - [-e_2, -e_5] \\ &= 0 \\ [w_1, w_3] &= [e_1 - iJe_1, e_3 - iJe_3] \\ &= [e_1, e_3] - i[e_1, Je_3] - i[Je_1, e_3] - [Je_1, Je_3] \\ &= -e_4 - i[e_1, -e_6] - i[-e_2, e_3] - [-e_2, -e_6] = -e_4 - ie_5 \\ &= -e_4 + iJe_4 \\ &= -w_2 \\ [w_2, w_3] &= [e_4 - iJe_4, e_3 - iJe_3] \\ &= [e_4, e_3] - i[e_4, Je_3] - i[Je_4, e_3] - [Je_4, Je_3] \\ &= -i[e_4, -e_6] - i[-e_4, e_3] - [-e_5, -e_6] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Em particular, a subálgebra de Lie $\mathfrak{g}^{1,0}$ *é isomorfa à álgebra de Heisenberg. Note que,* $(\mathfrak{g}^{1,0})^2 = span\{w_2\}, (\mathfrak{g}^{1,0})^3 = 0$*, o que mostra que* $\mathfrak{g}^{1,0}$ *é 2- passos nilpotente .*

Também,

$$\begin{aligned}
[e_1 * e_3]_J &= \frac{1}{2}([e_1, e_3] - [Je_1, Je_3]) \\
&= \frac{1}{2}((-e_4) - [-e_2, -e_6]) \\
&= -\frac{1}{2}e_4
\end{aligned}$$

Do mesmo modo, obtivemos os seguintes colchetes

$$\begin{aligned}
[e_1 * e_3]_J &= -\frac{1}{2}e_4 \\
[e_6 * e_2]_J &= -\frac{1}{2}e_4 \\
[e_2 * e_3]_J &= -\frac{1}{2}e_5 \\
[e_1 * e_6]_J &= -\frac{1}{2}e_5.
\end{aligned}$$

Podemos estabelecer um isomorfismo $\phi : \mathfrak{g}_* \longrightarrow \mathfrak{h}$*, onde* $\mathfrak{h}$ *é dada como em (5). Basta definir* $\phi(e_i) = Z_i$*, para* $i \in \{1, 2, 3\}$*,* $\phi(e_4) = 2Z_5$*,* $\phi(e_5) = 2Z_6$ *e* $\phi(e_6) = Z_4$*.*

Note que

$$\begin{aligned}
J[e_1 * e_3]_J - [Je_1 * e_3]_J - [e_1 * Je_3]_J - J[Je_1 * Je_3]_J & \\
&= J[e_1 * e_3]_J + [e_2 * e_3]_J + [e_1 * e_6]_J - J[e_2 * e_6]_J \\
&= -\frac{1}{2}Je_4 - \frac{1}{2}e_5 - \frac{1}{2}e_5 - \frac{1}{2}Je_4 \\
&= \frac{1}{2}e_5 - \frac{1}{2}e_5 - \frac{1}{2}e_5 + \frac{1}{2}e_5 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Do mesmo modo, obtemos

$$\begin{aligned}
J[e_2 * e_3]_J - [Je_2 * e_3]_J - [e_2 * Je_3]_J - J[Je_2 * Je_3]_J = 0 \\
J[e_1 * e_6]_J - [Je_1 * e_6]_J - [e_1 * Je_6]_J - J[Je_1 * Je_6]_J = 0 \\
J[e_6 * e_2]_J - [Je_6 * e_2]_J - [e_6 * Je_2]_J - J[Je_6 * Je_2]_J = 0
\end{aligned}$$

E da nulidade dos demais colchetes $[*]_J$*, afirmamos que* J *é integrável com relação a* $\mathfrak{g}_*$*. Com isso,* J *é 2-passos nilpotente.*

3.4 Exemplos em que $\mathfrak{g}_*$ é nilpotente

Começaremos com uma preparação para construir exemplos relacionando as estruturas de $(\mathfrak{g}, [.,.])$ e $(\mathfrak{g}_*, [*])$. Para tanto iniciaremos utilizando o Teorema 3.21. Veremos como se comporta o colchete original $[.,.]$ para uma dada Álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ com base $\{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6\}$ e estrutura complexa integrável J cujo colchete $[*]_J$ satisfaz (5). Para isto escrevemos

$$\begin{aligned} JZ_i &= \textstyle\sum_{j=1}^{6} a_{ij} Z_j,\ 1 \leq i \leq 4 \\ JZ_5 &= aZ_5 + bZ_6 \\ JZ_6 &= cZ_5 + dZ_6, \end{aligned}$$

já que $JZ_5 = -J[Z_1 * Z_2] = [JZ_1 * Z_2] \in \mathfrak{g}_*^2 = span\{Z_5, Z_6\}$ e do mesmo modo, garantimos que $JZ_6 \in span\{Z_5, Z_6\}$.

