Universidade Federal da Bahia
Instituto de Matemática
Curso de Pós-graduação em Matemática
Dissertação de Mestrado

Caracterização Topológica de Superfícies Mínimas de Curvatura Total Finita

Jacson de Jesus dos Santos

Salvador — Bahia

Maio 2007

Caracterização Topológica de Superfícies Mínimas de Curvatura Total Finita

por

Jacson de Jesus dos Santos

Dissertação apresentada ao colegiado do curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Banca examinadora:

Prof$^{\underline{a}}$. Dr^{a}. Ana Lucia Pinheiro Lima (Orientadora)

Prof$^{\underline{a}}$. Dr^{a}. Walcy Santos

Prof. Dr. Enaldo Vergasta

SANTOS, JACSON DE JESUS DOS

"CARACTERIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE SUPERFÍCIES MÍNIMAS DE CURVATURA TOTAL FINITA" /Salvador-Ba, 2007.

Orientadora: Profª Drª. Ana Lucia Pinheiro Lima.

Dissertação de Mestrado apresentada ao curso de Pós-graduação em Matemática da UFBA, 30 páginas.

Palavras-Chave: Superfícies Mínimas Completas, Curvatura Total Finita.

À minha mãe Julieta, mulher vitoriosa, e a minha irmã Sinha, grandes aliadas nessa jornada.

“ A sabedoria é a coisa principal; adquire pois a sabedoria, emprega tudo que possuis na aquisição de entendimento.”

Provérbios 4:7

Agradecimentos

A Deus por todas as oportunidades que me concedeu. Por ter me iluminado e orientado sempre. Por todas as bençãos concedidas.

Especiais à minha orientadora Professora Ana Lucia Pinheiro Lima, pela atenção e compreensão, pelas valiosas lições e pelo exemplo de profissionalismo a ser seguido.

À Professora Walcy Santos, pelas valiosas contribuições dadas a esse trabalho.

Ao professor Enaldo Vergasta, pela sua paciência, incentivo e grandiosas lições. Aos professores José Nelson, Joseph Yarte, Vilton e Andreas, pelas ricas aulas.

Especiais às professoras Maria de Fátima Costa Leal, Maridete Brito Cunha e ao professor Luis Roque, que estiveram presentes em toda a minha vida acadêmica e são grandes responsáveis por esse momento.

A meu primo Gredson dos Santos e a Cláudio Gomes Pio, aliados dessa difícil jornada.

À toda minha família, em especial ao meu tio Manoel e minha vó Joana, pelo apoio incondicional e sem a qual não teria conseguido terminar esse Mestrado.

Aos amigos Danilo, Ademário e Agnaldo Alves, grandes incentiovadores.

Aos colegas de Mestrado, em especial à Ariane, Jarbas, Tiago, Mariana, Rolando e Tailson.

Às professoras Maria Eliza e Marisalva.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para que esse momento se concretizasse.

Resumo

Neste trabalho será descrito o lugar topológico em $\mathbb{R}^3$ de uma superfície completa de tipo topológico finito que tem vetores normais bem definidos no infinito. Em particular, para as superfícies mínimas que possuem essas características. Esse resultado será generalizado naturalmente para subvariedades de codimensão arbitrária em $\mathbb{R}^n$. Por fim, é apresentada a demonstração feita por Jorge e Meeks para a desigualdade de Schern- Osserman, obtendo uma condição para o caso da igualdade em $\mathbb{R}^3$. Daí, prova-se que o catenóide é o único anel mínimo mergulhado em $\mathbb{R}^3$ com curvatura total finita e que o plano é a única superfície mínima, completa, imersa em $\mathbb{R}^3$, com curvatura total finita e apenas um fim mergulhado.

Abstract

In this work will be describe the topological place in $\mathbb{R}^3$ of a complete surface of finite topological type which has well defined normal vectors at infinity. In particular, to the minimal surfaces that possess these caracteristics. This result will be naturaly generalize to submanifolds of arbitrary codimension in $\mathbb{R}^n$. Finally, is presented the demonstration done by Jorge e Meeks to the inequality of Schern- Osserman, obtaining a condition to the case of iquality in $\mathbb{R}^3$. Then, it is proved that the catenoid is the unique minimal annulus embedded in $\mathbb{R}^3$ with finite total curvature and that the plain is the unique complete minimal surface, imerse in $\mathbb{R}^3$, with finite total curvature and only one end embedded.

Sumário

Introdução

O objetivo deste trabalho é estudar propriedades topológicas de superfícies mínimas completas de curvatura total finita.

Um resultado clássico de Huber-Cherne-Osserman estabelece que tais superfícies são conformemente equivalentes a uma superfície de Riemann compacta furada em um número finito de pontos e que sua aplicação normal de Gauss se estende continuamente nesses pontos. Consequentemente, as superfícies mínimas completas de curvatura total finita têm tipo topológico finito com um número finito de fins topológicos, e os vetores normais no infinito destes fins são bem definidos.

Em 1983, L.P.Jorge e W.H.Meeks III, utilizando esses resultados, descreveram o lugar topológico em $\mathbb{R}^3$ de uma superfície completa de tipo topológico finito que tem vetores normais bem definidos no infinito. Eles provaram que os fins de tais superfícies se comportam como os fins do catenóide no infinito. Este é o principal resultado apresentado no nosso trabalho.

Teorema (Jorge-Meeks [JM]). *Seja M uma superfície completa, imersa no $\mathbb{R}^3$, difeomorfa ao complemento de um número finito de pontos $p_1, ..., p_k$ em uma superfície compacta e orientada $\overline{M}$. Suponha que a aplicação normal de Gauss de M tem uma extensão contínua a $\overline{M}$. Então*

(1) M é própria;

(2) Para r grande, $X_r = \{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_k\}$ consiste de k curvas fechadas imersas em $\mathbb{S}^2$;

(3) Cada $\gamma_i \in X_r$ converge C^1 para uma geodésica com multiplicidade em $\mathbb{S}^2$ quando

r tende ao infinito;

(4) Se M é uma superfície mínima, então a convergência estabelecida em (3) é C^∞.

Assim, vista do infinito, M parece um número finito de planos passando pela origem.

Esse resultado generaliza-se naturalmente para subvariedades de codimensão arbitrária em $\mathbb{R}^n$. Os autores utilizaram esses resultados para caracterizar subvariedades completas mínimas de $\mathbb{R}^n$. Além disso, eles estabeleceram uma interpretação topológica-geométrica para a fórmula a respeito da curvatura total $C(M)$ de uma superfície mínima completa em $\mathbb{R}^3$, elaborada por Chern-Osserman [O2]. Tal interpretação é apresentada abaixo mediante o seguinte Teorema.

Teorema (Jorge-Meeks [JM]). *Seja M uma superfície mínima completa imersa em $\mathbb{R}^3$ com curvatura total finita $-4\pi m$ e tendo k fins. Então*

$$C(M) = 2\pi\left(\chi(M) - \sum_{j=1}^{k} I_j\right) \leq 2\pi(\chi(M) - k),$$

onde I_j é a multiplicidade do fim E_j correspondente a p_j. Assim, a igualdade

$$C(M) = 2\pi(\chi(M) - k)$$

vale se, e somente se, os fins de M são mergulhados.

Dividimos essa dissertação em três capítulos. No capítulo 1, apresentaremos algumas definições e resultados sobre a teoria clássica das superfícies mínimas de curvatura total finita. Tais resultados são fundamentais para a compreensão dos demais capítulos. No capítulo seguinte, apresentaremos o Teorema que estabelece a caracterização topológica das superfícies mínimas de curvatura total finita e sua generalização. No terceiro capítulo, apresentaremos a demonstração obtida por Jorge e Meeks para a desigualdade de Chern e Osserman, que permitiu caracterizar o caso da igualdade, além de algumas consequências desse resultado.

Capítulo 1

Preliminares

Nosso principal objetivo neste capítulo é apresentar definições e resultados que serão úteis à compreensão dos capítulos subseqüentes. Definiremos superfície mínima, completa e de curvatura total finita.

Uma superfície $M \subset \mathbb{R}^n$ é dita *mínima* se possui curvatura média nula em todos os seus pontos. Dizemos que é *completa* se toda geodésica parametrizada $\gamma : [0, \epsilon) \longrightarrow M$ de M pode ser estendida a uma geodésica parametrizada $\overline{\gamma} : \mathbb{R} \longrightarrow M$, definida sobre toda a reta real $\mathbb{R}$.

