



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



SUPERFÍCIES MÍNIMAS:
ESTIMATIVA DE CURVATURA E CONVERGÊNCIA

Fabiana Alves dos Santos

Salvador-Bahia

Dezembro 2008

SUPERFÍCIES MÍNIMAS:
ESTIMATIVA DE CURVATURA E CONVERGÊNCIA

FABIANA ALVES DOS SANTOS

*Dissertação apresentada ao Colegiado
da Pós-Graduação em Matemática da
Universidade Federal da Bahia como
requisito parcial para obtenção do
Título de Mestre em Matemática.*

Salvador-Bahia

Dezembro 2008

SANTOS, FABIANA ALVES.

SUPERFÍCIES MÍNIMAS: ESTIMATIVA DE CURVATURA E CONVERGÊNCIA Salvador-BA, 2008.

Orientadora: Prof^ª. Dr^ª. Ana Lucia Pinheiro Lima (UFBA).

Dissertação de Mestrado apresentada ao curso de Pós-Graduação em Matemática da UFBA, 53 páginas.

SUPERFÍCIES MÍNIMAS:
ESTIMATIVA DE CURVATURA E CONVERGÊNCIA

FABIANA ALVES DOS SANTOS

Dissertação apresentada ao colegiado do curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 10 de dezembro de 2008.

Banca examinadora:

Profa. Dra. Ana Lucia Pinheiro Lima - Orientadora (UFBA)

Prof. Dr. Jorge Herbert Soares de Lira (UFC)

Prof. Dr. Enaldo Silva Vergasta (UFBA)

*Aos meus pais, às minhas irmãs e
à memória da minha querida avó.*

Agradecimentos

A Deus pela força diária.

Aos meus pais e às minhas irmãs pelo apoio, confiança e amor incondicional.

À professora Ana Lucia pela orientação, por ter acreditado em mim, por ter conduzido o desenvolvimento deste trabalho com sabedoria e paciência e por ter sempre me oferecido o melhor.

Aos professores Jorge Herbert de Lira e Enaldo Vergasta por participarem da banca examinadora deste trabalho e por suas sugestões.

A todos os professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal da Bahia por aumentarem meu encantamento por esta ciência.

Às minhas queridas amigas Eliane, Ísis, Manuela e Vanessa pela amizade e apoio nos últimos seis anos.

Às amigas não matemáticas por compreenderem minha constante ausência e pela presença nos momentos mais difíceis e nos mais felizes.

Aos funcionários do IM, a Tonha e a Tonho por me animarem mesmo nos dias de total desânimo.

À minha avó Pequena, tios, tias e primos pelo incentivo. Em especial à tia Joana e Adriana pelo acolhimento.

Ao colega João Paulo pela paciência em tirar todas as minhas dúvidas com o \LaTeX .

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

E a todos que de alguma maneira contribuíram.

“Grande coisa é haver recebido do céu uma partícula de sabedoria, o dom de achar a relação entre as coisas, a faculdade de as comparar e o talento de concluir.”

Machado de Assis

Resumo

Neste trabalho, estudamos o artigo “On the Gauss Curvature of Non-Parametric Minimal Surfaces” de R. Finn e R. Osserman, publicado no J. Analyse Math., em 1964, que apresenta uma estimativa uniforme para a curvatura de Gauss de superfícies mínimas no espaço ambiente \mathbb{R}^3 . Para estabelecer tal resultado estudamos o problema de Dirichlet para a equação dos gráficos mínimos e como consequência dessa estimativa apresentamos um resultado de convergência.

Palavras-Chave: Superfícies Mínimas, Curvatura de Gauss, Convergência.

Abstract

On this work, we study the paper “On the Gauss Curvature of Non-Parametric Minimal Surfaces” of R. Finn and R. Osserman, it was published at J. Analyse Math., in 1964, this paper shows a uniform estimate to Gauss curvature of minimal surfaces in \mathbb{R}^3 . To establish this result we study the Dirichlet problem to the minimal graph equation and as a consequence of this estimate we present a result of convergence.

Key words: Minimal surfaces, Gauss curvature, Convergence.

Sumário

Introdução	9
1 Preliminares	11
2 Problema de Dirichlet para Gráficos Mínimos	23
3 Estimativa de Curvatura	34
4 Convergência de Superfícies Mínimas	46
Referências Bibliográficas	52

Introdução

Este trabalho está baseado no artigo “*On the Gauss Curvature of Non-Parametric Minimal Surfaces*” de R. Finn e R. Osserman, publicado no *J. Analyse Math.*, em 1964. Nesse artigo é dada uma resposta para a seguinte pergunta.

Se S é um gráfico mínimo em \mathbb{R}^3 , definido sobre um disco que contém a origem, é possível limitar a curvatura de Gauss deste gráfico na origem?

A resposta é o teorema principal desta dissertação.

Teorema (Finn-Osserman) *Se uma superfície mínima S é representada na forma $z = f(x, y)$ sobre o disco $x^2 + y^2 < R^2$, então a curvatura de Gauss K na origem satisfaz*

$$|K| < \frac{g(W)}{R^2},$$

onde $W = W(f) = \sqrt{1 + |\nabla f|^2}$ e $g(W)$ é dado por

$$g(W) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{W^2} \right)^2 \left[\frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{W^2 - 1}{2}} \right) \right]^2.$$

Além disso, no caso em que S tem plano tangente horizontal na origem, isto é, $W = 1$, então o valor $\frac{\pi^2}{2}$ de $g(W)$ é o melhor possível.

Uma primeira resposta para esta questão foi estabelecida por Heinz, em [He]. O resultado aqui estudado torna-se mais interessante por dar uma visão geométrica mais clara da razão pela qual de fato existe uma limitação uniforme para a curvatura de Gauss e por apresentar a melhor estimativa possível no caso em que o plano tangente é horizontal.

Para mostrar tal limitação, R. Finn e R. Osserman utilizam a superfície de Scherk como barreira para as demais superfícies. Essa superfície atinge o valor extremo no caso em que o plano tangente é horizontal.

Lembrando que a equação dos gráficos mínimos é uma equação diferencial parcial elíptica, podemos então aplicar o princípio do máximo forte de Hopf para a solução da equação dos gráficos mínimos. Conseguimos, assim, uma valiosa ferramenta para

resolver problemas de unicidade. Utilizaremos algumas versões do princípio do máximo para estabelecer nosso resultado. Ver Lema 1.6 e Teoremas 2.5 e 2.8.

No caso das superfícies mínimas, temos que quanto menor a curvatura de Gauss maior será o raio do disco do plano tangente sobre o qual a superfície é gráfico. Assim, uma limitação uniforme para a curvatura de Gauss é uma condição necessária para a convergência de superfícies mínimas. A propósito, ver Teorema 4.4.

Este trabalho consta de quatro capítulos. O Capítulo 1 apresenta uma série de resultados relevantes que serão utilizados no decorrer do trabalho, entre eles o Princípio do Máximo para Gráficos Mínimos, Lema 1.7 e a Descrição Local da Intersecção de Superfícies Mínimas, Teorema 1.9.

No Capítulo 2, estudamos o problema de Dirichlet para a equação das superfícies mínimas. Estudamos a existência e a unicidade de soluções no caso em que a função que define o bordo é suave ou suave por partes, Teoremas 2.2, 2.3 e 2.5, e a unicidade de soluções para o caso em que consideramos dados infinitos no bordo do domínio, Teorema 2.8. Um exemplo deste tipo de superfície é a superfície de Scherk.

O Capítulo 3 consiste basicamente da demonstração do Teorema 3.1, que será dividida em três partes. Primeiro, lidamos com o caso particular quando a superfície tem plano tangente horizontal na origem, Proposição 3.2. Depois, o caso geral para qualquer posição do plano tangente, Proposição 3.6. Por fim, mostramos que a constante $g(W)$ é a melhor possível, Proposição 3.7. Ademais, aplicamos o Teorema 3.1 para dar uma demonstração bastante simples do Teorema de Bernstein, Teorema 3.10.

No Capítulo 4, estudamos a convergência de superfícies mínimas. Primeiro, estudamos um resultado clássico para a convergência de gráficos mínimos, Teorema 4.1. E, então, aplicamos a estimativa de curvatura estabelecida no Teorema 3.1, conseguindo estabelecer a convergência de superfícies mínimas.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, citamos alguns resultados sobre superfícies mínimas que serão necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Deduzimos a equação dos gráficos mínimos, estabelecemos uma limitação local uniforme para a área de gráficos mínimos e, além disso, apresentamos o princípio do máximo e a descrição local da interseção entre superfícies mínimas. Apresentamos também um desenvolvimento básico das ferramentas de Equações Diferenciais Parciais que nos será útil para a obtenção de alguns resultados. Um estudo muito mais abrangente dessas ferramentas pode ser encontrado em [GT] ou [CH].

Nosso primeiro objetivo será definir superfícies mínimas em \mathbb{R}^3 . Para isso, precisamos de alguns conceitos iniciais.

Seja S uma superfície regular de \mathbb{R}^3 . Vamos supor ao longo do texto que a superfície S está orientada e denotar por $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ a sua aplicação de Gauss. Ou seja, N é um campo normal e unitário definido sobre a superfície, de modo que, para cada ponto $p \in S$, o plano tangente a S em p é dado por

$$T_p S = \{v \in \mathbb{R}^3; \langle v, N(p) \rangle = 0\}.$$

Dizemos que o conjunto imagem $N(S) \subset \mathbb{S}^2$ é a *imagem esférica* da superfície e contém todas as direções que são perpendiculares à superfície. Portanto, sua área é uma medida de quanto a superfície se curva em \mathbb{R}^3 .

Para cada ponto $p \in S$, a aplicação N é diferenciável e a *derivada da aplicação de Gauss* com respeito a um vetor $v \in T_p S$ é dada por

$$dN_p(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} N(\alpha(t)),$$

onde $\alpha : I \rightarrow S$ é uma curva qualquer em S tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Como N é unitário, isto é, $\langle N(p), N(p) \rangle = 1$, temos que $\langle dN_p(v), N(p) \rangle = 0$, para todo $v \in T_pS$. Podemos então identificar T_pS com $T_p\mathbb{S}^2$ e assim, a derivada dN_p de N em $p \in S$ determina uma aplicação linear $A_p : T_pS \rightarrow T_pS$ definida por

$$A_p(v) = -dN_p(v)$$

que é chamada *endomorfismo de Weingarten* de S .

Afirmção 1.1. *Para cada $p \in S$, a aplicação A_p é um aplicação linear autoadjunta.*

De fato, como A_p é linear, basta mostrar que $\langle A_p(e_1), e_2 \rangle = \langle e_1, A_p(e_2) \rangle$ para uma base $\{e_1, e_2\}$ de T_pS . Sejam $X(u, v)$ uma parametrização de S em p e $\{X_u(u, v), X_v(u, v)\}$ a respectiva base coordenada de T_pS . Considerando o campo $N(u, v) = (N \circ X)(u, v)$ normal a T_pS , temos que

$$A_p(X_u) = -dN_p(X_u) = N_u \text{ e } A_p(X_v) = -dN_p(X_v) = N_v.$$

Agora, derivando as igualdades

$$\langle X_u, N \rangle = 0 \text{ e } \langle X_v, N \rangle = 0$$

em relação a v e a u , respectivamente, temos

$$\langle X_{uv}, N \rangle + \langle X_u, N_v \rangle = 0 \tag{1.1}$$

e

$$\langle X_{uv}, N \rangle + \langle X_v, N_u \rangle = 0. \tag{1.2}$$

Subtraindo (1.2) de (1.1), temos

$$\langle X_u, N_v \rangle = \langle X_v, N_u \rangle$$

isto é,

$$\langle A_p(X_u), X_v \rangle = \langle X_u, A_p(X_v) \rangle.$$

Logo A_p é autoadjunta em T_pS .

O próximo teorema diz que, dada uma aplicação linear autoadjunta $A : V \rightarrow V$, onde V é um espaço vetorial, existe uma base ortonormal de V tal que a matriz de A relativa a esta base é uma matriz diagonal. Ele nos permitirá encontrar o máximo e o mínimo da forma quadrática associada ao endomorfismo de Weingarten para cada $p \in S$.

Teorema 1.2 (Teorema Espectral). *Seja $A : V \rightarrow V$ uma aplicação linear autoadjunta, onde V é um espaço vetorial de dimensão dois. Então existem uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de V e números reais k_1, k_2 tais que $A(e_1) = k_1 e_1$ e $A(e_2) = k_2 e_2$, isto é, e_1, e_2 são autovetores e k_1, k_2 são autovalores de A . Na base $\{e_1, e_2\}$ a matriz de A é diagonal e os valores k_1, k_2 da diagonal, $k_1 \geq k_2$, são o máximo e o mínimo, respectivamente, da forma quadrática $Q(v) = \langle A(v), v \rangle$ sobre o círculo unitário de V , isto é, sobre $\{v \in V; |v| = 1\}$.*

Agora, para cada $p \in S$, aplicando o Teorema Espectral ao endomorfismo de Weingarten A_p , garantimos que existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de $T_p S$, tal que

$$A_p(e_1) = k_1 e_1 \text{ e } A_p(e_2) = k_2 e_2.$$

Os autovalores de A_p , $k_1(p)$ e $k_2(p)$, são chamados *curvaturas principais* da superfície S no ponto p .

Como $\dim S = 2$, associados à aplicação A_p existem dois invariantes algébricos, a saber, o traço e o determinante, que são de especial importância em Geometria Diferencial. Assim, a metade do traço de A_p define a *curvatura média* H da superfície S no ponto p e seu determinante, a *curvatura de Gauss* K de S no ponto p , que são dados por

$$H(p) = \frac{1}{2} \text{tr}(A_p) = \frac{k_1(p) + k_2(p)}{2}$$

e

$$K(p) = \det(A_p) = k_1(p)k_2(p).$$

Observamos que, se mudarmos a orientação da superfície, o determinante não muda. O traço, contudo, muda de sinal.

No caso em que a superfície é o gráfico de uma função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $u \in C^k(\Omega)$, $k \geq 2$, com Ω sendo um domínio aberto de \mathbb{R}^2 , temos as seguintes expressões para as curvaturas média e de Gauss

$$H = \frac{1}{2} \frac{(1 + u_x^2)u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_y^2)u_{xx}}{(1 + |\nabla u|^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1.3)$$

e

$$K = \frac{u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2}{(1 + |\nabla u|^2)^2}.$$

Uma superfície regular é dita *mínima* se a sua curvatura média é identicamente nula, isto é, $k_1(p) = -k_2(p)$, para todo $p \in S$. Para o caso de gráficos, é necessário e suficiente que, a função u satisfaça

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0.$$

Originalmente a palavra mínima está relacionada com o seguinte problema proposto pelo matemático J. L. Lagrange, em 1760: “Dada uma curva fechada C (sem autointerseções), achar a superfície de área mínima que tem esta curva como fronteira”. Lagrange apresentou este problema sumariamente, como um mero exemplo de um método, por ele desenvolvido, para achar curvas ou superfícies que minimizassem certas quantidades, tais como área, comprimento e energia, entre outros.

