Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática - IM
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PGMAT
Dissertação de Mestrado

Unidades f-unitárias em um anel de grupo integral

Elen Deise Assis Barbosa

Salvador-Bahia
16 de Abril de 2013

Unidades f-unitárias em um anel de grupo integral

Elen Deise Assis Barbosa

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Thierry Corrêa Petit Lobão.

Salvador-Bahia
Abril de 2013

Barbosa, Elen Deise Assis.

Unidades f-unitárias em um anel de grupo integral / Elen Deise Assis Barbosa. – Salvador: UFBA, 2013.

57 f.

Orientador: Prof. Dr. Thierry Corrêa Petit Lobão.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2013.

Referências bibliográficas.

1. Anéis (Álgebra). 2. Teoria dos Grupos . 3. Anéis de Grupos. I. Lobão, Thierry Corrêa Petit . II. Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática. III. Título.

CDU : 512.552.7

Unidades f-unitárias em um anel de grupo integral

Elen Deise Assis Barbosa

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 16 de abril de 2013.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Thierry Corrêa Petit Lobão (Orientador)
UFBA

Prof$^{\text{a}}$. Dr$^{\text{a}}$ Carmela Sica
UFBA

Prof. Dr. Andreas Bernhard Michael Brunner
UFBA

Aos meus pais, Edson e Marileide, e aos meus irmãos, Tâmara e Paulo.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por sempre me dar forças para seguir em busca dos meus objetivos.

Agradeço aos meus amados pais, pelo amor, cuidado e carinho que sempre tiveram por mim. Obrigada meu pai simplesmente por existir e ser a minha fonte de inspiração para alcançar o sucesso. Obrigada mamãe, pelo companheirismo, pela amizade e por cada gesto de afeto. Amo vocês!

Agradeço aos meus irmãos, por serem os principais responsáveis por muitos momentos de alegrias e de descontração.

Agradeço ao meu querido amigo Luís Roque, por ser um dos meus maiores incentivadores. A você, devo meu respeito e minha grande admiração.

Agradeço ao meu grande amigo Jakinho por estar sempre presente na minha vida, pelo apoio e pela grande amizade demonstrada em todos instantes. Obrigada por tudo!

Agradeço aos meus mestres da Uneb pela contribuição na minha formação e pela amizade. Dentre eles, Maridete (grande amiga), Fátima (minha primeira inspiração), Teófilo (grande amigo e incentivador na minha vida acadêmica).

Agradeço ao meu amigo João Paulo pelo apoio nestes dois anos, pela disponibilidade em sempre me ajudar e por me encorajar nos momentos de insegurança. Muito obrigada!

Agradeço aos meus colegas de turma do mestrado com quem, por muitas, vezes compartilhei momentos de felicidade e de aflições: Anderson (sua generosidade é admirável), Darlan, Edward (parceiro nos estudos), Marcus Morro e Raimundo (além de colega, um amigo que me recebeu de maneira calorosa; obrigada pela cumplicidade nos estudos nestes dois anos).

Agradeço a todos os colegas da pós-graduação, dentre eles: Ângela (pela disponibilidade em me ajudar), Andressa (pelos momentos de descontração), Elaine (pela grande amizade e pela força em todos os momentos), Thiago (pelos sábios conselhos) e Kátia (obrigada pelas boas energias).

Agradeço muito também ao meu querido orientador, Prof. Thierry Corrêa Petit Lobão, por ter aceito me orientar.

Agradeço ao Prof. Andreas Bernhard Michael Brunner e à Profa. Carmela Sica por aceitarem participar da comissão julgadora de minha dissertação.

Agradeço a todos os professores do IM-UFBA por terem contribuído na minha formação. Em particular, um agradecimento especial ao professor Joseph Yartey.

Agradeço ao Professor Carlos Bahiano pela atenção e disponibilidade dada quando solicitei sua orientação.

Agradeço aos amigos e funcionários do IM-UFBA que de alguma forma contribuíram nesta etapa da minha vida. Em particular, um agradecimento especial à Davilene e Márcio por sempre me tratarem com muito carinho.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro concedido a mim durante todo o meu mestrado.

“ A vida não dá e nem empresta, não se comove e nem se apieda. Tudo que ela faz é retribuir e transferir aquilo que nós lhe oferecemos.”

Albert Einstein

Resumo

O presente trabalho tem como objetivos estudar o subgrupo de todas as unidades f-unitárias de um anel de grupo integral $\mathbb{Z}G$ bem como o subgrupo das unidades f-unitárias generalizadas; apresentar a relação entre estes subgrupos e o grupo das unidades. Verifica-se que o subgrupo das unidades f-unitárias generalizadas é exatamente o normalizador do subgrupo das unidades f-unitárias e que quando o grupo G é periódico, o normalizador do subgrupo das unidades f-unitárias generalizadas é o próprio subgrupo. Além disso, serão caracterizados grupos para os quais se tenha o subgrupo das unidades bicíclicas sendo um subgrupo das unidades f-unitárias generalizadas. Finalmente, serão apresentados resultados que podem ser estendidos para $\mathbb{Z}(G \times C_2)$, a partir de $\mathbb{Z}G$, e algumas relações entre as unidades hipercentrais de um anel de grupo integral e as unidades f-unitárias generalizadas.

Palavras-chave: Unidades f-unitárias; Unidades f-unitárias generalizadas; Anel de grupo integral.

Abstract

The main goals of this work are to study the subgroup of all f-unitary units of an integral group ring $\mathbb{Z}G$ as well as the subgroup of generalized f-unitary units; to present the relationship between these subgroups and the group of units. It is verified that the subgroup of generalized f-unitary units is exactly the normalizer of the subgroup of f-unitary units and that when the group G is periodic, the normalizer of the subgroup of generalized f-unitary units is the subgroup itself. Moreover, the groups for which the bicyclic units subgroup being a subgroup of generalized f-unitary units are characterized. Finally, results that can be extended from $\mathbb{Z}G$ to $\mathbb{Z}(G \times C_2)$ and some relations between hypercentral units of an integral group ring and generalized f-unitary units are presented.

Keywords: f-Unitary Units; Generalized f-Unitary Units;Integral Group Ring.

Sumário

Introdução

O anel de grupo de um grupo G sobre um anel com identidade R, denotado por RG, é o módulo livre com coeficientes em R tendo os elementos de G como base e com a multiplicação definida distributivamente de forma a estender linearmente a multiplicação de G. Em nosso trabalho, utilizaremos anéis de grupo em que o anel considerado é o anel dos inteiros $\mathbb{Z}$ e o grupo G é qualquer. Este anel recebe o nome de anel de grupo integral.

O conceito de anel de grupo é relativamente antigo e foi introduzido explicitamente por T. Molien em 1897, mas veio a adquirir grande importância devido às suas aplicações à teoria de representações de grupos, a partir dos trabalhos de E. Noether, R. Brauer e I. Schur. Um dos desafios centrais desta teoria é o chamado Problema do Isomorfismo, que diz o seguinte: dados dois grupos G e H e um anel R será que a existência de um isomorfismo $RG \simeq RH$ implica na existência do isomorfismo $G \simeq H$? Desde 1940 que este problema vem sendo discutido, a partir dos trabalhos de G. Higman, utilizando-se diversos anéis de coeficientes. Entretanto, foi ao considerar o anel de grupo $\mathbb{Z}G$ que se chegou a diversos resultados relevantes – como, por exemplo, o problema do isomorfismo para grupos abelianos finitos, do qual G. Higman demonstrou a validade.

O desafio de saber para quais classes de grupos este problema é válido continuou sendo alvo de interesse para os algebristas que trabalhavam com anéis de grupo. Desta forma, K. W. Roggenkamp e L. Scott responderam essa questão para anéis de grupo integral de grupos nilpotentes e A. Whitcomb para anéis de grupo integrais de grupos metabelianos. Todavia, para grupos infinitos ainda pouco se sabe – nem mesmo se a classe de nilpotência é preservada por isomorfismos que satisfaçam o Problema do Isomorfismo.

Uma outra questão de destaque na teoria dos anéis de grupo integrais sobre grupos finitos é a propriedade do normalizador que também foi apresentada como Conjectura: o normalizador de G no grupo das unidades de $\mathbb{Z}G$ é exatamente o produto do grupo G pelo centro do grupo das unidades, i.e., $\mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G) = G.\mathcal{Z}(\mathcal{U}(\mathbb{Z}G))$. Em 1995, M. Mazur revelou a existência de uma relação entre a Propriedade do Isomorfismo e a do Normalizador no caso de alguns grupos infinitos.

Desta forma, tanto o problema do isomorfismo quanto a problema do normalizador vêm sendo investigados e muitas respostas positivas foram encontradas, até que, em 2001, M. Hertweck apresentou contra-exemplos para as duas questões. Assim, agora busca-se caracterizar as classes de grupos que são determinados pelos seus anéis de grupo integrais, ou ainda, as classes de grupos em que permanece válida a propriedade do normalizador.

Continuando com os desafios na teoria de anéis de grupos integrais, podemos citar o estudo do grupo das unidades deste anel, isto é,

$$\mathcal{U}(RG) = \{x \in RG : (\exists\, y \in RG)(xy = yx = 1)\}.$$

Desde a década de 1970, várias pesquisas têm mostrado que este grupo tem uma estrutura muito complicada. Isto se deve, entre outras coisas, ao fato de o mesmo possuir um subgrupo livre de posto 2. A relevância no estudo do grupo das unidades está diretamente ligada ao Problema do Normalizador, pois, para termos respostas sobre este problema, precisamos conhecer o grupo das unidades.

Neste trabalho estamos interessados principalmente num tipo de unidade: unidades f-unitárias. Dados um grupo G qualquer e $f : G \to \mathcal{U}(\mathbb{Z}) = \{-1, 1\}$ um homomorfismo de grupos, pode-se definir a função $h : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}G$ que a cada $x = \sum_{g \in G} \alpha_g g$ faz corresponder $x^f = \sum_{g \in G} \alpha_g f(g) g^{-1}$, a qual é um antiautomorfismo do anel $\mathbb{Z}G$, chamado de involução gerada pelo homomorfismo f. Em particular, se f é trivial, então x^f coincide com a involução clássica, $*$, i.e., $x^f = \sum_{g \in G} \alpha_g g^{-1} = x^*$. Definimos então

$$\mathcal{U}_f(\mathbb{Z}G) = \{u \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}G) : uu^f = \pm 1\},$$

chamado de conjunto das unidades unitárias (o qual é um subgrupo de $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$).

O estudo das unidades unitárias foi proposto por S.P Novikov e este subgrupo foi descrito pela primeira vez por A. A. Bovdi. Desde então uma série de resultados interessantes sobre este assunto tem aparecido.

O presente trabalho está dividido em três capítulos, da seguinte forma:

No primeiro capítulo, apresentamos, sem muitas demonstrações, algumas definições e resultados básicos sobre Teoria de Grupos, Teoria de Anéis e Módulos e Anéis de Grupos que serão utilizados ao longo dos demais capítulos.

No segundo capítulo, faremos um estudo do subgrupo de todas unidades f-unitárias caracterizando quando este grupo é um subgrupo de índice finito no grupo das unidades. Além disso, apresentaremos um outro tipo de unidade; unidades f-unitárias generalizadas. O conjunto de todas essas unidades será um subgrupo do grupo das unidades e será exatamente o normalizador do subgrupo das unidades f-unitárias.

No terceiro capítulo, apresentaremos e demonstraremos que o índice das unidades bicíclicas no grupo das unidades f-unitárias do grupo diedral é finito. Além disso, enunciaremos e provaremos um teorema que caracteriza grupos para os quais se tenha o subgrupo das unidades bicíclicas sendo um subgrupo unitário generalizado, i.e., $\mathcal{B}_2 \leq \mathcal{U}_{g,f}$. Além disso, apresentaremos uma relação entre as unidades f-unitárias de $\mathbb{Z}G$ e as unidades f_1-unitárias de $\mathbb{Z}(G \times C_2)$. Alguns resultados apresentados em capítulos anteriores sobre unidades f-unitárias serão estendidos para as unidades f-unitárias generalizadas e apresentaremos alguns resultados que mostram relações entre unidades f-unitárias generalizadas e unidades f-unitárias. Finalizamos, discutindo alguns resultados envolvendo as unidades f-unitárias generalizadas e as unidades hipercentrais.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, introduziremos algumas definições e resultados importantes acerca das Teorias de Grupos, de Anéis e Módulos e de Anéis de Grupo.

Ressaltamos que os resultados apresentados aqui poderão ser encontrados pelo leitor em [11] e [16].

1.1 Grupos

Os resultados clássicos da teoria de grupos inseridos nesta seção serão úteis para que se possa compreender o desenvolvimento deste trabalho.

Um conjunto não vazio G munido com uma operação binária

$$\begin{aligned} * : G \times G &\to G \\ (a, b) &\mapsto a * b \end{aligned}$$

é um *grupo* se as seguintes condições são satisfeitas:

1. $a * (b * c) = (a * b) * c$, para todo $a, b, c \in G$.

2. Existe $1 \in G$ tal que $1 * a = a * 1 = a$, para todo $a \in G$.

3. Para todo $a \in G$, existe $b \in G$ tal que $a * b = b * a = 1$.

O grupo é *abeliano* ou *comutativo* se também vale a condição

4. $a * b = b * a$, para todo $a, b \in G$.

Para simplificar a notação usaremos ab em vez de $a * b$. A *ordem* ou *cardinalidade* de um grupo G é o número de elementos de G que denotaremos por $|G|$.

Sejam G um grupo e H um subconjunto de G. Dizemos que H é um *subgrupo* de G, em símbolos $H \leq G$, se as seguintes condições são satisfeitas:

1. $H \neq 0$;

2. ab^{-1}, para todo $a, b \in H$.

Sejam G um grupo e H um subgrupo de G. Dado $a \in G$, o conjunto

$$aH = \{ah : h \in H\}$$

é chamado a *classe lateral à esquerda* de H em G determinada por a. De modo semelhante, podemos definir a classe à direita Ha de H em G. O conjunto de todas as classes laterais à esquerda de H em G forma uma partição de G, que denotamos por $\dfrac{G}{H}$.

Dados $a, b \in G$, dizemos que a é *congruente* a b *módulo* H se $a^{-1}b \in H$, que denotaremos por $a \equiv b \pmod{H}$. É fácil verificar que $\equiv$ é uma relação de equivalência em G e que a classe de equivalência determinada por a é igual à classe lateral à esquerda aH. O elemento a é chamado um *representante* da classe de equivalência. Não é difícil ver que existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto das classes laterais à esquerda de H em G e o conjunto das classes laterais à direita de H em G. A cardinalidade do conjunto das classes laterais à esquerda (ou à direita) de H em G é chamado de o *índice* de H em G, que denotaremos por $[G : H]$.

Sejam G um grupo e H um subgrupo de G. Dizemos que H é um *subgrupo normal* de G, em símbolos $H \trianglelefteq G$, se

$$Ha = aH, \forall a \in G,$$

isto é,

$$aHa^{-1} = H, \forall a \in G.$$

Além disso, $\dfrac{G}{H}$ é um grupo com a operação $aHbH = abH$ para $a, b \in G$ se, e somente se, H é um subgrupo normal de G. Neste caso, $\dfrac{G}{H}$ é chamado o *grupo quociente* de G por H.

O produto cartesiano $G \times H$ munido da operação binária componente a componente

$$(a, b) * (g, h) = (ag, bh)$$

é um grupo com elemento neutro $(1, 1)$ e (g^{-1}, h^{-1}) o inverso de (g, h). O grupo $G \times H$ é chamado *produto direto (externo)*. Por indução, segue-se que

$$G_1 \times G_2 ... \times G_n$$

é um grupo. Em particular,

$$G^n = \underbrace{G \times G \times \cdots \times G}_{n} \text{ vezes}$$

é um grupo.

Dados G um grupo, $S \subseteq G$ e $\{H_\lambda\}_{\lambda \in L}$ a família dos subgrupos de G que contém S. O subgrupo de G dado por $\bigcap_{\lambda \in L} H_\lambda$ é chamado de subgrupo de G gerado por S, o qual denotaremos por $\langle S \rangle$. Este subgrupo é o menor subgrupo de G que contém S. Em particular, se $X = \{a\}$, então

$$G = \langle a \rangle = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$$

é chamado o *grupo cíclico* gerado por a.

Sejam G um grupo e H um subgrupo de G. Os conjuntos

1. $\mathcal{N}_G(H) = \{g \in G : g^{-1}Hg = H\}$,
2. $\mathcal{C}_G(H) = \{g \in G : gh = hg, \forall h \in H\}$,
3. $\mathcal{Z}(G) = \{g \in G : gx = xg, \forall x \in G\}$,

são chamados respectivamente de *normalizador* e *centralizador* de H em G, *centro* de G os quais são subgrupos de G. O normalizador de um subgrupo H em G é o maior subgrupo de G em que H é normal.

Sejam G e H conjuntos não vazios munidos com as operações binárias $*$ e $\circ$ respectivamente. Um função φ de G em H é um *morfismo* se

$$\varphi(a * b) = \varphi(a) \circ \varphi(b), \forall a, b \in G.$$

Em particular, se G e H são grupos, dizemos que φ é *homomorfismo de grupos.* Neste caso, a *imagem* de φ, $Im\ \varphi$, é um subgrupo de H. O *núcleo* de φ é o conjunto $Ker\ \varphi = \{g \in G : \varphi(g) = 1\}$, o qual é um subgrupo normal de G.

Um homomorfismo de grupos $\varphi : G \to H$ é dito um *isomorfismo* se φ é bijetiva. Quando existir um isomorfismo entre G e H dizemos que G e H são *isomorfos* e denotamos tal isomorfismo por $G \simeq H$. Um *endomorfismo* de um grupo G é um homomorfismo $\varphi : G \to G$. Denotamos por $End(G) = \{\varphi : G \to G : \varphi \text{ é um homomorfismo}\}$.

Um subgrupo H de um grupo G é dito *característico* se $\varphi(H) \subseteq H$ para todo automorfismo φ de G.

Sejam G um grupo, H e N subgrupos de G. Dizemos que G é um *produto semi direto (interno)* de N por H se as seguintes condições são satisfeitas:

1. $G = NH$;
2. $N \trianglelefteq G$
3. $N \cap H = \{1\}$.

Notação: $G = N \rtimes H$.

Dado um grupo G abeliano e $a \in G$. Dizemos que a é um *elemento de torção* de G se existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n = 1$. O conjunto $\mathrm{T}(G) = \{a \in G : o(a) < \infty\}$ é um subgrupo de G chamado o *subgrupo de torção* de G. Se $\mathrm{T}(G) = \{1\}$, dizemos que G é um grupo *livre de torção*. Note que $\dfrac{G}{\mathrm{T}(G)}$ é livre de torção.

Um elemento cuja ordem é uma potência de um primo p é chamado um *p-elemento*. Por outro lado, se p não divide a ordem do elemento, então dizemos que ele é um *p'-elemento*.

Dado um inteiro primo p, dizemos que o grupo G é um *p-grupo* se a ordem de todo elemento de G é uma potência de p, i.e., se todo elemento é um p-elemento.

Um grupo abeliano G é dito *abeliano elementar*, se existe um inteiro primo p tal que todo elemento de $G - \{1\}$ tem ordem p. Para um grupo G arbitrário, define-se o *expoente* de G, caso exista, como sendo o menor inteiro positivo m tal que $g^m = 1\ \forall g \in G$. Neste caso, escrevemos $exp(G) = m$. Note que G é um p-grupo abeliano elementar se, e somente se, $exp(G) = p$ e se G é um grupo abeliano com $exp(G) = p^m$, então $exp(G^p) = p^{m-1}$ com $G^p = \{g^p : g \in G\}$.

Um grupo não comutativo G tal que todos seus subgrupos são normais é chamado de *Grupo Hamiltoniano*. Da teoria de grupos, tem-se que um grupo G é hamiltoniano se, e somente se, G é um produto direto do grupo dos quatérnios de ordem 8, de um 2-grupo abeliano elementar E e um grupo abeliano A cujos elementos são de ordem ímpar. Um exemplo de grupo hamiltoniano é o grupo dos quatérnios.