Dada uma superfície orientada M, a *aplicação normal de Gauss* $N : M \longrightarrow \mathbb{S}^2(1)$ é definida fazendo corresponder a cada $p \in M$ a extremidade do vetor unitário normal $N(p)$ na orientação de M, quando a origem de $N(p)$ é transladada para o centro 0 de $\mathbb{S}^2(1)$. A aplicação linear dN_p é auto -adjunta, o que nos permite associar a dN_p uma forma quadrática Q em T_pM, dada por $Q(v) =< dN_p(v), v >$, $v \in T_pM$. A forma quadrática II_p, definida em T_pM por $II_p(v) = - < dN_p(v), v >$, é chamada *a segunda forma fundamental de* M *em* p.

Seja C uma curva regular em M passando por $p \in M$, k a curvatura de C em p, e $\cos\theta =< n, N >$, onde n é o vetor normal unitário a C e N é o vetor normal unitário a M em p. O número $k_n = k\cos\theta$ é a *curvatura normal* de $C \subset M$ em p. Se considerarmos C parametrizada por $\alpha(s)$, onde s é o comprimento de arco de C, com $\alpha(0) = p$ e indicarmos por $N(s)$ a restrição do vetor normal N à curva $\alpha(s)$, obteremos que $II_p(\alpha'(0)) = k_n(p)$. Ou seja, o valor da segunda forma fundamental II_p em um vetor unitário $v \in T_pM$ é igual à curvatura normal de uma curva regular passando por p e tangente a v.

Dado um vetor unitário $v \in T_pM$, a interseção de M com o plano P_v, contendo v e $N(p)$, é chamada de seção normal de M em p segundo v. Em uma vizinhança de p, uma seção normal de M em p é uma curva regular plana em M, cujo vetor normal n em p é $\pm N(p)$ ou zero; a sua curvatura é, portanto, igual ao valor absoluto da curvatura normal segundo v em p.

Quando P_v gira em torno de N, v descreve um círculo S de raio um em T_pM. Como $(dN)_p$ é auto-adjunta, para cada $p \in M$ existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de T_pM tal que $(dN)_p(e_1) = -k_1e_1$, $(dN)_p(e_2) = -k_2e_2$. Além disso, k_1 e k_2 ($k_1 \geq k_2$) são o máximo e o mínimo de II_p restrita ao círculo unitário S de T_pM; isto é, são os valores extremos da curvatura normal em p. Os valores k_1 e k_2 são as *curvaturas principais de M em p*.

Sejam $p \in M$ e $(dN)_p : T_pM \longrightarrow T_pM$ a diferencial da aplicação de Gauss. O determinante de $(dN)_p$ é chamado *a curvatura Gaussiana K* de M em p. O oposto da metade do traço de $(dN)_p$ é chamado a *curvatura média* de M em p. Em termos das curvaturas principais k_1 e k_2, podemos escrever

$$K = k_1k_2, \; H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

Seja K a curvatura Gaussiana de M. Dizemos que M tem *curvatura total finita*, se $\int_M KdM$ é finita. Mas, $\int_M KdM = \int_M det(dM)dM =$área$N(M)$. Então podemos associar a curvatura total de uma superfície à área da imagem esférica da sua aplicação normal de Gauss. Assim, dizer que a curvatura total é finita significa afirmar que a aplicação normal de Gauss cobre a esfera uma quantidade finita de vezes.

Dada uma curva $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^2, a *curvatura total $CT(\alpha)$* da curva α é dada por

$$CT(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b k(\varepsilon) \parallel \alpha'(\varepsilon) \parallel d\varepsilon,$$

onde $k(\varepsilon)$ é a curvatura de α em ε.

Uma *curva de Jordan* é uma curva fechada simples em M, homeomorfa ao círculo

$\mathbb{S}^1$, que separa M em duas componentes conexas.

Uma aplicação diferenciável $I : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é uma *imersão* se, para cada $p \in M$, $dI_p : T_pM \longrightarrow T_p\mathbb{R}^3$ é injetiva. Se M possuir uma métrica $<,>$ e

$$< dI_p(v), dI_p(w) >_{I(p)} = < v, w >_p, \quad v, w \in T_pM, \ \forall p \in M,$$

dizemos que I é uma *imersão isométrica.* Dizemos que a imersão $I : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é um *mergulho* se I é um homeomorfismo de M sobre $I(M) \subset \mathbb{R}^3$.

Dada uma superfície mínima M, existem um domínio aberto e simplesmente conexo $D \subset \mathbb{C}$ e duas funções f e g definidas em D, com f holomorfa, não nula e g meromorfa, tais que um domínio de M pode ser representado por

$$x = \frac{1}{2} Re \int_{z_0}^{z} (1 - g^2) f dz, \ y = \frac{1}{2} Re \int_{z_0}^{z} i(1 + g^2) f dz, \ z = Re \int_{z_0}^{z} g f dz, \tag{1.1}$$

onde $z_0 \in D$ e as integrais são calculadas ao longo de qualquer curva unindo z_0 a z. Reciprocamente, dadas f e g como acima, (1.1) representa parametricamente uma superfície mínima. Essa representação é chamada de *representação de Weierstrass.* Por exemplo, as funções f e g da representação de Weierstrass do catenóide e da superfície de Enneper são, respectivamente, $f(z) = \frac{1}{z^2}$, $g(z) = z$ com $D \subset \mathbb{C} - \{0\}$ e $f(z) = 1$, $g(z) = z$, com $D = \mathbb{C}$.

A função meromorfa $g : M \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ que aparece na representação de Weierstrass de uma imersão mínima $I : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tem uma importante interpretação geométrica. Para vermos isso usaremos a seguinte expressão da aplicação de Gauss em termos de f e g

$$N = \left(\frac{2Reg}{1 + |g|^2}, \ \frac{2Img}{1 + |g|^2}, \ \frac{|g|^2 - 1}{|g|^2 + 1} \right).$$

Agora, se $\pi : \mathbb{S}^2 - \{(0, 0, 1)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é a projeção estereográfica dada por

$$\pi(x, y, z) = \left(\frac{x}{1 - z}, \ \frac{y}{1 - z} \right), \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{S}^2,$$

então $\pi \circ N = (Re\ g, Im\ g)$ em todo ponto de M, exceto nos pólos de g. Se identificarmos $\mathbb{R}^2$ com o plano complexo $\mathbb{C}$ e estendermos π a uma aplicação $\overline{\pi} : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ com $\overline{\pi}((0, 0, 1)) = \infty$, então $\overline{\pi} \circ N = g$. Isto significa que a aplicação g pode ser identificada com a aplicação de Gauss de I.

Dizemos que duas superfícies M_1 e M_2 são *conformemente equivalentes* se existe uma transformação $H : M_1 \longrightarrow M_2$ bijetiva, de classe C^∞, conforme, isto é, preserva os ângulos das curvas que se cortam em M_1, cuja inversa também é de classe C^∞. Tal aplicação H é chamada um *difeomorfismo conforme*.

O resultado a seguir estabelece condições para a existência de um difeomorfismo conforme entre superfícies.

1.1 Teorema (Huber [H]). *Seja M uma superfície em $\mathbb{R}^3$ cuja curvatura Gaussiana satisfaz*

$$K \leq 0;$$
$$\int_M |K| dM < \infty.$$

Então existe uma superfície compacta $\overline{M}$, um número finito de pontos $p_1, ..., p_k$ de $\overline{M}$ e um difeomorfismo conforme de M sobre $\overline{M} - \{p_1, ..., p_k\}$.

Em 1964, Osserman [O1] provou que o difeomorfismo conforme estabelecido pelo Teorema acima é, de fato, uma isometria entre M e $\overline{M} - \{p_1, ..., p_k\}$.

Esses resultados deram origem ao estudo das superfícies mínimas de curvatura total finita, pois estas satisfazem as hipóteses do Teorema 1.1. Nesse caso, temos a seguinte importante consequência sobre a aplicação de Gauss.

1.2 Proposição ([O2], p.82). *Sejam $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície mínima com curvatura total finita e $\overline{M}$ uma superfície compacta tal que M e $\overline{M} - \{p_1, ..., p_k\}$ são conformemente equivalentes. Então a aplicação de Gauss $N : M \longrightarrow \mathbb{S}^2$ se estende a uma aplicação meromorfa $\overline{N} : \overline{M} \longrightarrow \mathbb{S}^2$.*

Para a prova desse resultado, utilizaremos o Teorema seguinte.