Na verdade, superfícies com $H \equiv 0$ são pontos críticos para o funcional área, não sendo possível garantir que são de fato um mínimo relativo e muito menos mínimo absoluto de área. Se a superfície S é um mínimo relativo para o funcional área, ela será chamada de *estável* e dizemos que a superfície S é *minimizante para a área* se a sua área for menor ou igual à área de qualquer outra superfície que tenha a mesma fronteira, ou seja, se for um mínimo absoluto para o funcional área.

Supondo que a superfície S é um gráfico, vamos mostrar que o fato de S ser um ponto crítico para o funcional área é equivalente a $H \equiv 0$.

Para tanto utilizamos o Teorema da Divergência, o qual é um resultado bastante geral e muito importante. Ele reduz o cálculo de uma integral ao longo de uma região simples a uma integral de linha ao longo de sua fronteira. Por região simples, ou de Jordan, $\mathfrak{D} \subset S$ entende-se uma região conexa cuja fronteira é uma curva fechada simples e cuja aderência, em S , é homeomorfa a um disco plano fechado. Se a fronteira de \mathfrak{D} for regular por partes, \mathfrak{D} também se diz uma região poligonal. A seguinte versão do Teorema da Divergência será suficiente para as nossas necessidades. Sua demonstração pode ser encontrada em [MS], p. 192.

Chamamos de *vetor conormal unitário* em um ponto p do bordo de uma superfície S , e denotaremos por $\nu_u(p)$, um vetor unitário tal que

$$\nu_u(p) \in T_p S \text{ e } \nu_u(p) \perp T_p(\partial S).$$

A componente de ν_u na direção do eixo Oz será denotada por $(\nu_u)_3$, ou seja, $(\nu_u)_3 = \langle \nu_u, e_3 \rangle$, com $e_3 = (0, 0, 1)$.

Teorema 1.3 (Teorema da Divergência). *Seja X um campo de vetores tangentes em S , e $\mathfrak{D} \subset S$ uma região poligonal. Então*

$$\int_{\mathfrak{D}} \operatorname{div} X d\sigma = \int_{\gamma} \langle X, \nu \rangle ds,$$

onde $\gamma(s)$ é a fronteira de \mathfrak{D} e $\nu(s) \in T_{\gamma(s)} S$ é o vetor conormal unitário exterior a $\gamma(s)$.

Seja $\mathfrak{D} \subset S$ um domínio em uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$. Uma *variação de \mathfrak{D}* é uma aplicação $X : (-\epsilon, \epsilon) \times \overline{\mathfrak{D}} \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^∞ , para $\epsilon > 0$, tal que

1. cada aplicação $X_t : \overline{\mathfrak{D}} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $X_t(p) = X(t, p)$ é uma imersão;
2. $X_0(\overline{\mathfrak{D}}) = \overline{\mathfrak{D}}$.

Dizemos que uma variação *fixa o bordo*, $\partial\mathfrak{D}$, se, para todo $p \in \partial\mathfrak{D}$, $X_t(p) = X_0(p)$.

Denotamos por

$$\xi(p) = \left. \frac{\partial X_t(p)}{\partial t} \right|_{t=0}$$

o *vetor variação* de X_t para $p \in \overline{\mathfrak{D}}$.

Uma variação é dita *normal* se, para todo $p \in \overline{\mathfrak{D}}$, o vetor variação é da forma

$$\xi(p) = f(p)N(p),$$

onde $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função C^∞ .

Seja $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 . A área do gráfico de u é dada por

$$A(\text{Graf}(u)) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} \, dA = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} \, dA.$$

Ao longo do texto, usaremos a notação $W(u) = \sqrt{1 + |\nabla u|^2}$. Assim,

$$A(\text{Graf}(u)) = \int_{\Omega} W(u) \, dA.$$

Considere uma função $\eta : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\eta \in C^2(\Omega)$, tal que η se anula no bordo de Ω . Assim, a variação $X : (-\epsilon, \epsilon) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$X(t, (x, y)) = (x, y, u(x, y) + t\eta(x, y))$$

é uma variação de $\text{Graf}(u)$ que fixa o bordo.

A área do gráfico de $(u + t\eta)(x, y)$ é

$$A(\text{Graf}(u + t\eta)) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u + t\nabla\eta|^2} \, dA.$$

Assim,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} A(\text{Graf}(u + t\eta)) = \int_{\Omega} \frac{\langle \nabla\eta, \nabla u + t\nabla\eta \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla u + t\nabla\eta|^2}} \, dA \Big|_{t=0},$$

o que nos dá

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} A(\text{Graf}(u + t\eta)) = \int_{\Omega} \frac{\langle \nabla u, \nabla\eta \rangle}{W(u)} \, dA. \quad (1.4)$$

Por outro lado,

$$\operatorname{div} \left(\eta \frac{\nabla u}{W(u)} \right) = \left\langle \frac{\nabla u}{W(u)}, \nabla \eta \right\rangle + \eta \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{W(u)} \right). \quad (1.5)$$

Substituindo (1.5) em (1.4), temos

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} A(\operatorname{Graf}(u + t\eta)) = \int_{\Omega} \left[\operatorname{div} \left(\eta \frac{\nabla u}{W(u)} \right) - \eta \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{W(u)} \right) \right] dA. \quad (1.6)$$

Aplicando o Teorema da Divergência em (1.6) e lembrando que $\eta|_{\partial\Omega} \equiv 0$ concluímos que

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} A(\operatorname{Graf}(u + t\eta)) = - \int_{\Omega} \eta \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{W(u)} \right) dA.$$

Portanto, $\operatorname{Graf}(u)$ é um ponto crítico para o funcional área se, e somente se,

$$- \int_{\Omega} \eta \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{W(u)} \right) dA = 0, \quad \text{para todo } \eta.$$

Ou seja, se, e somente se, u satisfaz

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{W(u)} \right) = 0. \quad (1.7)$$

Agora,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{W(u)} \right) &= \left(\frac{u_x}{W(u)} \right)_x + \left(\frac{u_y}{W(u)} \right)_y \\ &= \frac{(1 + u_x^2)u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_y^2)u_{xx}}{(1 + |\nabla u|^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Portanto, $\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{W(u)} \right) = 0$ se, e somente se,

$$(1 + u_x^2)u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_y^2)u_{xx} = 0, \quad (1.8)$$

o que, pela igualdade (1.3), equivale a $H \equiv 0$ sobre o gráfico de u .

Com isto mostramos que $\operatorname{Graf}(u)$ ser um ponto crítico para o funcional área é equivalente a $H \equiv 0$ sobre o gráfico de u .

A equação (1.8) é chamada equação dos gráficos mínimos (EGM) e a equação (1.7) é a sua forma divergente.

Nosso objetivo agora é mostrar que o gráfico de uma função satisfazendo a EGM sobre um domínio convexo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, não só é um ponto crítico para o funcional área, mas é na verdade a superfície de menor área dentre todas em \mathbb{R}^3 de mesmo bordo, ou seja, gráfico mínimo sobre domínio convexo é minimizante para a área.

Proposição 1.4. *Todo gráfico mínimo é estável.*

Demonstração. Considere ω uma 2-forma sobre $\Omega \times \mathbb{R}$ que, para quaisquer campos de vetores $X, Y \in \mathbb{R}^3$, é dada por

$$\omega(X, Y) = \det(X, Y, N),$$

onde

$$N = \frac{(-u_x, -u_y, 1)}{W(u)}.$$

Observe que, para a base canônica $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$ de \mathbb{R}^3 , temos

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{1}{W(u)} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -u_x \\ 0 & 1 & -u_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{W(u)},$$

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{1}{W(u)} \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & -u_x \\ 1 & 0 & -u_y \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-u_x}{W(u)}$$

e

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{1}{W(u)} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -u_x \\ 0 & 0 & -u_y \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{u_y}{W(u)}.$$

Daí,

$$\omega = \frac{dx \wedge dy + u_y dx \wedge dz - u_x dy \wedge dz}{W(u)}$$

que é o elemento de área de $\text{Graf}(u)$.

Além disso,

$$\begin{aligned} d\omega &= \left[\left(\frac{-u_x}{W(u)} \right)_x + \left(\frac{-u_y}{W(u)} \right)_y \right] dx \wedge dy \wedge dz \\ &= - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_x}{W(u)} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u_y}{W(u)} \right) \right] dx \wedge dy \wedge dz \\ &= - \left[\text{div} \left(\frac{\nabla u}{W(u)} \right) \right] dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Uma vez que u é uma solução da EGM, concluímos que

$$d\omega = - \left[\text{div} \left(\frac{\nabla u}{W(u)} \right) \right] dx \wedge dy \wedge dz = 0.$$

Logo, a forma ω é fechada, ou seja, existe uma 1-forma α tal que $d\alpha = \omega$.

Agora, dados quaisquer vetores unitários ortogonais X, Y num ponto $(x, y, u(x, y))$, temos

$$|\omega(X, Y)| = |\det(X, Y, N)| = |\langle X \wedge Y, N \rangle| \leq |X \wedge Y| |N| \leq 1$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, $X \wedge Y$ é paralelo a N , isto é, se, e somente se,

$$X, Y \in T_{(x, y, u(x, y))} \text{Graf}(u).$$

Se $S \subset \Omega \times \mathbb{R}$ é uma outra superfície tal que $\partial S = \partial \text{Graf}(u)$, como ω é o elemento de área de $\text{Graf}(u)$ e ω é uma forma fechada, temos pelo Teorema de Stokes, [EL], p. 488, que

$$\begin{aligned} A(\text{Graf}(u)) &= \int_{\text{Graf}(u)} \omega = \int_{\partial \text{Graf}(u)} \alpha = \int_{\partial S} \alpha = \int_S \omega \\ &\leq \left| \int_S \omega \right| \leq \int_S |\omega| \leq \int_S 1 = A(S), \end{aligned}$$

ou seja,

$$A(\text{Graf}(u)) \leq A(S). \quad (1.9)$$

Isto mostra que gráficos mínimos são mínimos relativos para o funcional área, isto é, gráficos são estáveis. ■

Vamos agora estabelecer uma limitação local uniforme para a área de gráficos mínimos, essa limitação é uma condição necessária para os resultados de convergência de superfícies mínimas que serão estabelecidos no Capítulo 4.

Afirmção 1.5. *Existe uma limitação local uniforme para a área de gráficos mínimos.*

De fato, se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ contém um disco de raio r , denotado por D_r , considere uma bola B_r em \mathbb{R}^3 que intercepta $\text{Graf}(u)$ e tem como projeção D_r . Então, uma vez que $\partial B_r \cap \text{Graf}(u)$ divide ∂B_r em duas componentes das quais pelo menos uma tem área no máximo igual a $\frac{A(\mathbb{S}^2)}{2} r^2$, sendo \mathbb{S}^2 é a esfera unitária em \mathbb{R}^3 , temos de (1.9) a seguinte estimativa

$$A(B_r \cap \text{Graf}(u)) \leq \frac{A(\mathbb{S}^2)}{2} r^2,$$

o que prova a afirmação.

Agora vamos supor que o domínio Ω é convexo, e vamos garantir que um gráfico mínimo sobre Ω é de fato minimizante do funcional área. Para ver isto, considere a

projeção $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \Omega \times \mathbb{R}$ que leva cada ponto $x \in \mathbb{R}^3$ no ponto mais próximo de $\Omega \times \mathbb{R}$. Observe que P restrita a $\Omega \times \mathbb{R}$ é a identidade.

Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma outra superfície regular, com $\partial S = \partial \text{Graf}(u)$ e $S' = P(S)$. Claramente $A(S') \leq A(S)$, pois $S' \subset \Omega \times \mathbb{R}$ e S pode se estender além de $\Omega \times \mathbb{R}$. Além disso, $\partial S' = \partial S = \partial \text{Graf}(u)$. Então, aplicando (1.9) a S' , temos

$$A(\text{Graf}(u)) \leq A(S') \leq A(S).$$

Concluimos assim, que gráficos mínimos sobre domínios convexos são mínimos absolutos para o funcional área.

Uma *equação diferencial parcial* é uma expressão que relaciona n variáveis x_1, x_2, \dots, x_n , uma função $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e um número finito de suas derivadas parciais. A ordem de uma EDP é a ordem da maior derivação que ocorre na equação.

Consideraremos EDP's de segunda ordem representáveis na forma

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = d,$$

onde a_{ij}, b_i, c e d são funções de classe C^∞ somente de $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, definidas em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, e a matriz (a_{ij}) é simétrica, ou seja, $a_{ij} = a_{ji}$.

Podemos representar essa equação por $Lu = d$, sendo que L é o operador definido por

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c$$

Se a matriz (a_{ij}) é positiva, isto é, se seus auto-valores são todos não-nulos e têm todos o mesmo sinal, então L será dito *elíptico* em Ω . Como o determinante de uma matriz independe da base na qual ela está escrita, no caso onde n é par, a definição de operador elíptico é equivalente ao fato do determinante da matriz (a_{ij}) ser positivo. O operador L será *uniformemente elíptico* se existir uma constante $\lambda > 0$ tal que

$$\sum_{ij}^2 a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2$$

para todo $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ pertencente ao \mathbb{R}^n e para todo x em Ω , o que significa que a matriz (a_{ij}) tem menor auto-valor maior ou igual a λ .

Estamos interessados no princípio do máximo para equações elípticas de segunda ordem, classificação que engloba a EGM deduzida anteriormente. Este resultado é muito importante para o estudo de problemas de unicidade para superfícies mínimas. Ele foi provado por E. Hopf em 1927, e pode ser enunciado da seguinte maneira.

Teorema 1.6. *Seja L um operador uniformemente elíptico em um domínio Ω . Assuma que $Lu \geq 0$ para uma função $u \in C^2(\Omega)$. As seguintes afirmações valem.*

1. *Se $c \equiv 0$ e u atinge seu máximo no interior de Ω , então u é constante;*
2. *Se $c \leq 0$ e u atinge seu máximo em Ω e esse máximo é não-negativo, então u é constante.*

Uma versão deste princípio para gráficos mínimos é dada pelo seguinte lema.