Seja G um grupo. Uma *série subnormal* de G é uma sequência

$$\{1\} = G_0 \leq G_1 \leq ... \leq G_n = G \tag{1.1}$$

tal que

$$G_{i-1} \trianglelefteq G_i, \text{ com } 1 \leq i \leq n.$$

Os grupos

$$\frac{G_i}{G_{i-1}}, \text{ com } 1 \leq i \leq n,$$

são chamados de *grupos fatores*. O *comprimento* da série subnormal é o número de grupos fatores.

Um *refinamento* de uma série subnormal

$$\{1\} = G_0 \leq G_1 \leq ... \leq G_n = G,$$

é uma série subnormal obtida a partir desta, pela inserção de mais (possivelmente nenhum) subgrupos. O refinamento é próprio se algum subgrupo distinto dos já existentes é inserido na série.

A série subnormal é uma *série de composição* se ela não admite um refinamento próprio. Sejam

$$\{1\} = G_0 \leq G_1 \leq ... \leq G_n = G \text{ e } \{1\} = H_0 \leq H_1 \leq ... \leq H_m = H,$$

duas séries subnormais de um grupo G. Dizemos que elas são *equivalentes*, se $m = n$ e existe uma permutação $\sigma \in S_n$, tal que

$$\frac{G_i}{G_{i-1}} \simeq \frac{H_{\sigma(i)}}{H_{\sigma(i)-1}}, \text{ com } 1 \leq i \leq n.$$

O *comutador* de dois elementos $h, k \in G$ é definido por

$$[h, k] = h^{-1}k^{-1}hk.$$

O conjunto

$$G' = \langle [h, k] \mid h, k \in G \rangle$$

é chamado *subgrupo comutador* de G. Mais geralmente, se H e K são subconjuntos de G, então

$$[H, K] = \langle [h, k] \mid h \in H, k \in K \rangle$$

é um subgrupo de G. Assim, $G' = [G, G]$.

A seguir, serão enunciados alguns resultados em que omitiremos a prova. Entretanto, esta prova pode ser encontrada nas referências citadas no início do capítulo.

Teorema 1.1.1. *Seja G um grupo. Então:*

1. *G é abeliano, se e somente se, $G' = \{1\}$;*

2. *G' é um subgrupo característico de G. Em particular, G' é normal em G;*

3. *$\frac{G}{G'}$ é abeliano;*

4. *Se H é um subgrupo de G, então H é normal e $\frac{G}{H}$ é abeliano se, e somente se, $G' \subseteq H$;*

5. *Se $f : G \to L$ é um homomorfismo de grupos e H e K são subgrupos e G, então*

$$f([H, K]) = [f(H), f(K)].$$

Seja G um grupo. A *série central descendente ou inferior*

$$\gamma_1(G) \supseteq \gamma_2(G) = [\gamma_1(G), G] = [G, G] = G' \supseteq ...\gamma_i(G) \supseteq ...$$

é definida, indutivamente, por

$$\gamma_1(G) = G, ..., \gamma_{i+1}(G) = [\gamma_i(G), G].$$

Teorema 1.1.2. *Seja G um grupo. Então:*

1. *Cada $\gamma_i(G)$ é um subgrupo característico de G;*

2. *$\gamma_{i+1}(G) \leq \gamma_i(G)$;*

3. *$\dfrac{\gamma_i(G)}{\gamma_{i+1}(G)} \leq \mathcal{Z}\left(\dfrac{G}{\gamma_{i+1}(G)}\right)$.*

Dado um grupo G, a *série central ascendente (superior)*

$$\mathcal{Z}_0(G) \subseteq \mathcal{Z}_1(G) \subseteq \mathcal{Z}_2(G) \subseteq ... \subseteq \mathcal{Z}_n(G)...$$

de G é definida, intuitivamente, por

$$\mathcal{Z}_0(G) = \{e\}, ..., \mathcal{Z}_{n+1}(G) = \{x \in G :| [x, G] \subseteq \mathcal{Z}_n(G)\}.$$

Teorema 1.1.3. *Seja G um grupo. Então:*

1. *Cada $\mathcal{Z}_n(G)$, o n-ésimo centro de G, é um subgrupo característico de G;*

2. *$\mathcal{Z}_n(G) \subseteq \mathcal{Z}_{n+1}(G)$ para todo $n \geq 0$;*

3. *Se $\pi : G \to \dfrac{G}{\mathcal{Z}_n(G)}$ é a projeção canônica, então*

$$\mathcal{Z}_{n+1}(G) = \pi^{-1}\left(\mathcal{Z}\left(\frac{G}{\mathcal{Z}_n(G)}\right)\right).$$

Consequentemente, $\dfrac{\mathcal{Z}_{n+1}(G)}{\mathcal{Z}_n(G)}$ é o centro de $\dfrac{G}{\mathcal{Z}_n(G)}$.

Caso utilizemos algum resultado que não tenha sido apresentado nesta seção, as mesmas referências citadas no início do capítulo podem ser consultadas.

1.2 Anéis e Módulos

Um *anel* é um conjunto não vazio R munido de duas operações binárias, adição $(x, y) \mapsto x + y$ e multiplicação $(x, y) \mapsto xy$ tal que as seguintes propriedades valem:

1. R é um grupo comutativo com a adição.

2. $x(yz) = (xy)z$, para todo $x, y, z \in R$.

3. $x(y + z) = xy + xz$, $(x + y)z = xz + yz$, para todo $x, y, z \in R$.

Se um anel R satisfaz a propriedade:

4. Existe $1 \in R$ tal que $x1 = 1x = x$, para todo $x \in R$, dizemos que R é um *anel com identidade.*

5. Se $xy = yx$, para quaisquer $x, y \in R$, dizemos que R é um *anel comutativo.*

Se um anel R satisfaz a propriedade:

6. Para todo $x, y \in R$, $xy = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = 0$, dizemos que R é um *anel sem divisores de zero.* Caso contrário, dizemos que R é um *anel com divisores de zero.*

Um elemento $x \in R$ é dito uma *unidade* de R se existir $y \in R$, tal que $xy = yx = 1$. Denotaremos por $\mathcal{U}(R)$ o conjunto de todas as unidades de R. Se

$$\mathcal{U}(R) = R^* = R - \{0\},$$

dizemos que R é um *corpo.*

Sejam R um anel com identidade e $x \in R$. Se $n \in \mathbb{Z}$, definimos $nx \in R$ por

$$nx = \begin{cases} (n-1)x + x, & \text{se } n > 0 \\ 0, & \text{se } n = 0 \\ (-n)(-x), & \text{se } n < 0 \end{cases}$$

Sejam R um anel com identidade e $S = \{n \in \mathbb{N} :| \ na = 0, \forall a \in R\}$. Se S é não vazio, então pelo princípio da boa ordenação, S contém, um menor elemento, digamos $k \in S$. O elemento k é chamado de *característica* do anel R. Caso contrário, dizemos que R tem característica zero.

Um subconjunto não vazio S de um anel R com unidade é um *subanel* de R se as seguintes condições são satisfeitas:

1. $\forall \ x, y \in S$ tem-se $x - y \in S$;

2. $\forall \ x, y \in S$, tem-se $xy \in S$;

3. $1 \in S$.

Seja R um anel comutativo com unidade. Um *módulo* V sobre R é um grupo comutativo aditivo, munido com uma função

$$\begin{aligned} R \times V &\to V \\ (r, v) &\mapsto rv \end{aligned}$$

tal que as seguintes condições são satisfeitas:

1. $r(sv) = (rs)v$, para todo $r, s \in R$ e $v \in V$.

2. $r(u+v) = ru + rv$, para todo $r \in R$ e $u, v \in V$.

3. $(r+s)v = rv + sv$, para todo $r, s \in R$ e $v \in V$.

4. $1v = v$, para todo $v \in V$.

Note que, se R é um corpo, então um módulo V sobre R é um *espaço vetorial* sobre R.

Seja V um módulo sobre R. Se $v \in V$ pode ser escrito como

$$v = \sum_{i=1}^{n} r_i v_i :| \; r_i \in R, \text{ com } \; v_i \in V,$$

então dizemos que v é uma *combinação linear* dos elementos de $v_1, v_2, ..., v_n$ sobre R.

Uma sequência finita $v_1, v_2, ..., v_n$ de elementos de um módulo V sobre R é chamada *linearmente independente* se

$$\sum_{i=1}^{n} r_i v^i = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = ... = r_n = 0.$$

Caso contrário, dizemos que a sequência é *linearmente dependente*. Um subconjunto S de um módulo V sobre R é dito *linearmente independente* se qualquer sequência finita de elementos distintos de S é linearmente independente; caso contrário, S é dito *linearmente dependente*.

Um subconjunto S de um módulo V sobre R é dito ser uma *base* sobre R se as seguintes propriedades valem:

1. $V = \langle S \rangle$;

2. S é linearmente independente.

A definição do ítem 1., acima, é análoga a que vimos na p.6 para grupos.

Um módulo V sobre R é chamado de *módulo livre* sobre R se possui uma base. A cardinalidade da base sobre R é chamada de *posto* de V sobre R.

1.2.1 Anéis de grupo

Nesta seção apresentaremos algumas definições da teoria de anéis de grupo necessárias para uma melhor compreensão do trabalho. Para maiores detalhes consulte [11] e [15].

Dado um grupo G e um anel R, define-se um anel de grupo, representado por RG, como o conjunto de todas as somas formais quase nulas (ou seja, apenas um número finito de coeficientes de R são não nulos) representado por: $\sum_{g \in G} \alpha_g g$ com $\alpha_g \in R$ munidos das seguintes operações:

(1) Adição: $\sum_{g\in G}\alpha_g g + \sum_{g\in G}\beta_g g := \sum_{g\in G}(\alpha_g+\beta_g)g$;

(2) Multiplicação : $\left(\sum_{g\in G}\alpha_g g\right).\left(\sum_{g\in G}\beta_g g\right) := \sum_{g\in G}\sum_{h\in G}(\alpha_g\beta_h)gh$;

Podemos também definir a multiplicação de elementos de RG por elementos r do anel R:

(3) Multiplicação por escalar: $r\left(\sum_{g\in G}\alpha_g g\right) := \sum_{g\in G}(r\alpha_g)g$.

Com esta estrutura, RG admite uma estrutura de R-módulo.

Observação 1.2.1. *RG é um anel comutativo se, e somente se, G e R são comutativos.*

A função $\varepsilon : RG \to R$ definida por

$$\varepsilon(\alpha) = \varepsilon\left(\sum_{g\in G}\alpha_g g\right) = \sum_{g\in G}\alpha_g$$

é um homomorfismo de anéis sobrejetor, chamada de *função de aumento* de RG. O conjunto $\Delta_R(G) = Ker\ \varepsilon = \{\alpha = \sum_{g\in G}\alpha_g g \in RG : \sum_{g\in G}\alpha_g = 0\}$ é chamado o *ideal de aumento de RG.*

Seja N um subgrupo normal de G. Então, a função $\varphi : RG \to R\left(\frac{G}{N}\right)$ definida por

$$\varphi(\alpha) = \varphi\left(\sum_{g\in G}\alpha_g g\right) = \left(\sum_{g\in G}\alpha_g g\right)N$$

é um homomorfismo de anéis, com

$$\Delta_R(G,N) = Ker\varphi = \{\sum_{g\in G}\alpha_g g \in RG : \sum_{g\in G}\alpha_g gN = 0\}.$$

Seja G um grupo. Denotamos por

$$\mathcal{U}(\mathbb{Z}G) = \{\alpha \in \mathbb{Z}G : \alpha \text{ é inversível}\}$$

o *grupo das unidades* de $\mathbb{Z}G$ e por

$$\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G) = \{\alpha \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}G) : \varepsilon(\alpha) = 1\},$$

o *grupo das unidades normalizadas* de $\mathbb{Z}G$. Se $u \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$, então $\varepsilon(u) = \pm 1$. Como $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G) \leq \mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$, é fácil ver que $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G) = \pm 1 \times \mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$.

Um elemento da forma rg, onde $r \in \mathcal{U}(R)$ e $g \in G$, tem um inverso $r^{-1}g^{-1}$. Os elementos desta forma são chamados de *unidades triviais* de RG. Quando temos $R = \mathbb{Z}$, os elementos da forma $\pm g$ são as unidades triviais do anel de grupo $\mathbb{Z}G$. Observe que, se o anel é um corpo K, então as unidades triviais de KG são todos elementos da forma kg com $0 \neq k \in K$ e $g \in G$.

Uma unidade que usaremos bastante ao longo do trabalho é a chamada *unidade bicíclica*. Dado um elemento $a \in G$ de ordem finita, digamos n, e qualquer outro elemento $b \in G$ podemos definir tal unidade como sendo:

$$\mu_{a,b} = 1 + (a-1)b\widehat{a}, \text{ com } \widehat{a} = 1 + a + a^2 + ... + a^{n-1}$$

cuja inversa é dada por

$$\mu_{a,b}^{-1} = 1 - (a-1)b\widehat{a}.$$

Denotaremos por $\mathcal{B}_2(\mathbb{Z}G)$ (muitas vezes usaremos apenas $\mathcal{B}_2$) o subgrupo de $\mathcal{U}$ gerado por todas as unidades bicíclicas de $\mathbb{Z}G$. Claramente, se a e b comutam então $\mu_{a,b} = 1$. Mostraremos agora quando as unidades bicíclicas são triviais.

Teorema 1.2.2. *Sejam g, h elementos do grupo G com $o(g) = n < \infty$. Então, a unidade bicíclica $\mu_{g,h}$ é trivial se, e somente se, h normaliza $\langle g \rangle$ e, neste caso, $\mu_{g,h} = 1$.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Suponha que $\mu_{g,h}$ seja trivial. Assim, de $\varepsilon(\mu_{g,h}) = 1$ existe um elemento $x \in G$ tal que $\mu_{g,h} = x$. Assim, temos;

$$1 + (1-g)h\widehat{g} = x.$$

Disso, segue que

$$1 + h(1 + g + g^2 + \cdots + g^{n-1}) = x + gh(1 + g + g^2 + ... + g^{n-1}).$$

Se $x = 1$, então $h = ghg^i$ para algum inteiro i. Assim, $h^{-1}gh = g^{-i}$. Agora, suponha que $x \neq 1$. Então, $h \notin \langle g \rangle$, pois do contrário, h comutaria com g e, portanto, $x = 1$. Como 1 aparece do lado esquerdo da equação acima devemos ter também 1 no lado direito. Assim, deve existir um inteiro positivo i tal que $1 = ghg^i$. Isto implica que $h = g^{-(i+1)}$. Um absurdo. Segue que $x = 1$ e h normaliza $\langle g \rangle$.
($\Leftarrow$) Suponha agora que h normaliza $\langle g \rangle$. Então, $h^{-1}gh = g^j$ para algum inteiro positivo j. Disso, segue que $gh = hg^j$. Como $g^j\widehat{g} = \widehat{g}$, temos que $gh\widehat{g} = h\widehat{g}$. Assim, de $\mu_{g,h} = 1 + (1-g)h\widehat{g} = 1 + h\widehat{g} - gh\widehat{g} = 1$. Segue-se que $\mu_{g,h}$ é trivial. ■

Como consequência imediata, temos que, para um grupo finito G, o grupo $\mathcal{B}_2$ é trivial se, e somente se, todo subgrupo de G é normal.

Teorema 1.2.3. *Se u é uma unidade central de ordem finita em $\mathbb{Z}G$, então $u = \pm g$, onde g é um elemento de torção do centro de G.* ■

Teorema 1.2.4 (Higman). *Seja G um grupo de torção. Então, todas unidades de $\mathbb{Z}G$ são triviais se, e somente se, G ou é um grupo abeliano de expoente igual a 1,2,3,4 ou 6 ou é um 2-grupo hamiltoniano.* $\blacksquare$

Caso necessitemos de algum outro resultado não apresentado no presente capítulo, será indicado onde encontrá-lo.

Capítulo 2

Unidades f-Unitárias

Neste capítulo, iremos discutir um tipo de unidade chamada de *unidade f-unitária* e também a sua generalização – *unidade f-unitária generalizada*. Estudaremos a relação entre as unidades f-unitárias de $\mathbb{Z}G$ e as unidades f_1-unitárias de $\mathbb{Z}(G \times C_2)$. Este capítulo é baseado em [9].

Ao longo do texto, escreveremos por muitas vezes $\mathcal{U}_f$ em vez de $\mathcal{U}_f(\mathbb{Z}G)$.

2.1 Unidades f-unitárias em um anel de grupo integral

Sejam $\mathbb{Z}G$ um anel de grupo integral de um grupo arbitrário G e $f : G \to \{-1, 1\}$ um homomorfismo de grupos. Podemos definir a função $h : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}G$ que a cada $x = \sum_{g \in G} \alpha_g g$ faz corresponder $h(x) = x^f = \sum_{g \in G} \alpha_g f(g) g^{-1}$ a qual é um antiautomorfismo do anel $\mathbb{Z}G$ e é chamada de involução gerada pelo homomorfismo g. Em particular, se f é trivial,i.e., $f \equiv 1$, x^f coincide com a involução clássica,$*$, ou seja, $x^f = \sum_{g \in G} \alpha_g g^{-1} = x^*$. Definimos então

$$\mathcal{U}_f(\mathbb{Z}G) = \{u \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}G) : uu^f = \pm 1\},$$

o conjunto das unidades f-unitárias o qual é um subgrupo de $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$. Um elemento $u \in \mathcal{U}_f$ é chamado de unidade f-unitária. Quando f é trivial dizemos que $\mathcal{U}_f$ é o grupo das unidades unitárias e denotamos tal função por $*$.

O estudo das unidades unitárias foi proposto por Novikov e este subgrupo foi descrito pela primeira vez por Bovdi (ver em [2]).

Na presente seção, apresentaremos o resultado provado por Yuanlin Li, em [9] que nos mostra uma relação entre as unidades f-unitárias de $\mathbb{Z}G$ e as unidades f_1-unitárias de $\mathbb{Z}(G \times C_2)$, e discutiremos quando as unidades f-unitárias geram um subgrupo de índice finito no grupo das unidades $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$.

Dado o homomorfismo de grupos apresentado no início do texto, $f : G \to \{-1, 1\}$, podemos estendê-lo ao homomorfismo de grupos:

$$f_1 : G \times C_2 \to \{\pm 1\},$$

o qual é dado por $f_1(g, c^i) = f(g)$, sendo c o gerador de C_2 (grupo cíclico de ordem 2).

O resultado abaixo nos fornece uma relação entre as unidades f-unitárias de $\mathbb{Z}G$ e as unidades f_1-unitárias de $\mathbb{Z}(G \times C_2)$.

Teorema 2.1.1 (Yuanlin Li)**.** *Para um grupo arbitrário G, $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G) = \mathcal{U}_f(\mathbb{Z}G)$ implica que $\mathcal{U}(\mathbb{Z}(G \times C_2)) = \mathcal{U}_{f_1}(\mathbb{Z}(G \times C_2))$.*

Para provar este teorema precisaremos de alguns resultados que serão apresentados a seguir.