A princípio, vamos considerar

$$J = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} & 0 & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} & 0 & 0 \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & 0 & 0 \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a & c \\ a_{16} & a_{26} & a_{36} & a_{46} & b & d \end{bmatrix}$$

É fácil ver que $a = -d$, já que $J^2 = -I$. De fato,

$$\begin{aligned} -Z_5 &= aJZ_5 + bJZ_6 \\ &= (a^2 + bc)Z_5 + (ab + db)Z_6. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{cases} a^2 + bc = -1 \\ b(a + d) = 0 \end{cases}$$

Se $b = 0$, teríamos $a = i$. Mas, $\mathfrak{g}$ é Álgebra de Lie real. Nos resta que $a = -d$.

Como J é adaptada a $\mathfrak{g}_*$, vale

$$\begin{aligned} 0 &= J[Z_1 * Z_1] \\ &= [a_{11}Z_1 + a_{12}Z_2 + a_{13}Z_3 + a_{14}Z_4 + a_{15}Z_5 + a_{16}Z_6 * Z_1]_J \\ &= a_{12}[Z_2 * Z_1]_J + a_{13}[Z_2 * Z_3]_J \\ &= a_{12}Z_5 + a_{13}Z_6, \end{aligned}$$

consequentemente $a_{12} = a_{13} = 0$. Temos também

$$\begin{aligned}
-(aZ_5 + bZ_6) &= -JZ_5 \\
&= J[Z_1 * Z_2] \\
&= [a_{11}Z_1 + a_{12}Z_2 + a_{13}Z_3 + a_{14}Z_4 + a_{15}Z_5 + a_{16}Z_6 * Z_2]_J \\
&= a_{11}[Z_1 * Z_2]_J + a_{14}[Z_4 * Z_2]_J \\
&= -a_{11}Z_5 - a_{14}Z_6,
\end{aligned}$$

isso nos fornece $a_{11} = a, a_{14} = b$. Além disso,

$$\begin{aligned}
-(cZ_5 + dZ_6) &= -JZ_6 \\
&= J[Z_1 * Z_3] \\
&= [a_{11}Z_1 + a_{12}Z_2 + a_{13}Z_3 + a_{14}Z_4 + a_{15}Z_5 + a_{16}Z_6 * Z_3]_J \\
&= a_{11}[Z_1 * Z_3]_J + a_{14}[Z_4 * Z_3]_J \\
&= -a_{11}Z_6 + a_{14}Z_5,
\end{aligned}$$

consequentemente $a_{11} = d = -a$, logo $a = d = 0$. Também, $a_{14} = -c$, logo $b = -c$. Analogamente, obtemos $a_{21} = a_{22} = a_{24} = a_{31} = a_{33} = a_{34} = a_{42} = a_{43} = a_{44} = 0$ e $-a_{23} = a_{32} = a_{41} = c$

Assim, obtemos uma melhor representação matricial da estrutura complexa J.

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & 0 & c \\ a_{16} & a_{26} & a_{36} & a_{46} & -c & 0 \end{bmatrix}$$

Para obter os valores dos demais coeficientes, usaremos o fato de que $J^2 = -I$.

$$\begin{aligned}
JZ_1 &= -cZ_4 + a_{15}Z_5 + a_{16}Z_6 \Rightarrow \\
-Z_1 &= -c(cZ_1 + a_{45}Z_5 + a_{46}Z_6) + a_{15}(-cZ_6) + a_{16}cZ_5 \Rightarrow \\
0 &= (1 - c^2)Z_1 + c(-a_{45} + a_{16})Z_5 + c(-a_{46} - a_{15})Z_6,
\end{aligned}$$

daí $c = \pm 1$. Fazendo $c = 1$, por exemplo, temos $a_{16} = a_{45}$ e $a_{15} = -a_{46}$. Também,

$$\begin{aligned}
JZ_2 &= -cZ_3 + a_{25}Z_5 + a_{26}Z_6 \Rightarrow \\
-Z_2 &= -c(cZ_2 + a_{35}Z_5 + a_{36}Z_6) + a_{25}(-cZ_6) + a_{26}cZ_5 \Rightarrow \\
0 &= (1 - c^2)Z_2 + c(-a_{35} + a_{26})Z_5 + c(-a_{36} - a_{25})Z_6,
\end{aligned}$$

De $c = 1$, temos $a_{26} = a_{35}$ e $a_{25} = -a_{36}$.