Lema 1.7 (Princípio do Máximo para Gráficos Mínimos). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ um aberto conexo e $0 \in \Omega$. Se $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ são soluções da EGM com $u \leq v$ e $u(0) = v(0)$, então $u = v$.*

Demonstração. Sendo que

$$\begin{aligned} \frac{\nabla u}{W(u)} - \frac{\nabla v}{W(v)} &= \frac{W(v)\nabla u - W(u)\nabla v + W(v)\nabla v - W(v)\nabla v}{W(u)W(v)} \\ &= \frac{W(v)(\nabla u - \nabla v) + (W(v) - W(u))\nabla v}{W(u)W(v)} \\ &= \frac{\nabla(u - v)}{W(u)} - \frac{(W(u) + W(v))(W(u) - W(v))}{(W(u) + W(v))W(u)W(v)} \nabla v \\ &= \frac{\nabla(u - v)}{W(u)} - \frac{\langle \nabla(u - v), \nabla(u + v) \rangle}{(W(u) + W(v))W(u)W(v)} \nabla v, \end{aligned}$$

e como u e v satisfazem a EGM, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{W(u)} - \frac{\nabla v}{W(v)} \right) \\ &= \operatorname{div} \left(\frac{\nabla(u - v)}{W(u)} \right) - \operatorname{div} \left(\frac{\langle \nabla(u - v), \nabla(u + v) \rangle}{(W(u) + W(v))W(u)W(v)} \nabla v \right). \end{aligned}$$

Fazendo $w = u - v$, $\alpha = \frac{\nabla(u + v)}{(W(u) + W(v))W(u)W(v)}$ e $\beta = \frac{1}{W(u)}$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{div}(\beta \nabla w) - \operatorname{div}(\langle \nabla w, \alpha \rangle \nabla v) \\ &= \langle \nabla \beta, \nabla w \rangle + \beta \operatorname{div}(\nabla w) - \langle \nabla(\langle \nabla w, \alpha \rangle), \nabla v \rangle - \langle \nabla w, \alpha \rangle \operatorname{div}(\nabla v) \\ &= \beta \operatorname{div}(\nabla w) - \langle \nabla(\langle \nabla w, \alpha \rangle), \nabla v \rangle + \langle \nabla \beta - \alpha \operatorname{div}(\nabla v), \nabla w \rangle. \end{aligned}$$

Daí, concluímos que w satisfaz uma equação do tipo

$$0 = \sum_{i,j}^2 a_{ij} w_{x_i x_j} + \sum_i^2 b_i w_{x_i}.$$

Como os coeficientes a_{ij} dependem de $W(u)$ e $W(v)$ então, para $|\nabla u|$ e $|\nabla v|$ suficientemente pequenos, podemos encontrar $\lambda > 0$ tal que

$$\lambda|x|^2 \leq \sum_{ij}^2 a_{ij}x_i x_j,$$

para todo $x \in \Omega \setminus (0, 0)$. Logo, podemos aplicar o Teorema 1.6 à função w . Assim, como $w = u - v \leq 0$ e $w(0) = u(0) - v(0) = 0$ concluímos que w assume um máximo interior e portanto $w \equiv 0$ em Ω , ou seja, $u \equiv v$ em Ω . ■

Como superfícies são localmente escritas como gráficos de funções, este lema tem como consequência imediata o Princípio do Máximo para Superfícies Mínimas, que enunciaremos agora.

Corolário 1.8 (Princípio do Máximo para Superfícies Mínimas). *Se S_1 e $S_2 \subset \mathbb{R}^3$ são superfícies mínimas completas conexas (sem bordo), $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ e S_2 está acima de S_1 , então $S_1 = S_2$.*

O próximo teorema diz como deve ser a vizinhança de um ponto de tangência entre duas superfícies mínimas. Para demonstração ver [CM], p. 103.

Dizemos que duas superfícies S_1 e S_2 , com um ponto p em comum, têm um *contato de ordem n* em p se existem parametrizações $X_1(u, v)$ e $X_2(u, v)$ em p de S_1 e S_2 , respectivamente, tais que todas as suas derivadas parciais de ordem menor ou igual a $n - 1$ coincidem em p .

Teorema 1.9 (Descrição Local para a Interseção de Superfícies Mínimas). *Suponha que as superfícies $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ são mínimas, conexas, sem autointerseções, que não coincidem em um conjunto aberto. Então, a interseção de S_1 e S_2 é transversal exceto em um conjunto de pontos isolados E . Dado $x \in E$ existem um inteiro $n \geq 2$ e uma vizinhança de x em U onde a interseção consiste de $2n$ arcos mergulhados que se encontram transversalmente em x .*

O inteiro n do teorema acima é a ordem de contato entre as duas superfícies.

Apresentaremos a seguir um corolário que será essencial na demonstração dos resultados de convergência do Capítulo 4. Usaremos a seguinte notação.

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e $u \in C^\infty(\Omega)$. Dado um multi-índice $\alpha = (a, b)$, com $a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, definimos a α -ézima derivada parcial de u por

$$D_\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^a x \partial^b y}, \quad \text{com } |\alpha| = a + b \text{ e } (x, y) \in \Omega.$$

Este colorário nos dá uma limitação uniforme para as derivadas parciais de funções cujo gráfico apresenta curvatura média H pelo menos C^1 . Ele é consequência de uma série de resultados e pode ser encontrado em [GT], p. 407.

Corolário 1.10. *Sejam Ω um domínio em \mathbb{R}^m e u uma função em $C^2(\Omega)$ cujo gráfico tem curvatura média $H \in C^k(\Omega)$, $k \geq 1$. Então $u \in C^{k+1}(\Omega)$ e, para cada $x \in \Omega$ e cada multi-índice α com $|\alpha| = k + 1$, temos*

$$|D_\alpha u(x)| < C,$$

com $C = C(m, k, \|H\|_{k,\Omega}, d, \sup|u|)$, $d = \text{dist}(x, \partial\Omega)$.

Observe que no caso das superfícies mínimas temos $H \equiv 0$, logo $H \in C^\infty(\Omega)$ e portanto, o resultado vale para todo multi-índice.

Por razões de completude enunciaremos a seguir o teorema de Sard, que nos diz que, dada função diferenciável $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ as singularidades de u , ou seja, os pontos onde o gradiente de u se anula, formam um conjunto de medida nula. Por isto, podemos considerar, sem perda de generalidade, que todos os pontos de $u(\Omega) \subset \mathbb{R}$ são valores regulares de u . Sua demonstração encontra-se em [Mi], p. 10.

Teorema 1.11 (Sard). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio e $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^∞ . Então o complementar do conjunto dos valores regulares de u tem medida nula em \mathbb{R} .*

As soluções da EGM são funções analíticas, por isso podemos aplicar a elas o Princípio da Extensão Analítica, o qual nos assegura que, se duas superfícies mínimas coincidem em um aberto, elas serão iguais. Para demonstração, ver [Li], p. 111.

Teorema 1.12 (Princípio da Extensão Analítica). *Sejam $f, g : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ funções analíticas, onde U é um aberto conexo. As seguintes afirmações são equivalentes.*

- (i) $f \equiv g$ em U .
- (ii) Existe $z_0 \in U$ tal que, para todo $n \geq 0$, $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$.
- (iii) Existe um aberto não vazio $V \subset U$ tal que $f|_V \equiv g|_V$.

Capítulo 2

Problema de Dirichlet para Gráficos Mínimos

Neste capítulo estudaremos princípios do máximo que determinam a unicidade de soluções para o problema de Dirichlet para a EGM nos casos em que a função que define o bordo da superfície é suave, suave por partes ou assume valores infinitos. Os teoremas deste capítulo aparecem, numa versão mais geral, em [Pi].

Seja Ω um domínio limitado de \mathbb{R}^2 , com bordo $\partial\Omega$ suave por partes. O *problema de Dirichlet* em \mathbb{R}^3 para a EGM em Ω consiste em determinar uma função $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ que, no domínio Ω , satisfaz a EGM

$$Lu = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{W(u)} \right) = 0,$$

e que em $\partial\Omega$ assume valores de uma função $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dada *a priori*. Seja \mathfrak{F} uma classe de funções suaves por partes definidas de $\partial\Omega$ em \mathbb{R} . O problema de Dirichlet é dito *bem posto para valores no bordo na classe \mathfrak{F}* se existe uma única solução para este problema, qualquer que seja f em \mathfrak{F} .

O problema de Dirichlet para a EGM em Ω é bem posto se, e somente se, Ω é convexo. No caso em que o domínio não é convexo, sempre existe uma função f para a qual o problema de Dirichlet é não solúvel, ver [Ni].

O problema de Dirichlet para a EGM está relacionado ao chamado *problema de Plateau*, que fundamenta-se em determinar uma superfície mínima cujo bordo é uma dada curva fechada sem autointerseções. Esses dois problemas são equivalentes se no problema de Plateau exigirmos que a superfície seja gráfico.

Quando $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto convexo tal que o bordo de Ω é uma curva suave por partes, temos que o bordo de $\Omega \times \mathbb{R}$ é *mean-convex suave por partes*. Isto é, $\partial\Omega \times \mathbb{R}$ é formado por um número finito de superfícies suaves, com ângulo entre elas menor ou igual a π , cada uma com curvatura média não-negativa com respeito ao vetor normal apontando para dentro. A existência de solução mergulhada para o problema de Plateau quando a curva do bordo é homotopicamente nula foi dada por W. Meeks III e S.-T.-Yau, em [MY1] e [MY2]. Eles afirmam que $\Omega \times \mathbb{R}$ é uma boa barreira para resolver o problema de Plateau.

Teorema 2.1 (Meeks-Yau). *Seja M uma 3-variedade Riemanianna completa com bordo mean-convexo suave por partes. Seja Γ uma curva fechada simples em ∂M que é homotopicamente nula em M . Então existe um disco mergulhado $S \subset M$, com $\partial S = \Gamma$, que minimiza área dentre todos os discos com o mesmo bordo.*

Em 1930, T. Radó mostrou que esta solução é gráfico quando seu bordo é gráfico sobre uma curva plana convexa.

Teorema 2.2 (Radó). *Seja S uma superfície mínima compacta em \mathbb{R}^3 cujo bordo é uma curva de Jordan que é projetada difeomorficamente sobre uma curva convexa $\mathcal{C} \subset \{z = 0\}$. Então S é gráfico sobre o domínio Ω delimitado por \mathcal{C} .*

Demonstração. Uma vez que \mathcal{C} é convexa, podemos usar planos como barreiras para concluir que S está contida no cilindro sólido $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$. Suponha por absurdo que S não é gráfico, ou seja, que existem pontos a, b em S com a mesma projeção sobre Ω e com $z(a) > z(b)$. Isto significa que existe $t_0 > 0$ tal que $z(a) = t_0 + z(b)$. Como S é limitada, podemos considerar a superfície transladada $S + t_1 e_3$ que não toca S . Em particular, $z(a) < z(b) + t_1$ deve acontecer.

Fazemos t_1 variar continuamente até que ocorra o primeiro ponto de contato entre as superfícies $S + t e_3$ e S , para algum t . Como $t \geq z(a) - z(b) > 0$, este ponto de contato não pode estar no bordo das superfícies, ou seja, o ponto de contato ocorre no interior de ambas as superfícies, o que contradiz o Lema 1.7. Assim, concluímos que S é gráfico sobre $\bar{\Omega}$. ■

Usando a versão do princípio do máximo para superfícies com bordo, mostra-se que u é suave em toda parte, isto é, que o vetor normal a S não é horizontal em ponto algum de S , inclusive no bordo.

O resultado de Radó pode ser enunciado considerando o bordo da superfície projetado paralelamente sobre um plano P qualquer. Além disso, o resultado se estende ao caso em que a projeção, em vez de ser paralela, é central, isto é, em vez de considerarmos a intersecção de P com um cilindro que contém o bordo da superfície, consideramos a intersecção de P com um cone que contém o bordo.

O próximo teorema garante que, quando a curva é suave por partes, ou possui segmentos verticais, e sua projeção sobre algum plano é convexa, então a solução do problema de Plateau é um gráfico sobre o interior de Ω

Teorema 2.3. *Seja Ω um domínio convexo limitado do plano. Considere um conjunto finito de pontos $E = \{P_1, \dots, P_k\}$ no bordo de Ω , de modo que $\partial\Omega - E$ seja formado por curvas suaves. Seja $\Gamma \subset \partial\Omega \times \mathbb{R}$, curva C^1 por partes tal que $\Gamma \cap \{P_i \times \mathbb{R}\}$, $i = 1, \dots, k$, é um segmento de reta. Então existe um gráfico mínimo em Ω com valores contínuos em $\partial\Omega - E$.*

Demonstração. Como $\partial(\Omega \times \mathbb{R})$ é mean-convexo, pelo Teorema 2.1 existe um disco mínimo mergulhado $S \subset D \times \mathbb{R}$ com bordo Γ . Vamos mostrar que tal S é um gráfico sobre Ω .

Afirmção 2.4. *Para todo ponto p no interior de S , o plano $T_p S$ não é vertical.*

Suponha, por absurdo, que existe $p \in \text{int}(S)$ tal que $\pi = T_p S$ é vertical. Então π possui uma base $\{e_3, v\}$, com $e_3 = (0, 0, 1)$ e v um vetor horizontal tal que $|v| = 1$.

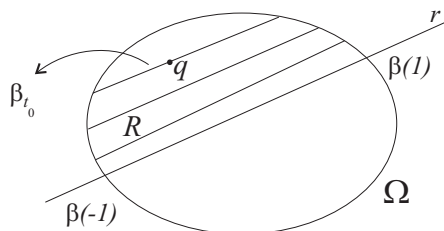
Como translações são isometrias de \mathbb{R}^3 , podemos transladar S de modo que tenhamos $p \in \{z = 0\}$. Sabemos que existe uma única reta r de $\{z = 0\}$ passando por p na direção de v . Pela convexidade de Ω , a reta r intersecta $\partial\Omega$ em exatamente dois pontos.

Por outro lado, o plano π também é uma superfície mínima em \mathbb{R}^3 e, como π e S são tangentes em p , usando o Teorema 1.9, podemos garantir que em uma vizinhança de p a intersecção I entre π e S é formada por, no mínimo, quatro arcos partindo de p .

Suponhamos inicialmente que dois destes arcos se intersectam no interior de S , formando uma curva fechada α . Como $\alpha \subset S \cap \pi$ e S é um disco, concluímos que existe um disco $D_S \subset S$ cujo bordo é α . Caso o disco D_S fosse plano teríamos $S \equiv \pi$, absurdo. Logo D_S não é plano e então, existe um ponto $q \in D_S$ tal que a distância entre D_S e π é máxima, e tal distância é estritamente positiva.

Seja R a região convexa do domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ limitada por r e $\partial\Omega$ que contém a projeção do ponto $q \in D_S$ e seja $\beta = \partial R \cap \partial\Omega$. Fixando um ponto $y \in \beta$, parametrizamos esta curva por $\beta : [-1, 1] \rightarrow \Omega$, onde $\beta(0) = y$ e $\beta(1), \beta(-1)$ são os pontos da intersecção de r com $\partial\Omega$.