Proposição 2.1.2. *Os conjuntos $K = \{u = 1 + \alpha(1 - c) \mid \alpha \in \mathbb{Z}G \wedge u \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}(G \times C_2))\}$ e $H = \{v = 1 + 2\alpha \mid \alpha \in \mathbb{Z}G \wedge v \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}G)\}$ são subgrupos de $\mathcal{U}(\mathbb{Z}(G \times C_2))$ e $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$ respectivamente.*

Demonstração:

De fato, observe que $K \neq \emptyset$, pois tomando $\alpha = 0$ tem-se $1 \in K$. Agora, sejam $u = 1 + \alpha(1 - c)$ e $u_1 = 1 + \beta(1 - c)$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}G$. Mostremos que $uu_1 \in K$.

$$\begin{aligned}
(1 + \alpha(1 - c)).(1 + \beta(1 - c)) &\iff 1 + \beta(1 - c) + \alpha(1 - c) + \alpha\beta(1 - c)^2 \\
&\iff (\alpha + \beta)(1 - c) + \alpha\beta(1 - c)^2 + 1 \\
&\iff (\alpha + \beta)(1 - c) + \alpha\beta(1 - 2c + 1) + 1 \\
&\iff (\alpha + \beta)(1 - c) + 2\alpha\beta - 2\alpha\beta c + 1 \\
&\iff (\alpha + \beta)(1 - c) + 2\alpha\beta(1 - c) + 1 \\
&\iff (\alpha + \beta + 2\alpha\beta)(1 - c) + 1.
\end{aligned}$$

Chamando $\alpha + \beta + 2\alpha\beta$ de γ, temos que $uu_1 = 1 + \gamma(1 - c)$ com $\gamma \in \mathbb{Z}G$ pertence a K. Agora, tome $u_2 = 1 + \delta(1 - c) \in K$ com $\delta \in \mathbb{Z}G$, de forma que, $\alpha + \delta + 2\alpha\delta = 0$ e, assim temos que $uu_2 = 1 = u_2u$ e , portanto, $u_2 = u^{-1} \in K$. Segue que K é um subgrupo de $\mathcal{U}(\mathbb{Z}(G \times C_2))$. Agora, mostremos que H é um subgrupo de $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$. Observe que H é não vazio, pois tomando $\alpha = 0$ temos que $1 \in H$. Sejam $v = 1 + 2\alpha$ e $v_1 = 1 + 2\beta$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}G$. Mostremos que $vv_1 \in H$. De fato,

$$\begin{aligned}(1+2\alpha)(1+2\beta) &\iff 1+2\alpha+2\beta+4\alpha\beta\\ &\iff 1+2(\alpha+\beta+2\alpha\beta).\end{aligned}$$

Chamando $\alpha+\beta+2\alpha\beta$ de λ, temos que $vv_1 = 1+2\lambda$. Segue que $vv_1 \in H$. De maneira análoga ao que fizemos no subgrupo anterior, tomando $v_2 = 1+2\upsilon$, de maneira que $\alpha+\upsilon+2\alpha\upsilon = 0$, temos que $v_2 = v^{-1} \in H$. Portanto, H é um subgrupo de $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$. ■

Sabendo que os conjuntos acima são subgrupos de $\mathcal{U}(\mathbb{Z}(G\times C_2))$ e de $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$ respectivamente, faz sentido o enunciado do próximo lema.

Lema 2.1.3. *Seja G um grupo arbitrário. Então, $\mathcal{U}(\mathbb{Z}(G\times C_2))$ é um produto semidireto de K e D,i.e., $\mathcal{U}(\mathbb{Z}(G\times C_2)) = K \rtimes D$, onde $K = \{u = 1+\alpha(1-c); \alpha \in \mathbb{Z}G \wedge u \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}(G\times C_2))\}$ e $D = \mathcal{U}(\mathbb{Z}G) \subset \mathcal{U}(\mathbb{Z}(G\times C_2))$. Além disso, $1+\alpha(1-c) \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}(G\times C_2))$ se, e somente se, $1+2\alpha \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$.*

Demonstração:

Para mostrar que $\mathcal{U}(\mathbb{Z}(G\times C_2)) = K \rtimes D$, primeiro observemos que $f : (\mathbb{Z}(G\times C_2)) \to \mathbb{Z}G$ que, a cada $(\sum \alpha_i g_i + \sum \beta_i g_i c)$, faz corresponder $\sum(\alpha_i+\beta_i)g_i$ é um homomorfismo e que a sequência

$$1 \xrightarrow{f_1} K \xrightarrow{f_2} \mathcal{U}(\mathbb{Z}(G\times C_2)) \xrightarrow{f_3} \mathcal{U}(\mathbb{Z}G) \xrightarrow{f_4} 1$$

é uma sequência exata que cinde. De fato, considere os homomorfismos $f_1 : 1 \to K$, $f_2 : K \to \mathcal{U}(\mathbb{Z}(G\times C_2))$, $f_3 : \mathcal{U}(\mathbb{Z}(G\times C_2)) \to \mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$ e $f_4 : \mathcal{U}(\mathbb{Z}G) \to 1$. Note que:

(1) f_2 é um homomorfismo que a cada elemento $u \in K \subseteq \mathcal{U}(\mathbb{Z}(G\times C_2))$ faz corresponder $u \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}(G\times C_2))$. Sendo assim, f_2 é um monomorfismo.
(2) f_3 é um epimorfismo, pois f_3 é restrição de f que é um homomorfismo sobrejetor.

É fácil ver que: $\mathrm{Im} f_1 = \{1\} = \mathrm{Ker} f_2$ (pois f_2 é injetiva); $\mathrm{Im} f_3 = \mathrm{Ker} f_4$, pois f_3 é um epimorfismo e f_4 é um homomorfismo trivial. Mostremos que $K = \mathrm{Im}\ f_2 = \mathrm{Ker} f_3$.

Mostremos que $K \subseteq \mathrm{Ker} f_3$. Seja $u \in K$. Então, $u = 1+\alpha(1-c)$ com $\alpha \in \mathbb{Z}G$. Aplicando o homomorfismo f_3 temos:

$$\begin{aligned} f_3(1+\alpha(1-c)) &= f_3(1+\alpha-\alpha c)\\ &= f_3(1+\textstyle\sum_{g\in G}\alpha_i g_i - \sum_{g\in G}\alpha_i g_i c)\\ &= 1+\textstyle\sum_{g\in G}(\alpha_i-\alpha_i)g_i\\ &= 1\end{aligned}$$

Portanto, $K \subseteq \mathrm{Ker} f_3$.

Agora, mostremos que Ker$f_3 \subseteq K$. Seja $v \in$ Kerf_3 com $v = \sum \alpha_i g_i + \sum \beta_i g_i c$ e $\sum(\alpha_i + \beta_i)g_i = 1$. Disso, segue que $\alpha_i = -\beta_i$ para todo $g_i \neq 1$. Suponha que para $i = 0$, $\alpha_0 + \beta_0 = 1$. Assim:

$$
\begin{aligned}
v &= \sum \alpha_i g_i + \sum \beta_i g_i c \\
&= \alpha_0.1 + \textstyle\sum_{g_i \neq g_0} \alpha_i g_i + \beta_0 c + \sum_{g_i \neq g_0} \beta_i g_i c \\
&= \alpha_0.1 + \textstyle\sum_{g_i \neq g_0} \alpha_i g_i + \beta_0 c - \sum_{g_i \neq g_0} \alpha_i g_i c \quad \text{(denote por } \overline{\alpha} \text{ o somatório } \sum_{g_i \neq 0} \alpha_i g_i) \\
&= \alpha_0.1 + \beta_0.c + \overline{\alpha} - \overline{\alpha}c \\
&= \alpha_0 + \beta_0 c + \overline{\alpha}(1-c) \\
&= 1 - \beta_0 + \beta_0 c + \overline{\alpha}(1-c) \quad \text{(substituindo } \alpha_0 \text{ por } 1-\beta_0) \\
&= 1 - \beta_0(1-c) + \overline{\alpha}(1-c) \\
&= 1 + (\overline{\alpha} - \beta_0)(1-c) \quad \text{(denote por } \gamma \text{ a soma } (\overline{\alpha} - \beta_0)) \\
&= 1 + \gamma(1-c).
\end{aligned}
$$

Como v é uma unidade, $\gamma \in \mathbb{Z}G$ e v pode ser escrito da forma $1 + \gamma(1-c)$ segue que $v \in K$ e, por conseguinte, Ker$f_3 \subseteq K$. Portanto, $K =$ Kerf_3. Concluímos então que a sequência dada é exata. Observe que, por f_2 ser um homomorfismo injetivo, existe um homomorfismo g_2 tal que $g_2 f_1 = Id$ e, por f_3 ser um homomorfismo sobrejetor, existe um homomorfismo g_3 tal que $f_3 g_3 = Id$. Segue disso que a sequência cinde. Portanto,

$$\mathcal{U}(\mathbb{Z}(G \times C_2)) = K \rtimes D.$$

Se $u = 1 + \alpha(1-c) \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}(G \times C_2))$, então $u^{-1} \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}(G \times C_2))$. Assim, $u^{-1} = 1 + \beta(1-c)$ com $\beta \in \mathbb{Z}G$. Disso, segue que

$$
\begin{aligned}
(1+\alpha(1-c)).(1+\beta(1-c)) = 1 &\iff 1 + \beta(1-c) + \alpha(1-c) + \alpha\beta(1-c)^2 = 1 \\
&\iff (\alpha+\beta)(1-c) + \alpha\beta(1-c)^2 + 1 = 1 \\
&\iff (\alpha+\beta)(1-c) + \alpha\beta(1-2c+1) + 1 = 1 \\
&\iff (\alpha+\beta)(1-c) + 2\alpha\beta - 2\alpha\beta c + 1 = 1 \\
&\iff (\alpha+\beta)(1-c) + 2\alpha\beta(1-c) + 1 = 1 \\
&\iff (\alpha+\beta+2\alpha\beta)(1-c) + 1 = 1.
\end{aligned}
$$

Como estamos num anel de grupo e o elemento 1 está em ambos os lados, então devemos ter $(\alpha + \beta + 2\alpha\beta)(1-c) = 0$. Veja que $c \neq 1$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}G$. Então,

$$
\begin{aligned}
\alpha + \beta + 2\alpha\beta = 0 &\iff 1 + 2(\alpha + \beta + 2\alpha\beta) = 1 \\
&\iff (1+2\alpha) + 2\beta + 4\alpha\beta = 1 \\
&\iff 1 + 2\alpha + (1+2\alpha)2\beta = 1 \\
&\iff (1+2\alpha)(1+2\beta) = 1 \\
&\iff 1 + 2\alpha \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}G).
\end{aligned}
$$

■

Lema 2.1.4. *Sejam* $K = \{u = 1 + \alpha(1 - c); \alpha \in \mathbb{Z}G \wedge u \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}(G \times C_2))\}$ *e* $H = \{v = 1 + 2\alpha; v \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}G)\}$ *subgrupos de* $\mathcal{U}(\mathbb{Z}(G \times C_2))$ *e* $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$ *respectivamente. Então, K é isomorfo a H via a função* $1 + \alpha(1 - c) \longmapsto 1 + 2\alpha$.

Demonstração:

Considere a função $h : K \to H$ que a cada $1 + \alpha(1 - c)$ faz corresponder $1 + 2\alpha$. Pela segunda parte do Teorema 2.1.3, h é uma bijeção. Agora, basta mostrar que h é um homomorfismo de grupos. Sejam $u = 1 + \alpha(1 - c)$ e $v = 1 + \beta(1 - c)$, com $\alpha, \beta \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$. Assim, temos;

$$\begin{aligned} h(uv) &= h((1 + \alpha(1 - c)).(1 + \beta(1 - c))) \\ &= h(1 + \beta(1 - c) + \alpha(1 - c) + \alpha\beta(1 - 2c + 1)) \\ &= h(1 + (\alpha + \beta)(1 - c) + \alpha\beta(2 - 2c)) \\ &= h(1 + (\alpha + \beta)(1 - c) + 2\alpha\beta(1 - c)) \\ &= h(1 + (\alpha + \beta + 2\alpha\beta)(1 - c)) \\ &= 1 + 2(\alpha + \beta + 2\alpha\beta) \\ &= (1 + 2\alpha)(1 + 2\beta) \\ &= h(u)h(v). \end{aligned}$$

Segue disso que h é um isomorfismo de grupos. ■

O próximo lema é relevante, pois nos fornece o inverso das unidades f-unitárias quando estas unidades são dadas na forma $1 + 2\alpha$ com $\alpha \in \mathbb{Z}G$.

Lema 2.1.5. *Se existe* $\alpha \in \mathbb{Z}G$ *tal que* $1+2\alpha$ *é uma unidade* f*-unitária, então* $(1+2\alpha)^f = (1 + 2\alpha)^{-1}$.

Demonstração:

Suponha, por absurdo, que $(1 + 2\alpha)^f = -(1 + 2\alpha)^{-1}$. Então,

$$\begin{aligned} \varepsilon(2(1 + \alpha^f + \alpha)) &= \varepsilon((1 + 2\alpha)^f) + \varepsilon(1 + 2\alpha) \\ &= \varepsilon(-(1 + 2\alpha)^{-1}) + \varepsilon(1 + 2\alpha). \end{aligned}$$

Como ε é um homomorfismo, ε transforma unidades em unidades. Assim, temos que $\varepsilon(1 + 2\alpha) = \varepsilon((1 + 2\alpha)^{-1})$. Observe que se $\varepsilon(1 + 2\alpha) = 1$, então $\varepsilon(2(1 + \alpha^f + \alpha)) = 0$. O mesmo ocorre se $\varepsilon(1 + 2\alpha) = -1$. Logo, $\varepsilon(2(1 + \alpha^f + \alpha)) = 0$. Portanto, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \varepsilon((1+2\alpha)^f) + \varepsilon(1+2\alpha) \\ &= \varepsilon(1) + \varepsilon(2\alpha^f) + \varepsilon(1) + \varepsilon(2\alpha) \\ &= 1 + 2\varepsilon(\alpha^f) + 1 + 2\varepsilon(\alpha) \\ &= 2 + 2(\varepsilon(\alpha^f + \alpha)). \end{aligned}$$

Disso, segue que

$0 = 2(1 + \varepsilon(\alpha^f + \alpha)) \Rightarrow \varepsilon(\alpha^f + \alpha) + 1 = 0$. Logo, $\varepsilon(\alpha^f + \alpha) = -1$. Mas,

$$\begin{aligned} \varepsilon(\alpha + \alpha^f) &= \varepsilon(\sum \alpha_g g + \sum \alpha_g f(g) g^{-1}) \\ &= \varepsilon(\sum \alpha_g g) + \varepsilon(\sum \alpha_g f(g) g^{-1}) \\ &= \sum \alpha_g + \sum \alpha_g f(g) \\ &= \sum \alpha_g (1 + f(g)). \end{aligned}$$

Como $f(g) = \pm 1$, então $2 \mid (f(g)+1)$. Logo, $2 \mid \sum \alpha_g(1+f(g)) = \varepsilon(\alpha+\alpha^f) = -1$; um absurdo. Portanto, $(1+2\alpha)^f = (1+2\alpha)^{-1}$. ■

Agora podemos provar que o isomorfismo g dado no Lema 2.1.4 induz um isomorfismo entre as unidades f_1-unitárias de K e as unidades f-unitárias de H.

Lema 2.1.6. *Dado $\alpha \in \mathbb{Z}G$, $1 + 2\alpha$ é uma unidade f-unitária em $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$ se, e somente se, $1 + \alpha(1 - c)$ é uma unidade f_1-unitária de $\mathcal{U}(\mathbb{Z}(G \times C_2))$.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Suponha que $(1+2\alpha)$ é uma unidade f-unitária em $\mathcal{U}$. Então, pela Proposição 2.1.5 $(1+2\alpha)^f = (1+2\alpha)^{-1}$. Assim, $(1+2\alpha)(1+2\alpha)^f = 1$. Temos,

$$\begin{aligned} (1+2\alpha)(1+2\alpha)^f = 1 &\iff 1 + 2\alpha^f + 2\alpha + 4\alpha\alpha^f = 1 \\ &\iff \alpha + \alpha^f + 2\alpha\alpha^f = 0. \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned} (1 + \alpha(1-c))^{f_1} &= (1 + \alpha - \alpha c)^{f_1} \\ &= (1 + \sum a_g g - \sum a_g gc)^{f_1} \\ &= 1 + \sum a_g f_1(g) g^{-1} - \sum a_g f_1(gc)(gc)^{-1} \\ &= 1 + \sum a_g f_1(g) g^{-1} - \sum a_g f_1(gc) c^{-1} g^{-1} \\ &= 1 + \sum a_g f(g) g^{-1} - \sum a_g f(g) c g^{-1} \\ &= 1 + \alpha^f - c\alpha^f \\ &= 1 + \alpha^f(1-c). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
(1+\alpha(1-c))^{f_1}(1+\alpha(1-c)) &= (1+\alpha^f(1-c))(1+\alpha(1-c)) \\
&= (1+\alpha(1-c))+\alpha^f(1-c)+\alpha^f(1-c)\alpha(1-c) \\
&= (1+\alpha(1-c))+\alpha^f(1-c)+(\alpha^f-\alpha^f c)(\alpha-\alpha c) \\
&= 1+\alpha(1-c)+\alpha^f(1-c)+ \\
&+ [\alpha^f\alpha-\alpha^f\alpha c-\alpha^f\alpha c+\alpha^f\alpha c^2] \\
&= 1+\alpha(1-c)+\alpha^f(1-c)+[2\alpha^f\alpha-2\alpha^f\alpha c] \\
&= 1+\underbrace{(\alpha+\alpha^f+2\alpha^f\alpha)}_{0}(1-c) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Se calcularmos a expressão $(1+\alpha(1-c))(1+\alpha(1-c))^{f_1}$ também teremos como resultado que este produto é igual a 1. Então, segue que $(1+\alpha(1-c))^{f_1}=(1+\alpha(1-c))^{-1}$ e $(1+\alpha(1-c))$ é uma unidade f-unitária em $\mathbb{Z}(G\times C_2)$.
$(\Leftarrow)$ Agora suponha que $1+\alpha(1-c)$ é uma unidade f_1-unitária de $\mathcal{U}(\mathbb{Z}(G\times C_2))$. Devemos mostrar que $(1+2\alpha)^f=(1+2\alpha)^{-1}$. Por hipótese, $1+(\alpha+\alpha^f+2\alpha\alpha^f)(1-c)=1$. Isto implica que $\alpha+\alpha^f+2\alpha\alpha^f=0$ e, portanto, $(1+2\alpha)^f=(1+2\alpha)^{-1}$. ■

Com os resultados necessários já apresentados e demonstrados, estamos em condições de provar o teorema enunciado no início da seção.

Demonstração do Teorema 2.1.1:

Pelo que vimos no Lema 2.1.3, $\mathcal{U}(\mathbb{Z}(G\times C_2))=K\rtimes D$, com $D=\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)=\mathcal{U}_f(\mathbb{Z}G)\subseteq\mathcal{U}_{f_1}(\mathbb{Z}(G\times C_2))$. Como $H=\{v=1+2\alpha; v\in\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)\}\subset\mathcal{U}_f(\mathbb{Z}G)$, então pelo Lema 2.1.6, $K\subset\mathcal{U}_{f_1}(\mathbb{Z}(G\times C_2))$. Assim, temos

$$\mathcal{U}(\mathbb{Z}(G\times C_2))=K\rtimes D\subseteq\mathcal{U}_{f_1}(\mathbb{Z}(G\times C_2)).$$

Disso, segue que $\mathcal{U}(\mathbb{Z}(G\times C_2))=\mathcal{U}_{f_1}(\mathbb{Z}(G\times C_2))$. ■

O próximo teorema nos dará condições para que as unidades f-unitárias gerem um subgrupo de índice finito em um dado grupo das unidades $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$.

Teorema 2.1.7. *Para um grupo arbitrário G, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $[\mathcal{U}:\mathcal{U}_f]<\infty$;
2. $\forall u\in\mathcal{U}\ \exists n\in\mathbb{N}$ *tal que* $u^n\in\mathcal{U}_f$, *onde* n *depende do* u;
3. $\forall u\in\mathcal{U}\ \exists n\in\mathbb{N}$ *tal que* $(uu^f)^n\in\mathcal{U}_f$ *onde* n *depende do* u;
4. $\mathcal{U}=\mathcal{U}_f$.

Demonstração:

(1) $\Rightarrow$ (2) Suponha que $[\mathcal{U} : \mathcal{U}_f] = m$. Assim, m é o número de classes laterais de $\mathcal{U}_f$ em $\mathcal{U}$ e $u \in \mathcal{U}$. Considere as classes $u\,\mathcal{U}_f$, $u^2\,\mathcal{U}_f, u^3\,\mathcal{U}_f \ldots u^m\,\mathcal{U}_f$ mutuamente distintas, pois do contrário, teríamos o resultado. Se tivermos $u^{m+1} \in u^j\mathcal{U}_f$, com $j = 1 \ldots m$, então $u^{m+1} = u^j v$, com $v \in \mathcal{U}_f$. Disso, segue que $u^{m+1-j} = v \in \mathcal{U}_f$. Fazendo $n = m + 1 - j$, obtemos o resultado.