1.3 Teorema (Teorema de Picard[L], p.222). *Seja $U \subset \mathbb{C}$ um aberto e w_0 uma singularidade essencial de $g : U \longrightarrow \mathbb{C}$ então para todo $r > 0$ tal que $D_r(w_0) - \{w_0\} \subset U$, com $D_r(w_0)$ denotando o disco de centro w_0 e raio r, tem-se que $g(D_r(w_0) - \{w_0\})$ omite no máximo um ponto de $\mathbb{C}$.*

Prova da Proposição. Após identificar a aplicação de Gauss N, que é conforme, com a função g da representação de Weierstrass, podemos considerar N como sendo uma aplicação meromorfa sobre $\overline{M} - \{p_1, ..., p_k\}$.

Suponhamos, por absurdo, que algum dos pontos p_j, com $j \in \{1, ..., k\}$, é uma singularidade essencial de N. Então, pelo Teorema de Picard, g deve assumir todos os valores da imagem infinitas vezes, com no máximo uma exceção. Mais isto implica que a área da imagem esférica é infinita e, portanto, também a curvatura total, o que contraria a hipótese. Logo, N tem um pólo em cada p_j, e assim é meromorfa em $\overline{M}$.

□

Funções meromorfas definidas em uma superfície compacta com imagem em $\mathbb{S}^2$ têm a propriedade de assumir cada valor o mesmo número finito de vezes, contando com a multiplicidade. Como consequência, temos o seguinte resultado.

1.4 TEOREMA (OSSERMAN[O2], P.82). *Seja M uma superfície mínima em $\mathbb{R}^3$ com curvatura total finita. Então*

$$\int_M K dM = -4m\pi,$$

onde m é um inteiro não-negativo.

Um fim de uma superfície imersa é uma parte da superfície que é homeomorfa a um disco topológico furado em seu centro tal que todo caminho sobre este disco que diverge para o seu centro tem comprimento infinito. Assim, se $\overline{M}$ é uma superfície compacta , $\{p_1, ..., p_k\}$ é um conjunto finito de pontos em $\overline{M}$, $I : \overline{M} - \{p_1, ..., p_k\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é uma imersão mínima completa e $D \subset \overline{M}$ é uma vizinhança contendo p_j, então a imagem $I(D - \{p_j\})$ é um fim de $I(\overline{M} - \{p_1, ..., p_k\})$. Dizemos que $I(\overline{M} - \{p_1, ..., p_k\})$ é uma imersão com k fins.

O catenóide é um exemplo de uma superfície mínima em $\mathbb{R}^3$ com dois fins. Fazendo a interseção do catenóide M com a esfera $\mathbb{S}^2(r)$ centrada na origem com raio r, os fins do catenóide são as componentes conexas E_1 e E_2 de $M - \mathbb{S}^2(r)$ contidas no exterior de $\mathbb{S}^2(r)$. Pelo Teorema 1.1, o catenóide é o conjunto imagem de uma aplicação $I : \overline{M} - \{p_1, p_2\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, onde $\overline{M}$ é a esfera unitária $\mathbb{S}^2$ e sua aplicação de Gauss $N : \mathbb{S}^2 - \{p_1, p_2\} \longrightarrow \mathbb{S}^2$ estende-se conformemente a $\mathbb{S}^2$. Nesse sentido, dizemos que o catenóide, e de maneira geral uma superfície, tem um vetor normal bem definido no infinito de cada fim.

Para generalizar o Teorema 2.1 às subvariedades de codimensão arbitrária em $\mathbb{R}^n$, consideraremos as imersões $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que são completas na métrica induzida, onde M denota o interior de uma variedade compacta m-dimensional $\overline{M}$ com bordo. Nesse contexto, um fim de M é definido como a interseção de uma vizinhança regular fechada de uma componente do bordo de $\overline{M}$ com M.

Vamos definir a generalização para dimensão n da aplicação de Gauss clássica. Definimos como Grassmanniana $G_{2,\ n}$ a variedade diferenciável cujos pontos estão em correspondência injetiva com o conjunto de todos os subespaços lineares bidimensionais orientados em $\mathbb{R}^n$; isto é, todos os planos orientados passando pela origem. Dada uma superfície diferenciável $M \subset \mathbb{R}^n$ orientada a aplicação de Gauss generalizada associa cada ponto $p \in M$ ao subespaço linear bidimensional de $\mathbb{R}^n$ contido em $G_{2,\ n}$ correspondente ao plano tangente T_pM. Com isso, um vetor normal ao fim é generalizado para um subespaço vetorial normal ao fim.

O Teorema a seguir caracteriza os conjuntos compactos de uma variedade Riemanniana como sendo aqueles que são limitados e fechados. De fato, temos

1.5 Teorema (Hopf e Rinow[dC2], p.147). *Seja M uma variedade Riemanniana e seja $p \in M$. As seguintes afirmações são equivalentes*

(1) *exp_p está definida em todo o T_pM.*

(2) *Os limitados e fechados de M são compactos.*

(3) *M é completa como espaço métrico.*

(4) *M é geodesicamente completa.*

(5) *Existe uma sucessão de compactos $K_n \subset M$, $K_n \subset K_{n+1}$ e $\bigcup_n K_n = M$, tais que se $q_n \notin K_n$ então $d(p, q_n) \longrightarrow \infty$.*

Além disso, cada uma das afirmações acima implica que

(6) *Para todo $q \in M$ existe uma geodésica γ ligando p a q com $l(\gamma) = d(p, q)$.*

Usando o Teorema acima, podemos dizer que uma aplicação $p : M \longrightarrow N$, entre variedades, chama-se *própria* quando é contínua e a imagem inversa $p^{-1}(K) \subset M$ de cada compacto $K \subset N$ é um conjunto compacto.

Consideremos uma aplicação $f : M \longrightarrow N$ de classe C^k e $S \subset N$ uma subvariedade C^k de N. Diz-se que f é *transversal* a S no ponto $p \in f^{-1}(S)$ se $df_p \cdot T_pM + T_{f(p)}S = T_{f(p)}N$, ou seja, quando a imagem de df_p com o espaço tangente a S em $f(p)$ geram $T_{f(p)}N$. Diz-se que f é *transversal* a S se, para todo ponto $p \in f^{-1}(S)$, f é transversal a S em p. Apresentaremos a seguir alguns resultados sobre transversalidade.

1.6 Proposição ([L1], p.218). *Seja $f : M \longrightarrow N$ uma aplicação de classe C^k, transversal a uma subvariedade $S \subset N$, de classe C^k. Então $f^{-1}(S) = \varnothing$ ou $f^{-1}(S)$ é uma subvariedade de classe C^k de M, cuja codimensão em M é a codimensão de S em N. Neste caso, $T_p(f^{-1}(S)) = f'(p)^{-1}[T_{f(p)}S]$ para todo $p \in f^{-1}(S)$.*

1.7 Corolário ([L1], p.218). *Sejam N^n e $S^s \subset M^m$ subvariedades de classe C^k. Se $N \cap S \neq \varnothing$ e se, para cada ponto $p \in N \cap S$, tem-se $T_pN \oplus T_pS = T_pM$, então $N \cap S$ é uma subvariedade de M cuja dimensão é $n + s - m$. Além disso, $T_p(N \cap S) = T_pN \cap T_pS$. Em particular, se M^2 e $N^2 \subset \mathbb{R}^3$ são subvariedades de classe C^k tais que, para cada ponto $p \in M \cap N$, os espaços tangentes T_pM e T_pN são distintos, então $M \cap N$ é uma curva de classe C^k em $\mathbb{R}^3$.*

Outro caso especial de interseção ocorre quando N^n e $S^{m-n} \subset M^m$ são tais que $T_pN \oplus T_pS = T_pM$ para todo $p \in N \cap S$. Então $N \cap S$ é uma variedade de dimensão 0, isto é, um conjunto discreto de pontos em M. Se duas subvariedades N e $S \subset M$ são tais que $T_pN \oplus T_pS = T_pM$ para todos os pontos $p \in N \cap S$, dizemos que N e S estão em posição geral ou que se cortam transversalmente.

Considere $\tilde{B}$ e B subconjuntos de $\mathbb{R}^3$. Dizemos que $\pi : \tilde{B} \longrightarrow B$ é uma *aplicação de recobrimento* se π é contínua, $\pi(\tilde{B}) = B$ e cada $p \in B$ admite uma vizinhança U em B tal que $\pi^{-1}(U) = \cup_\alpha V_\alpha$, onde os V_α são conjuntos abertos, dois a dois disjuntos, tais que a restrição de π a V_α é um homeomorfismo de V_α sobre U. $\tilde{B}$ é então chamado um *espaço de recobrimento* de B.

Um exemplo de aplicação de recobrimento é dado pela seguinte proposição, que utilizaremos na prova do item (iv) do Teorema 2.1.