Consideremos a folheação de R dada por $F = \{\beta_t\}_{0 \leq t \leq 1}$, sendo $\beta_t : [0, 1] \rightarrow R$ o único segmento de reta em R ligando os pontos $\beta(t)$ e $\beta(-t)$.



Então, fazendo t variar de 0 a 1, existe um $t_0 < 1$, tal que a superfície plana $\beta_{t_0} \times \mathbb{R}$ toca o disco $D_S \subset S$ no ponto $q \in \text{int}(S)$. Isto implica, pelo Lema 1.7, que $S = \beta_{t_0} \times \mathbb{R}$. Absurdo.

Como S é uma superfície com bordo Γ , as curvas do conjunto fechado I formado pela intersecção das superfícies S e π se estendem até Γ , ou seja, não se acumulam no interior de Ω . Temos dois casos a considerar. O primeiro é quando duas ou mais curvas se encontram num mesmo ponto do bordo ou intersectam o bordo num mesmo segmento vertical. Então, teremos novamente um disco $D_S \subset S$ com bordo contido em π . Observemos que D_S conterá pontos ou até segmentos do bordo de S . De modo análogo ao feito anteriormente, podemos encontrar faixas $\beta_t \times \mathbb{R}$, onde β_t são segmentos de retas de Ω , que tocam D_S num primeiro ponto interior, gerando uma contradição.

A outra possibilidade ocorre quando as curvas de I intersectam ∂S em pontos distintos, com projeções também distintas. Nesse caso, existem pelo menos quatro pontos distintos em $(P(\partial S \cap \pi)) \cap \partial\Omega$, onde $P : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ é a projeção vertical. Mas, como vimos antes, $\partial\Omega \cap \pi = \{\beta(1), \beta(-1)\}$. Temos então uma contradição. Provamos assim a afirmação.

No entanto, pode existir um disco cujo plano tangente nunca é vertical no interior de Ω e ainda assim este disco não ser um gráfico sobre $\text{int}(\Omega)$. Para isto acontecer, basta que o plano tangente seja vertical em um segmento de reta de $\partial\Omega \times \mathbb{R}$. Vamos mostrar que isso não pode ocorrer.

De fato, com S é um disco mergulhado, S separa o cilindro sólido $\Omega \times \mathbb{R}$ em duas componentes conexas. Como S é orientável, pela Afirmação 2.4, podemos assumir que o campo de vetores normais N aponta para cima em todos os pontos do interior de S . Suponha que existem dois pontos consecutivos q_1 e q_2 na intersecção de $\text{int}(S)$ com uma reta vertical de $\Omega \times \mathbb{R}$. Por hipótese, $N(q_1)$ e $N(q_2)$ apontam para cima em $\Omega \times \mathbb{R}$. Em particular, o vetor $-N(q_1)$ aponta para baixo. Mas, como q_1 e q_2 são pontos consecutivos de $\text{int}(S)$ e estão numa mesma reta, os vetores $-N(q_1)$ e $N(q_2)$ devem apontar para a mesma componente de $\Omega \times \mathbb{R}$. Mas isto é um absurdo e provamos assim que S é um gráfico sobre Ω . ■

Seja u uma função cujo gráfico S é mínimo sobre um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ com $\partial\Omega$ suave por partes. Se C é um arco em Ω e ν é um normal unitário a C em \mathbb{R}^2 , definimos o *fluxo de u ao longo de C* , para tal escolha de ν , como sendo

$$F_u(C) = \int_C \left\langle \frac{\nabla u}{W(u)}, \nu \right\rangle ds,$$

onde ds é o comprimento de arco de C .

Como $\frac{\nabla u}{W(u)}$ é um campo limitado e $\int_{\Omega} \text{div} \left(\frac{\nabla u}{W(u)} \right) = 0$, restringindo a função u ao domínio limitado por uma curva C no interior de Ω e considerando a extensão do vetor conormal às curvas no interior do domínio, podemos definir o fluxo ao longo de uma curva $C \subset \Omega$ e escolher ν como o vetor conormal exterior a C .

A unicidade das soluções dadas pelos teoremas anteriores segue da seguinte versão princípio do máximo.

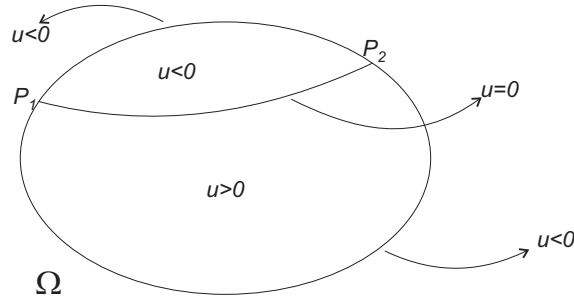
Teorema 2.5 (Princípio do Máximo Geral). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado e $E = \{P_1, \dots, P_k\} \subset \partial\Omega$ um conjunto finito. Suponha que $\partial\Omega - E$ é formado por arcos suaves C_k . Sejam $u_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2$ soluções da EGM que se estendem continuamente em cada arco C_k . Se $u_1 \leq u_2$ em $\partial\Omega - E$, então $u_1 \leq u_2$ em Ω .*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que existe $p \in \Omega$ tal que $u_1(p) > u_2(p)$. Logo $(u_1 - u_2)(p) > 0$ e, denotando por u a função $u_1 - u_2$, o conjunto $\mathfrak{U} = \{p \in \Omega; u(p) > 0\}$ é não-vazio. Podemos assumir que $u_1 < u_2$ sobre e $\partial\Omega - E$ depois de uma translação, se necessário, de $\text{Graf}(u_1)$. Pelo Teorema 1.11, podemos supor, após fazer uma pequena translação, se necessário, que as curvas contidas em $\partial\mathfrak{U} = \{p \in \Omega; u(p) = 0\}$ não têm singularidades, isto é, que o vetor $\nabla u(p)$ é não nulo, para todo $p \in \partial\mathfrak{U}$.

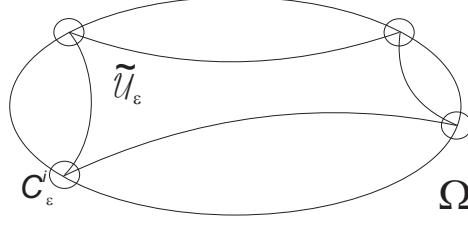
Considere uma curva $\gamma \subset \partial\mathcal{U}$. Então γ não se acumula em Ω . De fato, se γ se acumulasse em Ω , existiria um ponto $p = \gamma(t_0) \in \Omega$ e uma sequência $\{p_n\}_n \subset \gamma$ tais que $\{p_n\}_n$ converge para p em Ω mas não converge em γ . Assim, existe uma curva $\beta \subset \Omega$ tal que $\beta(t_0) = p$ e β liga p aos pontos p_n , para todo n , e, como $\beta'(t_0)$ e $\gamma'(t_0)$ não podem ser paralelos, $\{\beta'(t_0), \gamma'(t_0)\}$ formam uma base de \mathbb{R}^2 . Como $u|_\gamma \equiv 0$, em particular, $u(p_n) = 0$ para todo n , temos $(du)_p(\beta'(t_0)) = (du)_p(\gamma'(t_0)) = 0$ e, conseqüentemente, $(du)_p \equiv 0$. Assim, a igualdade $\langle \nabla u(p), v \rangle = (du)_p(v)$, para todo $v \in \mathbb{R}^2$, implica que $\nabla u(p) = 0$, o que não pode ocorrer.

Pelo Lema 1.7, γ não pode se fechar em Ω . Assim, γ se estende até o bordo de Ω . Como u é uma função contínua e supomos $u_1 < u_2$ em $\partial\Omega - E$, então γ deve ir para E .

Afirmamos que de cada $P_i \in \partial\mathcal{U} \cap E$ deve partir um número par de curvas. De fato considerando, sem perda de generalidade, que $\partial\mathcal{U} \cap E = \{P_1, P_2\}$ e supondo, por absurdo, que existe um número ímpar de curvas partindo de P_i , temos que tais curvas ligam P_1 a P_2 e dividem Ω em um número par de regiões nas quais u é alternadamente positiva e negativa, o que nos leva a concluir que teríamos uma região delimitada por uma dessas curvas e por um pedaço do bordo de Ω onde u seria positiva. Absurdo, pois u é contínua e em $\partial\Omega - E$ temos $u < 0$ e a afirmação é verdadeira.



Conseqüentemente, existe um domínio conexo $\tilde{\mathcal{U}} \subset \Omega$, com $\partial\tilde{\mathcal{U}} \subset (\partial\mathcal{U} \cup E)$. Sejam $\epsilon > 0$, pequeno, e $\tilde{\mathcal{U}}_\epsilon \subset \tilde{\mathcal{U}}$ o domínio formado pela união do conjunto de todos os pontos em $\partial\tilde{\mathcal{U}}$ cuja distância a $P_i \in (\tilde{\mathcal{U}} \cap E)$ é maior que ϵ , junto com arcos de circunferência C_ϵ^i com centro em cada $P_i \in (\tilde{\mathcal{U}} \cap E)$ e raio ϵ .



Como u_i , $i = 1, 2$, satisfaz $\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u_i}{W_i}\right) = 0$ em Ω , com $W_i = W(u_i)$, temos

$$\int_{\tilde{\mathcal{U}}_\epsilon} \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u_1}{W_1} - \frac{\nabla u_2}{W_2}\right) = 0.$$

Pelo Teorema da Divergência, isto implica que

$$\int_{\partial\tilde{\mathcal{U}}_\epsilon} \left\langle \frac{\nabla u_1}{W_1} - \frac{\nabla u_2}{W_2}, \nu \right\rangle = 0, \quad (2.1)$$

onde ν é o vetor normal exterior a $\partial\tilde{\mathcal{U}}_\epsilon$.

Afirmção 2.6.

$$\left\langle \frac{\nabla u_1}{W_1} - \frac{\nabla u_2}{W_2}, \nabla u_1 - \nabla u_2 \right\rangle = \frac{1}{2}(W_1 + W_2)\|N_1 - N_2\|^2,$$

com $N_i = \left(\frac{\nabla u_i}{W_i}, \frac{1}{W_i}\right)$, $i = 1, 2$, sendo o vetor normal ao gráfico de u_i .

De fato,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(W_1 + W_2)\|N_1 - N_2\|^2 &= \frac{1}{2}(W_1 + W_2) \langle N_1 - N_2, N_1 - N_2 \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle W_1 N_1 - W_2 N_2 + W_2 N_1 - W_1 N_2, N_1 - N_2 \rangle \\ &= \langle W_1 N_1 - W_2 N_2, N_1 - N_2 \rangle \\ &\quad - \frac{1}{2} \langle W_1 N_1 - W_2 N_2 + W_1 N_2 - W_2 N_1, N_1 - N_2 \rangle \\ &= \langle W_1 N_1 - W_2 N_2, N_1 - N_2 \rangle - \frac{1}{2}(W_1 - W_2) \langle N_1 + N_2, N_1 - N_2 \rangle. \end{aligned}$$

Como $\langle N_1 + N_2, N_1 - N_2 \rangle = \|N_1\|^2 - \|N_2\|^2 = 0$, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(W_1 + W_2)\|N_1 - N_2\|^2 &= \langle W_1 N_1 - W_2 N_2, N_1 - N_2 \rangle \\ &= \left\langle (-\nabla u_1, 1) - (-\nabla u_2, 1), \left(-\frac{\nabla u_1}{W_1}, \frac{1}{W_1}\right) - \left(-\frac{\nabla u_2}{W_2}, \frac{1}{W_2}\right) \right\rangle \\ &= \left\langle (\nabla u_2 - \nabla u_1, 0), \left(\frac{\nabla u_2}{W_2} - \frac{\nabla u_1}{W_1}, \frac{1}{W_1} - \frac{1}{W_2}\right) \right\rangle \\ &= \left\langle \nabla u_1 - \nabla u_2, \frac{\nabla u_1}{W_1} - \frac{\nabla u_2}{W_2} \right\rangle, \end{aligned}$$

o que prova a afirmação.

Como $W_i \geq 1$ vale $\frac{1}{2}(W_1 + W_2) \geq 1$ e, denotando $\partial\tilde{\mathfrak{U}}_\epsilon - (\cup_i C_\epsilon^i)$ por α_ϵ , temos que $|\nabla u| \neq 0$ em α_ϵ . A Afirmação 2.6 implica que

$$\left\langle \frac{\nabla u_1}{W_1} - \frac{\nabla u_2}{W_2}, \nabla u \right\rangle > 0 \quad \text{em } \alpha_\epsilon. \quad (2.2)$$

Por outro lado, como $\nabla u \neq 0$, $u \equiv 0$ em α_ϵ e $u > 0$ em $\tilde{\mathfrak{U}}_\epsilon$, o vetor ∇u aponta para o interior de $\tilde{\mathfrak{U}}_\epsilon$ e, conseqüentemente, ∇u é um múltiplo negativo de ν em α_ϵ . Além disso, por (2.2) temos que

$$\left\langle \frac{\nabla u_1}{W_1} - \frac{\nabla u_2}{W_2}, \nu \right\rangle < 0 \quad \text{em } \alpha_\epsilon,$$

e

$$\int_{\alpha_\epsilon} \left\langle \frac{\nabla u_1}{W_1} - \frac{\nabla u_2}{W_2}, \nu \right\rangle \leq \delta < 0. \quad (2.3)$$

Sobre $\cup_i C_\epsilon^i$ temos

$$\left| \int_{\cup_i C_\epsilon^i} \left\langle \frac{\nabla u_1}{W_1} - \frac{\nabla u_2}{W_2}, \nu \right\rangle \right| \leq \int_{\cup_i C_\epsilon^i} \left| \left\langle \frac{\nabla u_1}{W_1} - \frac{\nabla u_2}{W_2}, \nu \right\rangle \right| \leq \int_{\cup_i C_\epsilon^i} 2 = 2l(\epsilon),$$

onde $l(\epsilon)$ é o comprimento de $\cup_i C_\epsilon^i$. Mas, $l(\epsilon)$ vai para zero quando ϵ vai para zero. Assim, quando ϵ é suficientemente pequeno, temos

$$\left| \int_{\cup_i C_\epsilon^i} \left\langle \frac{\nabla u_1}{W_1} - \frac{\nabla u_2}{W_2}, \nu \right\rangle \right| > 0$$

e, junto com (2.3), conseguimos

$$\left| \int_{\partial\tilde{\mathfrak{U}}_\epsilon} \left\langle \frac{\nabla u_1}{W_1} - \frac{\nabla u_2}{W_2}, \nu \right\rangle \right| > 0,$$

o que contradiz (2.1). Concluimos então que $u_1 \leq u_2$ em Ω . ■

Em 1966, H. Jenkins e J. Serrin [JS], estabeleceram condições para que exista solução do problema de Dirichlet para a EGM quando consideramos dados infinitos no bordo do domínio de definição. Um exemplo de tal superfície é a superfície de Scherk, que assume valores $+\infty$ ou $-\infty$ alternadamente no bordo de um quadrado.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio relativamente compacto, isto é Ω tem fecho compacto em \mathbb{R}^2 , o que denotamos por $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^2$. Suponhamos que $\partial\Omega$ contém dois conjuntos de segmentos de reta A_1, \dots, A_k e B_1, \dots, B_l de maneira que, nem dois segmentos de reta A_i , nem dois segmentos B_j têm pontos finais em comum. A parte restante de $\partial\Omega$ é a união de arcos abertos convexos C_1, \dots, C_h e todos os pontos finais. Consideremos

$u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ uma solução da EGM tal que $u|_{\partial D}$ é limitado e denotemos o gráfico de u por S .