(2) $\Rightarrow$ (3) Suponha que valha (2). Então,

$$u^n(u^n)^f = \pm 1 \Rightarrow (u^n(u^f)^n) = \pm 1 \Rightarrow (uu^f)^n = \pm 1 \Rightarrow (uu^f)^n[(uu^f)^n]^f = \pm 1 \pm 1 = \pm 1.$$

Logo, $(uu^f)^n \in \mathcal{U}_f$.

(3) $\Rightarrow$ (4) Suponha que valha (3). Por argumento de aumento, isto implica que $(uu^f)^{2n} = 1$ e, portanto, uu^f é uma unidade de torção. Seja $uu^f = z_0 + \sum_{g_i \neq 1} z_i g_i$. Provaremos que $z_0 \neq 0$. Isto forçará a igualdade $uu^f = z_0$ (Corolário 1.3 e [15], na p.45) o que finaliza a prova. Sejam $u = \sum \alpha_i g_i$, $u^f = \sum \alpha_i f(g_i) g_i^{-1}$. Disso, segue que

$$\begin{aligned} uu^f &= z_0 + \textstyle\sum_{i \neq j} \alpha_i \alpha_j g_i g_j^{-1} f(g_j) \\ &= z_0 + \textstyle\sum_{i<j} (\alpha_i \alpha_j f(g_j) g_i g_j^{-1} + \alpha_j \alpha_i f(g_i) g_j g_i^{-1}). \end{aligned}$$

Portanto, $\pm 1 = \varepsilon(uu^f) = z_0 + \sum_{i<j} \alpha_i \alpha_j (f(g_i) + f(g_j))$ $(*)$.

Veja que $f(g_i) + f(g_j) = \pm 2$ ou esta soma é igual 0. Se $f(g_i) + f(g_j) = 0$, então $z_0 \neq 0$ e, necessariamente, $z_0 = \pm 1$. Caso tenhamos $f(g_i) + f(g_j) = \pm 2$, ficamos com a segunda parcela do somatório em $(*)$ sendo uma soma de números pares e primeira parcela sendo z_0. Como o elemento 1 aparece em um dos membros da igualdade $(*)$, devemos ter também este mesmo elemento no outro membr. Isto forçara $z_0 = \pm 1$ e, consequentemente, $z_0 \neq 0$.

(4) $\Rightarrow$ (1) Imediato . ∎

Em [4], Bovdi e Sehgal apresentaram uma série de condições necessárias para que o grupo das unidades seja f-unitário i.e., $\mathcal{U} = \mathcal{U}_f$, caracterizando o grupo G e considerando o homomorfismo não trivial. Nesse mesmo artigo, é discutido até que ponto esta série de condições também é suficiente para que o grupo das unidades seja f-unitário. A prova deste teorema pode ser encontrada na referência dada acima.

2.2 Unidades f-unitárias generalizadas

Nesta seção, introduziremos um novo tipo de unidade: as unidades f-unitárias generalizadas. Este tipo de unidade é uma generalização das unidades f-unitárias definidas na seção anterior. Apresentaremos a demonstração que nos mostra que as unidades f-unitárias generalizadas formam um subgrupo $\mathcal{U}_{g,f}(\mathbb{Z}G)$ (às vezes denotado apenas por $\mathcal{U}_{g,f}$) o qual é o normalizador de $\mathcal{U}_f$ em $\mathcal{U}$. Mais ainda, quando o grupo é periódico, o segundo normalizador do grupo das unidades f-unitárias é igual ao normalizador.

2.2.1 O normalizador de $\mathcal{U}_f$

Sejam $f : G \to \{-1, 1\}$ o homomorfismo de grupos dado na seção anterior e $\mathcal{C}$ o centro de $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$. Quando $u \in \mathcal{U}$ satisfaz $uu^f \in \mathcal{C}$ (pertence ao centro do grupo das unidades), dizemos que u é uma unidade f-unitária generalizada. A partir de agora, denotaremos o conjunto de todas essas unidades por $\mathcal{U}_{g,f}$.

Teorema 2.2.1. *O conjunto $\mathcal{U}_{g,f}$ é um subgrupo de $\mathcal{U}$ o qual é o normalizador de $\mathcal{U}_f$ em $\mathcal{U}$.*

Demonstração:

É fácil ver que $\mathcal{U}_{g,f}$ é um subgrupo de $\mathcal{U}$. Agora, mostremos que $\mathcal{U}_{g,f}$ é o normalizador de $\mathcal{U}_f$ em $\mathcal{U}$. É claro que $\mathcal{U}_f \leq \mathcal{U}_{g,f}$. Sejam $u \in \mathcal{U}_f$ e $v \in \mathcal{U}_{g,f}$. Mostremos que $w = v^{-1}uv \in \mathcal{U}_f$, i.e., que $ww^f = \pm 1$. Ora, temos que $w^f = v^f u^f v^{-f}$. Assim sendo, $ww^f = v^{-1}uvv^f u^f v^{-f}$. Como $v \in \mathcal{U}_{g,f}$, então $uvv^f = vv^f u$. Disso, segue que $ww^f = v^{-1}vv^f uu^f v^{-f} = \pm 1$. Segue então que $\mathcal{U}_f \trianglelefteq \mathcal{U}_{g,f}$. Por definição, $\mathcal{U}_{g,f} \subseteq \mathcal{N}_{\mathcal{U}}(\mathcal{U}_f)$ (o normalizador de $\mathcal{U}_f$ em $\mathcal{U}$). Agora, tome $v \in \mathcal{N}_{\mathcal{U}}(\mathcal{U}_f)$. Para qualquer $u \in \mathcal{U}_f$, $(v^{-1}uv)(v^f u^f v^{-f}) = \pm 1$, pois $v^{-1}uv \in \mathcal{U}_f$. Assim, $v^{-1}uvv^f u^f v^{-f} = \pm 1$ Logo, $uvv^f u^f = \pm vv^f$. Tome $u = g \in G$. Disso, segue que $gvv^f g^f = \pm vv^f$. Como $g^f = \pm g^{-1}$, temos que $gvv^f = \pm vv^f g$. Suponha que $gvv^f = -vv^f g$. Então, por argumento de aumento (i.e., por aplicar a função de aumento em ambos os membros) temos

$$\varepsilon(gvv^f) = -\varepsilon(v)\varepsilon(v)^f \varepsilon(g) \Rightarrow 1 = -1 \ ou \ -1 = 1.$$

Um absurdo.

Então, segue que $gvv^f = vv^f g$ para todo $g \in G$. Logo, $v \in \mathcal{U}_{g,f}$. Disso, segue que $\mathcal{N}_{\mathcal{U}}(\mathcal{U}_f) \subseteq \mathcal{U}_{g,f}$ e, portanto, $\mathcal{U}_{g,f} = \mathcal{N}_{\mathcal{U}}(\mathcal{U}_f)$. ■

Corolário 2.2.2 (Sehgal e Bovdi). *O subgrupo das unidades f-unitárias $\mathcal{U}_f$ é um subgrupo normal de $\mathcal{U}$ se, e somente se, $\mathcal{U}_{g,f} = \mathcal{U}$.*

Demonstração:
($\Leftarrow$) Já temos $\mathcal{U}_{g,f} \subseteq \mathcal{U}$. Suponha que $\mathcal{U}_f \trianglelefteq \mathcal{U}$. De $G \subseteq \mathcal{U}_f$, segue que dado $u \in \mathcal{U}$ tem-se $u^{-1}gu \in \mathcal{U}_f$ para todo $g \in G$. Logo, $(u^{-1}gu)(u^{-1}gu)^f = \pm 1$. Como $u^{-1}guu^f g^f u^{-f} = \pm 1$, segue que $guu^f = \pm uu^f g$. Por argumento de aumento, $guu^f = uu^f g$ para todo $g \in G$. Disso, segue que $uu^f \in \mathcal{C}$ e, por conseguinte, $u \in \mathcal{U}_{g,f}$. Portanto, $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}_{g,f}$ e assim temos $\mathcal{U}_{g,f} = \mathcal{U}$.
($\Leftarrow$) Imediato. ∎

Teorema 2.2.3. *Para todo $v \in \mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G)$, $vv^f \in \mathcal{C}$, i.e., $\mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G) \subseteq \mathcal{U}_{g,f}$.*

Demonstração:
Dados $g \in G$ e $v \in \mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G)$ temos que $v^{-1}gv \in G$. Como $G \subseteq \mathcal{U}_f$, então $(v^{-1}gv)(v^{-1}gv)^f = \pm 1$. Disso, segue que $v^{-1}gvv^f g^f v^{-f} = \pm 1$ o que implica $gvv^f = \pm vv^f g$. Por argumento de aumento, $gvv^f = vv^f g$. Segue que $vv^f \in \mathcal{C}$ e, portanto, $v \in \mathcal{U}_{g,f}$. ∎

Definição 2.2.4. *Um grupo G é dito periódico (ou grupo de torção) se todo elemento de G tem ordem finita.*

Agora iremos estudar o segundo normalizador de $\mathcal{U}_f$, i.e., $\mathcal{N}_{\mathcal{U}}(\mathcal{U}_{g,f})$.

Teorema 2.2.5 (Yuanlin Li). *Se G é um grupo periódico, então $\mathcal{N}(\mathcal{U}_{g,f}) = \mathcal{U}_{g,f}$.*

Para provar este teorema, precisamos de alguns resultados apresentados a seguir.

Lema 2.2.6. *Seja $\{x_i; \wedge\ i = 1, 2, \cdots, n\}$ um conjunto finito de elementos de $\mathbb{Z}G$. Se $\sum_{i=1}^{n} \sigma_i x_i x_i^f = \pm g$, onde $g \in G$ e cada $\sigma_i = \pm 1$, então $g = 1$.*

Demonstração:
Para cada $x_i \in \mathbb{Z}G$, seja $x_i = \sum a_{i_j} g_{i_j}$. Assim, $x_i^f = \sum a_{i_j} f(g_{i_j}) g_{i_j}^{-1}$. Como $g_{i_j}^f = f(g_{i_j}) g_{i_j}^{-1}$, então $x_i^f = \sum a_{i_j} g_{i_j}^f$. Logo,

$$x_i x_i^f = (\sum \pm a_{i_j}^2) 1_G + \sum_{j_1 \neq j_2} a_{i_{j_1}} a_{i_{j_2}} g_{i_{j_1}} g_{i_{j_2}}^f = (\sum \pm a_{i_j}^2) 1_G + \sum_{j_1 < j_2} (a_{i_{j_1}} a_{i_{j_2}} g_{i_{j_1}} g_{i_{j_2}}^f + a_{i_{j_2}} a_{i_{j_1}} g_{i_{j_2}} g_{i_{j_1}}^f),$$

Então,

$$\pm g = \sum (\sigma_i x_i x_i^f) = (\sum (\sigma_i \sum \pm a_{i_j}^2)) 1_G + \sum (\sigma_i \sum_{j_1 < j_2} a_{i_{j_1}} a_{i_{j_2}} (g_{i_{j_1}} g_{i_{j_2}}^f + g_{i_{j_2}} g_{i_{j_1}}^f)) \quad (1).$$

Por argumento de aumento obtemos:

$$z_0 + z_1 = \pm 1,$$

com $z_0 = \sum(\sigma_i \sum \pm a_{i_j}^2)$ e $z_1 = \sum(\sigma_i \sum_{j_1<j_2} a_{i_{j_1}} a_{i_{j_2}} (f(g_{i_{j_1}}) + f(g_{i_{j_2}})))$. Note que $f(g_{i_{j_1}}) + f(g_{i_{j_2}}) = \pm 2$ ou esta soma é igual a 0. Isto mostra que z_1 é um número par. Logo, $z_0 \neq 0$. Observe também que z_0 é a soma de todos os coeficientes do 1_G. Logo, nenhum dos coeficientes de $\sum(\sigma_i \sum_{j_1<j_2} a_{i_{j_1}} a_{i_{j_2}} (g_{i_{j_1}} g_{i_{j_2}}^f + g_{i_{j_2}} g_{i_{j_1}}^f))$ está multiplicado por 1. Assim, pelo fato do elemento 1_G está em um membro da equação (1) e também por estarmos em um anel de grupo, deve-se ter 1_G também no outro membro. Portanto, $g = 1$. ■

Corolário 2.2.7. *Para todo $u \in \mathbb{Z}G$, se $uu^f = \pm g$, então $g = 1$. Consequentemente, u é uma unidade unitária.*

Demonstração:

A demonstração segue diretamente do Lema 2.2.6. ■

O próximo teorema nos fornece mais uma relação entre $\mathcal{U}_f$ e $\mathcal{U}_{g,f}$ quando G é um grupo qualquer. Vale observar que estes resultados listados é para provar que o segundo normalizador do grupo das unidades f-unitárias estaciona quando G é periódico. Entretanto, estes mesmos resultados valem para um grupo qualquer.

Teorema 2.2.8. *Para qualquer grupo G, $\mathrm{T}(\mathcal{U}_{g,f}) = \mathrm{T}(\mathcal{U}_f)$, onde T denota o subconjunto dos elementos de torção.*

Demonstração:

Precisamos provar apenas que $\mathrm{T}(\mathcal{U}_{g,f}) \subseteq \mathrm{T}(\mathcal{U}_f)$, pois já temos a inclusão contrária pois, $\mathcal{U}_f \subseteq \mathcal{U}_{g,f}$. Se $u \in \mathrm{T}(\mathcal{U}_{g,f})$, então $u \in \mathcal{U}_{g,f}$ e, por conseguinte, $uu^f = c \in \mathcal{C}$. Disso, segue que $uu^f = u^f u$ e concluímos que $o(c) < \infty$. Pelo Teorema 1.2.3, obtemos $c = \pm g$. Pelo Corolário 2.2.7, $uu^f = \pm g$ o que implica $g = 1$. Disso, segue que $u \in \mathrm{T}(\mathcal{U}_f)$. Portanto, $\mathrm{T}(\mathcal{U}_{g,f}) = \mathrm{T}(\mathcal{U}_f)$. ■

Proposição 2.2.9. *Dado $u \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$, $uu^* = 1$ se, e somente se, $u = \pm g$ para algum $g \in G$ em que $*$ é o homomorfismo trivial.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Suponha que $uu^* = 1$ com $u = \sum_{g_i \in G} \alpha_g g$ e $u^* = \sum_{g \in G} \alpha_g g^{-1}$. Então,

$$1 = uu^* = \sum_{g \in G} (\alpha_g)^2 . 1_G + \sum_{G \ni g \neq 1} \alpha_g g.$$

Disso, segue que $\sum_{g\in G}(\alpha_g)^2 = 1$. Logo, existe um único g_0 tal que $\alpha_g = \pm 1$ e $\alpha_g = 0$ para todo $g \neq g_0$. Segue disso que $u = \pm g_0$.
($\Leftarrow$) Claramente, se $u = \pm g$, então $uu^* = 1$. ■

Pela proposição anterior, se f é trivial, então $\mathcal{U}_f = \pm G$. Portanto, pelo Teorema 2.2.1, $\mathcal{N}_{\mathcal{U}}(\pm G) = \mathcal{U}_{g,f}$. Como consequência imediata temos que $\mathrm{T}(\mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G)) = \pm\mathrm{T}(G)$.

Agora estamos em condições de provar o Teorema 2.2.5.

Demonstração do Teorema 2.2.5

Devemos mostrar que $\mathcal{N}_{\mathcal{U}}(\mathcal{U}_{g,f}) = \mathcal{U}_{g,f}$.
($\subseteq$) Seja $v \in \mathcal{N}_{\mathcal{U}}(\mathcal{U}_{g,f})$ e $g \in G$. Note que $G \subseteq \mathrm{T}(\mathcal{U}_{g,f})$, pois G é periódico. Assim, $v^{-1}gv \in \mathcal{U}_{g,f}$. Seja $g \in G$ com $o(g) = n$. Como $(v^{-1}gv)^n = v^n g^n v^{-n} = 1$, então $v^{-1}gv \in \mathrm{T}(\mathcal{U}_{g,f}) = \mathrm{T}(\mathcal{U}_f)$. Logo,

$$\pm 1 = v^{-1}gv(v^{-1}gv)^f = v^{-1}gvv^f g^f v^{-f} \Rightarrow gvv^f = \pm vv^f g.$$

Por argumento de aumento, $gvv^f = vv^f g$. Portanto, $vv^f \in \mathcal{C}$. Segue que $v \in \mathcal{U}_{g,f}$.
($\supseteq$) Imediato. ■

Corolário 2.2.10. *Para qualquer grupo periódico G, $\mathcal{U}_{g,f}$ é um subgrupo normal de $\mathcal{U}$ se, e somente se, $\mathcal{U}_{g,f} = \mathcal{U}$.*

Demonstração:
($\Rightarrow$) Suponha que G seja um grupo periódico. Então, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $g^n = 1$ para todo $g \in G$. Suponha que $\mathcal{U}_{g,f} = \mathcal{U}$. Mostremos que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}_{g,f}$, pois já temos a inclusão contrária. Seja $u \in \mathcal{U}$. Queremos verificar que $uu^f \in \mathcal{C}(\mathcal{U}(\mathbb{Z}G))$. De $G \subseteq \mathcal{U}_{g,f}$, temos que $u^{-1}gu \in \mathcal{U}_{g,f}$ para todo $g \in G$. Disso, segue que $(u^{-1}gu)^n = 1$ e, por conseguinte, $u^{-1}gu \in \mathrm{T}(\mathcal{U}_{g,f}) = \mathrm{T}(\mathcal{U}_f)$. Assim,

$$\pm 1 = u^{-1}gu(u^{-1}gu)^f = u^{-1}guu^f g^f u^{-f} \Rightarrow guu^f = uu^f g.$$

Por argumento de aumento, $guu^f = uu^f g$ para todo $g \in G$. Logo, $uu^f \in \mathcal{C}$. Segue que $u \in \mathcal{U}_{g,f}$. Portanto, $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}_{g,f}$, o que implica $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{g,f}$.
($\Leftarrow$) Imediato. ■

Agora apresentaremos alguns resultados técnicos acerca do $\mathcal{N}(\mathcal{U}_{g,f})$ para um grupo G arbitrário. Estes resultados nos serão úteis mais tarde.

Teorema 2.2.11. *Para qualquer grupo G, $v \in \mathcal{N}(\mathcal{U}_{g,f})$ se, e somente se, $\forall u \in \mathcal{U}_{g,f}\ \exists c \in \mathcal{C}$ tal que $u(vv^f) = c(vv^f)u$ e $c = c^f$.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Para provar a primeira parte, i.e., $\exists c \in \mathcal{C}$ tal que $u(vv^f) = c(vv^f)u$, tome $v \in \mathcal{N}(\mathcal{U}_{g,f})$. Então, para todo $u \in \mathcal{U}_{g,f}$, temos $v^{-1}uv \in \mathcal{U}_{g,f}$. Disso, segue que $v^{-1}uv(v^{-1}uv)^f \in \mathcal{C}$, ou seja , $v^{-1}u(vv^f)u^f v^{-f} = c_1$ com $c_1 \in \mathcal{C}$. Assim, $uvv^f u^f v^{-f} = vc_1$. Ora, valem as seguintes implicações

$$uvv^f u^f v^{-f} = vc_1 \Rightarrow uvv^f u^f = vc_1 v^f \Rightarrow uvv^f = vc_1 v^f u^{-f} \Rightarrow uvv^f = c_1 vv^f u^{-f}. \qquad (1)$$

Logo, temos que $u \in \mathcal{U}_{g,f}$. Temos também as implicações

$$u \in \mathcal{U}_{g,f} \Rightarrow uu^f \in \mathcal{C} \Rightarrow uu^f = c_2 \Rightarrow c_2^{-1}u = u^{-f}.$$

Substituindo a igualdade $c_2^{-1}u = u^{-f}$ em (1) obtemos:

$$uvv^f = c_1 vv^f c_2^{-1} u = c_1 c_2^{-1} vv^f u \Leftrightarrow uvv^f = cvv^f u, \mathrm{onde} c = c_1 c_2^{-1}.$$

Logo,

$$u(vv^f) = c(vv^f)u \qquad (2).$$

Resta mostrar a segunda parte, i.e., $c = c^f$. Temos:

$$\begin{aligned} uvv^f = cvv^f u &\Rightarrow (uvv^f)^f = (cvv^f u)^f \\ &\Rightarrow vv^f u^f = u^f vv^f c^f. \ (3) \end{aligned}$$

Multiplicando (3) à direita por (2) temos $uvv^f vv^f u^f = cvv^f uu^f vv^f c^f$. Logo,

$$\begin{aligned} u(vv^f)^2 u^f &= cvv^f vv^f uu^f c^f \\ &= c(vv^f)^2 uu^f c^f \\ &= c(vv^f)^2 c^f uu^f \\ &= cc^f (vv^f)^2 uu^f. \ (4) \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} u(vv^f)^2 u^f &= uvv^f vv^f u^f \\ &= cvv^f uvv^f u^f \\ &= c^2 (vv^f)^2 uu^f. \ (5) \end{aligned}$$

De (4) e (5), temos:

$$cc^f (vv^f)^2 uu^f = c^2 (vv^f)^2 uu^f \Rightarrow cc^f = c^2 \Rightarrow c^f = c.$$

($\Leftarrow$) Para a volta, basta repetir o processo da primeira parte da implicação anterior. $\blacksquare$

Corolário 2.2.12. *Para um grupo arbitrário G, se $v \in \mathcal{N}(\mathcal{U}_{g,f})$, então $o(vv^f) = \infty$ ou $(vv^f)^2 = 1$.*

Demonstração:

Seja $v \in \mathcal{N}(\mathcal{U}_{g,f})$. Se $o(vv^f) < \infty$, então $o(vv^f)^2 < \infty$. Primeiro provemos que $(vv^f)^2 \in \mathcal{C}$.