1.8 Proposição ([dC1], p.464). *Seja M uma superfície completa com curvatura Gaussiana não positiva em cada ponto. Então a aplicação $exp_p : T_pM \longrightarrow M$, $p \in M$, é uma aplicação de recobrimento.*

Apresentaremos também outros resultados e definições úteis para provar o item (iv) citado acima.

Sejam M, N espaços métricos e E um conjunto de aplicações $f : M \longrightarrow N$. O conjunto E diz-se *eqüicontínuo no ponto $a \in M$* quando, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\mid x-y \mid< \delta$ em M implique $\mid \psi(x)-\psi(y) \mid< \epsilon$, seja qual for $f \in E$. O conjunto E é *eqüicontínuo* quando é eqüicontínuo para em todos os pontos de M.

Um subconjunto X de um espaço métrico M chama-se *relativamente compacto* quando seu fecho $\overline{X}$ é compacto. Isto significa que toda sequência de pontos $x_n \in X$ possui uma subsequência convergente em M (podendo ocorrer que o limite dessa subsequência não pertença a X).

1.9 Teorema (Arzelá-Ascoli [L3], p.244). *Seja E um conjunto de aplicações contínuas $f: K \longrightarrow N$, onde K é compacto. A fim de que $E \subset C(K;N)$ seja relativamente compacto, é necessário e suficiente que*

(1) *E seja eqüicontínuo;*

(2) *Para cada $x \in K$, o conjunto $E(x)$ seja relativamente compacto em N.*

O seguinte resultado nos garante a limitação uniforme das derivadas, de todas as ordens, de uma função cujo gráfico tem curvatura média constante, em particular um gráfico mínimo. Será fundamental para a prova do Teorema 2.1, item (*iv*).

1.10 Proposição. *[GT] Seja Ω um domínio em $\mathbb{R}^n$ e $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2, ou seja $u \in C^2(\Omega)$, cujo gráfico tem curvatura média $H \in C^k(\Omega),\ k \geq 1$. Então $u \in C^{k+1}(\Omega)$ e para todo ponto $y \in \Omega$ e multi-índice $\beta,\ |\beta| = k+1,\ |D^\beta u(y)| \leq c$ onde $c = C(n,\ k,\ |H|_{k;\Omega},\ d,\ sup|u|)$ e $d = dis(y, \partial\Omega)$.*

Dois resultados muito importantes na teoria clássica da superfícies mínimas, que utilizaremos na caracterização do plano, são dados a seguir.

1.11 Teorema (Radó[BC], p.47). *Se uma curva de Jordan $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ admite uma projeção ortogonal sobre uma curva convexa em um plano $P \subset \mathbb{R}^3$, então existe uma única superfície mínima compacta M tendo Γ como bordo, a qual é um gráfico de uma função real em P.*

1.12 Teorema (Bernstein[BC], p.28). *Se $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 cujo gráfico é uma superfície mínima, então f é linear.*

Citaremos também alguns teoremas clássicos da teoria das superfícies mínimas de curvatura total finita. Por se tratarem de resultados conhecidos, omitiremos suas demonstrações e indicaremos a fonte consultada.

1.13 Teorema (Osserman[BC], p.38). *Sejam* $\overline{M}$ *uma superfície compacta e* $f : \overline{M} - \{p_1, ..., p_k\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *uma imersão mínima completa com curvatura total* $-4m\pi$. *Então*

$$2m \geq 2k - \chi(\overline{M}),$$

onde $\chi(\overline{M})$ *é a característica de Euler de* $\overline{M}$.

Considerando que $\chi(M) = \chi(\overline{M}) - k$, decorre do teorema acima a seguinte estimativa da curvatura total de M.

1.14 Teorema (Desigualdade de Chern-Osserman[O2], p.85). *Considere* $M = \overline{M} - \{p_1, ..., p_k\}$ *e seja* $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *uma imersão mínima completa com curvatura total finita. Então*

$$\int_M K dM \leq 2\pi(\chi(M) - k).$$

Um dos resultados que a Desigualdade de Chern-Osserman permite obter é o seguinte Teorema.

1.15 Teorema (Osserman[O2], p.87). *Uma superfície mínima completa em* $\mathbb{R}^3$ *com curvatura total finita* -4π *é o catenóide ou a superfície de Enneper.*

Capítulo 2

Caracterização topológica das superfícies completas em $\mathbb{R}^3$ com curvatura total finita

O Teorema a seguir descreve topologicamente os fins das superfícies completas, de curvatura total finita, imersas em $\mathbb{R}^3$. Em particular, analisa também os fins das superfícies mínimas que possuem essas características.

Durante a prova do teorema, faremos a interseção da superfície M com a esfera $\mathbb{S}^2(r)$, e denotaremos por X_r a projeção radial dessa interseção sobre $\mathbb{S}^2$.

2.1 TEOREMA (**Jorge-Meeks** [JM]). *Seja M uma superfície completa, imersa no $\mathbb{R}^3$, difeomorfa ao complemento de um número finito de pontos $p_1, ..., p_k$ em uma superfície compacta e orientada $\overline{M}$. Suponha que a aplicação normal de Gauss de M tem uma extensão contínua a $\overline{M}$. Então*

(1) M é própria;

(2) Para r grande, $X_r = \{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_k\}$ consiste de k curvas fechadas $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_k$ imersas em $\mathbb{S}^2$;

(3) Quando r tende ao infinito, cada $\gamma_i \in X_r$ converge C^1 para uma geodésica, com multiplicidade, em $\mathbb{S}^2$;

(4) Se M é uma superfície mínima, então a convergência estabelecida em (3) é C^∞.

Logo, vista do infinito, M parece um número finito de planos passando pela origem.

Prova. Inicialmente observemos que um fim A da superfície M se comporta como um disco furado $D-\{p_i\}$ em $\overline{M}$. Além disso, como por hipótese a aplicação normal de Gauss em M se estende continuamente a $\overline{M}$, pode-se afirmar que nesse fim o vetor normal está bem definido e vamos denotá-lo por υ. A idéia da prova é reduzir a questão a uma dimensão através da interseção da superfície M por planos perpendiculares a A no infinito e analisar o comportamento das curvas contidas nessa interseção.

Como queremos observar o comportamento dos pontos no infinito da superfície M, podemos considerar, sem perda de generalidade, uma parametrização $W : A \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de uma vizinhança anular fechada, fixada de um dos pontos no infinito de M. Podemos supor que os vetores normais a M no fim A fixado formam um ângulo θ pequeno com υ, ou seja,

$$\langle \upsilon, G(W(z))\rangle = \cos\theta \geq \frac{\sqrt{3}}{2}, \tag{2.1}$$

para $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$, para todo z em A. O argumento apresentado agora será utilizado com frequência na prova do teorema. Considere um plano Π contendo a reta gerada por υ e seja $\Gamma = W^{-1}(\Pi)$. Por (2.1), temos que Π e os planos tangentes a $W(A)$ formam um ângulo pequeno diferente de zero. Portanto, Π e $W(A)$ são transversais. Segue-se então que as componentes conexas de Γ são pontos em ∂A ou curvas. Seja γ uma tal curva. Consideremos coordenadas (t, y) em Π, tais que o eixo y seja a reta gerada por υ. Novamente por (2.1), temos que o vetor normal a $W(\gamma)$ faz um pequeno ângulo com υ, logo os vetores tangentes a $W(\gamma)$ não são colineares a υ. Dessa forma, $W(\gamma)$ é o gráfico de uma função $y(t)$. O ângulo α entre o vetor normal $(y', 1)$ de $W(\gamma)$ e o vetor υ é menor ou igual a θ, ou seja, $0 \leq \alpha \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$. Assim,

$$\cos\alpha \geq \cos\theta.$$

Mas

$$\cos\alpha = \frac{\langle(0,1),(-y'(t),1)\rangle}{|(0,1)|\,|(-y'(t),1)|} = \frac{1}{\sqrt{1+(y'(t))^2}},$$

logo

$$\cos\theta \leq \frac{1}{\sqrt{1+(y'(t))^2}}. \tag{2.2}$$

e então

$$\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta \geq 1 - \frac{1}{1+(y'(t))^2} = \frac{(y'(t))^2}{1+(y'(t))^2}.$$