O lema a seguir nos fala a respeito do fluxo de u ao longo dos segmentos de reta de $\partial\Omega$ e será usado na demonstração da unicidade de soluções para o problema de Plateau quando os dados do bordo são infinitos.

Lema 2.7. *Sejam $A \subset \partial\Omega$ um segmento de reta e $\{u_n\}_n$ uma sequência de soluções da EGM em Ω , contínuas em $\Omega \cup A$. Para cada n , denote por ν_n o vetor conormal unitário exterior ao bordo do gráfico de u_n . Se $\{u_n\}_n$ diverge para o infinito em subconjuntos compactos de A e permanece uniformemente limitado em subconjuntos compactos de Ω , então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A (\nu_3)_n ds = \|A\|.$$

O próximo teorema, garante que, se existe uma solução para o problema de Dirichlet para a EGM quando os valores do bordo são infinitos, então ela será única.

Teorema 2.8 (Princípio do Máximo para Dados Infinitos no Bordo). *Sejam $u_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2$, soluções da EGM, assumindo os valores $+\infty$ em cada A_i , $-\infty$ em cada B_j , e os mesmos valores contínuos em cada arco convexo C_s . Então $u_1 = u_2$ em Ω , a menos de uma constante se $\{C_s\} = \emptyset$.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $u = u_1 - u_2 \neq 0$. Temos duas possibilidades para os conjuntos $u^- = \{p \in \Omega; u(p) < 0\}$ e $u^+ = \{p \in \Omega; u(p) > 0\}$: ou são ambos não vazios, ou pelo menos um deles é vazio.

Suponha, inicialmente, que u^- e u^+ são não vazios. Seja $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $\Omega_\epsilon = \{p \in \Omega; u(p) > \epsilon\} \neq \emptyset$ e $\partial\Omega_\epsilon$ é regular, isto é, $\nabla u(p) \neq 0$ para todo $p \in \partial\Omega_\epsilon$. A existência deste ϵ é garantida pelo Teorema 1.11.

Como u_1 e u_2 são soluções da EGM, temos que

$$\int_{\partial\Omega_\epsilon} \left\langle \frac{\nabla u_1}{W_1}(p) - \frac{\nabla u_2}{W_2}(p), \nu(p) \right\rangle ds = 0, \quad (2.4)$$

onde ν é o normal exterior a $\partial\Omega_\epsilon$.

Por outro lado, como $u \equiv 0$ em $\{C_s\}$, podemos decompor $\partial\Omega_\epsilon$ em três possíveis partes. A primeira parte de $\partial\Omega_\epsilon$, que chamaremos de Ω_1 , está contida em Ω e, como $\nabla u(p) \neq 0$ em $\partial\Omega_\epsilon$ e $u(p) > \epsilon > 0$ em Ω_ϵ , o vetor $\nabla u(p)$ aponta para o interior de Ω_ϵ . Logo, $\nabla u(p) = k\nu$,

para algum $k < 0$. Então, pela Afirmação 2.6, $\left\langle \frac{\nabla u_1}{W_1}(p) - \frac{\nabla u_2}{W_2}(p), \nu(p) \right\rangle \neq 0$ e não muda de sinal em Ω_1 , Portanto,

$$\int_{\Omega_1} \left\langle \frac{\nabla u_1}{W_1}(p) - \frac{\nabla u_2}{W_2}(p), \nu(p) \right\rangle ds \neq 0. \quad (2.5)$$

A segunda parte de $\partial\Omega_\epsilon$ está contida em $\bigcup_{i,j}\{A_i, B_j\}$. Sejam ν o vetor conormal unitário horizontal exterior em $\partial(\Omega_\epsilon \times \{t\})$, onde $\Omega_\epsilon \times \{t\}$ é o transladado de Ω_ϵ até a altura $t \in \mathbb{R}$, e $N_n(p) = \left(-\frac{\nabla u_n}{W_n}(p), \frac{1}{W_n}(p)\right)$, $n = 1, 2$, o vetor normal unitário ao gráfico de u_n . Então, como ν é horizontal, temos que

$$\langle N_n(p), \nu(p) \rangle = \left\langle -\frac{\nabla u_n}{W_n}(p), \nu(p) \right\rangle$$

sobre $\partial(\Omega_\epsilon \times \{t\})$, para cada t . Denotemos por S_n , $n = 1, 2$, o gráfico de u_n . Seja ν_n o vetor conormal exterior a $\partial(S_n)$, $n = 1, 2$, em cada segmento de reta horizontal $A_i \times \{t\}$. Como os vetores $N_n(p)$, $\nu(p)$, $\nu_n(p)$ e e_3 são todos unitários e $\nu(p)$ é ortogonal a e_3 , o fato de $N_n(p)$ ser ortogonal a $\nu_n(p)$, implica que o ângulo θ formado entre e_3 e $\nu_n(p)$ é igual ao ângulo entre $\nu(p)$ e $N_n(p)$. Por isso, para $n = 1, 2$, temos

$$\langle N_n(p), \nu(p) \rangle = \sin(\theta) = \langle \nu_n(p), e_3 \rangle.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\bigcup_{i,j}\{A_i, B_j\}} \left\langle \frac{\nabla u_n}{W_n}(p), \nu(p) \right\rangle ds &= \int_{\bigcup_{i,j}\{A_i, B_j\}} -\langle N_n(p), \nu(p) \rangle ds \\ &= \int_{\bigcup_{i,j}\{A_i, B_j\}} -\langle \nu_n(p), e_3 \rangle ds \\ &= \int_{\bigcup_{i,j}\{A_i, B_j\}} -(\nu_3)_n ds. \end{aligned}$$

Se t é suficientemente grande, o Lema 2.7 implica então que

$$\int_{\bigcup_{i,j}\{A_i, B_j\}} \left\langle \frac{\nabla u_n}{W_n}(p), \nu_n(p) \right\rangle ds = -\sum_i \|A_i\| - \sum_j \|B_j\|, \quad n = 1, 2,$$

e então

$$\int_{\bigcup_{i,j}\{A_i, B_j\}} \left\langle \frac{\nabla u_1}{W_1}(p) - \frac{\nabla u_2}{W_2}(p), \nu(p) \right\rangle = 0. \quad (2.6)$$

A parte restante de $\partial\Omega_\epsilon$ é composta de alguns vértices de $\partial\Omega$ e esta não contribui para a integral.

Assim, por (2.5) e (2.6), temos que

$$\int_{\partial\Omega_\epsilon} \left\langle \frac{\nabla u_1}{W_1}(p) - \frac{\nabla u_2}{W_2}(p), \nu \right\rangle \neq 0,$$

o que contradiz (2.4).

Se ou u^- ou u^+ é vazio, transladamos o gráfico de u_1 até que o conjunto $\tilde{\mathcal{U}} = \{p \in \Omega; u(p) = 0\}$ seja não vazio e $\partial\tilde{\mathcal{U}}$ seja regular. Agora $\partial\tilde{\mathcal{U}} \cap \{C_s\} = \emptyset$ e, utilizando o mesmo argumento do caso anterior, chegamos novamente a uma contradição.

Logo, u é constante e, como $u \equiv 0$ em $\{C_s\}$, temos que $u \equiv 0$, ou seja, $u_1 = u_2$. ■

Com o mesmo tipo de argumento, pode-se mostrar este teorema para o caso em que apenas uma das funções assume valores infinitos.

Capítulo 3

Estimativa de Curvatura

Neste capítulo apresentaremos uma estimativa para a curvatura de Gauss de um gráfico mínimo definido sobre um disco $x^2 + y^2 < R^2$ estabelecida por R. Finn e R. Osserman, [FO], em 1964 e, como consequência deste resultado, apresentamos uma demonstração do Teorema de Bernstein. O resultado principal é o seguinte.

Teorema 3.1. *Se uma superfície mínima S é representada na forma $z = f(x, y)$ sobre o disco $x^2 + y^2 < R^2$, então a curvatura de Gauss K de S na origem satisfaz*

$$|K| < \frac{g(W)}{R^2}, \quad (3.1)$$

onde $W = W(f) = \sqrt{1 + |\nabla f|^2}$ e $g(W)$ é dado por

$$g(W) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{W^2}\right)^2 \left[\frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{W^2 - 1}{2}} \right) \right]^2. \quad (3.2)$$

Além disso, no caso em que S tem plano tangente horizontal na origem, isto é, quando $W = 1$, então o valor $\frac{\pi^2}{2}$ de $g(W)$ é o melhor possível.

A função $g(W)$ acima é obtida ao encontrarmos uma limitação para a curvatura de Gauss da superfície de Scherk. Esta superfície terá papel fundamental na prova do resultado, pois a nossa estratégia será comparar a curvatura de Gauss de um gráfico mínimo qualquer com a curvatura de Gauss de um determinado ponto da superfície de Scherk, dessa forma, ela servirá como barreira para aplicarmos o princípio do máximo.

A norma do endomorfismo de Weingarten A_p é dada por

$$|A_p|^2 = \text{tr}(A_p(A_p)^t) = k_1(p)^2 + k_2(p)^2.$$

No caso das superfícies mínimas, temos a igualdade

$$|A_p|^2 = \text{tr}(A_p(A_p)^t) = k_1(p)^2 + k_2(p)^2 = 2k_1(p)^2 = -2K(p).$$

Portanto, no caso de superfícies mínimas, uma limitação para a curvatura de Gauss é equivalente a uma limitação para a norma do endomorfismo de Weingarten. E, como veremos no próximo capítulo, quanto menor a norma do endomorfismo de Weingarten, maior o raio sobre o qual uma superfície é gráfico sobre o seu plano tangente. Este resultado é estabelecido no Lema 4.1.

Primeiro, faremos a prova do teorema no caso particular onde a superfície tem plano tangente horizontal na origem. Depois, para qualquer posição do plano tangente. E, por fim, mostraremos que a constante do primeiro caso é a melhor possível.

Começaremos estabelecendo alguns resultados sobre a superfície de Scherk que serão úteis a seguir. A superfície de Scherk é o gráfico da função

$$\Psi(x, y) = \log(\cos(y)) - \log(\cos(x)) \quad (3.3)$$

sobre o quadrado

$$Q = \left\{ |x| < \frac{\pi}{2}, |y| < \frac{\pi}{2} \right\}. \quad (3.4)$$

A superfície de Scherk assume os valores $+\infty$ e $-\infty$ em lados opostos do quadrado Q e possui uma reta vertical sobre os vértices de Q . Como

$$\Psi_x(x, y) = \tan(x), \quad \Psi_y = -\tan(y)$$

e

$$\Psi_{xx}(x, y) = \sec^2(x), \quad \Psi_{xy}(x, y) = 0, \quad \Psi_{yy}(x, y) = -\sec^2(y), \quad (3.5)$$

o gradiente de Ψ é dado por

$$\nabla\Psi(x, y) = (\tan(x), \tan(y)), \quad \nabla\Psi(0, 0) = 1 \quad (3.6)$$

e, em cada parte compacta de Q , o gradiente de Ψ tem norma limitada. Também,

$$W^2\Psi(x, y) = 1 + |\nabla\Psi|^2 = 1 + \tan^2(x) + \tan^2(y) = \sec^2(x) + \sec^2(y) - 1, \quad (3.7)$$

e a curvatura de Gauss do gráfico de Ψ é dada por

$$K(x, y) = -\frac{\sec^2(x)\sec^2(y)}{W^4}. \quad (3.8)$$

Neste texto, a superfície de Scherk sempre será representada como gráfico da função $\Psi(x, y)$.

A Proposição seguinte nos dá uma estimativa para a curvatura de Gauss de gráficos mínimos que têm plano tangente horizontal na origem.

Proposição 3.2. *Seja $f(x, y)$ uma solução da EGM, definida sobre o disco $x^2 + y^2 < R^2$, cujo gradiente se anula na origem. Então a curvatura de Gauss K na origem satisfaz*

$$|K| < \frac{\pi^2}{2R^2}. \quad (3.9)$$

Observação 3.3. *Lembrando que toda superfície pode ser localmente escrita como um gráfico, este resultado quer dizer que: dados S uma superfície mínima, p um ponto de S e R o raio do maior disco de $T_p S$ sobre o qual S é gráfico, então a curvatura de Gauss K de S em p satisfaz (3.9).*

Demonstração. Considere a função $u_1(x, y) = \frac{1}{\lambda} f(\lambda x, \lambda y)$, $\lambda > 0$. A função u_1 está definida sobre o disco de raio $R_1 = \frac{R}{\lambda}$ e também é uma solução da EGM pois ao aplicarmos uma homotetia a uma superfície mínima encontraremos uma outra superfície mínima. Além disso, temos $K_1 = \lambda^2 K$.

Se $K = 0$, então a desigualdade (3.9) é trivial. Caso contrário, tome λ tal que tenhamos $|K_1| = 1$ na origem. Suponha, por absurdo, que $|K| \geq \frac{\pi^2}{2R^2}$.

Como $\lambda^2 |K| = |K_1| = 1$, temos $\frac{1}{\lambda^2} \geq \frac{\pi^2}{2R^2}$ o que é equivalente a $\frac{R^2}{\lambda^2} \geq \frac{\pi^2}{2}$, ou seja, $R_1^2 \geq \frac{\pi^2}{2}$. Logo, o disco de raio R_1 contém o quadrado Q sobre o qual a superfície de Scherk está definida. Considere a função

$$u(x, y) = u_1(x, y) - \Psi(x, y)$$

definida sobre o quadrado Q . Como translações são isometrias de \mathbb{R}^3 , podemos supor, sem perda da generalidade, que $f(0, 0) = 0$, assim $u(0, 0) = 0$. Como, por hipótese, o gradiente de f se anula na origem e, usando (3.6), garantimos que o gradiente de Ψ também se anula na origem, temos que as superfícies são tangentes. Assim, o gradiente de u também se anula na origem. Além disso, ambos os gráficos satisfazem $K(0, 0, 0) = -1$.