Do Teorema 2.2.11, temos que $uvv^f = cvv^f u$ com $u \in \mathcal{U}_{g,f}$ e $c = c^f$. Suponhamos que $(vv^f)^n = 1$. Assim, temos que:

$$\begin{aligned} u &= u(vv^f)^n = uvv^f(vv^f)^{n-1} = cvv^f u(vv^f)^{n-1} = cvv^f uvv^f(vv^f)^{n-2} = \cdots = c^n(vv^f)^n u \\ &= c^n u. \end{aligned}$$

Disso, segue que $u = c^n u$ e, por conseguinte, $c^n = 1$. Como c é unidade central de ordem finita, então, pela Proposição 1.2.3, $c = \pm g$. Portanto, de $c = c^f$, tem-se $c^2 = cc^f = gg^{-1} = 1$. Logo, $u(vv^f)^2 = uvv^f vv^f = cvv^f uvv^f = cvv^f cvv^f u = c^2(vv^f)^2 u = (vv^f)^2 u$ para todo $u \in \mathcal{U}_{g,f}$. Assim, temos que $(vv^f)^2 \in \mathcal{C}$.

Agora provaremos que $(vv^f)^2 = 1$. De $o(vv^f) < \infty$, temos que $o(vv^f)^2 < \infty$. Segue disso que $(vv^f)^2 = \pm g_0$. Portanto, pelo Lema 2.2.6, $g_0 = 1$. ■

Agora vamos apresentar um teorema que nos fornece condições para que $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{g,f}$ quando G é periódico.

Teorema 2.2.13. *Para qualquer grupo periódico G, as seguintes condições são equivalentes.*

1. $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{g,f}$;

2. $\mathcal{U}_{g,f} \trianglelefteq \mathcal{U}$;

3. $\forall v \in \mathcal{U}\ \forall u \in \mathcal{U}_{g,f}\ \exists c \in \mathcal{C}$ *tal que* $u(vv^f) = c(vv^f)u$ *e* $c = c^f$;

4. $\mathcal{U}_f \trianglelefteq \mathcal{U}$.

Demonstração:

(1) $\Leftrightarrow$ (2) Segue do Corolário 2.2.10.

(2) $\Rightarrow$ (3) Suponha que $\mathcal{U}_{g,f}$ é um subgrupo normal de $\mathcal{U}$. Então, dado $u \in \mathcal{U}$, $u^{-1}vu \in \mathcal{U}_{g,f}$ para todo $v \in \mathcal{U}_{g,f}$. Repetindo a prova do Teorema 2.2.11, obtemos o resultado.

(3) $\Rightarrow$ (2) Suponha que valha (3). Então, dados $v \in \mathcal{U}$ e $u \in \mathcal{U}_{g,f}$. Mostremos que $v^{-1}uv \in \mathcal{U}_{g,f}$. Temos :

$$\begin{aligned}(v^{-1}uv)(v^{-1}uv)^f &= v^{-1}uvv^fu^fv^{-f}\\ &= v^{-1}cvv^fuu^fv^{-f}\\ &= cv^fuu^fv^{-f}\\ &= cuu^fv^fv^{-f}\\ &= cuu^f \in \mathcal{C}\end{aligned}$$

Logo, $v^{-1}uv \in \mathcal{U}_{g,f}$. Portanto, $\mathcal{U}_{g,f} \trianglelefteq \mathcal{U}$.
(1) $\Leftrightarrow$ (4) Segue diretamente do Corolário 2.2.2. ■

De maneira bastante análoga ao que fizemos para o Teorema 2.1.7, apresentaremos condições para que $\mathcal{U}_{g,f} = \mathcal{U}_f$.

Teorema 2.2.14. *Para um um grupo G arbitrário, as seguintes condições são equivalentes:*

1. $\mathcal{U}_{g,f} = \mathcal{U}_f$;
2. $[\mathcal{U}_{g,f} : \mathcal{U}_f] < \infty$;
3. $\forall u \in \mathcal{U}_{g,f}$ $\exists n \in \mathbb{N}$ *tal que* $u^n \in \mathcal{U}_f$ *onde* n *depende de* u;
4. $\forall u \in \mathcal{U}_{g,f} \exists n \in \mathbb{N}$ *tal que* $(uu^f)^n \in \mathcal{U}_f$;
5. $\forall c \in \mathcal{C}$ *tal que* $cc^f = \pm 1$.

Demonstração:
(1) $\Rightarrow$ (2) Imediato.
(2) $\Rightarrow$ (3) Prova-se de maneira análoga ao que fizemos para a implicação (1) $\Rightarrow$ (2) do Teorema 2.1.7.
(3) $\Rightarrow$ (4) Prova-se de maneira análoga ao que fizemos para a implicação (2) $\Rightarrow$ (3) do Teorema 2.1.7.
(4) $\Rightarrow$ (5) Suponha que valha (4). Seja $c \in \mathcal{C}$. Mostremos que $cc^f = \pm 1$. Como $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{U}_{g,f}$, então existe n tal que $(cc^f)^n = \pm 1$. Tomando $n = 1$ temos o resultado.
(5) $\Rightarrow$ (1) Suponha que valha (5). Mostremos que $\mathcal{U}_{g,f} \subseteq \mathcal{U}_f$, pois já temos a outra inclusão. Seja $u \in \mathcal{U}_{g,f}$. Então, $uu^f \in \mathcal{C}$. Assim, $\pm 1 = (uu^f)(uu^f)^f = uu^fuu^f = (uu^f)^2 = \pm 1$. Logo, $uu^f = \pm 1$. Segue disso que $\mathcal{U}_{g,f} \subseteq \mathcal{U}_f$. Portanto, $\mathcal{U}_f = \mathcal{U}_{g,f}$. ■

Observemos que, quando o homomorfismo f é trivial tem-se que: para qualquer G, $\mathcal{U}_{g,f} = \mathcal{U}$ se, e somente se, $G \trianglelefteq \mathcal{U}$. Esta observação é relevante, pois podemos desconsiderar os Corolários 2.2.2 e 2.2.10. A seguir, apresentaremos o teorema que nos fornece uma condição suficiente para que tenhamos $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{g,f}$.

Teorema 2.2.15. *Seja $f : G \to \mathcal{U}(\mathbb{Z})$ um homomorfismo não trivial, com núcleo A. Suponha que G tem um elemento b tal que $G = \langle A, b\rangle$, que A é um grupo abeliano e que a ordem de b é igual a 4 e $bab^{-1} = a^{-1}$ para todo $a \in A$. Então, $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{g,f}$.*

Demonstração:

Suponha que $A = ker(f)$ é um grupo abeliano, $o(b) \mid 4$ e $bab^{-1} = a^{-1}$ $\forall a \in A$. Note que $f(b) = -1$, pois do contrário, $G = A$ e f seria trivial, implicando que $b^2 \in A$. Já temos que $\mathcal{U}_{g,f} \subseteq \mathcal{U}$. Resta ver que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}_{g,f}$. Tome $u = a_1 + a_2 b \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$ onde $a_i \in \mathbb{Z}A$ e $i \in \{1, 2\}$. Sejam $a_1 = \sum \alpha_g g$ e $a_2 = \sum \alpha_h h$ onde $g, h \in A$.

Observe que $u^f = a_1^* - a_2 b^{-1}$. De fato, $u^f = a_1^f + a_2^f b^f$ implica que:

$$\begin{aligned} u^f &= \textstyle\sum \alpha_g f(g) g^{-1} + \sum \alpha_h f(hb)(hb)^{-1} \\ &= \textstyle\sum \alpha_g g^{-1} - \sum \alpha_h b^{-1} h^{-1} \\ &= \textstyle a_1^* - \sum \alpha_h h b^{-1} \\ &= a_1^* - a_2 b^{-1}. \end{aligned}$$

Agora considere $v = uu^f$ e note que $v = a_1 a_1^* - a_2 a_2^* + a_1 a_2 b(1 - b^{-2})$, pois

$$\begin{aligned} v &= (a_1 + a_2 b)(a_1^* - a_2 b^{-1}) \\ &= a_1 a_1^* - a_1 a_2 b^{-1} + a_2 b a_1^* - a_2 b a_2 b^{-1} \\ &= \textstyle a_1 a_1^* - a_1 a_2 b^{-1} + \sum \alpha_h h b \sum \alpha_g g^{-1} - a_2 b \sum \alpha_h h b^{-1} \\ &= \textstyle a_1 a_1^* - a_1 a_2 b^{-1} + \sum \alpha_h \alpha_g h b g^{-1} - a_2 \sum \alpha_h b h b^{-1} \\ &= \textstyle a_1 a_1^* - a_1 a_2 b^{-1} + \sum \alpha_h \alpha_g h b g^{-1} - a_2 \sum \alpha_h h^{-1} \\ &= \textstyle a_1 a_1^* - a_1 a_2 b^{-1} + \sum \alpha_h \alpha_g h g b - a_2 a_2 \\ &= \textstyle a_1 a_1^* - a_1 a_2 b^{-1} + \sum \alpha_g \alpha_h h g b - a_2 a_2^* \\ &= a_1 a_1^* - a_1 a_2 b^{-1} + a_1 a_2 b - a_2 a_2^* \\ &= a_1 a_1^* - a_2 a_2^* + a_1 a_2 b(1 - b^{-2}) \end{aligned}$$

Se $o(b) = 2$, então $v = uu^f = a_1 a_1^* - a_2 a_2^*$. Não é difícil ver que $uu^f \in \mathcal{C}$. Basta verificar que uu^f comuta com os geradores de G. Se $g \in A$, então usando o fato de A ser abeliano concluímos que $g(uu^f) = (uu^f)g$ para $g \in A$. Agora vejamos que b comuta com uu^f. Temos que $buu^f = uu^f b$ se, e somente se, $buu^f b^{-1} = uu^f$. Também temos :

$$b(a_1 a_1^* - a_2 a_2^*) b^{-1} = b a_1 b^{-1} b a_1^* b^{-1} - b a_2 b^{-1} b a_2^* b^{-1}.$$

Usando a hipótese de que $bab^{-1} = a^{-1}$, para todo $a \in A$, e o fato de A ser abeliano, concluímos que $buu^f b^{-1} = uu^f$. Segue disso que $uu^f \in \mathcal{C}$ e concluímos que $u \in \mathcal{U}_{g,f}$.

Agora suponha que $o(b)|4$. Fazendo um cálculo simples concluímos que $v^* = (uu^f)^* = a_1a_1^* - a_2a_2^* - a_1a_2b(1-b^2)$. Disso, segue que $vv^* = (a_1a_1^*)^2 + (a_2a_2^*)^2 - 2(a_1a_1^* - a_2a_2^*)b^2 = (a_1a_1^* - a_2a_2^*b)^2 = c^2$, com $c = (a_1a_1^* - a_2a_2^*b) = c^* = c^f \in \mathcal{C}$. Seja $v_1 = vc^{-1}$. Assim,

$$v_1v_1^* = vc^{-1}(c^{-1})^*v^* = vv^*c^{-1}(c^*)^{-1} = 1.$$

Concluímos, então que $v_1 = \pm g$ para algum $g \in G$ e $v = \pm cg$. Seja $g = ab^i$ com $a \in A$ e $i = 0, 1$. Se $i = 1$, então $g = ab$ e $v = \pm cab$. Logo,

$$c = a^{-1}vb^3 = a^{-1}(a_1a_1^* - a_2a_2^*)b^3 + a^{-1}(a_1a_2(1-b^2)) \in \mathcal{C}.$$

Observe que, como $c \in \mathbb{Z}A$, cada parcela também tem que pertencer a $\mathbb{Z}A$. Entretanto, $a^{-1}(a_1a_1^* - a_2a_2^*)b^3 \notin \mathbb{Z}A$, pois $b^3 \notin A$. Assim, devemos ter $a^{-1}(a_1a_1^* - a_2a_2^*)b^3 = 0$. Absurdo, pois $\varepsilon(a_1a_1^* - a_2a_2^*) = 1$. Esta última igualdade é devido ao fato de termos c sendo uma unidade e, por isto, ter aumento igual a ± 1. Segue que $i = 0$ e $g = a$. Agora, de

$$a^{-1}(a_1a_1^* - a_2a_2^*) + a^{-1}(a_1a_2(1-b^2)b) = a^{-1}v = \pm c \in \mathbb{Z}A,$$

concluímos que $(a_1a_2(1-b^2)b) = 0$, pois $\pm c \in \mathbb{Z}A$ e $a_1a_2(1-b^2)b \notin \mathbb{Z}A$ (pelo fato de $b \notin A$). Multiplicando à esquerda por a, obtemos $a_1a_2(1-b^2)b = 0$. Logo, $v = uu^f = a_1a_1^* - a_2a_2^* \in \mathcal{C}$. Portanto, $u \in \mathcal{U}_{g,f}$ e, consequentemente, $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{g,f}$. ■

Vale ressaltar que o teorema acima, mostrou apenas a suficiência de uma das condições necessárias para se ter $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{g,f}$.

Capítulo 3

Subgrupos Unitários

Neste capítulo estudaremos o artigo [3], apresentaremos alguns resultados que podem ser estendidos do anel de grupo $\mathbb{Z}G$ para o anel de grupo $\mathbb{Z}(G \times C_2)$ e também o teorema que nos mostra que o índice das unidades bicíclicas no grupo das unidades unitárias é finito quando o grupo G é o grupo diedral. Além disso, apresentaremos um teorema que caracteriza grupos G para os quais $\mathcal{B}_2(\mathbb{Z}G) \leq \mathcal{U}_{g,f}$. O estudo do grupo das unidades bicíclicas tem grande importância quando o mesmo tem índice finito no grupo das unidades. Como foi dito anteriormente, o grupo das unidades é um grupo complicado de ser estudado e, portanto, encontrar geradores pode ser uma tarefa difícil. Entretanto, pode ser mais "fácil" encontrar os geradores de um subgrupo do grupo das unidades quando o índice no grupo é finito. O leitor interessado pode consultar a referência [8] na qual encontrará alguns resultados nos quais o subgrupo das unidades bicíclicas desempenha um papel importante. Por fim, apresentaremos um análogo à conjectura do normalizador e algumas relações entre as unidades f-unitárias generalizadas e as unidades hipercentrais.

3.1 Subgrupos unitários de um anel de grupo Integral

Esta seção é baseada no artigo [3].

Teorema 3.1.1. *Seja G o grupo diedral $D_n = \langle a^n = 1 = b^2 \mid b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$. Se $f : G \to \{\pm 1\}$ é um homomorfismo de grupos não trivial com núcleo $\langle a \rangle$, então o índice de $\mathcal{B}_2(\mathbb{Z}G)$ em $\mathcal{U}_f(\mathbb{Z}G)$ é finito, i.e., $(\mathcal{U}_f(\mathbb{Z}G) : \mathcal{B}_2(\mathbb{Z}G)) < \infty$.*

Para provar este teorema, precisaremos da proposição que apresentaremos a seguir.

Proposição 3.1.2. *Seja G um grupo contendo um subgrupo A de índice 2 abeliano e um elemento b tal que $G = \langle A, b\rangle$ e $b^{-1}ab = a^{-1}$ para todo $a \in A$. Suponha que $A^2 \neq \{1\}$. Se $f : G \longrightarrow \{-1, 1\}$ é um homomorfismo de grupos com núcleo A, então*

(1) *O centro de $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$ é o produto direto $\pm t_2(A) \times T$ sendo T um grupo abeliano livre de torção tal que $\mathcal{U}(\mathbb{Z}A) = \pm A \times T$ e $x = x^*$ para todo $x \in T$. ($t_2(A) = \{a \in t(A) : a^2 = 1\}$)*

(2) *O centro de $\mathcal{U}_f(\mathbb{Z}G)$ coincide com $\pm t_2(A)$.*

Demonstração:

(1) Seja $x = x_1 + x_2b$, $x_i \in \mathbb{Z}A$, uma unidade central em $\mathbb{Z}G$. Como G é um subgrupo de $\mathcal{U}$, então $x = b^{-1}xb = x_1^* + x_2^*b$ e $x = a^{-1}xa = x_1 + a^{-1}x_2b$ para todo $a \in A$. Em ambas as igualdades, usamos o fato de x ser central e A ser abeliano. Além disso, tais igualdades implicam que:
1. $x_i = x_i^*$ para $i = 1, 2$;
2. $x_2(1 - a^2) = 0$ para todo $a \in A$.
Desejamos provar que $x_2 = 0$. Suponha, por absurdo, que $x_2 \neq 0$.

Afirmação 1: A^2 é finito.

Como $x_2 \neq 0$, então supp$x_2 \neq \emptyset$. Veja que de A ser normal em G, tem-se que A^2 é normal em G. Note que $x_2 = x_2a^2$ para todo $a \in A$ determina uma ação de A^2 sobre o suppx_2 que a cada $(h, a^2) \in \text{supp}x_2 \times A^2$ faz associar um elemento $h.a^2 = ha^2 \in A^2$. De $h \in \text{supp}x_2$, temos que $\alpha_h h$ é um dos termos de x_2; da igualdade em 2, temos que $\alpha_h ha^2 = \alpha_h h_1$, com $h_1 \in G$ e $a \in A$, também é um dos termos de x_2.

Note que, a $\text{orb}(h) = \{ha_1^2, ha_2^2, \cdots, ha_n^2\} \subseteq \text{supp}x_2$. Como o conjunto orb$(h)$ é finito, então se A^2 fosse infinito, $|\text{orb}(h)| = \infty$. Logo, devemos ter A^2 é finito. Segue a afirmação. Dado $y \in \mathbb{Z}G$, denote por $\chi(y)$ a soma dos coeficientes de y.

Como $A \trianglelefteq G$, então podemos considerar o isomorfismo $\varphi : \dfrac{\mathbb{Z}G}{\Delta(G, A)} \to \mathbb{Z}\left(\dfrac{G}{A}\right)$ que a cada elemento $x + \Delta(G, A)$ faz corresponder $\chi(x_1) + \chi(x_2)\overline{b}$. Observe que $\chi(x_1) + \chi(x_2)b + \Delta(G, A) \in \dfrac{\mathbb{Z}G}{\Delta(G, A)}$. Assim, $\varphi\left(\chi(x_1) + \chi(x_2)b + \Delta(G, A)\right) = \chi(x_1) + \chi(x_2)\overline{b} = \varphi(x + \Delta(G, A))$. Mas, como φ é injetiva, devemos ter $x + \Delta(G, A) = \chi(x_1) + \chi(x_2)b + \Delta(G, A)$. Chame $r = \chi(x_1)$ e $s = \chi(x_2)$. Como x é uma unidade em $\dfrac{\mathbb{Z}G}{\Delta(G, A)}$ e φ é um isomorfismo, então $\chi(x_1) + \chi(x_2)\overline{b}$ também é uma unidade em $\mathbb{Z}\left(\dfrac{G}{A}\right)$.