Em suma,

$$\begin{aligned}
JZ_1 &= -cZ_4 + a_{15}Z_5 + a_{16}Z_6 \\
JZ_2 &= -cZ_3 + a_{25}Z_5 - a_{26}Z_6 \\
JZ_3 &= cZ_2 + a_{26}Z_5 - a_{25}Z_6 \\
JZ_4 &= cZ_1 + a_{16}Z_5 - a_{15}Z_6 \\
JZ_5 &= -cZ_6 \\
JZ_6 &= cZ_5.
\end{aligned}$$

Fazendo

$$X_1 = Z_1, \quad X_2 = Z_4, \quad X_3 = Z_4, \quad X_4 = Z_2, \quad X_5 = Z_5, \quad X_6 = Z_6,$$

construímos novos colchetes

$$[X_1 * X_3] = [X_4 * X_2] = -X_5 \quad \text{e} \quad [X_1 * X_4] = [X_2 * X_3] = -X_6$$

A representação matricial de J nesta nova base é dada por

$$J = \begin{bmatrix} 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 0 & 0 & 0 \\ n & m & q & p & 0 & c \\ m & -n & p & -q & -c & 0 \end{bmatrix}$$

Podemos assumir $c = -1$, pois caso $c = 1$ podemos trocar $X_i \mapsto -X_i$, onde $(i = 2, 4, 6), m \mapsto -m, p \mapsto -p$. Reobteremos a matriz invertendo o sinal de c, sem afetar os colchetes. Assim,

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ n & m & q & p & 0 & -1 \\ m & -n & p & -q & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Em particular, fazendo $m = n = p = q = 0$ temos que

$$\begin{aligned}
Z_1 &= Y_1 & JX_2 &= -X_1 JX_3 = X_4 \\
JX_4 &= -X_3 JX_5 = X_6 & JX_6 &= -X_5
\end{aligned}$$

Como

$$-X_5 = [X_1 * X_3]_J = \frac{1}{2}([X_1, X_3] - [JX_1, JX_3])$$
$$= \frac{1}{2}([X_1, X_3] - [X_2, X_4]),$$

temos que

$$[X_1, X_3] = [X_2, X_4] - 2X_5.$$

Também,

$$-X_6 = [X_1 * X_4]_J = \frac{1}{2}([X_1, X_4] - [JX_1, JX_4])$$
$$= \frac{1}{2}([X_1, X_4] + [X_2, X_3]),$$

temos que

$$[X_1, X_4] = -[X_2, X_3] - 2X_6.$$

De

$$0 = [X_1 * X_5]_J = \frac{1}{2}([X_1, X_5] - [JX_1, JX_5])$$
$$= \frac{1}{2}([X_1, X_5] - [X_2, X_6]),$$

temos que

$$[X_1, X_5] = [X_2, X_6].$$

E, da nulidade dos colchetes $[X_1 * X_6]_J, [X_3 * X_5]_J, [X_3 * X_6]_J$, obtemos as respectivas igualdades

$$[X_1, X_3] = [X_2, X_4] - 2X_5$$
$$[X_1, X_4] = -[X_2, X_3] - 2X_6$$
$$[X_1, X_5] = [X_2, X_6]$$
$$[X_1, X_6] = -[X_2, X_5]$$
$$[X_3, X_5] = [X_4, X_6]$$
$$[X_3, X_6] = -[X_4, X_5].$$

Note que, mesmo com posse de (5), nada podemos afirmar a respeito dos colchetes $[X_1, X_2], [X_3, X_4], [X_5, X_6]$.

Com tudo que vimos, descobrimos (no caso particular $m = n = p = q = 0$) como se comporta a estrutura complexa e o colchete original $[.,.]$ com relação a base de uma Álgebra de Lie que satisfaz as condições do Teorema 3.21.

Observando estas igualdades, podemos construir um exemplo onde $(\mathfrak{g}, [*])_J$ é nilpotente, mas $(\mathfrak{g}[.,.])$ não o é.