Daí, usando (2.2), temos

$$\text{sen } \theta \geq \frac{|y'(t)|}{\sqrt{1+(y'(t))^2}} \geq |y'(t)| \cos \theta$$

e, portanto,

$$|y'(t)| \leq \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta},$$

ou seja,

$$|y'(t)| \leq \text{tg } \theta. \tag{2.3}$$

Como $W(\gamma)$ é gráfico, então γ não é uma curva de Jordan. Logo, se γ for compacta, terá bordo e pela transversalidade de $W(\gamma)$ e Π, esse bordo deve estar contido em $W(\partial A)$. O comprimento de $W(\gamma) = \{(t, y(t)); t \in (a,b)\}$ é dado por

$$\ell(W(\gamma)) = \int_a^b |(\gamma'(t))|\, dt = \int_a^b \sqrt{1+(y'(t))^2} dt \leq \int_a^b \frac{1}{\cos \theta} dt = \sec \theta (b-a).$$

Denotando por *diam* $(W(\partial A))$ o diâmetro da curva $W(\partial A)$ observamos que $|b-a| \leq$ *diam* $(W(\partial A))$. Além disso, como

$$\sec \theta < 2, \tag{2.4}$$

por (2.2) temos que

$$\sup_{x \in W(\gamma)} \parallel x \parallel \leq \sup_{x \in W(\partial A)} \parallel x \parallel + 2diam\ (W(\partial A)). \tag{2.5}$$

No caso em que $W(\gamma)$ não é limitada em M, seu comprimento será infinito. Mas $W(\gamma)$ é o gráfico de $y(t)$ e, pela desigualdade (2.3), tem derivada limitada. Portanto, $W(\gamma)$, em cada um de seus pontos, terá inclinação da reta tangente diferente de $\frac{\pi}{2}$, ou seja, $W(\gamma)$ não terá retas assíntotas paralelas a v. Logo, $y(t)$ está definida em um dos intervalos $(-\infty, a)$, $[a, +\infty)$ ou $(-\infty, +\infty)$.

Para provarmos o item (i), definiremos uma imersão isométrica $W : \tilde{M} \longrightarrow R^3$, onde $\tilde{M}$ é o anel A com a métrica induzida por W e como consequência, teremos que a distância $\tilde{\rho}$ em $\tilde{M}$ é igual à distância ρ em $W(\tilde{M})$. Com isso, provaremos que a imagem inversa, W^{-1}, de um conjunto compacto em $W(\tilde{M})$ é um conjunto compacto em $\tilde{M}$. Em particular, temos que $W(A)$ é própria.

Observemos que W é contínua e, portanto, para todo subconjunto fechado $F \subset W(A)$, temos que $W^{-1}(F)$ é fechado em A. Logo resta-nos mostrar que se F é limitado em $W(A)$, então $W^{-1}(F) \subset A$ também o é. O fato de F ser limitado em $W(A)$ implica que existe $r > 0$ tal que $F \subset C_r$, onde C_r é o cilindro sólido de raio r, com eixo na reta gerada pelo vetor v ortogonal ao fim A de M. Se provarmos que $W^{-1}(C_r)$ é limitado, em particular temos que $W^{-1}(F) \subset A$ também é limitado e que W é própria, o que prova o item (i) do Teorema 2.1.

2.2 Lema. *$W^{-1}(C_r)$ é um conjunto compacto em $\widetilde{M}$. Em particular, a imersão M é própria.*

Prova do Lema. Seja $r > 0$ tal que $W(\partial A) \subset C_r$. Tome $\tilde{x} \in W^{-1}(C_r)$ de modo que $W(\tilde{x}) = x \in W(A) \cap C_r$.

Afirmação: $\tilde{\rho}(\tilde{x}, \partial\tilde{M}) \leq 8r$.

Para provarmos a afirmação, seja Π' um plano contendo tanto x quanto a direção v. Considere a curva conexa $\gamma \in W^{-1}(\Pi')$ contendo $\tilde{x}$. Por argumentos anteriores, sabemos que $W(\gamma)$ é o gráfico de uma função $y(t)$ em Π' com $x = (t_0, y(t_0))$. Observe que $|t_0| \leq r$, pois $\tilde{x} \in W^{-1}(C_r)$. Temos agora dois casos a analisar.

Caso I. O domínio de $y(t)$ é um intervalo do tipo $(-\infty, a]$, $[a, +\infty)$ ou $[a, b]$. Nesse caso, $(a, y(a)) \in W(\partial A)$ e $W(\gamma)$ intersecta $W(\partial A)$. Logo, usando as desigualdades (2.1) e (2.4),

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}(\tilde{x}, \partial\tilde{M}) &= \rho(x, W(\partial\tilde{M})) \\
&= \left| \int_a^{t_0} \sqrt{1 + (y'(t))^2} ds \right| \\
&= \left| \int_a^{t_0} \sqrt{1 + \text{tg}\,^2\theta} ds \right| \\
&= \left| \int_a^{t_0} \sqrt{\sec\,^2\theta} ds \right| \\
&= \left| \int_a^{t_0} \sec\,\theta ds \right| \\
&= |\sec\,\theta|\,|t_0 - a| \leq 4r.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Na última desigualdade, utilizamos que $|t_0| \leq r$. E, nesse caso, a afirmação está provada.

Caso II. O domínio da função $y(t)$ é o intervalo $(-\infty, +\infty)$. Considere Π_t o plano que passa pelo ponto $(t, y(t))$ de $W(\gamma)$, ortogonal a Π', contendo a direção υ. Fazendo $t = t_0$, por argumentos anteriores, existe uma curva conexa γ_{t_0} em $W^{-1}(\Pi_{t_0})$ passando por $\tilde{x}$. Se γ_{t_0} intersecta $\partial\tilde{M}$, recaímos no caso anterior e concluímos a prova da afirmação. Caso contrário, afirmamos que existe $t \in (-r, r)$ tal que uma curva $\gamma_t \in W^{-1}(\Pi_t)$ intersecta tanto γ quanto $\partial\tilde{M}$. De fato, suponhamos, por absurdo, que não existe tal $t \in (-r, r)$. Sabemos que $W(\gamma_{t_0})$ é um gráfico sobre o eixo t do plano Π_{t_0}. Fazendo t_0 variar ao longo do eixo t de Π', o conjunto das curvas $W(\gamma_{t_0})$ descreve uma superfície M_0, que é gráfico sobre o plano ortogonal à direção υ. Assim, $W^{-1}(M_0)$ é uma componente conexa de $\tilde{M}$ que não possui bordo. Absurdo, pois $\tilde{M}$ é conexa e tem bordo. Assim, concluímos que existe $t \in (-r, r)$ tal que a curva $\gamma_t \in W^{-1}(\Pi_t)$ intersecta γ e também $\partial\tilde{M}$. Consideremos então tal curva γ_t, um ponto $\tilde{x}_t \in \gamma_t$ e denotemos por x_t o ponto $W(\tilde{x}_t)$. Da mesma maneira que em (2.6), temos $\tilde{\rho}(\tilde{x}_t, \partial\tilde{M}) \leq 4r$.

Considere agora um ponto t_1 no eixo t de Π' tal que $W(\gamma_t) \cap \Pi' = (t_1, y(t_1))$. Denotando por $y(t)$ a função cujo gráfico, contido em Π_t, é a curva $W(\gamma_t)$ e por θ_t o ângulo formado pelos vetores tangentes a $W(\gamma_t)$ e o vetor υ, e usando a desigualdade triangular e (2.6), temos que

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}(\tilde{x}, \partial\tilde{M}) &\leq \tilde{\rho}(\tilde{x}_t, \partial\tilde{M}) + \tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{x}_t) \\
&\leq 4r + \left| \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + (y'(t))^2} ds \right| \\
&\leq 4r + 4r = 8r.
\end{aligned}$$

Desta maneira, utilizando o Teorema 1.5 (Hopf e Rinow), concluímos a prova da afirmação e consequentemente as provas do Lema 2.2 e do item (i) do Teorema.

Provaremos agora o item (ii) do Teorema. Para isso, consideraremos uma esfera com centro na origem do $\mathbb{R}^3$ e raio r que contenha $W(\partial A)$. Depois disso, aumentando o raio r dessa esfera, mostraremos que $\mathbb{S}^2(r)$ é transversal a W e que $W(A) \cap \mathbb{S}^2(r)$ é uma imersão de $\mathbb{S}^1$.