Afirmação 2: $r + sb$ é uma unidade trivial.

Temos que $r+sb$ é uma unidade. Logo, existem $u, v \in \mathbb{Z}$ tais que $(r+sb)(u+vb) = 1$, i.e., $ru + sv + (rv + su)b = 1$. Como estamos em um anel de grupo, devemos ter $ru + sv = 1$ e $rv + su = 0$. Como $r, s, u, v \in \mathbb{Z}$, podemos resolver um sistema com as duas equações anteriores. Assim, encontraremos que $r = 0$ e $s = \pm 1$ ou $r = \pm 1$ e $s = 0$. Portanto, $\chi(x_1) + \chi(x_2)b$ é uma unidade trivial, como queríamos. Segue a afirmação.

Como A^2 é finito, então podemos somar todos seus elementos. Denote por $\widehat{A^2}$ a soma de todos elementos de A^2.

Afirmação 3: $x_2 = z\widehat{A^2}$ com $z \in \mathbb{Z}G$.

Temos que $x_2 = x_2a^2$. Escreva $x_2 = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \cdots + \alpha_n g_n$ com $\alpha_i \in \mathbb{Z}, g_i \in G$ com $i = i, 2, ..., n$. Sem perda de generalidade, consideremos primeiro a órbita do elemento $g_1 \in G$, i.e., $\mathrm{orb}(g_1) = \{a_1^2 g_1, a_2^2 g_1, \cdots, a_k^2 g_1\}$. Note que $\mathrm{orb}(g_1) \subseteq \mathrm{supp}(x_2)$. Assim, $\alpha_1 a_1^2 g_1, \alpha_1 a_2^2 g_1, \cdots, \alpha_1 a_k^2 g_1$ são parcelas do elemento x_2. Se na órbita de g_1 aparecerem todas as parcelas de x_2, então $x_2 = \alpha_1 g_1 \widehat{A^2}$. Neste caso, $z = \alpha_1 g_1$. Caso ainda não tenham aparecido todas as parcelas de x_2 na órbita de g_1, tomemos um outro elemento que não esteja na órbita de g_1. Digamos g_2. Se na órbita de g_1 e na órbita de g_2 apareceram todas as parcelas de x_2, então $x_2 = (\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2)\widehat{A^2}$. Neste caso, $z = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2$. Caso ainda não tenhamos todas as parcelas de x_2, então repetiremos o processo até que se esgotem os elementos do suporte (que é finito). Portanto, $x_2 = z\widehat{A^2}$ com $z \in \mathbb{Z}G$. Segue a afirmação.

Da afirmação 3, temos que $\chi(x_2) = \chi(z)|A^2|$ e, da afirmação 2, temos que $\chi(x_1)$ ou $\chi(x_2)$ é igual a 1 e o outro igual a 0. Para que tenhamos $\chi(x_2) = \chi(z)|A^2|$, devemos ter $\chi(x_2) = 0$.

Afirmação 4: $A \neq A^2$

Suponha, por absurdo, que $A = A^2$. Suponha que A^2 tenha n elementos, pois provamos que A^2 é finito. Então, $x_2 = z\widehat{A}$ implica que:

$$\begin{aligned} x_2 &= (\textstyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i g_i)(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_1 g_1 a_i + \cdots + \sum_{i=1}^{n} \alpha_k g_k a_i. \end{aligned}$$

Como A^2 é finito, devemos ter $x_2 = \alpha_1\widehat{A} + \alpha_2\widehat{A} + \cdots + \alpha_k\widehat{A}$. Logo, $x_2 = (\alpha_1 + \cdots + \alpha_k)\widehat{A}$. Denote por γ a soma $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k$. Logo, $x_2 = \gamma\widehat{A}$ com $\gamma \in \mathbb{Z}$. Disso, segue que $0 = \chi(x_2) = \gamma|A|$. Segue que $\gamma = 0$ e, por conseguinte, $x_2 = 0$. Isto é uma contradição. Portanto, segue a afirmação.

Escreva $x_2 = (\sum \alpha_i g_i)\widehat{A^2}$ com $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, onde os $g_i's$ são elementos de um transversal de A^2 em A. Então,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 b + \Delta(G, A^2) &= x_1 + (\sum \alpha_i g_i)\widehat{A^2} b + \Delta(G, A^2) \\ &= x_1 + (|A^2| \sum \alpha_i g_i) b + \Delta(G, A^2). \end{aligned}$$

é uma unidade em $\mathbb{Z}\left(\dfrac{G}{A^2}\right)$.

Afirmação 5: $\mathbb{Z}\left(\dfrac{G}{A^2}\right)$ é um grupo abeliano de expoente 4.

De fato, como $G = \langle A, b\rangle$, então $\mathbb{Z}\left(\dfrac{G}{A^2}\right) = \langle aA^2, bA^2\rangle$ com $a \in A$. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}\left(\dfrac{G}{A^2}\right)$, se α, β pertencerem à classe lateral aA^2, então α e β comutam, pois A é abeliano. Resta-nos mostrar que se $\alpha = aA^2$ e $\beta = bA^2$, então $\alpha\beta = \beta\alpha$. Ora,

$$b^{-1}ab = a^{-1} \Rightarrow b^{-1}abA^2 = a^{-1}A^2.$$

Mas, como $a^2A^2 = A^2$ (pois $a^2 \in A^2$), então $aA^2 = a^{-1}A^2$. Segue que $abA^2 = ba^{-1}A^2$, i.e., $abA^2 = baA^2$. Portanto, $\alpha\beta = \beta\alpha$. Segue que $\mathbb{Z}\left(\dfrac{G}{A^2}\right)$ é abeliano.

Dado $y \in G$, se $y = a \in A$, então $(yA^2)^4 = y^4A^2 = (y^2)^2A^2 = A^2$. Agora, se $y = ab$ temos:

$$(abA^2)^4 = ababababA^2 = ba^{-1}abababA^2 = b^2ababA^2 = b^2ba^{-1}abA^2 = b^4A^2 = (b^2)^2A^2.$$

Como $b^2 \in A$, então $(b^2)^2 \in A^2$. Disso, segue que o expoente de $\mathbb{Z}\left(\dfrac{G}{A^2}\right)$ é 4.

Pelo Teorema 1.2.4, todas as unidades de $\mathbb{Z}\left(\dfrac{G}{A^2}\right)$ são triviais. Veja que $0 = \chi(x_2) = \sum \alpha_i |A^2|$. Como $|A^2|$ não pode ser zero, então $\sum \alpha_i = 0$ e, se $\alpha_i \neq 0$ para algum i, então $\alpha_i |A^2| \neq \pm 1$. Assim, $\alpha_i = 0$ para todo i e, portanto, $x_2 = 0$. Isto é uma contradição. Logo, $x = x_1 \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}A)$ e $x^* = x = x_1^* = x_1$. Isto implica que $\mathcal{Z}(\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)) \subseteq \mathcal{U}(\mathbb{Z}A)$.

Agora, dado $x \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}A)$ com $x = x^*$ temos que $ax = xa$ para todo $a \in A$, pois A é abeliano. Resta mostrar que $xb = bx$, pois x, comutando com os geradores, comutará com todos elementos de G. Temos que

$$b^{-1}xb = x = x^* \Rightarrow bx = xb.$$

É sabido que $\mathcal{U}(\mathbb{Z}t(A)) = \pm t(A) \times T$ e $\mathcal{U}(\mathbb{Z}A) = \pm A \times T$ (veja em [15]) onde todo elemento $u \in T$ satisfaz a condição $u = u^*$. Logo,

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{Z}(\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)) &\Leftrightarrow x \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}A) = \pm A \times T, x = x^* \\ &\Leftrightarrow x = \pm au \; com \; u \in T, a \in A. \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\pm au &= \pm(au)^* \\
&= \pm u^* a^{-1} \\
&= \pm u a^{-1} \\
&= \pm a^{-1} u.
\end{aligned}$$

Assim, $a^2 = 1$ e, por conseguinte, $\pm a \in t_2(A)$. Segue que $\mathcal{Z}(\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)) = \pm t_2(A) \times T$.
(2) Suponha que $x = x_1 + x_2 b$ é uma unidade central de $\mathcal{U}_f(\mathbb{Z}G)$. Como G é um subgrupo de $\mathcal{U}_f(\mathbb{Z}G)$, x comuta com todos elementos de G. Logo, x é uma unidade central de $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$. Pela primeira parte, $x = x_1$ e

$$\pm 1 = x x^f = x_1 x_1^* = x_1^2.$$

Veja que não podemos ter x_1^2 igual a 1. Aplicando a função de aumento em ambos os lados teremos que $\varepsilon(x_1^2)$ não pode ser -1. De fato, caso $\varepsilon(x_1^2) = -1$ teríamos $\varepsilon(x_1).\varepsilon(x_1) = -1$. Como $\varepsilon(x_1) \in \mathbb{Z}$, então teríamos um quadrado de um número inteiro sendo igual a -1, o que é impossível. Assim, temos uma unidade central de ordem finita. Pelo Teorema 1.2.3, temos que $x_1 = \pm a$, onde a é um elemento de torção. Isto completa a prova da proposição. ■

Demonstração do Teorema 3.1.1

Seja $G = D_n$ com $D_n = \langle a^n = 1 = b^2 | b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$. Se $n = 2$, então o teorema é trivial (ver em [14], p.8). Como G é dado da forma da Proposição anterior, então podemos aplicá-lo. Seja $\mathcal{C}$ o centro de $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$. Sabemos que $(\mathcal{U}(\mathbb{Z}G) : \langle \mathcal{B}_2(\mathbb{Z}G), \mathcal{C} \rangle) < \infty$ (ver em [13]). Pela Proposição anterior, $Z_1 = \mathcal{Z}(\mathcal{U}_f(\mathbb{Z}G))$ é finito e $Z_1 < \mathcal{C}$.

Provemos que $\mathcal{B}_2$ é um subgrupo f-unitário de $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$. Dados, $x, y \in D_n$, com ordem de x finita, considere a unidade bicíclica $u_{x,y} = 1 + (1-x)y\widehat{x}$. Se $u_{x,y} \neq 1$, então $\mathrm{o}(x) = 2$. Para ver isto, basta analisar as possíveis ordens de x a partir dos geradores de D_n. Assim, $u_{x,y} = 1 + (1-x)y(1+x)$. Agora, escreva $y = a^i x^\epsilon$ com $\epsilon = 0$ ou $\epsilon = 1$. Como $x(1+x) = 1 + x$, temos, neste caso:

$$\begin{aligned}
u_{x,y} &= 1 + (1-x)a^i x^\epsilon (1+x) \\
&= 1 + (1-x)a^i(1+x).
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
u_{x,y}^f &= (1 + (1-x)a^i(1+x))^f \\
&= 1 + (1+x)^f (a^i)^f (1-x)^f \\
&= 1 + (1+x^f)(a^i)^f(1-x^f) \\
&= 1 + (1-x)a^{-i}(1+x).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
u_{x,y}u_{x,y}^f &= (1+(1-x)a^i(1+x))(1+(1-x)a^{-i}(1+x)) \\
&= 1+(1-x)a^{-i}(1+x)+(1-x)a^i(1+x)+ \\
&+ (1-x)a^i\underbrace{(1+x)(1-x)}_{0}a^{-i}(1+x) \\
&= 1+(1-x)a^{-i}(1+x)+(1-x)a^i(1+x) \\
&= 1+(1-x)(a^{-i}+a^i)(1+x).
\end{aligned}
$$

Note que $a^{-i}+a^i$ é central. Para ver isto, basta observar que $a^{-i}+a^i$ comuta com os geradores. Claramente, $a^{-i}+a^i$ comuta com os elementos que são potências de a e, devido à relação $bab^{-1}=a^{-1}$, comutará com b também. Assim, $u_{x,y}u_{x,y}^f=1$. Segue que $u_{x,y}$ é uma unidade f-unitária. Portanto, $\mathcal{B}_2(\mathbb{Z}G)$ é um subgrupo unitário. Veja que $[\mathcal{U}_f:\mathcal{U}_f\cap\langle\mathcal{B}_2,\mathcal{C}\rangle]=[\mathcal{U}_f:\langle\mathcal{U}_f\cap\mathcal{B}_2,\mathcal{U}_f\cap\mathcal{C}\rangle]$, pois $\mathcal{C}$ é um subgrupo central. Assim,

$[\mathcal{U}_f:\langle\mathcal{U}_f\cap\mathcal{B}_2,\mathcal{U}_f\cap\mathcal{C}\rangle]=[\mathcal{U}_f:\langle\mathcal{B}_2,Z_1\rangle]\leq[\mathcal{U}:\langle\mathcal{B}_2,\mathcal{C}\rangle]<\infty$. A igualdade $\mathcal{U}_f\cap\mathcal{C}=Z_1$ segue do fato de $Z_1<\mathcal{C}$ e Z_1 ser finito. Além disso,

$$[\mathcal{U}_f:\mathcal{B}_2]=[\mathcal{U}_f:\langle\mathcal{B}_2,\mathcal{C}\rangle].[\langle\mathcal{B}_2,Z_1\rangle:\mathcal{B}_2].$$

Como Z_1 é finito, não é difícil ver que $[\langle\mathcal{B}_2,Z_1\rangle:\mathcal{B}_2]$ também é finito. Portanto, $[\mathcal{U}_f:\mathcal{B}_2]<\infty$ como queríamos. ■

O próximo teorema caracteriza grupos para os quais tenhamos as unidades bicíclicas também sendo unidades f-unitárias generalizadas, i.e, $\mathcal{B}_2(\mathbb{Z}G)\leq\mathcal{U}_{g,f}(\mathbb{Z}G)$.

Teorema 3.1.3. *Seja G um grupo e $f:G\to\mathcal{U}(\mathbb{Z})$ o homomorfismo orientado não trivial com núcleo A tal que o índice de G em A é 2. O subgrupo $\mathcal{B}_2(\mathbb{Z}G)$ é não trivial e f-unitário generalizado,i.e., $\mathcal{B}_2(\mathbb{Z}G)\leq\mathcal{U}_{g,f}(\mathbb{Z}G)$ se, e somente se, G é não-Hamiltoniano e existe um elemento de ordem finita b de modo que uma das condições abaixo são satisfeitas:*

1) *A é um grupo abeliano, a ordem de b divide 4 e $bab^{-1}=a^{-1}$ para todo $a\in A$;*

2) *A é um 2-grupo Hamiltoniano, G é um produto semidireto de A e $\langle b;b^2=1\rangle$ e todo subgrupo de A é normal em G;*

3) *A é um 2-grupo Hamiltoniano e G é um produto direto de um 2-subgrupo Hamiltoniano de A e um grupo cíclico $\langle b\rangle$ de ordem 4;*

4) *$t(A)$ é um grupo abeliano, todo subgrupo de $t(A)$ é normal em G e $bab^{-1}=a^{-1}b^{4i}$ para todo $a\in A$, onde o inteiro i depende de a.*

Para demonstrar este teorema precisamos do lema seguinte.

Lema 3.1.4. *Se G é um grupo contendo um subgrupo A de índice 2 com $G = \langle A, b\rangle$, $o(b) < \infty$, $A \neq \mathcal{N}_A(\langle b\rangle)$ e*

1) $t(A)$ é abeliano e todos subgrupos de $t(A)$ são normais em A;

2) $bgb^{-1} = g^{-1}$ para todo $g \in A\backslash\mathcal{N}_A(\langle b\rangle)$,

então $bab^{-1} = a^{-1}$ para todo $a \in A$ e $b^4 = 1$.

Demonstração:

Queremos mostrar que $bab^{-1} = a^{-1}$ para todo $a \in A$ e $b^4 = 1$. Por hipótese, $bab^{-1} = a^{-1}$ para $a \in A\backslash\mathcal{N}_A(\langle b\rangle)$. Resta-nos mostrar esta igualdade para os elementos de $\mathcal{N}_A(\langle b\rangle)$. Seja $c \in \mathcal{N}_A(\langle b\rangle)$. Tome $a \in A\backslash\mathcal{N}_A(\langle b\rangle)$.

1º caso : $o(c) < \infty$

Por (2), temos:

$$\begin{aligned} bab^{-1} = a^{-1} \quad &\Rightarrow \quad ba = a^{-1}b \\ &\Rightarrow \quad bac = a^{-1}bc \\ &\Rightarrow \quad b(ac)b^{-1} = a^{-1}(bc)b^{-1}. \end{aligned}$$

1.1 caso: $o(a) < \infty$

Veja que $ac \notin \mathcal{N}_A(\langle b\rangle)$, pois do contrário, $a \in \mathcal{N}_A(\langle b\rangle)$. Como $o(c), o(a)$ são finitas, então a e $c \in t(A)$. Disso, segue que $ac \in t(A)$. Logo,

$$\begin{aligned} a^{-1}(bc)b^{-1} &= b(ac)b^{-1} \\ &= (ac)^{-1} \\ &= c^{-1}a^{-1} \\ &= a^{-1}c^{-1}. \end{aligned}$$

Portanto, $bcb^{-1} = c^{-1}$.

1.2 caso : $o(a) = \infty$

Afirmação 1: Existe n tal que $a^n c = ca^n$.

Como $o(c)$ é finita, então $\langle c\rangle$ é um subgrupo normal em A. Disso, segue que $aca^{-1} \in \langle c\rangle$ para todo $a \in A$. Ou seja, $aca^{-1} = c^{k_1}$ (1) para algum inteiro k_1. Multiplicando por a e a^{-1} à esquerda e à direita respectivamente na igualdade em (1), obtemos:

$$a^2ca^{-2} = ac^{k_1}a^{-1} = c^{k_2}; \text{ pois } ac^{k_1}a^{-1} \in \langle c\rangle .$$

Repetindo este processo k_i vezes obtemos $a^{k_i}ca^{-k_i} = c^{k_i}$ de modo que a potência c^{k_i} já tenha aparecido anteriormente. Isto é garantido pelo fato da ordem de c ser finita. Disso, segue que $a^{k_i}ca^{-k_i} = a^s ca^{-s}$ para algum $s < k_i$. Assim, $a^{k_i - s}c = a^{-s+k_i}$. Tome $n = k_i - s$ e a afirmação está provada.

Vale ressaltar que nesta demonstração iremos fazer mais vezes este tipo de afirmação, mas não será provada, pois a prova é análoga a que foi provada anteriormente.

Afirmação 2: $a^n c \notin \mathcal{N}_A(\langle b \rangle)$

De fato, sabemos que $bab^{-1} = a^{-1}$, pois $a \in A - \mathcal{N}_A(\langle b \rangle)$. Disso, segue que $ba^nb^{-1} = a^{-n}$. Se tivéssemos $a^n c \in \mathcal{N}_A(\langle b \rangle)$, então $a^n \in \mathcal{N}_A(\langle b \rangle)$. Assim, $ba^nb^{-1} = b^k$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Multiplicando a última igualdade à direita por b^{-1} obtemos a igualdade $a^{-n}ba^nb^{-1} = b^{k-1}$. Usando o fato de $ba^nb^{-1} = a^{-n}$ temos $a^{2n} = b^{k-1}$. Mas, a ordem de a é infinita e a ordem de b é finita. Logo, devemos ter $a^n c \notin \mathcal{N}_A(\langle b \rangle)$.

Agora temos pelo primeiro caso :

$$\begin{aligned} bab^{-1} = a^{-1} &\Rightarrow ba^n = a^{-n}b \\ &\Rightarrow ba^nc = a^{-n}bc \\ &\Rightarrow b(a^nc)b^{-1} = a^{-n}(bc)b^{-1}. \end{aligned}$$

Disso, segue que

$$a^{-n}(bc)b^{-1} = b(a^nc)b^{-1} = c^{-1}a^{-n} = a^{-n}c^{-1}.$$

Logo, $bcb^{-1} = c^{-1}$.

Agora provaremos que c não pode ter ordem infinita.