Exemplo 3.23. *Seja* $\mathfrak{g}$ *um espaço vetorial real 6-dimensional e* $\{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6\}$ *uma base fixada de* $\mathfrak{g}$*. Então* $(\mathfrak{g}, [.,.])$ *é uma Álgebra de Lie se os colchetes não nulos são dados por*

$$[Z_1, Z_2] = Z_1, \qquad [Z_2, Z_4] = 2Z_5, \qquad [Z_2, Z_3] = -2Z_6.$$

E o endomorfismo $\bar{J} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ *dado por*

$$\bar{J}Z_1 = Z_2, \qquad \bar{J}Z_3 = Z_4, \qquad \bar{J}Z_5 = Z_6$$

é uma estrutura complexa sobre $\mathfrak{g}$*. Temos* $\mathfrak{g}^2 = span\{Z_1, Z_5, Z_6\}$*, e observando que* $[Z_2, [Z_1, Z_2]] = -Z_1$*, temos que* $Z_1 \in \mathfrak{g}^3$*, analogamente* $Z_1 \in \mathfrak{g}^k$*, para todo* $k \geq 3$*, mostrando que* $(\mathfrak{g}, [.,.])$ *não pode ser nilpotente. Porém, os colchetes não nulos de* $(\mathfrak{g}, [*]_{\bar{J}})$ *são*

$$[Z_1 * Z_3]_{\bar{J}} = [Z_4 * Z_2]_{\bar{J}} = -Z_5 \qquad e \qquad [Z_1 * Z_4]_{\bar{J}} = [Z_2 * Z_3]_{\bar{J}} = -Z_6.$$

Como se verifica no Teorema 3.21, $(\mathfrak{g}, [*]_{\bar{J}})$ *é 2-passos nilpotente.*

Observamos que a Álgebra de Lie do exemplo 3.22 é nilpotente, então não é isomorfa à álgebra de Lie do exemplo 3.23. Mas ainda assim, podemos ver que $(\mathfrak{g}, [*]_J) \simeq (\mathfrak{g}, [*]_{\bar{J}})$.

Exemplo 3.24. *Sejam* $\mathfrak{g}$ *uma Álgebra de Lie com colchetes não nulos dados por*

$$[e_2, e_4] = 2e_5 \qquad e \qquad [e_2, e_3] = -2e_6.$$

Considere a estrutura complexa $J : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ *dada por*

$$Je_1 = -e_2 \qquad Je_4 = -e_5 \qquad Je_3 = -e_6.$$

Note que mesmo definindo a estrutura complexa do exemplo 3.22 , as Álgebras de Lie não são isomorfas, pois no exemplo 3.22, a álgebra era 4-passos nilpotentes e agora a Álgebra de Lie é claramente 2-passos nilpotente.

Os resultados seguintes serão úteis para mostrar que é sempre possível construir exemplos de Álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ com $(\mathfrak{g}, [*]_J)$ s-passos nilpotentes, $s \geq 1$.

Proposição 3.25. *Para todo* $s \geq 1$ *existe uma estrutura s-passos nilpotente.*

Demonstração. Primeiro, vamos analisar o caso $s = 3$. Seja

$$\mathcal{A} = \{A \in M_{4\times4}, A = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & f \\ 0 & 0 & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\}.$$

$\mathcal{A}$ é uma álgebra associativa e não-comutativa. Também, se $A, B, C, D \in \mathcal{A}$ vale, obviamente, que $ABCD = 0$. Denote por $\mathcal{A}_k = span\{A_1A_2...A_k; A_j \in \mathcal{A}\}$.

Defina $\mathfrak{aff}(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \oplus \mathcal{A}$ a Álgebra de Lie com colchetes dados por

$$[(A,B),(C,D)] = (AC - CA, AD - CB), \forall A, B, C, D \in \mathcal{A}.$$

E seja J o endomorfismo de $\mathfrak{aff}(\mathcal{A})$ dado por

$$J(A,B) = (B, -A), \forall A, B \in \mathcal{A}.$$

Temos que $J^2(A,B) = J(J(A,B)) = J(B,-A) = -(A,B)$.

Ainda,

$$\begin{aligned}
J[(A,B),(C,D)] - [J(A,B),(C,D)] - [(A,B),J(C,D)] - J[J(A,B),J(C,D)] = \\
&= J(AC - CA, AD - CB) - [(B,-A),(C,D)] - \\
&\quad - [(A,B),(D,-C)] - J[(B,-A),(D,-C)] \\
&= (AD - CB, CA - AC) - (BC - CB, BD + CA) - \\
&\quad - (AD - DA, -AC - DB) - J(BD - DB, -BC + DA) \\
&= (AD - CB, CA - AC) - (BC - CB, BD + CA) - \\
&\quad - (AD - DA, -AC - DB) - (-BC + DA, DB - BD) \\
&= (AD - CB - BC + CB - AD + DA + BC - DA, \\
&\quad CA - AC - BD - CA + AC + DB - DB + BD) \\
&= (0,0).
\end{aligned}$$

Portanto J é uma estrutura complexa integrável sobre $\mathfrak{aff}(\mathcal{A})$.