Para tanto, seja $r_0 = d_0 + 2d_1$, onde $d_0 = \sup_{x \in W(\partial A)} \parallel x \parallel$ e $d_1 = diam\ W(\partial A)$. Dessa forma, podemos garantir que $W(\partial A)$ está contido no interior do cilindro sólido C_{r_0}. Pelo Lema 2.2, temos que o conjunto $W^{-1}(C_{r_0})$ é compacto em A. Portanto, podemos considerar

$r_1 = \sup\{\| W(z) \|;\ z \in W^{-1}(C_{r_0})\}$ e $r_2 > max\{r_0, r_1\}$ de maneira que

$$\frac{r_0 + r_1}{r_2} + \text{tg}\,\frac{\pi}{6} < \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Assim, $W(\partial A)$ está contido em $\mathbb{S}^2(r_2)$. Do fato de W ser própria e o ângulo entre $G(W(z))$ e υ ser pequeno, para todo $z \in A$, podemos garantir a existência de um anel A' contido em A com as seguintes propriedades:

(i) (2.1) vale para todo z em A';

(ii) $W(z)$ está fora de C_{r_2}, para todo $z \in A'$.

Sejam $z \in A'$ e Π o plano contendo $W(z)$ e o eixo de C_{r_0}. Seja γ uma componente conexa de $W^{-1}(\Pi)$ contendo z. Considere $y(t)$ de tal forma que $W(\gamma)$ seja o gráfico de $y(t)$ em Π. Da transversalidade de Π e $W(A)$ e como $W(\partial A) \subset C_{r_0}$, temos que $W(\gamma)$ intercepta C_{r_0}. Portanto, r_0 ou $-r_0$ pertence ao domínio de $y(t)$. Sem perda de generalidade, vamos assumir que r_0 pertence ao domínio de $y(t)$. Como $(x_0, y(r_0)) \in C_{r_0} \cap W(A)$, temos

$$|y(r_0)| \leq \| (x_0, y(r_0)) \| \leq r_1.$$

Considere $z \in A'$ e $W(z) = (r, y(r))$, $r > r_0$. Então, usando (2.3), temos

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq |y(r_0)| + \left| \int_{r_0}^{r} y'(s)ds \right| \\ &\leq r_1 + (r - r_0)\text{tg}\,\theta \\ &\leq r_1 + r\text{tg}\,\theta \\ &\leq r_0 + r_1 + r\text{tg}\,\theta. \end{aligned}$$

Assim, se $W(z) = (r, y(r))$, então

$$\left| \left\langle \frac{W(z)}{\| W(z) \|}, \upsilon \right\rangle \right| \leq \frac{r_0 + r_1}{r} + \text{tg}\,\theta,\ z \in A'.$$

Pela escolha de r_0 e r_1, temos

$$\left| \left\langle \frac{W(z)}{\| W(z) \|}, \upsilon \right\rangle \right| < \frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{2.7}$$

Portanto, o ângulo entre o vetor posição $\frac{W(z)}{\|W(z)\|}$ e o vetor υ é grande. Afirmamos que $W(A)$ e $\mathbb{S}^2(r)$ são transversais para $r > r_3$, onde $r_3 > \sup\{\| W(z) \|; z \in (A - A')\}$. Para provarmos isso suponhamos, por absurdo, que $W(A)$ e $\mathbb{S}^2(r)$ não são transversais. Isto é, existe pelo menos um ponto onde elas são tangentes. Portanto, podemos considerar um ponto $z \in W^{-1}(\mathbb{S}^2(r))$ tal que $G(W(z)) = \frac{W(z)}{\|W(z)\|}$. Como $W(A - A')$ está contido no interior da esfera $\mathbb{S}^2(r)$, temos que $z \in A'$ e das desigualdades (2.1) e (2.7) temos uma contradição. Portanto W e $\mathbb{S}^2(r)$ são transversais para todo $r > r_3$.

A fim de concluirmos a prova do item (ii), vamos restringir W a A' e continuaremos escrevendo W para essa restrição. Então, usando o Lema 2.2, a função $h : A' \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(z) = \| W(z) \|^2,\ z \in A,'$ é própria. Por (2.1) e (2.7), segue que h não tem pontos críticos. Se $r > r_3$, então $h^{-1}(r)$ é uma curva compacta que não intersecta $\partial A'$. Pois se $x \in \partial A'$ temos que $\| W(x) \| \leq r_3$. Como W é uma imersão própria, teremos uma quantidade finita de curvas de Jordan em $h^{-1}(r)$. Se $h^{-1}(r)$ tem mais de uma curva de Jordan, então existe um domínio compacto $\Omega \subset A'$ tal que $\partial\Omega$ é a união de curvas de Jordan de $h^{-1}(r)$. Então h tem um máximo ou um mínimo no interior de Ω, o que é impossível já que h não tem pontos críticos. Isso mostra que $h^{-1}(r)$ possui apenas uma curva de Jordan. Isto é, $\Gamma^r = W(A) \cap \mathbb{S}^2(r)$ é uma imersão de $\mathbb{S}^1$ e com isso provamos o item (ii) do Teorema.

Provaremos agora que $\gamma^r = \frac{1}{r}\Gamma^r$ converge C^1 para uma geodésica (com multiplicidade) em $\mathbb{S}^2(1)$, ou seja, vai para um grande círculo de $\mathbb{S}^2(1)$. Para isso, aumentaremos o raio de $\mathbb{S}^2(r)$ fazendo com que tenda ao infinito. Após isto, observando (2.7), vê-se que θ tende a zero. Além disso, como o ângulo entre υ e $G(W(z))$ é pequeno, quando r tende a infinito, o ângulo entre o vetor tangente à Γ^r e υ vai para $\frac{\pi}{2}$. Daí, Γ^r percorre no mínimo uma volta ao redor da direção υ e γ^r converge C^0 a uma geodésica $S \subset \mathbb{S}^2(1)$ quando r vai para o infinito.

Consideremos $\alpha(u)$, $u \in \mathbb{R}$, uma parametrização pelo comprimento de arco do grande círculo S para onde γ^r converge continuamente. Considere também $\beta_r(u)$ uma parametrização de γ^r tal que $\beta_r(u)$ está situado no grande círculo de $\mathbb{S}^2(1)$ que contém υ e $\alpha(u)$. Como $\alpha(u)$ é parametrizado pelo comprimento de arco tem-se que $\{\alpha(u), \alpha'(u), \upsilon\}$ formam uma base ortonormal do $\mathbb{R}^3$, para todo u. Considere o vetor $\frac{\beta_r'(u)}{\|\beta_r'(u)\|}$ cuja norma é 1. Então, temos que

$$\left\langle \frac{\beta_r'(u)}{\| \beta_r'(u) \|}, \alpha'(u) \right\rangle^2 + \left\langle \frac{\beta_r'(u)}{\| \beta_r'(u) \|}, \alpha(u) \right\rangle^2 + \left\langle \frac{\beta_r'(u)}{\| \beta_r'(u) \|}, \upsilon \right\rangle^2 = 1. \tag{2.8}$$

Como β_r' é ortogonal a $G(\beta_r)$, então

$$\left\langle \frac{\beta_r'(u)}{\| \beta_r'(u) \|}, v \right\rangle \longrightarrow 0$$

quando r tende a infinito.

O fato de γ^r convergir C^0 a α implica em

$$\left\langle \frac{\beta_r'}{\| \beta_r' \|}, \alpha' \right\rangle \longrightarrow 1$$

quando r tende ao infinito. Assim,

$$\left\langle \frac{\beta_r'(u)}{\| \beta_r'(u) \|}, \alpha(u) \right\rangle \longrightarrow 0.$$

Ou seja, γ^r converge C^1 a α, com multiplicidade, e o item (iii) está provado.

Mostraremos agora que, se M é uma superfície mínima, então γ^r converge C^∞ para $\mathbb{S}^1$. Para isso serão usadas propriedades de convergência para superfícies mínimas, o teorema de Arselá-Ascoli e propriedades de uma aplicação de recobrimento.

Considere Π um plano ortogonal a v e contendo a origem. Tome o anel compacto $\Omega = \{p \in \Pi, \frac{1}{2} \leq \| p \| \leq 2\}$ contendo $\mathbb{S}^1$. Considere também $M_r = \left(\frac{1}{r}M\right) \cap (\Omega \times \mathbb{R})$, onde $\frac{1}{r}M$ é uma contração de M, isto é, a imagem de M por uma aplicação conforme, o que garante que o ângulo entre qualquer vetor tangente a M e o vetor v seja preservado em M_r, e, consequentemente, o fato de M ser própria implica que M_r também é própria. Agora, como M é mínima, podemos aplicar o teorema de Hadamard, para garantir que a projeção ortogonal de M_r sobre Ω é um espaço de recobrimento. Daí, pode-se escrever localmente M_r como um gráfico de uma função f_r definida sobre um setor angular de Ω.