2º caso: $o(c) = \infty$

2.1 $o(a) < \infty$

Mais uma vez, existe n tal que $c^na = ac^n$. Tem-se também que $ac^n \notin \mathcal{N}_A(\langle b \rangle)$. De maneira análoga ao caso (1.2) temos;

$$\begin{aligned} a^{-1}bc^nb^{-1} &= b(ac^n)b^{-1} \\ &= (ac^n)^{-1} \\ &= (c^na)^{-1} \\ &= a^{-1}c^{-n} \end{aligned}$$

Logo, $bc^nb^{-1} = c^{-n}$. Veja que:

$$\begin{aligned} bc^nb^{-1} = c^{-n} \in \mathcal{N}_A(\langle b \rangle) &\Rightarrow bc^nb^{-1}c^{-n} = c^{-2n} \\ &\Rightarrow b^{k+1} = c^{-2n} \\ &\Rightarrow (b^{k+1})^m = c^{-2n}\text{com m=o(b)} \\ &\Rightarrow c^{-2n} = 1 \end{aligned}$$

Isto é um absurdo, pois estamos supondo que a ordem de c é infinita.

2.2 $o(a) = \infty$

Pelo que já vimos, é fácil ver que existe n tal que $bc^n = c^nb$. De maneira análoga ao que já fizemos temos;

$$\begin{aligned} bac^nb^{-1} &= (ac^n)^{-1} \\ &= c^{-n}a^{-1}.(1) \end{aligned}$$

De $a \in A - \mathcal{N}(\langle b \rangle)$, $bab^{-1} = a^{-1}$ e $bc^n = c^nb$ temos $c^nb^{-1} = b^{-1}c^n$. Disso, segue que

$$bac^nb^{-1} = bab^{-1}c^n = a^{-1}c^n. \tag{2}$$

Juntando (1) e (2) tem-se:

$$a^{-1}c^n = bac^nb^{-1} = c^{-n}a^{-1}.$$

Isto implica que $c^{-n}a = ac^n$ (basta elevar ambos os membros a -1). Assim,

$$c^na = ac^{-n} \Rightarrow c^na^2 = ac^{-n}a \Rightarrow c^na^2 = a^2c^n.$$

Segue disso que $[c^n, a^2] = 1$. É fácil ver que $a^2c^n \notin \mathcal{N}_A(\langle b \rangle)$. Portanto,

$$a^{-2}c^n = ba^2c^nb^{-1} = a^{-2}c^{-n} \Rightarrow c^{2n} = 1.$$

Absurdo, pois estamos supondo $o(c) = \infty$. Mostramos então que $bab^{-1} = a^{-1}$ para todo $a \in A$. Resta mostrar a segunda parte.

Como $b^2 \in A$, então $bb^2b^{-1} = b^{-2}$. Isto implica que $b^2 = b^{-2}$ e, consequentemente, $b^4 = 1$. Isto completa a prova. ∎

Seja $\mathcal{B}_2$ o subgrupo de todas as unidades bicíclicas. O próximo teorema é fundamental para provarmos o teorema apresentado no início da seção. No artigo [3] nos são apresentadas condições necessárias e suficientes para $\mathcal{B}_2 \leq \mathcal{U}_f$. Mas, uma pergunta natural é: quando teremos $\mathcal{B}_2 \leq \mathcal{U}_{g,f}$? Na sua tese, Yuanlin Li prova o teorema que afirma que, quando as unidades bicíclicas são f-unitárias generalizadas, elas também são f-unitárias. A importância deste resultado está no fato de ser utilizada a mesma demonstração de Bovdi e Sehgal para caracterizarmos grupos para os quais $\mathcal{B}_2 \leq \mathcal{U}_{g,f}$.

Teorema 3.1.5 (Yuanlin Li). *Seja $\mathcal{B}_2(\mathbb{Z}G)$ o subgrupo de todas as unidades bicíclicas. Se $\mathcal{B}_2(\mathbb{Z}G) \subset \mathcal{U}_{g,f}$, então $\mathcal{B}_2(\mathbb{Z}G) \subset \mathcal{U}_f$.*

Demonstração:

Suponha que $B_2 \leq \mathcal{U}_{g,f}$. Mostremos que $B_2 \subset \mathcal{U}_f$. Primeiramente, provemos que $\forall a \in A$, onde $A = ker(f)$ com $o(a) = n < \infty$ tem-se $\langle a \rangle \lhd G$. Agora, considere uma unidade bicíclica $\mu_{a,g} = 1 + (1-a)g\widehat{a}$. Então, $\mu_{a,g}^{-1} = 1 - (1-a)g\widehat{a}$.

Note que $\mu_{a,g}^f = 1 + \widehat{a}g^f(1-a^{-1})$, pois
De fato,

$$\begin{aligned}\mu_{a,g}^f &= (1+(1-a)g\widehat{a})^f\\ &= 1+\widehat{a}^f g^f(1-a)^f\\ &= 1+\widehat{a}g^f(1-a^{-1}).\end{aligned}$$

Como $B_2 \subset \mathcal{U}_{g,f}$, então $\mu_{a,g}\mu_{a,g}^f = c \in \mathcal{C}$. Assim, $\mu_{a,g}^f = c\mu_{a,g}^{-1}$. Temos:

$$1+\widehat{a}g^f(1-a^{-1}) = c - c(1-a)g\widehat{a}.$$

Multiplicando por $\widehat{a}$ à direita obtemos:

$$\begin{aligned}{[1+\widehat{a}g^f(1-a^{-1})]\widehat{a}} &= [c-c(1-a)g\widehat{a}]\widehat{a}\\ \widehat{a}+\widehat{a}g^f\widehat{a}-\widehat{a}g^f a^{-1}\widehat{a} &= c\widehat{a}-cg\widehat{a}\widehat{a}+cag\widehat{a}\widehat{a}\\ \widehat{a}+\widehat{a}\widehat{a}g^f-\widehat{a}\widehat{a}g^f &= c\widehat{a}-cg\widehat{a}\widehat{a}+cga\widehat{a}\widehat{a}\\ \widehat{a} &= c\widehat{a}-cgn\widehat{a}+cgan\widehat{a}\\ \widehat{a} &= c\widehat{a}-nc(1-a)g\widehat{a}\end{aligned}$$

Por outro lado, multiplicando à esquerda por $\widehat{a}$ obtemos:

$$\begin{aligned}n\widehat{a} &= \widehat{a}c\widehat{a}-\widehat{a}ncg\widehat{a}+\widehat{a}ncag\widehat{a}\\ &= \widehat{a}c\widehat{a}\\ &= \widehat{a}\widehat{a}c\\ &= n\widehat{a}c.\end{aligned}$$

Segue que $c\widehat{a} = \widehat{a}$. Substituindo em (1) temos $\widehat{a} = \widehat{a} - nc(1-a)g\widehat{a}$. Disso, segue que

$$0 = nc(1-a)g\widehat{a} \Rightarrow (1-a)g\widehat{a} = 0.$$

Como consequência, $\mu_{a,g}$ é trivial e pelo Teorema 1.2.2 temos que $\langle a\rangle \trianglelefteq G$ para todo $a \in A$. Isto finaliza a primeira parte.

Agora considere qualquer $d \in G\backslash A$ de ordem finita. Note que a ordem de d é sempre par e $d^2 \in t(A)$, pois do contrário, teríamos

$$1 = d^{2n+1} \Rightarrow 1 = d^{2n+1} = f(1) = f(d)^{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1.$$

Um absurdo. Pela primeira parte, de $d^2 \in t(A)$, tem-se $\langle d^2\rangle \triangleleft G$ e $\widehat{d^2}$ é central em $\mathbb{Z}G$.

Seja $\mu_{d,g} = 1+(1-d)g\widehat{d} = 1+(1-d)g(1+d)\widehat{d^2}$. Disso, segue que

$$\begin{aligned}\mu_{d,g}^f &= (1+(1-d)g(1+d)\widehat{d^2})^f\\ &= 1+(\widehat{d^2})^f(1+d)^f g^f(1-d)^f\\ &= 1+\widehat{d^2}(1-d^{-1})g^f(1+d^{-1})\\ &= 1-d^{-1}(1-d)g^f(1+d)d^{-1}\widehat{d^2}.\end{aligned}$$

Como $\mu_{d,g} \in \mathcal{U}_{g,f}$, então $\mu_{d,g}\mu_{d,g}^{f} = c \in \mathcal{C}$. Temos

$$c - c(1-d)g(1+d)\widehat{d^2} = 1 - d^{-1}(1-d)g^{f}(1+d)d^{-1}\widehat{d^2}$$

.

Multiplicando a equação acima por $1+d$ pela esquerda obtemos $c(1+d) = 1+d$ (para encontrar esta igualdade basta notar que $\langle \widehat{d^2} \rangle \trianglelefteq G$ e que $\widehat{d^2}$ é central). De maneira análoga, multiplicamos à direita por $1-d$ e obtemos $c(1-d) = 1-d$. Combinando estas duas equações encontradas, concluímos que $c = 1$. Portanto, $\mu_{d,g} \in \mathcal{U}_f$. Segue que $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{U}_f$. ■

Agora iremos demonstrar o resultado apresentado no início desta seção.

Demonstração do Teorema 3.1.3.
($\Rightarrow$) Suponha que $\mathcal{B}_2$ seja não trivial e que $\mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{U}_{g,f}$. Mostremos que G é não hamiltoniano e que contém um elemento $b \neq 1$ de ordem finita tal que uma das quatro condições do enunciado vale. Primeiramente, mostremos que todo subgrupo finito $\langle a \rangle$ de A é normal em G. Suponha $o(a) = n$. Se $g \in G$ e $g \notin \mathcal{N}_G(\langle a \rangle)$, então $\mu_{a,g} = 1 + (1-a)g\widehat{a} \neq 1$.

Pelo lema anterior, $\mu_{a,g} \in \mathcal{U}_f$. Disso, segue que $\mu_{a,g}\mu_{a,g}^{f} = \pm 1$, isto é, $\mu_{a,g}^{-1} = \pm \mu_{a,g}$.

Afirmação 1: $\mu_{a,g}^{-1} = \mu_{a,g}^{f}$
Se tivéssemos $\mu_{a,g}^{-1} = -\mu_{a,g}^{f}$, então

$$1 - (1-a)g\widehat{a} = -1 - \widehat{a}g^{-1}f(g)(1-a^{-1}) \Rightarrow 1 + \widehat{a}f(g)g^{-1}(1-a^{-1}) = -1 + (1-a)g\widehat{a}.$$

Como temos o elemento 1 no primeiro membro, devemos tê-lo também no segundo membro. Ou seja, $(1-a)g\widehat{a} = g\widehat{a} - ag\widehat{a} = 1$. Mas, de $A \trianglelefteq G$ temos que $g^{-1}ag = a_1$ para algum $a_1 \in A - \langle a \rangle$, pois do contrário, $g \in \mathcal{N}_G(\langle a \rangle)$. Disso, segue que $ag = ga_1$. Assim, $(1-a)g\widehat{a} = g\widehat{a} - ga_1\widehat{a}$. Mas, $a_1\widehat{a} = a_1(1+a+a^2+...+a^{n-1}) = a_1+a_1a+a_1a^2+...+a_1a^{n-1} = k$. Logo, $(1-a)g\widehat{a} = g\widehat{a} - ga_1\widehat{a} = g\widehat{a} - gk = g(\widehat{a} - k)$. Veja que, em $(\widehat{a} - k)$, não aparece o 1 e assim, quando multiplicarmos cada parcela por g, ainda teremos cada parcela diferente de 1. Logo, $(1-a)g\widehat{a} \neq 1$ e, por conseguinte, $\mu_{a,g}^{-1} = \mu_{a,g}^{f}$. Observe também que $a_1 \neq 1$, pois caso não fosse, teríamos $(1-a)g\widehat{a} = 0$ e, assim, $\mu_{a,g}$ seria trivial. Absurdo, pois estamos supondo $\mu_{a,g} \neq 1$. Esta afirmação nos diz que qualquer unidade bicíclica f-unitária deve ser da forma apresentada. Com isto, temos uma classe de unidades f-unitárias.

De $\mu_{a,g}^{-1} = \mu_{a,g}^{f}$ temos:

$$\widehat{a}g^{-1}f(g)(1-a^{-1}) = -(1-a)g\widehat{a}.$$

Multiplicando por $\widehat{a}$ obtemos $n(1-a)g\widehat{a} = 0$. Ou seja, $(1-a)g\widehat{a} = 0$. Um absurdo. A contradição deve-se ao fato de $g \notin \mathcal{N}_G(\langle a \rangle)$. Segue que todo subgrupo cíclico de $t(A)$ é normal em G.

Afirmação 2: Todo subgrupo S de $t(A)$ é normal em G.
De fato, sejam $S \leq t(A)$ e $S = \langle s_1, s_2, ..., s_n, ...\rangle$ com cada $s_i \in t(A)$. Tome $K = s_i$ para algum i e $g \in G$. Disso, segue que $gkg^{-1} = gs_ig^{-1} = s_i^p \in S$, pois, pela primeira parte, $\langle s_i\rangle \trianglelefteq G$. Como conseguimos a igualdade acima com os geradores de S, então vale para todos os elementos de S. Segue que $S \trianglelefteq t(A)$.

Como $\mathcal{B}_2$ é não trivial, então deve existir $c \in G - A$ de ordem finita tal que $\langle c\rangle$ não é normalizado por G. Isto já nos mostra que G é não hamiltoniano. Além disso, $c^2 \in t(A)$ e $\widehat{c^2}$ é central em $\mathbb{Z}G$. Claramente, $\mu_{c,g} = 1 + (1-c)g(1+c)\widehat{c^2}$ e $f(c) = -1$.

Como $\mu_{c,g}$ é f-unitário, $\mu_{c,g}\mu_{c,g}^f = 1$, temos

$$(g + g^{-1}f(g))(1+c)\widehat{c^2} = c(g + g^{-1}f(g))(1+c)\widehat{c^2}. \tag{1}$$

Para verificar esta igualdade, observe que $\widehat{c^2}c^{-1} = \widehat{c^2}c$. Temos:

$$\begin{aligned}
\mu_{c,g}^f = \mu_{c,g}^{-1} \;&\Rightarrow\; 1 + \widehat{c^2}(1-c^{-1})f(g)g^{-1}(1+c^{-1}) = 1 - (1-c)g(1+c)\widehat{c^2}\\
&\Rightarrow\; (1-c)f(g)g^{-1}(1+c)\widehat{c^2} = -(1-c)g(1+c)\widehat{c^2}\\
&\Rightarrow\; f(g)g^{-1}(1+c)\widehat{c^2} - cf(g)g^{-1}(1+c)\widehat{c^2} = -g(1+c)\widehat{c^2} + cg(1+c)\widehat{c^2}\\
&\Rightarrow\; g(1+c)\widehat{c^2} + f(g)g^{-1}(1+c)\widehat{c^2} = cg(1+c)\widehat{c^2} + cf(g)g^{-1}(1+c)\widehat{c^2}\\
&\Rightarrow\; (g + f(g)g^{-1})(1+c)\widehat{c^2} = c(g + f(g)g^{-1})(1+c)\widehat{c^2}.
\end{aligned}$$

De $c \in G - A$, $o(c) = 2n$, pois do contrário, teríamos $1 = f(c^{2n+1}) = f(c)^{2n+1} = -1$. Um absurdo. Assim, $o(c) = 2^k p$ com p primo. Com isso, podemos tomar $d = c^p$ com $d \in G - A$, pois $f(d) = f(c^p) = f(c)^p = -1$. Além disso, d é um 2-elemento, pois $d^{2k} = (c^p)^{2^k} = 1$. Tome b como sendo o 2-elemento de menor ordem em $G - A$.

Note que $A \neq \mathcal{N}_A(\langle c\rangle)$. De fato, como $\langle c\rangle$ não é normalizado por G, então existe $g \in G$ tal que $g \notin \mathcal{N}_G(\langle c\rangle)$. Como G tem índice 2 em A, então podemos escrever $G = A \cup cA$. Se $g \in A$, então encontramos um elemento em A que não normaliza $\langle c\rangle$, e por conseguinte, não pertence a $\mathcal{N}_A(\langle c\rangle)$. Se $g \in cA$, então $g = ca$ com $a \in A$. Temos então que, como $g = ac$ não normaliza $\langle c\rangle$, então a também não normaliza $\langle c\rangle$, pois do contrário, implicaria que g normalizaria. Segue que $A \neq \mathcal{N}_A(\langle c\rangle)$.

Em (1), tomando $c = b$ temos $g = bg^{-1}b^{1+2i}$ quando $g \notin \mathcal{N}_A(\langle b\rangle)$. De fato,

$$\begin{aligned}
(g+g^{-1})(1+b)\widehat{b^2} = b(g+g^{-1})(1+b)\widehat{b^2} \;&=\; \underbrace{g\widehat{b^2} + g^{-1}\widehat{b^2}}_{\in\mathbb{Z}A} + \underbrace{gb\widehat{b^2} + g^{-1}b\widehat{b^2}}_{\in\mathbb{Z}bA}\\
&=\; \underbrace{bg\widehat{b^2} + bg^{-1}\widehat{b^2}}_{\in\mathbb{Z}bA} + \underbrace{bgb\widehat{b^2} + bg^{-1}b\widehat{b^2}}_{\in\mathbb{Z}A}.
\end{aligned}$$

Como estamos numa igualdade de anel de grupo, devemos ter: $g\widehat{b^2} + g^{-1}\widehat{b^2} = bgb\widehat{b^2} + bg^{-1}b\widehat{b^2}$ ou $gb\widehat{b^2} + g^{-1}b\widehat{b^2} = bg\widehat{b^2} + bg^{-1}\widehat{b^2}$. Se supusermos que vale a primeira igualdade, então encontraremos que: (I) $g = bgb^{2i+1}$ ou (II) $g = bg^{-1}b^{2i+1}$. Se ocorre (I), então chegaremos que $g \in \mathcal{N}_A(\langle b \rangle)$. Mas, como estamos supondo $g \notin \mathcal{N}_A(\langle b \rangle)$ devemos ter $g = bg^{-1}b^{2i+1}$. Disso, obtemos:

$$\begin{aligned} g = bg^{-1}b^{2i+1} &\Rightarrow bgb^{-1} = b^2g^{-1}b^{2i} \\ &\Rightarrow bgb^{-1} = g^{-1}gb^2g^{-1}b^{2i} \text{ usando o fato de } \langle b^2 \rangle \text{ ser normal em } G \\ &\Rightarrow bgb^{-1} = g^{-1}(b^2)^k b^{2i} \\ &\Rightarrow bgb^{-1} = g^{-1}b^{2i'}. \end{aligned}$$

Veja que $(bg)^2 = (g^{-1}b^2g)^{i'+1}$, pois

$$\begin{aligned} bgb^{-1} = g^{-1}b^{2i'} &\Rightarrow bg = g^{-1}b^{1+2i'} \\ &\Rightarrow bgbg = g^{-1}b^{2i'+2}g \\ &\Rightarrow (bg)^2 = (g^{-1}b^2g)^{i'+1}. \end{aligned}$$

Note que bg é um 2-elemento e que $bg \notin A$ pois, do contrário, teríamos $1 = f(bg) = f(b)f(g) = -1.1 = -1$, pois $g \in A$ e $b \notin A$. Um absurdo. Temos ainda que i' é par pois, do contrário, bg seria um 2-elemento de $G - A$ de menor ordem. Sendo assim, $bgb^{-1} = g^{-1}b^{2i'} = g^{-1}b^{4j}$ para todo $g \in A - \mathcal{N}_A(\langle b \rangle)$. Portanto,

$$bgb^{-1} = g^{-1}b^{4j} \tag{2}$$

para todo $g \in A - \mathcal{N}_A(\langle b \rangle)$.

(a) Suponha que a ordem de b divide 4.

De (2), $bgb^{-1} = g^{-1}$ para todo $g \in A - \mathcal{N}_A(\langle b \rangle)$.