Também,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{aff}(\mathcal{A})^2_* \ni [(A,B) * (C,D)]_J &= \frac{1}{2}([(A,B),(C,D)] - [J(A,B),J(C,D)]) \\
&= \frac{1}{2}([(A,B),(C,D)] - [(B,-A),(D,-C)]) \\
&= \frac{1}{2}(AC - CA, AD - CB) - (BD - DB, -BC + DA) \\
&= \frac{1}{2}(AC - CA - BD + DB, AD - CB + BC - DA) \\
&\neq (0,0)
\end{aligned}$$

Isto mostra que $\mathfrak{aff}_*(\mathcal{A})$ não é abeliano, consequentemente, J não é abeliano. Seja

$$(X,Y) = \frac{1}{2}(AC - CA - BD + DB, AD - CB + BC - DA).$$

Temos que

$$\begin{aligned}
\mathfrak{aff}_*(\mathcal{A})^3 \ni [(E,F)*(X,Y)]_J &= \frac{1}{2}([(E,F),(X,Y)] - [J(E,F),J(X,Y)]) \\
&= \frac{1}{2}([(E,F),(X,Y)] - [(F,-E),(Y,-X)]) \\
&= \frac{1}{2}(EX - XE, EY - XF) - (FY - YF, -FX + YE) \\
&= \frac{1}{2}(EX - XE - FY + YF, EY - XF + FX - YE)
\end{aligned}$$

Mas da forma que foi definido, é fácil ver que $(X,Y) \in (\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_2)$, então

$$[(E,F)*(X,Y)]_J \in (\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_3).$$

Analogamente, seja

$$(W,Z) = \frac{1}{2}(EX - XE - FY + DB, EY - XF + FX - YE).$$

É fácil ver que $[(E,F)*(W,Z)]_J \in (\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_4)$. Por outro lado, $[(E,F)*(W,Z)]_J \in \mathfrak{aff}^4(\mathcal{A})_*$. Isso mostra que

$$\mathfrak{aff}(\mathcal{A})_*^4 \subset (\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_4) = (0,0).$$

Portanto J é uma estrutura complexa 3-passos nilpotente sobre $\mathfrak{aff}(\mathcal{A})$.

Do mesmo modo, se

$$\mathcal{A} = \{A \in M_{(s+1)\times(s+1)}; A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1(s+1)} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2(s+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{s(s+1)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\},$$

Novamente $\mathcal{A}$ é associativa, não-comutativa, $A_1.A_2...A_s \neq 0$ e $A_1.A_2...A_{s+1} = 0$ para $A_1, A_2, ..., A_s, A_{s+1} \in \mathcal{A}$. Definindo o colchete e J como antes, vemos que $\mathfrak{aff}(\mathcal{A})_*^s \subset (\mathcal{A}_s, \mathcal{A}_s)$ e $\mathfrak{aff}(A)_*^s$ é subespaço não nulo. Mais ainda,

$$\mathfrak{aff}(\mathcal{A})_*^{s+1} \subset (\mathcal{A}_{s+1}, \mathcal{A}_{s+1}) = (0,0).$$

Portanto, J é uma estrutura s-passos nilpotente sobre $\mathfrak{aff}(\mathcal{A})$. □

Pela proposição (3.1) de [8], uma Álgebra de Lie nilpotente 8-dimensional que possui uma estrutura hipercomplexa é 2-passos nilpotente. Baseados neste fato, provaremos a seguinte proposição.

Proposição 3.26. *Seja $\{J_1, J_2\}$ uma estrutura hipercomplexa sobre uma Álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ 8-dimensional. Se uma das estruturas complexas é 2-passos nilpotente, então a outra também é.*

Demonstração. Do comentário acima, temos que $\mathfrak{g}^3 = 0$. Mas $\mathfrak{g}_*^3 \subset \mathfrak{g}^3$, logo $\mathfrak{g}_*$ é no máximo 2-passos nilpotente, isto é, J_i é s-passos nilpotente, com $s \leqslant 2$.

Suponha, sem perdas de generalidade, que J_1 é uma estrutura complexa 2-passos nilpotente. Se J_2 fosse 1-passo nilpotente, isto é abeliano, teríamos da proposição 2.58 que J_1 também seria abeliano. Nos resta que J_2 também é 2-passos nilpotente. $\square$

Nosso interesse, agora é dar exemplo de estrutura hipercomplexa 2-passos nilpotente.