Afirmamos que as funções f_r assim definidas formam uma família eqüicontínua em $C^0(\Omega)$. De fato, sejam $\epsilon > 0$, $f_r \in C^0(\Omega)$ e p_1, $p_2 \in \Omega$ tais que $\left|p_1 - p_2\right| < \delta$. Temos que

$$\left|f_r(p_1) - f_r(p_2)\right|_{C^0} = \int_{p_1}^{p_2} \left|\gamma'(t)\right| dt \leq \operatorname{tg}\theta \left|p_1 - p_2\right| \leq \frac{\sqrt{3}}{3}\left|p_1 - p_2\right|.$$

O que prova a afirmação. Aplicando o teorema de Arselá-Ascoli, temos que uma subseqüência de $\{f_r\}$, manteremos a mesma notação, converge C^0 para $f = 0$. Pois, como consequência de M_r ser conforme a M concluímos que o ângulo entre os vetores tangentes de M e o vetor v tende a $\frac{\pi}{2}$ quando r tende a infinito. E, desta forma M_r também convergirá C^0. Além disso, uma propriedade dos gráficos mínimos dada pela Proposição 1.10, garante a limitação uniforme de todas as derivadas de f_r com ordem menor ou igual a $j+1$, $j \in \mathbb{Z}$, ou seja, são todas uniformemente limitadas por uma constante K_{j+1}. Como a inclusão do espaço das funções C^{j+1} no espaço das funções C^j é absolutamente contínua segue que f_r converge C^j para $f = 0$. Em particular, a interseção de M_r com $\mathbb{S}^2$ converge C^j para um grande círculo S de $\mathbb{S}^1$, com multiplicidade, para todo j. Isto completa a prova do Teorema.

$\square$

Agora faremos uma generalização do Teorema 2.1. Mostraremos em que condições ele pode ser generalizado para imersões com codimensão k em $\mathbb{R}^n$.

2.3 Teorema (Jorge-Meeks [JM]). *Seja E um fim fechado de uma imersão completa $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de dimensão m. Suponha que existe um $(n-m)-$plano P tal que o ângulo θ entre P e os planos tangentes a E seja menor que algum número positivo ϵ. Então*

(1) *Existe um subfim fechado E' de E, difeomorfo a $\mathbb{S}^{m-1} \times [0, \infty)$ que satisfaz*

(*i*) *$Y_r = f(E') \cap \mathbb{S}_r^{n-1}$ é uma $(m-1)-esfera$ imersa para r grande (ou um ponto, se $m = 1$);*

(*ii*) *$f_{|_{E'}}$ é um mergulho se $m \neq 2$;*

(2) *Se os planos normais convergem a P no infinito, então $X_r = \frac{1}{r}(f(E) \cap \mathbb{S}_r^{n-1})$ converge C^1 a uma subesfera totalmente geodésica $\mathbb{S}^{m-1}$ em $\mathbb{S}^{n-1}$. Além disso, se $m \neq 2$ ou se $m = 2$, $n = 3$ e $f_{|_{E'}}$ é um mergulho, então X_r converge a $\mathbb{S}^{m-1}$ com multiplicidade 1.*

Prova. Se $m = 1$, a prova segue imediatamente da prova do Teorema 2.1. Suponha então que $m > 1$. Denotemos por Δ o $(n-m+1)$-plano que passa por P e $f(x)$, com $x \in E$. Consideremos a interseção de Δ com $f(E)$. Analisaremos o comportamento das curvas contidas nesta interseção. Como o ângulo entre P e os planos tangentes a E é diferente de zero, tem-se que Δ e $f(E)$ são transversais e, portanto, $\Delta \cap f(E)$ consiste de uma coleção de curvas que são gráficos sobre o eixo $t \in \Delta$. De forma similar à prova do Teorema 2.1, considere o cilindro $C_r = B_r^m \times P$ de raio r sobre B_r^m, onde B_r^m é a bola de raio r em $P^\perp$ e $P^\perp$ é o subespaço ortogonal complementar à P em $\mathbb{R}^n$. Com os argumentos utilizados na prova do Teorema 2.1, temos que $f_{|_{E'}}$ é própria e transversal a $\partial C_r = \mathbb{S}_r^{m-1} \times \mathbb{R}$ e que $\gamma^r = \partial C_r \cap f(E)$ é uma variedade imersa compacta tal que, para r grande, γ^r desconecta E em duas componentes E' e E'', onde E' é um subfim, isto é, uma componente não limitada cujo bordo é γ^r. Além disso, concluímos que se $\pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow P^\perp$ é uma projeção ortogonal, então $\pi_{|_{E'}}$ é um espaço de recobrimento de $Z = P^\perp - int(B_r^m)$.

Quando $m > 2$, Z é simplesmente conexo. Isso implica que $f_{|_{E'}}$ é um mergulho e um gráfico sobre Z. Se $m = 2$, então segue-se da classificação de superfícies bi-dimensionais que E' é difeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times [0, \infty)$. Como $f_{|_{E'}}$ é própria, $\pi_{|_{E'}}$ é um recobrimento de uma folha. Em qualquer caso, γ^r é uma esfera imersa, isto é, $f(E') \cap \mathbb{S}_r^{n-1}$ é uma $(m-1)$-esfera imersa, o que prova a parte (1) do teorema.

O item (2) segue da prova do item (1) com os argumentos da prova do Teorema 2.1. O único argumento novo é quando $m = 2$, $n = 3$ e $f_{|_{E'}}$ é um mergulho. Neste caso, os círculos $\frac{1}{r}\gamma^r$, definidos anteriormente, são mergulhados e convergem C^1 para uma geodésica fechada com multiplicidade. Entretanto, o mergulho de $\frac{1}{r}\gamma^r$ implica que a convergência é injetiva, isto é, a multiplicidade é um. Concluindo assim a prova do Teorema 2.3.

□

O resultado seguinte é uma aplicação do Teorema 2.3 às subvariedades $M^k \subset \mathbb{R}^{2k-1}$ completas e de tipo topológico finito.

2.4 Teorema (Jorge-Meeks [JM]). *Seja $M^k \subset \mathbb{R}^{2k-1}$ uma subvariedade completa mergulhada de tipo topológico finito e com limite dos planos normais bem definidos em cada fim. Então as componentes de $X_r = \frac{1}{r} M_k \cap \mathbb{S}^{2k-2}$ convergem C^1 para uma subesfera $\mathbb{S}^{k-1}$ de $\mathbb{S}^{k-2}$ quando r tende a infinito.*

Dessa forma, M^k vista do infinito se parece com um único $k-plano$ P passando pela origem.

Prova. Pelo item (2) do Teorema 2.3 cada componente C_r^i de X_r converge C^1 a uma esfera totalmente geodésica $\mathbb{S}_i^{k-1}$ em $\mathbb{S}^{2k-1}$. Se $\mathbb{S}_i^{k-1}$ e $\mathbb{S}_j^{k-1}$ são distintas, então elas se intersectam transversalmente em $\mathbb{S}^{2k-1}$. A propriedade de convergência C^1 estabelecida no Teorema 2.3 implica que C_r^i e C_r^j se intersectam transversalmente para r grande, o que é impossível pois M^k é mergulhada. Assim, $\mathbb{S}_i^{k-1}$ e $\mathbb{S}_j^{k-1}$ são iguais e a prova do teorema está concluída.

□

Uma aplicação importante deste teorema é o seguinte corolário.

2.5 Corolário. *Seja M uma superfície mínima completa mergulhada em $\mathbb{R}^3$ com curvatura total finita. Então os vetores normais aos fins de M são paralelos. Assim, após uma rotação de M, a aplicação de Gauss $N : M \longrightarrow \mathbb{S}^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ tem zeros ou pólos nos fins de M.*

A superfície de Costa e o catenóide são bons exemplos para este corolário, pois as duas são mergulhadas e além disso, tanto os vetores normais aos fins do catenóide quanto os os vetores normais aos fins da superfície de Costa são paralelos.

Capítulo 3

Desigualdade de Chern-Osserman e uma interpretação da igualdade em $\mathbb{R}^3$

Neste capítulo, mostraremos, para o caso de $\mathbb{R}^3$, a prova obtida por Jorge e Meeks para a desigualdade determinada por Chern e Osserman em [O2], p.85 e que a igualdade, no caso de $\mathbb{R}^3$, vale apenas quando os fins são mergulhados. Para essa demonstração, seja M uma superfície mínima completa de curvatura total finita, cuja característica de Euler é dada por $\chi(M) = \chi(\overline{M}) - k$, onde k é o número de fins de M.