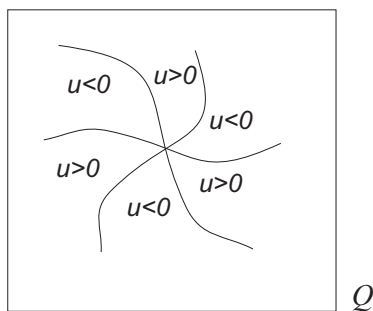
Como as duas superfícies têm as mesmas curvaturas média e de Gauss na origem, concluímos que as curvaturas principais também coincidem na origem. Rotacionando, se necessário, uma das superfícies, fazemos com que as direções principais também coincidam.

Desta forma, ambas terão a mesma segunda forma fundamental, ou seja, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ temos

$$\begin{aligned} II_{(0,0)}^1(x, y) &= x^2 u_{1xx}(0, 0) + 2xy u_{1xy}(0, 0) + y^2 u_{1yy}(0, 0) \\ &= x^2 \Psi_{xx}(0, 0) + 2xy \Psi_{xy}(0, 0) + y^2 \Psi_{yy}(0, 0) = II_{(0,0)}^2(x, y). \end{aligned}$$

Tomando, em particular, os vetores $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, 1)$ e $v_3 = (1, 1)$, concluímos que todas as segundas derivadas de u_1 e Ψ coincidem na origem.

Assim, u junto com seu gradiente e suas segundas derivadas se anulam na origem. Logo, o Teorema 1.9 nos diz que existe $n \geq 3$ tal que, numa vizinhança da origem, a intersecção das superfícies, ou seja, o conjunto onde a função u se anula, consiste de $2n$ arcos partindo da origem. Estes arcos dividem Q em $2n$ setores nos quais u é alternadamente positiva e negativa.



Vamos examinar dois de tais arcos. Suponhamos que estes arcos se intersectam no interior do quadrado Q . Neste caso, teríamos dois gráficos mínimos com o mesmo bordo. Mas, isso não acontece devido ao Lema 1.7. De fato, o princípio do máximo para gráficos mínimos implica que $u \equiv 0$ na região delimitada por estes arcos, e então o Teorema 1.12 garante que $u \equiv 0$ em Q . Isso é um absurdo, uma vez que teríamos uma superfície igual à de Scherk em Q que se estende além de Q . Esses arcos podem encontrar outro ponto de tangência q entre as superfícies, se ao encontrarem estes pontos eles formam um disco, novamente, pelo princípio do máximo, temos um absurdo. Se não formarem um disco fechado, de q partem, pelo menos, mais três arcos e dessa forma, os arcos se estendem até o bordo de Q , mais precisamente para os vértices de Q , pois nos demais pontos do bordo de Q temos $\Psi = \pm\infty$, enquanto u é finita.

Temos então mais de seis arcos indo para quatro vértices. Logo, dois ou mais arcos devem ir para o mesmo vértice. Mas, aplicando o Teorema 2.5 para o domínio limitado

pela curva formada pela união de dois destes arcos, chegamos novamente a $u \equiv 0$ em Q , um absurdo. Portanto, nossa hipótese de absurdo é falsa e $|K| < \frac{\pi}{2R^2}$. ■

O lema a seguir estabelece uma relação entre as segundas derivadas de uma solução da EGM com a curvatura de Gauss do seu gráfico e suas primeiras derivadas. Será utilizado na demonstração do próximo resultado, para encontrarmos a ordem de contato entre um gráfico mínimo qualquer e a superfície de Scherk.

Lema 3.4. *Se $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução da EGM no domínio Ω , tal que em algum ponto $p \in \Omega$ temos $f_{xy} = 0$, $f_{xx} \geq 0$, $f_{yy} \leq 0$, então os valores de f_{xx} e f_{yy} em p são unicamente determinados por f_x , f_y e pela curvatura de Gauss K .*

Demonstração. Usando a hipótese $f_{xy}(p) = 0$, podemos relacionar as derivadas de $f(x, y)$ e a sua curvatura de Gauss no ponto p pelas equações

$$\begin{cases} f_{xx}f_{yy} = KW^4 \\ (1 + f_x^2)f_{yy} + (1 + f_y^2)f_{xx} = 0. \end{cases}$$

Resolvendo este sistema nas variáveis f_{xx} e f_{yy} e utilizando a condição $f_{xx} \geq 0$ e $f_{yy} \leq 0$, encontramos

$$f_{xx}(x, y) = W^2 \sqrt{-\frac{K(1 + f_x^2)}{1 + f_y^2}}$$

e

$$f_{yy}(x, y) = -W^2 \sqrt{-\frac{K(1 + f_y^2)}{1 + f_x^2}},$$

ou seja, f_{xx} e f_{yy} são unicamente determinados por f_x , f_y e K . ■

O próximo resultado nos dá uma estimativa para a curvatura de Gauss K em um ponto qualquer da superfície de Scherk e nos ajudará a estimar a curvatura de Gauss de um gráfico mínimo qualquer.

Lema 3.5. *Num ponto arbitrário da superfície de Scherk a curvatura de Gauss K satisfaz a desigualdade*

$$|K| \leq \frac{g(W)}{r^2}, \quad (3.10)$$

em que $g(W)$ é dada por (3.2) e $r = r(x, y)$ é a maior distância entre a projeção de p em Q e cada um dos vértices de Q . A igualdade acontece nos pontos da diagonal do quadrado.

Demonstração. Observe primeiro que, como a função $\sec^2(x)$ é par, temos de (3.7) e (3.8) que os valores de W e K são simétricos com respeito aos eixos Ox e Oy , logo podemos restringir nossa atenção aos pontos do primeiro quadrante.

Para limitar o valor de $|K|$, vamos inicialmente encontrar o máximo da função $\sec^2(x)\sec^2(y)$ sobre a curva $\sec^2(x) + \sec^2(y) = 1 + W^2$, para um valor fixo de W . Aplicando o método do multiplicador de Lagrange, temos que o ponto crítico de $\sec^2(x)\sec^2(y)$ sobre a curva $\sec^2(x) + \sec^2(y) = 1 + W^2$ acontece no ponto (x_0, y_0) onde existe λ tal que

$$\nabla(\sec^2(x)\sec^2(y)) = \lambda\nabla(\sec^2(x) + \sec^2(y))$$

ou, de modo equivalente,

$$2\sec^2(x_0)\sec^2(y_0)(\tan(x_0), \tan(y_0)) = 2\lambda(\sec^2(x_0)\tan(x_0), \sec^2(y_0)\tan(y_0)).$$

Isso que nos dá $\lambda = \sec^2(x_0) = \sec^2(y_0)$. Além disso, $\sec^2(x_0) + \sec^2(y_0) = 1 + W^2$. Logo $2\lambda = 1 + W^2$, o que implica que $\sec^2(x_0) = \frac{1 + W^2}{2}$. Este é de fato um ponto de máximo, pois, para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, temos

$$\sec^2(x)\sec^2(y) \leq \frac{(\sec^2(x) + \sec^2(y))^2}{4} = \left[\frac{1 + W^2}{2}\right]^2.$$

Assim, para um valor fixo de W , temos de (3.8) que

$$|K| \leq \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{W^2}\right)^2, \quad (3.11)$$

com a igualdade ocorrendo na diagonal.

Para pontos (x, y) no primeiro quadrante, temos

$$r^2(x, y) = \left(x + \frac{\pi}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\pi}{2}\right)^2.$$

Novamente aplicando o método do multiplicador de Lagrange, é possível ver que esta função também assume seu máximo sobre a curva $\sec^2(x) + \sec^2(y) = 1 + W^2$, para W fixo, no ponto em que $x = y$. Mas, nestes pontos, temos $\tan^2(x) = \tan^2(y) = \frac{1}{2}(\tan^2(x) + \tan^2(y)) = \frac{1}{2}(W^2 - 1)$, e assim

$$r^2(x, y) = 2 \left(x + \frac{\pi}{2}\right)^2 = 2 \left[\frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{W^2 - 1}{2}}\right)\right]^2. \quad (3.12)$$

Multiplicando (3.12) por (3.11), temos ao longo de cada curva onde W é constante,

$$|K|r^2 \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{W^2}\right)^2 \left(\frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \sqrt{\frac{W^2 - 1}{2}}\right)^2.$$

Como isto acontece para um valor arbitrário de W a desigualdade (3.10) é válida sobre toda a superfície. ■

A proposição seguinte apresenta uma estimativa para a curvatura de Gauss de um gráfico mínimo independentemente da posição do seu plano tangente. A Proposição 3.2 é um caso particular dessa.

Proposição 3.6. *Se $f(x, y)$ satisfaz a EGM sobre um disco $x^2 + y^2 < R^2$, então a curvatura de Gauss K na origem satisfaz (3.1).*

Demonstração. Se $|K| = 0$ nada temos a fazer. Considere então $|K| \neq 0$.

Por uma rotação de coordenadas que faça com que as direções das curvaturas principais coincidam com os eixos coordenados, conseguimos na origem $f_{xy} = 0$, $f_{xx} \geq 0$ e $f_{yy} \leq 0$.

Assumindo que isto é feito, sejam $a = f_x(0, 0)$ e $b = f_y(0, 0)$. Considere p o único ponto da superfície de Scherk no qual $\Psi_x = \tan(x) = a$, $\Psi_y = -\tan(y) = b$. Este ponto existe, pois a função tangente definida no intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ é uma bijeção sobre \mathbb{R} . Por uma translação, fazemos o ponto sobre a origem de nossa superfície coincidir com p , e então, aplicando uma homotetia a f , obtemos uma função $u_1(x, y)$ cujo gráfico é mínimo e cuja curvatura K_1 em p coincide com a curvatura de Gauss da superfície de Scherk em p .

Como o gradiente de f é invariante por homotetias, a função $u_1(x, y)$ coincide em p , junto com o seu gradiente e a curvatura de Gauss, com a função $\Psi(x, y)$. Desta forma, por (3.5) e pelo Lema 3.4, todas as segundas derivadas de u_1 e Ψ coincidem no ponto p . Assim, como na prova da Proposição 3.2, concluímos que numa vizinhança do ponto p a intersecção dos gráficos de u_1 e Ψ consiste de $2n$ arcos, partindo de p , com $n \geq 3$.

Supondo, por absurdo, que a desigualdade (3.1) não acontece, temos que a função $u_1(x, y)$ estará definida sobre um disco de raio R_1 , no qual

$$|K_1|R_1^2 = |K|R^2 \geq g(W).$$

Mas K_1 coincide com a curvatura da superfície de Scherk no ponto p , e sendo que o valor de W é o mesmo para ambas as superfícies, temos pelo Lema 3.5 que $|K_1|r^2 \leq g(W)$. Então concluímos que $r \leq R_1$ o que implica que o disco sobre o qual está definida a função u_1 contém o quadrado sobre o qual a superfície de Scherk está definida, pois r é sempre

maior ou igual que $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. Mas então voltamos à situação encontrada na demonstração da Proposição 3.2 que nos levou a um absurdo. Concluimos assim que (3.1) tem que acontecer. ■

A seguinte Proposição nos garante que, no caso em que a superfície tem plano tangente horizontal, a constante $\frac{\pi^2}{2}$ é a melhor possível.

Proposição 3.7. *Dados quaisquer números $c < \frac{\pi^2}{2}$ e $R > 0$, existe uma superfície mínima $f(x, y)$, definida sobre o disco $x^2 + y^2 < R^2$, cujo gradiente se anula na origem e cuja curvatura de Gauss na origem satisfaz $|K| > \frac{c}{R^2}$.*

Demonstração. Como já foi observado anteriormente, $|K|R^2$ é invariante por homotetias de \mathbb{R}^2 . Assim, podemos assumir que $R = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$. Vamos mostrar que existe uma superfície mínima tal que sua curvatura de Gauss na origem satisfaz $|K| > \eta$, para $\eta > 1$ arbitrariamente fixado.

Para isto, vamos construir uma sequência de superfícies mínimas sobre o disco $x^2 + y^2 < R^2$ e mostrar que ela converge para a superfície de Scherk para a qual $|K| = 1$ na origem. Dessa forma, para cada η menor que 1 encontraremos uma superfície mínima com plano tangente horizontal na origem cuja curvatura de Gauss na origem é maior que η .

Utilizando coordenadas polares $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, dividimos o disco $x^2 + y^2 < R^2$ em setores da forma $(2j - 1) \frac{\pi}{4} < \theta < (2j + 1) \frac{\pi}{4}$, $0 < r < R$, com $j = 0, 1, 2, 3$. Denotemos por Δ o setor Δ_0 . Para cada número natural n , seja $u_n(x, y)$ a solução da EGM sobre o disco $r < R$ que assume o valor $(-1)^j n$ nos arcos $(2j - 1) \frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} < \theta < (2j + 1) \frac{\pi}{4} - \frac{1}{n}$, $r = R$, e é uma reta ligando esses arcos no restante do bordo. Pelos Teoremas 2.3 e 2.5 a solução existe e é única, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Observe que, se uma função $u(x, y)$ é uma solução da EGM, então as funções $u(y, x)$ e $u(-y, -x)$ também serão soluções da EGM. Aplicando isso às funções u_n , temos que $u_n(x, y)$, $-u_n(y, x)$ e $-u_n(-y, -x)$ são soluções da EGM. Como essas funções coincidem no bordo do disco de raio $r < R$, usando o Teorema 2.5 garantimos que elas coincidem também no interior do disco. Dessa forma, temos que $u_n(x, y) = -u_n(y, x)$ e portanto, $u_n(x, x) = -u_n(x, x)$. Logo $u_n(x, x) = 0$. Também $u_n(x, y) = -u_n(-y, -x)$ implicando que $u_n(x, -x) = -u_n(x, -x)$, o que nos dá $u_n(x, -x) = 0$. Assim, $u_n(x, y) = 0$ nas diagonais $x = \pm y$.

Pela escolha de R , temos que o quadrado Q definido em (3.4) está contido no disco de raio R . Então podemos aplicar o Teorema 2.8 para a diferença $\Psi - u_n$ na intersecção de Δ com o quadrado Q e concluir que $u_n < \Psi$ em $\Delta \cap Q$. Agora, aplicando o Teorema 2.5 à função $u_n - u_{n+1}$, temos $u_n < u_{n+1}$, para todo n . Pelo Teorema I.1, de [Fi], p. 408, a sequência $\{|\nabla u_n|\}_n$ é uniformemente limitada em cada parte compacta do disco $r < R$ e além disso, a sequência $\{u_n(0,0)\}_n$ é limitada. Assim, por um resultado clássico de convergência de superfícies mínimas que será apresentado no próximo capítulo (Teorema 4.1), existe uma subsequência de $\{u_n\}_n$, que também denotaremos por $\{u_n\}_n$, tal que $\{u_n\}_n$ converge em Q , junto com todas as suas derivadas, para uma solução u da EGM, com $u \leq \Psi$. Dizemos neste caso, que u_n converge para u na topologia C^m , para todo m .