Exemplo 3.27. *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie 8-dimensional com colchetes não nulos dados por*

$$[e_1, e_2] = [e_3, e_4] = -e_6 \qquad [e_1, e_3] = -[e_2, e_4] = -e_7 \qquad [e_1, e_4] = [e_2, e_3] = -e_8,$$

onde $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$ é uma base de $\mathfrak{g}$. Seja $\{J_1, J_2\}$ a estrutura hipercomplexa sobre $\mathfrak{g}$ dada por

$$\begin{array}{llll} J_1e_1 = e_2 & J_1e_3 = e_4 & J_1e_5 = e_6 & J_1e_7 = e_8 \\ J_2e_1 = e_3 & J_2e_2 = -e_4 & J_2e_5 = e_7 & J_2e_6 = -e_8. \end{array}$$

Escreva

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{J_2}^{(0,1)} = \{\omega_j = e_j + iJ_2e_j, 1 \leq j \leq 8\}$$

Utilizando o fato de que $J_2^2 = -I$, temos por exemplo

$$\begin{aligned} [\omega_1, \omega_2] &= [e_1 + iJ_2e_1, e_2 + iJ_2e_2] \\ &= [e_1, e_2] - i[e_1, e_4] + i[e_3, e_2] + [e_3, e_4] \\ &= -2(e_6 - ie_8) \\ &= -2(e_6 + iJ_2e_6) \\ &= -2\omega_6, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\omega_1, \omega_3] &= [e_1 + iJ_2e_1, e_3 + iJ_2e_3] \\ &= [e_1, e_3] + i[e_1, J_2e_3] + i[J_2e_1, e_3] - [J_2e_1, J_2e_3] \\ &= -e_7 + e_7 \\ &= 0, \end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
[\omega_2, \omega_3] &= [e_2 + iJ_2e_2, e_3 + iJ_2e_3] \\
&= [e_2, e_3] + i[e_2, J_2e_3] - i[e_4, e_3] + [e_4, J_2e_3] \\
&= [e_2, e_3] - i[e_2, e_1] - i[e_4, e_3] - [e_4, e_1] \\
&= -2(e_8 + ie_6) \\
&= -2(e_8 + iJ_2e_8) \\
&= -2\omega_8.
\end{aligned}
$$

Por raciocínio análogo, obtemos,

$$
\begin{array}{lll}
[\omega_1, \omega_2] = -2\omega_6 & [\omega_1, \omega_3] = 0 & [\omega_1, \omega_4] = 0 \\
[\omega_2, \omega_3] = -2\omega_8 & [\omega_2, \omega_4] = 0 & [\omega_3, \omega_4] = -2\omega_6.
\end{array}
$$

Logo $\mathfrak{h}^2 = span\{\omega_6, \omega_8\}$, *mas* $[\omega_6, \omega_8] = 0$. *E daí, que* $\mathfrak{h}^3 = \{0\}$. *Portanto* J_2 *é 2-passos nilpotente. Da proposição 3.26, temos que* $\{J_1, J_2\}$ *é 2-passos nilpotente. Mais ainda,* $\mathfrak{g}_*$ *é 2-passos nilpotente e do Teorema 3.8, temos que* $\mathfrak{g}$ *é solúvel.*

Esta análise também poderia ser feita, a partir da estrutura complexa J_1, *mostrando que* J_1 *é 2-passos nilpotente considerando, por exemplo*

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{J_1}^{(1,0)} = \{\upsilon_j = e_j - iJ_1e_j, 1 \le j \le 8\}$$

Utilizando o fato $J^2 = -I$, *teríamos por exemplo*

$$
\begin{aligned}
[\upsilon_1, \upsilon_2] &= [e_1 - iJ_1e_1, e_2 - iJ_1e_2] \\
&= [e_1, e_2] + i[e_1, e_1] - i[e_2, e_2] + [e_2, e_1] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
[\upsilon_1, \upsilon_3] &= [e_1 - iJ_1e_1, e_3 - iJ_1e_3] \\
&= [e_1, e_3] - i[e_1, J_1e_3] - i[J_1e_1, e_3] - [J_1e_1, J_1e_3] \\
&= [e_1, e_3] - i[e_1, e_4] - i[e_2, e_3] - [e_2, e_4] \\
&= -2(e_7 - ie_8) \\
&= -2(e_7 - iJ_1e_7) \\
&= -2\upsilon_7.
\end{aligned}
$$