3.1 Teorema (Jorge-Meeks [JM]). *Seja M uma superfície mínima completa imersa em $\mathbb{R}^3$ com curvatura total finita $-4\pi m$ e tendo k fins. Então*

$$C(M) = 2\pi\left(\chi(M) - \sum_{j=1}^{k} I_j\right) \leq 2\pi(\chi(M) - k),$$

onde I_j é a multiplicidade do fim E_j correspondente a p_j. Assim, a igualdade

$$C(M) = 2\pi(\chi(M) - k)$$

vale se, e somente se, os fins de M são mergulhados.

Prova. No Teorema 2.1 foi demonstrado que, para cada fim E_j de M, a imersão $\Gamma_r^j = \left(\frac{1}{r}E_j \cap \mathbb{S}_r^2\right)$ converge C^1 para uma geodésica γ^j de $\mathbb{S}^2(1)$ com multiplicidade I_j quando r tende ao infinito. Assim $I_j = 1$ se, e somente se, Γ_r^j é uma curva fechada mergulhada quando r tende ao infinito. Como Γ_r^j converge C^1 a γ^j quando r tende ao infinito, a curvatura total de Γ_r^j converge para a curvatura total de γ^j, que é $2\pi I_j$, pois γ^j é uma geodésica de $\mathbb{S}^2(1)$. Considere agora a projeção radial M_r da interseção de M com a bola B_r em $\mathbb{R}^3$ de raio r e centro na origem, ou seja, $M_r = \frac{1}{r}(M \cap B_r)$. Do Teorema 2.1, o plano que contém γ^j e o espaço tangente a E_j no infinito coincidem. Como a convergência citada anteriormente é C^1, quando r tende para o infinito a curvatura geodésica total de Γ_r^j, como uma curva limitada de M_r, converge à curvatura geodésica total de γ^j, que é $2\pi I_j$. Isto é,

$$\lim_{r\to\infty} C(\Gamma_r^j) = 2\pi I_j,$$

onde $C(\Gamma_r^j)$ é a curvatura geodésica total de Γ_r^j. Denotando por $C(M_r)$ a curvatura total de M_r e aplicando a fórmula de Gauss-Bonnet a M_r temos

$$\int_{M_r} K dM + \sum_{j=1}^{k} \int_{\Gamma_r^j} k_g dt = 2\pi\chi(M_r) = 2\pi\chi(M),$$

isto é,

$$C(M_r) + \sum_{j=1}^{k} C(\Gamma_r^j) = 2\pi\chi(M_r) = 2\pi\chi(M).$$

Fazendo r tender a infinito, aplicando o Teorema 2.1 e observando que $C(M_r)$ tende a $C(M)$ quando r tende a infinito, obtemos que

$$2\pi\chi(M) = C(M) + 2\pi \sum_{j=1}^{k} I_j.$$

Dessa forma,

$$C(M) = 2\pi \left(\chi(M) - \sum_{j=1}^{k} I_j \right).$$

Como M é uma superfície completa de curvatura total finita, pelo Teorema 1.4, temos $C(M) = -4m\pi$, onde m é um inteiro não negativo. Assim,

$$-4m\pi = 2\pi \left(\chi(M) - \sum_{j=1}^{k} I_j \right),$$

o que implica

$$2m = \sum_{j=1}^{k} I_j - \chi(M) \leq k - \chi(M),$$

onde $I_j \geq 1$. Assim, $\sum_{j=1}^{k} I_j = k$ se, e somente se $I_j = 1$, para todo $j = 1, \ldots.., k$. Isto é, a igualdade vale se, e somente se, para cada $j = 1, \ldots.., k$, o fim E_j é mergulhado. O que prova o Teorema. $\square$

Mostraremos agora como Jorge e Meeks utilizaram a igualdade acima para caracterizar o catenóide.

3.2 Teorema (Jorge-Meeks[JM]). *O catenóide é o único anel mínimo mergulhado em $\mathbb{R}^3$ com curvatura total finita.*

Prova. Suponha que M é um anel mínimo completo e mergulhado em $\mathbb{R}^3$ com curvatura total finita. Do Teorema anterior, temos que

$$C(M) = -4\pi m = 2\pi\left(\chi(M) - k\right).$$

Como M tem dois fins, temos que $k = 2$ e podemos afirmar que M é do tipo topológico da esfera menos dois pontos. Portanto, $\chi(M) = 0$. Daí, $m = 1$ e $C(M) = -4\pi$. Mas, pelo Teorema 1.15, as únicas superfícies mínimas de curvatura $C(M) = -4\pi$ são o catenóide e a superfície de Enneper. Assim, temos que M é o catenóide pois a Enneper não é mergulhada.

$\square$

Com as idéias do Teorema 3.1, Jorge e Meeks obtiveram a seguinte caracterização do plano.

3.3 Teorema (Jorge-Meeks[JM]). *Uma superfície mínima completa imersa em $\mathbb{R}^3$ com curvatura total finita e apenas um fim mergulhado é o plano.*

Prova. Suponha que M é uma superfície mínima imersa em $\mathbb{R}^3$ com curvatura total finita e apenas um fim mergulhado. Do Teorema 2.1, a curva fechada $\Gamma^r = \frac{1}{r}(M \cap \mathbb{S}^2(r))$, converge, com multiplicidade, a uma geodésica γ de $\mathbb{S}^2(1)$ quando r tende ao infinito. Como M tem apenas um fim mergulhado, para r suficientemente grande, Γ^r também é mergulhado e a multiplicidade é um. Então podemos escrever $M = M_r \cup E_r$, onde E_r é o fim de M dado pela parte exterior a $\mathbb{S}^2(r)$ e M_r é o complemento de E_r em M. Como o vetor normal ao fim E_r está bem definido, E_r é próprio e se projeta injetivamente sobre o plano Π perpendicular ao vetor normal no fim e que contém a curva γ. Dessa maneira, E_r é o gráfico de uma função diferenciável sobre Π.

Provaremos agora que M_r também é um gráfico sobre Π. Como M_r é limitada por Γ^r e, quando r tende ao infinito, Γ^r converge C^1 para uma geodésica γ, podemos garantir que Γ^r

se projeta ortogonalmente sobre uma curva convexa no plano π que contém γ. Aplicando o Teorema 1.11, devido a Radó, temos que M_r também é um gráfico sobre o plano Π. Conclui-se então que toda a superfície M é um gráfico em $\mathbb{R}^3$ sobre Π. Como M é mínima e completa, aplicando agora o Teorema 1.12, devido a Bernestein, concluímos que M é um plano.

$\square$

Referências Bibliográficas

[BC] Barbosa, J.L.M. and Colares, A. G., *Minimal Surfaces In* $\mathbb{R}^3$. Monografias de Matemática $N^0 40$, IMPA, Rio de Janeiro.

[dC1] do Carmo, M.P., *Geometria Diferencial de Curvas e Superficies*. Textos Universitários, Sociedade Brasileira de Matématica, Rio de Janeiro, 2005.

[dC2] do Carmo, M.P., *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides, IMPA, 2^a edição, Rio de Janeiro, 1988.

[dC3] do Carmo, M.P., *Superfícies Mínimas*. 16^0 Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1987.

[GT] Gilbarg, D. and Trudinger, N.S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer Verlag, Berlin 1977, Grundlehren der Math, Wissenschafften 224.

[H] Huber, A., *On subharmonicfunctions and differential geometry in the large.*Comment. Math. Helv.,32 (1957), $13-72$.

[JM] Jorge, L.P. and Meeks III, W.H. *The Topology Of Complete Minimal Surfaces Of Finite Total Gaussian Curvature*. Topology 22 (1983), $203-221$.

[L1] Lima, E. L., *Variedades Diferenciaveis*. Monografias de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1973.

[L2] Lima, E. L., *Grupo Fundamental e Espaco de Recobrimento*. Projeto Euclides, IMPA/CNPq, Rio de Janeiro.

[L3] Lima, E. L., *Espaços Métricos*. Projeto Euclides, IMPA, 2^a edição, Rio de Janeiro, 2003.

[L] Lins Neto, A., *Funções de uma Variável Complexa*. Projeto Euclides, IMPA, 2^a edição, Rio de Janeiro, 1996.

[O1] Osserman, R., *Global Properties of minimal surfaces in E^3 and E^n*. Ann. of Math. 80 (1964), $340 - 364$.

[O2] Osserman, R., *A Survey of Minimal Surfaces*. Van Nostrand Reinhold Company, 1969.

[SA] Santos, W. and Alencar, H., *Geometria das Curvas Planas*. XII Escola de Geometria Diferencial, Universidade Federal de Goiáis, 2002.

Universidade Federal da Bahia-UFBA
Instituto de Matemática/Depto. de Matemática

Campus de Ondina, Av. Ademar de Barros s/n, CEP:40170-110
www.alunospgmat.ufba.br/