Denotemos por l_ϵ a intersecção de Δ com cada linha $x = \frac{\pi}{2} + \epsilon$, $\epsilon > 0$.

Afirmção 3.8. *A sequência $\{u_n\}_n$ tende uniformemente para infinito sobre cada linha l_ϵ .*

Para vermos isso, considere a superfície tipo Scherk

$$\Psi_n = n + \log\left(\cos\left(x - \pi - \frac{\epsilon}{2}\right)\right) - \log(\cos(y))$$

definida sobre o quadrado $Q' = \left\{\frac{\pi}{2} + \frac{\epsilon}{2} < x < \frac{3\pi}{2} + \frac{\epsilon}{2}, |y| < \frac{\pi}{2}\right\}$. Claramente, $\Psi_n(x, y) = -\infty$ nos pontos em que $x = \frac{\pi}{2} + \frac{\epsilon}{2}$ e $\Psi_n(x, y) < n$ na parte da circunferência $x^2 + y^2 = R^2$ onde $x \geq \frac{\pi}{2} + \frac{\epsilon}{2}$.

Comparando u_n com Ψ_n na intersecção do disco $x^2 + y^2 < R^2$ com o quadrado Q' , temos, para n suficientemente grande, $\Psi_n \leq u_n$ sobre l_ϵ . Por outro lado, a função $\log\left(\cos\left(x - \pi - \frac{\epsilon}{2}\right)\right) - \log(\cos(y))$ é limitada inferiormente por uma constante fixa em cada l_ϵ , e então Ψ_n converge uniformemente para o infinito sobre l_ϵ . Conseqüentemente, u_n converge uniformemente para o infinito sobre cada l_ϵ , como afirmado.

Considere agora a função $\Psi_\lambda(x, y) = \frac{1}{\lambda}\Psi(\lambda x, \lambda y)$, com $\frac{\sqrt{2}}{2} < \lambda < 1$. Se escolhermos ϵ tal que $\frac{\pi}{2\lambda} = \frac{\pi}{2} + 2\epsilon$, a função Ψ_λ estará definida em um quadrado Q_λ de lado $\frac{\pi}{\lambda} = \pi + 4\epsilon$ e podemos dizer que Ψ_λ é limitada superiormente em cada l_ϵ .

Como o vetor gradiente não se altera de Ψ para Ψ_λ , o gradiente de Ψ_λ é finito nos pontos da circunferência $x^2 + y^2 = R^2$ com $\theta = \pm\frac{\pi}{4}$. As funções Ψ_λ e u_n coincidem em $\theta = \pm\frac{\pi}{4}$, $r \leq R$, podemos aplicar o Teorema 2.8 para a diferença $u_n - \Psi_\lambda$ na parte de Δ em que $x < \frac{\pi}{2} + \epsilon$ e obtemos $\Psi_\lambda \leq u_n$ em $\Delta \cap Q$.

Assim, $u = \lim u_n$ satisfaz $u \geq \Psi_\lambda$ para $\frac{\sqrt{2}}{2} < \lambda < 1$. Fazendo $\lambda \rightarrow 1$ e, consequentemente $Q_\lambda \rightarrow Q$, temos que $\Psi_\lambda \rightarrow \Psi$.

Então, $\Psi = \lim \Psi_\lambda \leq u$. Mas, vimos antes que $u \leq \Psi$. Concluimos portanto que $u = \Psi$ em $\Delta \cap Q$. Temos que u_n converge para Ψ em Q e, para cada λ fixo e para n suficientemente grande, vale $|u_n - \Psi| \leq |\Psi_\lambda - \Psi|$, ou seja, a convergência é uniforme em cada subconjunto compacto de Q . Como a convergência é na topologia C^m , u_n converge junto com suas derivadas para Ψ . Sendo $1 + u_{n_x}^2 + u_{n_y}^2 \neq 0$ para todo n , temos que

$$K_n(0,0) = \frac{u_{n_{xx}}u_{n_{yy}} - u_{n_{xy}}^2}{1 + u_{n_x}^2 + u_{n_y}^2}(0,0) \rightarrow \frac{\Psi_{xx}\Psi_{yy} - \Psi_{xy}^2}{1 + \Psi_x^2 + \Psi_y^2}(0,0) = K_\Psi(0,0) = -1,$$

o que conclui a demonstração. ■

Outras estimativas de curvatura foram estabelecidas anteriormente. Um primeiro resultado nesse sentido é devido a E. Heinz, [He], que mostrou, em 1952, que existe uma constante c_0 tal que, para qualquer gráfico mínimo definido sobre um disco $x^2 + y^2 < R^2$, temos

$$|K| \leq \frac{c_0}{R^2}.$$

Observando que $c_0 < g(W)$ para todo W e que $g(1) = \frac{\pi^2}{2}$, podemos relacionar a constante de Heinz com a função $g(W)$, da seguinte maneira.

Corolário 3.9. *A constante c_0 da inequação de Heinz satisfaz*

$$\frac{1}{2}\pi^2 \leq c_0 < \frac{1}{2}\left(\pi + \frac{1}{\pi}\right)^2. \quad (3.13)$$

Demonstração. Sabemos da Proposição 3.7 que $\frac{\pi^2}{2} \leq c_0$. Para mostrar que $c_0 < \frac{1}{2}\left(\pi + \frac{1}{\pi}\right)^2$, basta mostrar que $g(W)$ definido em (3.2) é sempre menor que $\frac{1}{2}\left(\pi + \frac{1}{\pi}\right)^2$ pois $c_0 < g(W)$.

Consideremos a variável $x = \sqrt{\frac{W^2 - 1}{2}}$ e então $g(W)$ pode ser escrita na forma

$$g(W) = 2[G(x)]^2,$$

onde

$$G(x) = \frac{1 + x^2}{1 + 2x^2} \left(\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}(x) \right). \quad (3.14)$$

Claramente,

$$G(0) = G(1) = \lim_{x \rightarrow \infty} G(x) = \frac{\pi}{2}. \quad (3.15)$$

Queremos mostrar que o máximo de $G(x)$ é menor que $\frac{1}{2} \left(\pi + \frac{1}{\pi} \right)$, pois, como $g(W)$ é sempre positiva, isto vai implicar que o máximo de $g(W)$ será menor que $2 \left(\pi + \frac{1}{\pi} \right)^2$.

Temos que $G'(x) = \frac{\phi(x)}{(1+2x^2)^2}$, com $\phi(x) = 1 + 2x - \pi x - 2x \tan^{-1}(x)$. Os máximos de $G(x)$ são os zeros de $G'(x)$ que coincidem com os zeros de $\phi(x)$.

Como $\phi''(x) = \frac{4x^2(2+x^2)}{(1+x^2)^2} > 0$, para todo x , $\phi(x)$ tem no máximo dois zeros uma vez que $\phi(x)$ não tem pontos de máximo. Por (3.15), $G'(x)$ tem pelo menos um zero entre 0 e 1, e um zero entre 1 e $+\infty$. Logo $G'(x)$ tem exatamente um zero em cada um desses intervalos.

Por outro lado, como $G(\sqrt{3}) = \frac{10}{21}\pi < \frac{\pi}{2}$, temos que $G(x) < \frac{\pi}{2}$, para todo $x > 1$. Então o máximo de $G(x)$ ocorre no único ponto x_0 entre 0 e 1 onde $G'(x_0) = 0$. Mas, $\tan^{-1}(x) < x$ para todo $x > 0$ e então $\phi(x) > 1 - \pi x$. Assim, $\phi(x) > 0$ para todo $x \leq \frac{1}{\pi}$ e então $x_0 > \frac{1}{\pi}$. Além disso, se $\phi(x_0) = 0$ temos $\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}(x_0) = \frac{1+2x_0^2}{2x_0}$ o que equivale a $G(x_0) = \frac{1+x_0^2}{2x_0}$.

Então, para todo $x \in (0, 1)$, temos $G(x) \leq G(x_0) = \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{1}{x_0} \right)$. Mas, como $x + \frac{1}{x}$ é uma função decrescente de x para $0 < x < 1$, temos

$$G(x) < \frac{1}{2} \left(\pi + \frac{1}{\pi} \right).$$

Logo, por (3.14), temos

$$g(W) < \frac{1}{2} \left(\pi + \frac{1}{\pi} \right)^2.$$

■

Este Corolário também nos permite concluir que a limitação para a curvatura de Gauss é uniforme uma vez que temos $g(W) < \frac{1}{2} \left(\pi + \frac{1}{\pi} \right)^2$, para todo W .

O Teorema 3.1 nos permite dar uma prova bastante simples para o seguinte resultado provado por Bernstein, em 1916.

Teorema 3.10 (Bernstein). *Se uma superfície mínima S é um gráfico completo, isto é, é gráfico de uma função definida sobre todo o plano \mathbb{R}^2 , então ela é um plano.*

Demonstração. Seja p um ponto qualquer de S . Por translação, podemos considerar que p é a origem, e então, já que S é gráfico completo, para todo $R \in \mathbb{R}$ aplicamos o Teorema 3.1 e concluímos que $|K(p)| \leq \frac{g(W)}{R^2}$. Como $g(W)$ é limitada e R pode ser tão

grande quanto se queira, chegamos a $|K(p)| = 0$ para todo $p \in S$. Daí, $k_1 = -k_2 = 0$, logo, S é totalmente umbílica e como S é mínima, S é um plano. ■

Uma generalização para o Teorema 3.1, quando a superfície mínima é estável e o espaço ambiente é uma variedade qualquer, foi obtido por Richard Schoen, [Sc], em 1983. Um resultado semelhante, para o caso de superfícies com curvatura média constante diferente de zero, foi obtido por Joel Spruck, [Sp], em 1972.

Capítulo 4

Convergência de Superfícies Mínimas

Neste capítulo apresentaremos resultados sobre convergência de sequências de superfícies mínimas. O primeiro teorema garante a convergência de gráficos mínimos desde que as funções que são elementos da sequência tenham um ponto em que sejam limitadas e que a sequência de seus gradientes seja uniformemente limitada. O segundo resultado garante a convergência de superfícies mínimas, não necessariamente gráficos, com curvatura de Gauss limitada. Estes resultados encontram-se em [PR].

Denotaremos $C^\infty(\Omega)$ o espaço das funções diferenciáveis de Ω em \mathbb{R} , com a topologia C^m -uniforme sobre os subconjuntos compactos de Ω , para todo $m \geq 0$, com a seguinte norma

$$|u|_m = \max_i \sup_{p \in \Omega} \{|u^i(p)|, |du^i(p)|, \dots, |d^m u^i(p)|\}.$$

O próximo teorema garante a convergência de sequências de gráficos mínimos desde que estas sejam limitadas em algum ponto e tenham gradiente uniformemente limitado em cada subconjunto compacto de Ω , e é uma consequência do Corolário 1.10.

Teorema 4.1. *Considere uma sequência $\{u_n\}_n \subset C^\infty(\Omega)$ de soluções da equação dos gráficos mínimos, satisfazendo as seguintes condições.*

1. *Existe $p \in \Omega$ tal que $\{u_n(p)\}_n$ é limitada;*
2. *$\{|\nabla u_n|\}_n$ é uniformemente limitada em subconjuntos compactos de Ω .*

Então, existem uma subsequência $\{u_k\}_k \subset \{u_n\}_n$ e uma solução $u \in C^\infty(\Omega)$ da equação dos gráficos mínimos tais que $\{u_k\}_k$ converge para u na topologia C^m , para todo m , isto é, tanto $\{u_k\}_k$ quanto a sequência de suas derivadas parciais de todas as ordens convergem uniformemente para u e suas derivadas parciais.

Demonstração. Consideremos um domínio $\Omega' \subset\subset \Omega$ tal que $p \in \Omega'$. Das hipóteses 1 e 2, junto com o Teorema do valor médio, temos que, para todo $q \in \Omega'$,

$$|u_n(q)| \leq |u_n(q) - u_n(p)| + |u_n(p)| \leq \|\nabla u_n\| + |u_n(p)|,$$

e o limite não depende do ponto q escolhido nem de n . Concluimos então que $\{\sup_{\Omega'} |u_n|\}_n$ é uniformemente limitado. O Corolário 1.10 garante que para todo multi-índice α , a sequência das derivadas parciais $\{D_\alpha u_n\}_n$ é uniformemente limitado em Ω' . De fato, como garantimos que $\{\sup_{\Omega'} |u_n|\}_n$ é uniformemente limitado em Ω' , a constante C do Corolário 1.10 independe de n e, portanto, o limite de $\{D_\alpha u_n\}_n$ é uniforme em Ω' .

Nesta situação, o Teorema de Ascoli-Arzelá, ver [So], p.15, implica que existe uma subsequência de $\{u_n\}_n$ que converge para uma função $u \in C^\infty(\Omega')$ na topologia C^m , para todo m . Tomando uma exaustão por uma sequência crescente de domínios relativamente compactos para Ω , conseguimos uma subsequência diagonal $\{u_k\}_k \subset \{u_n\}_n$ que converge para uma função $u \in C^\infty(\Omega)$ na topologia C^m em Ω , para todo m . Para concluir a demonstração, observe que, como

$$(1 + u_{k_y}^2)u_{k_{xx}} - 2u_{k_x}u_{k_y}u_{k_{xy}} + (1 + u_{k_x}^2)u_{k_{yy}} = 0,$$

fazendo o limite quando k vai para infinito temos que

$$(1 + u_x^2)u_{yy} - 2u_xu_yu_{xy} + (1 + u_y^2)u_{xx} = 0,$$

ou seja, u também satisfaz a equação dos gráficos mínimos. ■

Como nosso objetivo é garantir a convergência de uma sequência $\{S_n\}_n$ de superfícies mínimas usando o teorema anterior, precisamos encontrar um limite uniforme do domínio no qual é possível expressar um superfície mínima como gráfico sobre seu plano tangente, o que será possível graças à limitação da curvatura de Gauss. Para isso precisamos definir alguns objetos.