Por raciocínio análogo, obtemos,

$$
\begin{array}{lll}
[\upsilon_1, \upsilon_2] = 0 & [\upsilon_1, \upsilon_3] = -2\upsilon_7 & [\upsilon_1, \upsilon_4] = 0 \\
[\upsilon_2, \upsilon_3] = -2\upsilon_8 & [\upsilon_2, \upsilon_4] = 2\upsilon_7 & [\upsilon_3, \upsilon_4] = 0.
\end{array}
$$

E agora, temos que $\mathfrak{h}^2 = span\{\upsilon_7, \upsilon_8\}$*, mas* $[\upsilon_7, \upsilon_8] = 0$*. Do mesmo modo, segue que* $\mathfrak{h}^3 = \{0\}$*.*

O conceito de estrutura hipercomplexa foi utilizado em contextos geométricos (ver [7]) para embasar os estudos sobre variedades Hyper Kahler de Torção-HKT.

Definição 3.28. *Seja M uma variedade suave com uma estrutura hipercomplexa $\{J_1, J_2, J_3\}$ e métrica riemaniana g. M é dita variedade hyperhermitiana se é hermitiana com respeito a cada $J_{i=1,2,3}$. Uma dada variedade hyperhermitiana $(M, J_{i=1,2,3})$ é Hyper Kahler de Torção se existe uma conexão $\bigtriangledown$, tal que*

$$\bigtriangledown g = 0, \quad \bigtriangledown J_{i=1,2,3} = 0, \quad c(X,Y,Z) = g(X, T(Y,Z)),$$

onde T é o tensor de torção desta conexão e c satisfaz a relação $c = -JdJF$, com $F = g(J.,.)$.

Observação 3.29. *O Teorema 3.1 de [7], I. G. Dotti e A. Fino garantem que a estrutura hipercomplexa de uma estrutura Hyper Kahler de Torção sobre qualquer Álgebra de Lie 2-passos nilpotente é abeliana. Como $\mathfrak{g}_*$ não é abeliano, já que $\mathfrak{g}_* \simeq \mathfrak{h}$, temos que a estrutura hipercomplexa $\{J_1, J_2\}$ do exemplo 3.27 não é uma estrutura hipercomplexa de uma estrutura HKT.*

4 Considerações Finais

Tratamos de apresentar neste trabalho os principais conceitos da teoria das Álgebras de Lie, que fundamentaram todos os resultados obtidos. Além disso, introduzimos o conceito e as propriedades de estruturas complexas sobre uma Álgebra de Lie real e vimos que no caso de uma estrutura complexa integrável J sobre uma Álgebra de Lie real $\mathfrak{g}$, os auto-espaços $\mathfrak{g}^{1,0}$ e $\mathfrak{g}^{0,1}$ associados aos autovalores i e $-i$, respectivamente, são subálgebras complexas de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, onde $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes \mathfrak{g}$.

Também, consideramos estruturas complexas integráveis J sobre Álgebras de Lie $(\mathfrak{g}, [.,.])$ e definimos um novo colchete de Lie $[*]_J$ sobre $\mathfrak{g}$ dado por

$$\begin{aligned} [*]_J : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ (X, Y) &\longmapsto \frac{1}{2}([X, Y] - [JX, JY]). \end{aligned}$$

Neste caso denotamos a Álgebra de Lie obtida por $\mathfrak{g}_*$. A vantagem desse novo colchete é que J é adaptada a ele, de modo que $\mathfrak{g}_*$ passa a ser uma Álgebra de Lie Complexa. Vimos que a Álgebra de Lie $\mathfrak{g}_*$ é isomorfa tanto a $\mathfrak{g}^{1,0}$ quanto a $\mathfrak{g}^{0,1}$.

Munidos do colchete $[*]_J$, vimos que dada uma Álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, tal que $\mathfrak{g}^{1,0}$ (ou equivalentemente $\mathfrak{g}^{0,1}$) é uma subálgebra nilpotente de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, então $\mathfrak{g}$ é uma Álgebra de Lie solúvel. Para demonstrar este resultado, nos baseamos no Lema 3.12 devido a Goto para Álgebras de Lie semi-simples sobre corpos algebricamente fechados e de característica zero.