Dado p em S e $r > 0$ denotamos por

$$D(p, R) = \{p + v; v \in T_p S \text{ e } |v| < r\}$$

o disco de raio r em $T_p S$. $V(p, r)$ representa o cilindro sólido infinito em \mathbb{R}^3 de raio r , cujo eixo é a reta gerada por $N(p)$, isto é,

$$V(p, r) = \{q + tN(p); q \in D(p, r), t \in \mathbb{R}\}.$$

Para $\epsilon > 0$, temos a faixa compacta

$$V(p, r, \epsilon) = \{q + tN(p); q \in D(p, r), |t| \leq \epsilon\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Dado um conjunto aberto $\Omega \in \mathbb{R}^3$, dizemos que uma superfície mínima S imersa em Ω é propriamente imersa se para qualquer subdomínio relativamente compacto $\Omega' \subset\subset \Omega$ temos $S \cap \Omega' \subset\subset S$, isto é, se S não se acumula em Ω . Ademais, se S não tem autointerseções e a topologia de S é induzida pela topologia de Ω , diremos que S é propriamente mergulhada em Ω e denotaremos este fato por $S \stackrel{p.m.}{\subset} \Omega$.

Recordando que, para superfícies mínimas, temos $|A|^2 = -2K$. O Lema a seguir nos mostra que, quanto menor a curvatura de Gauss em um ponto $p \in S$, maior será o raio do disco em $T_p S$ sobre o qual a superfície é gráfico.

Lema 4.2 (Lema do Gráfico Uniforme). *Seja S uma superfície propriamente imersa em Ω . Suponha que $|A| \leq c$ em S , para uma constante $c > 0$.*

1) *Para todo $p \in S$, considere $R = R(p)$ dado por*

$$R = \min \left(\frac{1}{4c}, \frac{1}{2}d(p, \partial\Omega) \right).$$

Então, a componente de $V(p, R) \cap S$ em torno de p é um gráfico sobre $D(p, R)$.

2) *Se $u \in C^\infty(D(p, R))$ é a função da qual a superfície é gráfico, então temos as seguintes estimativas*

$$|u(q)| \leq 8c|p - q|^2, \quad |\nabla u(q)| \leq 8c|p - q|, \quad |\nabla^2 u| \leq 16c,$$

para todo $q \in D(p, R)$, onde $\nabla u = (u_x, u_y)$ e $|\nabla^2 u|^2 = u_{xx}^2 + u_{yy}^2$ é a norma ao quadrado do hessiano de u .

Demonstração. Fixado $p \in S$. Podemos assumir que p é a origem de \mathbb{R}^3 , $T_p S = \{z = 0\}$ e $N(p) = (0, 0, 1)$. Como S localmente é um gráfico, existe um raio R com as seguintes propriedades.

i) S pode ser expressa como o gráfico de uma função $u \in C^\infty(D(p, R))$. Portanto, $u(p) = 0$ e a aplicação $X(x, y) = (x, y, u(x, y))$, $(x, y) \in D(p, R)$, é uma parametrização de S com $X(0, 0) = p$.

ii) A terceira coordenada da aplicação de Gauss $N_3 = \langle N, e_3 \rangle = (1 + |\nabla u|^2)^{-\frac{1}{2}}$ satisfaz $N_3 > \frac{1}{2}$ em $D(p, R)$.

Então,

$$|(N_3)_x| = |\langle A(X_x), e_3 \rangle| \leq |A||X_x| \leq c\sqrt{1+u_x^2} \leq cW(u) < 2c,$$

onde A é o endomorfismo de Weingarten de S . Repetindo o mesmo raciocínio, garantimos que a mesma desigualdade é verdadeira para a derivada de N_3 com respeito a qualquer vetor unitário. Assim, $|\nabla N_3| \leq 2c$.

Assumimos que R é o raio máximo em p com as propriedades *i*), *ii*) acima. Note que se u estivesse definido sobre $\partial D(p, R)$ e tivéssemos $N_3 > \frac{1}{2}$ sobre $\partial D(p, R)$, então u poderia ser estendida a um disco de raio maior, o que contradiz a maximalidade de R . Portanto, uma das seguintes possibilidades acontece.

- a) A função u se estende suavemente para um disco maior e existe $q \in \partial D(p, R)$ tal que $N_3(q) = \frac{1}{2}$.
- b) Existe uma sequência $\{q_n\}_n \subset D(p, R)$ com $d(X(q_n), \partial\Omega) \rightarrow 0$.

No caso de *a*) acontecer, temos

$$\frac{1}{2} = |N_3(p) - N_3(q)| \leq |\nabla N_3|(r)|p - q| \leq 2cR,$$

em que r é algum ponto do segmento $[p, q]$. Se *b*) acontece, então $|p - X(q_n)| \leq s(X([p, q_n]))$, onde $s(X([p, q_n]))$ é o comprimento da curva que é imagem por X do segmento $[p, q_n]$ em $D(p, R)$ ligando p a q_n . Este comprimento é dado por

$$s(X([p, q_n])) = \int_0^{|q_n|} W(u) ds_0,$$

que satisfaz

$$s(X([p, q_n])) < \int_0^{|q_n|} 2 ds_0 = 2|q_n| < 2R,$$

em que ds_0 denota o elemento de comprimento no disco $D(p, R)$. Então

$$d(p, \partial\Omega) \leq |p - X(q - n)| + d(X(q_n), \partial\Omega) < 2R + d(X(q_n), \partial\Omega) \rightarrow 2R.$$

Em resumo, temos que $\frac{1}{4c} \leq R$ ou $\frac{1}{2}D(p, \partial\Omega) \leq R$ e por *a*) e *b*) concluímos 1). Para mostrar 2), primeiro note que

$$\left| \frac{u_{xx}}{W(u)} \right| = |\langle N, X_{xx} \rangle| = |\langle N_x, X_x \rangle| \leq |A||X_x|^2 \leq c(1+u_x)^2 \leq cW(u)^2.$$

Portanto, $|u_{xx}| \leq cW(u)^3 \leq 8c$. Com argumento análogo, concluímos que o mesmo acontece com $|u_{yy}|$, temos então que $|\nabla^2 u| < 16c$ em $D(p, R)$. Usando o Teorema do valor médio, vemos que

$$|u_x(q)| = |u_x(p) - u_x(q)| \leq |\nabla u_x|(p - q) \leq 8c|p - q|$$

e concluímos que $|\nabla u|(q) \leq 8c|p - q|$. Finalmente,

$$|u(q)| = |u(q) - u(p)| \leq |\nabla u||p - q| \leq 8c|p - q|^2,$$

terminando assim a demonstração. ■

Para formularmos a noção de convergência de superfícies mínimas para as quais existe uma limitação para a área e para a curvatura de Gauss, precisamos definir o tipo de convergência aqui estabelecida.

Definição 4.3. *Sejam $\{S_n \stackrel{p.e.}{\subset} \Omega\}_n$ e $S \stackrel{p.e.}{\subset} \Omega$ superfícies mínimas num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Dizemos que $\{S_n\}_n$ converge para S com multiplicidade finita, se S é o conjunto de acumulação da sequência $\{S_n\}_n$ e para todo p em S existem r e ϵ maiores que zero tais que*

1. $S \cap V(p, r, \epsilon)$ pode ser expressa como gráfico de uma função $u : D(p, r) \rightarrow \mathbb{R}$.
2. Para todo n suficientemente grande, $S_n \cap V(p, r, \epsilon)$ consiste de um número finito (independente de n) de gráficos sobre $D(p, r)$ que convergem para u na topologia C^m , para todo m .

Na situação acima, definimos a *multiplicidade* de um ponto $p \in S$ como o número de gráficos em $S_n \cap V(p, r, \epsilon)$ para n suficientemente grande. É claro que esta multiplicidade é constante em cada componente conexa de S . Dada uma sequência de subconjuntos $\{F_n\}_n$ no domínio aberto Ω , seu *conjunto de acumulação* é definido por $\{p \in \Omega; \exists p_n \in F_n \text{ com } p_n \rightarrow p\}$.

Dada uma superfície mínima $S \stackrel{p.e.}{\subset} \Omega$ e uma bola $B \subset\subset \Omega$, denotaremos respectivamente por $A(S \cap B)$ e $K_{S \cap B}$, a área e a curvatura de Gauss da porção de S dentro de B .

Mostraremos agora que uma sequência de superfícies mínimas, com área e curvatura de Gauss uniformemente limitadas, converge com multiplicidade finita. Lembrando que o Teorema 3.1 estabelece a limitação uniforme para a curvatura de Gauss, o seguinte resultado é então uma consequência de tal teorema.

Teorema 4.4. *Sejam $\{S_n \stackrel{p.e.}{\subset} \Omega\}_n$ uma seqüência de superfícies mínimas. Suponha que $\{S_n\}_n$ tem um ponto de acumulação e que, para cada bola $B \subset\subset \Omega$, existem constantes positivas $c_i = c_i(B)$, $i = 1, 2$, com $A(S_n \cap B) \leq c_1$ e $|K_{S_n \cap B}| \leq c_2$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então existem uma subsequência $\{S_k\}_k \subset \{S_n\}_n$ e uma superfície mínima $S \stackrel{p.m.}{\subset} \Omega$ tais que $\{S_k\}_k$ converge para S em Ω com multiplicidade finita.*

Demonstração. Fixe um ponto de acumulação p da seqüência $\{S_n\}_n$. Como, por hipótese, temos uma estimativa de curvatura, podemos usar o Lema 4.2 que implica que existem $R = R(p) > 0$ e gráficos disjuntos $U_n^i \subset \mathbb{R}^3$ de funções u_n^i definidas sobre discos $B(p, 2R) \cap (p + \langle \nu_n^i \rangle^\perp)$, com $|\nu_n^i| = 1$, $1 \leq i \leq m = m(p, n)$ e $p + \langle \nu_n^i \rangle^\perp$ o espaço tangente ao gráfico U_n^i em p , tais que

$$i) S_n \cap B(p, r) = (U_n^1 \cup \dots \cup U_n^s) \cap B(p, R)$$

ii) $|u_n^i|$, $|\nabla u_n^i|$ $|\nabla^2 u_n^i|$ são uniformemente limitados no disco correspondente de raio $2R$, para todo n e $i = 1, \dots, m$.

Como a área de S_n dentro de $B(p, 2R)$ é limitada por uma constante $c_1 = c_1(p) > 0$, concluímos que o número m de gráficos é limitado superiormente, independentemente de n , pois cada S_n não se acumula em $B(p, 2R)$. Tomando uma subsequência adequada, podemos assumir que $m = m(p)$ não depende de n e que $\{\nu_n^i\}_n$ converge para algum vetor unitário ν^i . Usando o Teorema 4.1, existem subsequências $\{U_k^i\}_k \subset \{U_n^i\}_n$ e gráficos mínimos U^i sobre discos de raio $2R$ e centro p nos planos $p + \langle \nu_n^i \rangle^\perp$, $1 \leq i \leq m$, tais que cada U_k^i converge para U^i . Como os gráficos U_k^i para cada k fixo são disjuntos, pelo Lema 1.7, temos que dois gráficos limites U^i , U^j ou são disjuntos ou coincidem em $B(p, 2R)$.

Se $p \in O$ não é um ponto de acumulação de $\{S_n\}_n$ então podemos escolher uma subsequência $\{S_k\}_k$ e $R > 0$ tais que $S_k \cap B(p, R) = \emptyset$, para todo k .

Agora, tome um conjunto denso enumerável $\mathcal{A} = \{p_1, p_2, \dots\} \subset O$. Aplicando o processo acima em p_1 , obtemos uma subsequência $\{S_{1,k}\}_k \subset \{S_n\}_n$ que converge em $B(p_1, R(p_1))$ para uma união disjunta de no máximo s gráficos com multiplicidade finita. Aplicando o processo novamente para $\{S_{1,k}\}_k$ em p_2 , obtemos uma outra subsequência $\{S_{2,k}\}_k \subset \{S_{1,k}\}_k$ que converge em $B(p_1, R(p_1)) \cup B(p_2, R(p_2))$ para uma superfície mínima com multiplicidade finita. Iterando o processo e tomando uma subsequência diagonal, obtemos uma subsequência $\{S_k\}_k \subset \{S_n\}_n$ que converge em O para uma superfície mínima $S \stackrel{p.e.}{\subset} O$ com multiplicidade finita, concluindo assim o Teorema. ■

Referências Bibliográficas

- [CH] Courant, R. e Hilbert, D. - *Methods of mathematical physics*, vol.II, (1962). New York: Interscience.
- [CM] Colding, T. e Minicozzi, W. - *Minimal Surfaces*, (1999). Courant Lectures in Mathematics **4**, New York University.
- [dC] do Carmo, M. - *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, (2006). IMPA (Textos Universitários), 2^a. edição, Rio de Janeiro.
- [Fi] Finn, R. - On equations of Minimal Surface Type. *Annals of Math.*, **60**, nº3, (1954), 397-416.
- [FO] Finn, R. e Osserman, R. - On the Gauss Curvature of Non-Parametric Minimal Surfaces. *J. Analyse Math.* **12**, (1964), 351-364.
- [GT] Gilbarg, D. e Trudinger, N. - *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, (1983). Springer-Verlag, 3^a. edição.
- [JS] Jenkins, H. e Serrin, J. - Variational Problems of Minimal Surfaces Type II. Boundary Value Problems for the Minimal Surface Equation. *Arch. Rational Mech. Anal*, **21**, (1996), 321-342.
- [Li] Lins Neto, A. - *Funções de Uma Variável Complexa*, (2005). IMPA (Projeto Euclides), Rio de Janeiro.
- [Mi] Milnor, J. - *Topology from the Differentiable view point*, (1965). The University Press of Virginia.
- [MY1] Meeks III, W. H. e Yau, S. T. - The Classical Plateau Problem and the Topology of Three-dimensional manifolds. *Topology*, **21**, (1982), 151-168.

- [MY2] Meeks III, W. H. e Yau, S. T. - The Existence of Embedded Minimal Surfaces and the Problem of Uniqueness. *Math. Z.*, **179**, (1982), 151-168.
- [Ni] Nitsche, J. - On the Non-solvability of Dirichlet's Problem for the Minimal Surface Equation. *Journal of mathematics and Mechanics*, **14**, n°5, (1965). 779-788.
- [PR] Pérez, J. e Ros, A. Properly Embedded Minimal Surfaces with Finite Total Curvature - *The Global Theory of Minimal Surfaces in flat spaces*, (2002), Springer-Verlag. 15-66.
- [Pi] Pinheiro, A. - A Jenkins-Serrin Theorem in $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$. *Bull Braz. Math Soc.* (to appear).
- [Sc] Schoen, R. - Estimates for Stable Minimal Surfaces in Three Dimensional Manifolds. *Seminar on Minimal Submanifolds*, Princeton Univ. Press, (1983), 111-126.
- [So] Sotomayor, J. - *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, (1979). IMPA, Rio de Janeiro.
- [MS] Spivak, M. - *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, vol IV, (1975). Publish or Perish.
- [Sp] Spruck, J. - An a Priori Estimate for the Gauss Curvature of Nonparametric Surfaces of Constant Mean Curvature. *Proc. American Math Society*, **36**, n°1, (1972). 217-223.