Além disso, caracterizamos as Álgebras de Lie solúveis 6-dimensionais que admitem estruturas complexas não abelianas. Vimos que se $\mathfrak{g}$ é uma Álgebra de Lie 6-dimensional e J é uma estrutura complexa integrável s-passos nilpotente (neste caso, equivale a $\mathfrak{g}_*$ ser s-passos nilpotente) então, J é 2-passos nilpotente e existe uma base $\{Z_1, ..., Z_6\}$ de $\mathfrak{g}$ tal que os colchetes não nulos de $(\mathfrak{g}, [*])_J$ são dados por

$$[Z_1 * Z_2] = [Z_3 * Z_4] = -Z_5 \qquad \text{e} \qquad [Z_1 * Z_3] = [Z_4 * Z_2] = -Z_6.$$

Com base neste resultado, em [12] Edson Licurgo e Luiz San Martin verificaram o comportamento dos elementos da base $\{Z_1, ..., Z_6\}$ de $\mathfrak{g}$ para os colchetes não nulos de $(\mathfrak{g}, [.,.])$. Neste sentido, no presente trabalho, construímos detalhadamente estes resultados.

Baseado no comportamento desta base, com respeito ao colchete de Lie original, foram construídos exemplos de Álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensão 6 com estrutura complexa satisfazendo as condições dos resultados 3.8 e 3.21. Ainda, discutimos resultados úteis para mostrar que sempre é possível construir exemplos de Álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ com $(\mathfrak{g}, [*]_J))$ s-passos nilpotentes, $s \geq 1$, para tanto construímos a Álgebra de Lie $\mathfrak{aff}(\mathcal{A})$.

Estudamos também, os principais conceitos das estruturas hipercomplexas para as quais $\mathfrak{g}_*$ é s-passos nilpotente, construindo exemplo de uma Álgebras de Lie de dimensão 8 com estruturas hipercomplexas e levantamos argumentos, baseados em [7] e na proposição 3.26, que garantiram que o exemplo construído não caracterizou uma estrutura hipercomplexa de uma variedade Hiper Kahler de Torção. De modo, que torna-se notável a importância das estruturas complexas para o estudo dessas variedades.

Referências

[1] A. Andrada; M. L. Barberis; I. Dotti. Classication of abelian complex structures on 6-dimensional lie algebras, *Journal of the London Mathematical Society* , v. **1**, n. 83, p. 232-255, (2011).

[2] A. Andrada; M. L. Barberis; I. Dotti. Abelian hermitian geometry, *Differential Geometry and its Applications*, v. **30**, n. 5, p. 509-519, (2012).

[3] M. L. Barberis; Dotti I. Abelian complex structures on solvable lie algebras, *Journal of Lie Theory*, v. **1**, n. 14, p. 25-34, (2004).

[4] Barros, Carlos José Braga; Santana, Alexandre José. *Estruturas Algébricas com ênfase em elementos da Teoria de Lie*. ed. (Maringá-PR):Eduem- Editora da Universidade Estadual de Maringá, 2011.

[5] I. G. Dotti; A. Fino. Abelian hypercomplex 8-dimensional nilmanifolds, *Annals of Global Analysis and Geometry*, v. **1**, n. 18, p. 47-59, (2000).

[6] I. G. Dotti; A. Fino. Hypercomplex nilpotent lie groups, *Contemp. Math*, n. 28), p. 310-314, (2001).

[7] I. G. Dotti; A. Fino. Hyperkahler torsion structures invariant by nilpotent lie groups, *Classical and Quantum Gravity*, v. **3**, n. 19, p. 551-562, (2002).

[8] I. G.Dotti; A. Fino. Hypercomplex eight-dimensional nilpotent lie groups, *Journal of Pure and Applied Algebra*, v. **1**, n. 184, p. 41-57, (2003).

[9] Karin Erdmann; Mark J. Wildon. *Introduction to Lie Algebras*. (2). ed. (Campinas-SP): Springer Undergraduate Mathematics Series, 2006.

[10] J. E. Humphreys. *Introduction to lie algebras and representation theory*. ed. (New York):Springer-Verlag,(1972).

[11] E.C Licurgo Santos. Estruturas complexas com auto-espaços nilpotentes e soluveis, Ph.D. thesis *Universidade Estadual de Campinas, Campinas - SP*, (2007).

[12] E.C Licurgo Santos; L. A. B. San Martin. Lie algebras with complex structures having nilpotent eigenspaces, *Proyecciones (Antofagasta)*, v. **2**, n. 30, p. 247-263, (2011).

[13] S.M Salamon. Complex structures on nilpotent lie algebras, *Journal of Pure and Applied Algebra*, v. **2-3**, n. 157, p. 311-333, (2001).

[14] L. A. B. San Martin. *Algebras de lie*. 2. ed. (Campinas-SP): Editora da Unicamp, 2010.

Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática / Colegiado da Pós-Graduação em Matemática

Av. Adhemar de Barros, s/n, Campus Universitário de Ondina, Salvador - BA
CEP: 40170 -110
<http://www.pgmat.ufba.br>