$(a.1)$ Se $t(A)$ é abeliano, então pelo Lema 3.1.4, $bab^{-1} = a^{-1}$ para todo $a \in A$. Note que A é abeliano pois, tomando $x, y \in A$ temos que $bxb^{-1} = x^{-1}$ e $byb^{-1} = y^{-1}$. Multiplicando as duas igualdades obtemos $bxyb^{-1} = x^{-1}y^{-1}$. Mas, $bxyb^{-1} = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$. Portanto, $xy = yx$ para todo $x, y \in A$. Segue que A é abeliano. Isto completa o caso 1) do teorema.

$(a.2)$ Se $t(A)$ não é abeliano, então como todo subgrupo de $t(A)$ é normal em $t(A)$, então $t(A)$ é hamiltoniano. Da Teoria de Grupos, $t(A) = Q \times E \times T$ onde Q é o grupo dos quatérnios, E um 2-grupo e T é um grupo cujo todos elementos tem ordem ímpar. Nosso objetivo agora é mostrar que $A = t(A)$.

Lembre que:

$$Q = \langle i, j : i^2 = j^2 = -\mathbb{1}, (-\mathbb{1})^2 = 1, ji = -ij \rangle = \{1, -\mathbb{1}, i, j, k, -i, -j, -k\}$$

onde $i, j, k, -i, -j, -k$ tem ordem 4, $-\mathbb{1}$ tem ordem 2 e $ij = k, ji = -k, jk = i, kj = -1, ki = j, ik = -j$.

Suponha que exista um elemento $g \in A - \mathcal{N}_A(\langle b \rangle)$ de ordem infinita.

Afirmação 3: $g^2 \in C_A(Q)$

Se $g \in C_A(Q)$ (centralizador de Q em A), então $g^2 \in C_A(Q)$. Se $g \notin C_A(Q)$, então $g^{-1}ig = -i$ e $g^{-1}jg = -j$ ou $g^{-1}ig = -i$ e $g^{-1}jg = j$ ou ainda $g^{-1}ig = i$ e $g^{-1}jg = -j$. Assim, $g^{-1}g^{-1}igg = g^{-1} - ig = i$, i.e, $g^2ig^2 = i$ e de maneira análoga $g^2jg^2 = j$. Analisamos os outros casos da mesma maneira. Dessa maneira, $g^2i = ig^2$ e $g^2j = jg^2$. Como g^2 comuta com os geradores de Q, então comutará com todo elemento de Q. Logo, $g^2 \in C_A(Q)$.

Afirmação 4: Existe um elemento de ordem 4 em Q que comuta com b.

Sejam i, j geradores de Q. Como todo subgrupo de $t(A)$ é normal em G e $Q \subseteq t(A)$, então $\langle i \rangle \trianglelefteq G$ e $\langle j \rangle \trianglelefteq G$. Disso, segue que $bib^{-1} \in \langle i \rangle = \{1, -\mathbb{1}, i, -i\}$ e $bjb^{-1} \in \langle j \rangle = \{1, -\mathbb{1}, j, -j\}$. Como i, j tem ordem 4, então $bib^{-1} = i$ ou $bib^{-1} = -i$ e $bjb^{-1} = j$ ou $bjb^{-1} = -j$. Se $bib^{-1} = i$ ou $bjb^{-1} = j$, então nosso elemento pode ser i ou j. Se $bib^{-1} = -i$ e $bjb^{-1} = -j$, então $bkb^{-1} = bijb^{-1} = bib^{-1}bjb^{-1} = -i. - j = k$. Assim, $bkb^{-1} = k$ e, portanto, k é o elemento que queríamos encontrar.

Afirmação 5: $g^2k \notin \mathcal{N}_A(\langle b \rangle)$ onde k é o elemento encontrado acima.

Suponha que $g^2k \in \mathcal{N}_A(\langle b \rangle)$. Então, $g^2 \in \mathcal{N}_A(\langle b \rangle)$. Assim,

$$\begin{aligned} g^{-2}bg^2 = b^r \;\; &\Rightarrow \;\; g^{-2}bg^2b^{-1} = b^{r-1} \\ &\Rightarrow \;\; g^{-2}g^{-2} = b^{r-1} \\ &\Rightarrow \;\; g^{-4} = b^{r-1} \end{aligned}$$

Mas estamos supondo que g tem ordem infinita e, por hipótese, b tem ordem finita. Um absurdo. Logo, $g^2k \notin \mathcal{N}_A(\langle b \rangle)$.

Por (2) e pelas afirmações 3 e 4 temos,

$$kg^{-2}bkg^2b^{-1} = bg^2kb^{-1} = k^{-1}g^{-2}.$$

Isto implica que $k = k^{-1}$. Um absurdo, pois $o(k) = 4$. Portanto, todos elementos de $A - \mathcal{N}_A(\langle b \rangle)$ tem ordem finita.

Seja g um elemento de ordem infinita em $\mathcal{N}_A(\langle b \rangle)$ e seja $a \in A - \mathcal{N}_A(\langle b \rangle)$. De maneira análoga ao que já fizemos, existe um elemento n tal que $[g^n, a] = 1$ pois, o subgrupo cíclico finito $\langle a \rangle$ é normal em G. Observe que não podemos ter $g^na \in \mathcal{N}_A(\langle b \rangle)$ pois, do contrário, teríamos que $g^n \in \mathcal{N}_A(\langle b \rangle)$, pelo fato de $g \in \mathcal{N}_A(\langle b \rangle)$. Disso, teríamos $g^{-n}g^na \in \mathcal{N}_A(\langle b \rangle)$, i.e., $a \in \mathcal{N}_A(\langle b \rangle)$. Mas, estamos supondo que $a \notin \mathcal{N}_A(\langle b \rangle)$. Portanto, $g^na \in A - \mathcal{N}_A(\langle b \rangle)$. Provamos no parágrafo anterior que todo elemento de $A - \mathcal{N}_A(\langle b \rangle)$ tem ordem finita. Assim, g^na tem ordem finita. Porém, por hipótese, g^na tem ordem infinita. Um absurdo. Segue que $A \subseteq t(A)$. Portanto, $A = t(A)$.

Agora mostraremos que $T = \{1\}$. Seja v um elemento de ordem ímpar, diferente de 1, em $A - \mathcal{N}_A(\langle b \rangle)$. De maneira análoga ao que já fizemos, existe um elemento em Q, digamos k, de ordem 4 que comuta com b e $vk \notin \mathcal{N}(\langle b \rangle)$. Por (2),

$$v^{-1}k = bvkb^{-1} = k^{-1}v^{-1}.$$

Como $k \in Q$, $v \in T$ e A é um produto direto de grupos, então k e v comutam. Assim, $k = k^{-1}$. Um absurdo.

Seja v um elemento de ordem ímpar em $\mathcal{N}_A(\langle b \rangle)$. Note que como $\langle v \rangle \trianglelefteq G$ e $v \in \mathcal{N}_A(\langle b \rangle)$, então $[v, b] = 1$

Afirmação 6: $\exists w \in Q$ com $\mathrm{o}(w) = 4$ tal que $b^{-1}wb = w^{-1}$ e $vw \notin \mathcal{N}_A(\langle b \rangle)$.

Já sabemos que $\exists a_0 \in \mathcal{N}_A(\langle b \rangle)$ e que $A = t(A)$, ou seja, $A = Q \times E \times T$. Então, $a_0 = qet$ com $q \in Q$, $e \in E$ e $t \in T$. Como todo elemento não trivial de E tem ordem 2, então $\langle e \rangle = \{1, e\}$. Sabemos que $\langle e \rangle \trianglelefteq G$. Logo, b normaliza $\langle e \rangle$. Como e é o único elemento de ordem 2 em $\{1, e\}$ temos que $b^{-1}eb = e$, ou seja, b e e comutam. Vimos também que não existe $1 \neq t \in T$ de ordem ímpar tal que $t \in A - \mathcal{N}_A(\langle b \rangle)$. Logo, para todo $t \in T$, t normaliza $\langle b \rangle$. Ora, então todos os elementos de E e T normalizam $\langle b \rangle$. Sendo assim, como $a_0 = qet$ com $q \in Q$, $e \in E$ e $t \in T$ não normalizando $\langle b \rangle$, concluímos que $q \in Q$ é um elemento que não normaliza $\langle b \rangle$. Veja que $b^{-1}(-\mathbb{1})b = -\mathbb{1}$, pois $-\mathbb{1}$ é o único elemento de ordem 2 de Q. Assim, b e $-\mathbb{1}$ comutam. Já que q não comuta com b, não normaliza $\langle b \rangle$, então $q \in \{i, j, k, -i, -j, -k\}$, ou seja, q tem ordem 4. Logo, $b^{-1}qb = q^{-1}$. Portanto, $w = q$. Por raciocínio análogo ao que já fizemos, concluímos que $vw \notin \mathcal{N}_A(\langle b \rangle)$.

De $vw \notin \mathcal{N}_A(\langle b \rangle)$, então

$$w^{-1}v = bwvb^{-1} = v^{-1}w^{-1}.$$

Como v e w comutam, então $w = w^{-1}$. Um absurdo. Segue que não existe elemento de ordem ímpar em T sem ser o 1 e assim provamos a afirmação.

Com esta última afirmação provada, demonstramos que G é um 2-grupo hamiltoniano.

Agora mostremos que todo o argumento dado anteriormente é para os casos 2 e 3 do teorema.

Sabemos que $\mathrm{o}(b)$ é 2 ou 4 e que existe w que não normaliza $\langle b \rangle$. Logo, $\langle b \rangle$ não é normal em G. Se $\mathrm{o}(b) = 2$, como $A \trianglelefteq G$, $\langle b \rangle$ não é normal em G e $A \cap \langle b \rangle = 1$, segue que G é o produto semidireto de A e $\langle b | b^2 = 1 \rangle$. Logo, vale 2).

Mostremos agora que também vale para 3).

Suponha que $\mathrm{o}(b) = 4$. Vimos que existe um elemento, digamos, $x \in Q$ com $\mathrm{o}(x) = 4$ e $[b, x] = 1$. Vimos também que existe um elemento $y \in Q$, com $\mathrm{o}(y) = 4$, $y \in A - \mathcal{N}_A(\langle b \rangle)$ e $b^{-1}yb = y^{-1}$. Podemos tomar x e y como sendo os geradores de Q, pois

$x \notin \{y, y^{-1}\}$. Sem perda de generalidade, podemos fazer $x = i, y = j$ em Q. Vale então $bi = ib, b^{-1}jb = j$ (o que implica $-jbj = -\mathbb{1}b$), $b^{-1}kb = -\mathbb{1}k$ (o que implica $-kbk = -\mathbb{1}$). Para recordar, $k = ij$ e $-\mathbb{1}$ comuta com b. Observe que $ib \notin A$. Logo, $G = \langle A, ib\rangle$. Ademais, $\langle ib\rangle = \{ib, (-\mathbb{1})b^2, (-\mathbb{1})b^{-1}, 1\}$. Observe ainda que $(-i)(ib)i = ib$, $(-j)(ib)j = ib$ e também $(-k)(ib)k = ib$. Como $\langle i, j\rangle = Q$, $Q \cap \langle ib\rangle = \{1\}$, pela observação que fizemos na linha anterior, temos o produto direto $Q \times \langle ib\rangle$. Como $A = Q \times E$ e $G = \langle A, ib\rangle$, concluímos que G é o produto direto de um 2-grupo hamiltoniano contido em A e pelo grupo cíclico $\langle ib\rangle$ de ordem 4. Note que este subgrupo de A não é todo o A, pois $(-\mathbb{1})b^2$ está no núcleo da orientação, ou seja, em A.

(b) Suponha que a ordem de b é 2^k com $k \geq 3$.

Sabemos que para todo $a \in A$, se $a \in t(A)$, então $\langle a\rangle \trianglelefteq G$, donde todo subgrupo de $t(A)$ é normal em G. Assim, $t(A)$ é abeliano ou hamiltoniano.

Ora, $b^2 \in t(A)$ e $\mathrm{o}(b) = 2^k$ com $k \geq 3$. No caso de $t(A)$ ser um subgrupo abeliano, obviamente b^2 pertence ao centro de $t(A)$. Caso $t(A)$ seja um subgrupo hamiltoniano, então $t(A) = Q \times E \times T$. Como b é um 2-elemento, então b^2 estará em $Q \times E$. É fácil ver que, se $x \in Q \times E$, então $x^2 = -\mathbb{1}$ ou $x^2 = 1$.

Como vimos, $bgb^{-1} = g^{-1}b^{4j}$ para todo $g \in A - \mathcal{N}_A(\langle b\rangle)$. Logo, $b^2gb^{-1} = bg^{-1}b^{-1}b^{4j} = (g^{-1}b^{4j})^{-1}b^{4j} = b^{-4j}gb^{4j}$. Ora, como $b^4 = 1$ ou $-\mathbb{1}$, temos que $b^2gb^{-2} = g$ e b^2 comuta com todo elemento $g \in A - \mathcal{N}_A(\langle b\rangle)$.

Para $g \in \mathcal{N}_A(\langle b\rangle)$, temos $g^{-1}bg = b^r$. Suponha que $r \neq 1$. Como b tem ordem 2^k, r tem que ser ímpar. Ademais, $g^{-1}b^2g = b^{r^2}$ implica $bgb^{-1} = gb^{r-1}$, bem como $g^{-1}b^2g = b^{r^2}$ implica $b^2gb^{-2} = gb^{r^2-2}$. Porém,

$$bgb^{-1} = gb^{r-1} \Rightarrow b^2gb^{-2} = b^{-1}gbb^{r-1} = gb^{2r-2}.$$

Logo, $gb^{r^2-2} = gb^{2r-2}$. Disso, segue que $b^{r^2} = b^2r$. Isto é um absurdo pois, r^2 é ímpar e $2r$ é par.

Concluímos que b^2 é central em A e, por conseguinte, $\langle b^2\rangle$ é normal em $t(A)$. Como $\mathrm{o}(b) = 2^k(k \geq 3)$, $\mathrm{o}(b^2) = 2^{k-1}$, ou seja, $\mathrm{o}(b^2)$ é minimamente 4. Porém, não existe um elemento central com ordem maior ou igual a 4 em $Q \times E \times T$. Disso, segue que $t(A)$ não pode ser hamiltoniano. Segue que $t(A)$ é abeliano.

Como $bab^{-1} = a^{-1}b^{4j}$ para todo $a \in A - \mathcal{N}_A(\langle b\rangle)$ e $b^2 \in t(A)$, então $\langle b^{4j}\rangle \trianglelefteq G$. Tome $\widetilde{G} = \dfrac{G}{\langle b^{4j}\rangle}$, $\widetilde{A} = \dfrac{A}{\langle b^{4j}\rangle}$ e $\widetilde{b} = b\langle b^{4j}\rangle$. Já vimos que $t(A)$ é abeliano. Logo, $t(\widetilde{A}) = \frac{t(A)}{\langle b^{4j}\rangle}$ é abeliano e $\widetilde{b}\widetilde{a}\widetilde{b}^{-1}$ para todo $\widetilde{a} \in \widetilde{A} - \mathcal{N}_{\widetilde{A}}(\langle\widetilde{b}\rangle)$. Lembre também que qualquer subgrupo de $t(\widetilde{A})$ é normal em $\widetilde{A}$ pois, isto vale em G. Pelo Lema 3.1.4, $\widetilde{b}\widetilde{a}\widetilde{b}^{-1} = \widetilde{a}^{-1}$ para todo $\widetilde{a} \in \widetilde{A}$ donde $bab^{-1} = a^{-1}b^i$ para algum i que depende de a. Portanto, vale 4).

($\Leftarrow$) Suponha que G satisfaz uma das condições do teorema. Se um subgrupo cíclico finito $\langle c \rangle$ não é normal em G, então como $G = A \cup dA$ com $d \notin A$ temos que $c \in dA$. Para facilitar a leitura, podemos supor, sem perda de generalidade, que $d = b$ pois, $b \notin A$. Assim, $c \in bA$. Não é difícil ver que $\widehat{c^2}$ pertence ao centro de $\mathbb{Z}G$. Portanto,

$$\mu_{c,g} = 1 + (1-c)g(1+c)\widehat{c^2}$$

e

$$\mu_{c,g}\mu_{c,g}^{f} = 1 + (1-c)(g + g^{-1}f(g))(1+c)\widehat{c^2}.$$

Suponha que $g \in A$. Então, $f(g) = 1$ e $(g+g^{-1})\widehat{c^2}$ é um elemento central. Assim, $\mu c, g\mu_{c,g}^{f} = 1$. Aqui estamos supondo que valham as condições 1), 2) ou 3).

Suponha que G satisfaça a condição 4) do teorema. Então, $bgb^{-1} = g^{-1}b^{4i}$ e $\dfrac{G}{\langle b^4 \rangle}$ é abeliano. Assim,

$$b(g+g^{-1})\widehat{c^2}b^{-1} = (g+g^{-1})\widehat{c^2} = a^{-1}(g+g^{-1})\widehat{c^2}a$$

e $(g+g^{-1})\widehat{c^2}$ é central em $\mathbb{Z}G$.

Se $g \in bA$, então $g = ba$ para algum $a \in A$, $f(g) = -1$ e

$$g^{-1} = a^{-1}b^{-1} = b^{-1}ab^{4i}.$$

Não é difícil ver que $g^{-1}\widehat{c^2} = g\widehat{c^2}$. Com isso, $(g + f(g)g^{-1})\widehat{c^2} = 0$. Portanto, $\mu c, g\mu_{c,g}^{f} = 1$. Assim, todo unidade bicíclica é também uma unidade f-unitária. Portanto, $\mathcal{B}_2(\mathbb{Z}G)$ é um subgrupo f-unitário, como queríamos. ■

A Proposição 2.2.14, nos diz que se $\mathcal{C}(\mathcal{U}(\mathbb{Z}G))$ é trivial, então $\mathcal{U}_{g,f} = \mathcal{U}_f$ (pelo Corolário 2.2.7). Para grupos finitos, Ritter e Sehgal obtiveram condições necessárias e suficientes para $\mathcal{C}(\mathcal{U}(\mathbb{Z}G))$ ser trivial. A seguir, apresentaremos um resultado que nos fornece condições suficientes para $\mathcal{C}(\mathcal{U}(\mathbb{Z}G))$ ser trivial.

Teorema 3.1.6. *Seja $G = \langle A, b \rangle$, onde A é o núcleo do homomorfismo orientado e $f(b) = 1$. Se $\mathcal{U}_f = \mathcal{U}_{g,f}$ e uma das condições valem:*

1. *$b^2 = 1$ e A é abeliano;*
2. *$b^2 = 1$ e para todo $a \in A$, $ab = ba$;*
3. *Para todo $a \in A$, $bab^{-1} = a^{-1}$;*

então $\mathcal{C}(\mathcal{U}(\mathbb{Z}G))$ é trivial.

Demonstração:

Suponha que vale (1). Seja $u = a_1 + a_2 b \in \mathcal{C}$ com $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}A$. Como u é uma unidade central, então $ub = bu$. Consequentemente, $a_i b = b a_i$ e $a_i^* b = b a_i^*$ para $i = 1, 2$. Além disso, de $u^f = a_1^f - b a_2^f = a_1^* - a_2^*$, tem-se:

$$\begin{aligned} uu^f &= (a_1 + a_2 b)(a_1^* - a_2^* b) \\ &= a_1 a_1^* - a_1 a_2^* b + a_2 b a_1^* - a_2 b a_2^* b \\ &= a_1 a_1^* - a_2 b a_2^* b - a_1 a_2^* b + a_2 a_1^* b \\ &= a_1 a_1^* - a_2 a_2^* + (a_2 a_1^* - a_1 a_2^*) b. \end{aligned}$$

Como $u \in \mathcal{C} \subseteq \mathcal{U}_{g,f} = \mathcal{U}_f$, então $uu^f = \pm 1$. Assim, devemos ter $a_1 a_1^* - a_2 a_2^* = \pm 1$ e $(a_2 a_1^* - a_1 a_2^*) b = 0$.

Sejam $v = a_1 + a_2$ e $v_1 = a_1^* - a_2^*$. Então:

$$\begin{aligned} vv_1 &= (a_1 + a_2)(a_1^* - a_2^*) \\ &= a_1 a_1^* - a_1 a_2^* b + a_2 b a_1^* - a_2 a_2^* \\ &= a_1 a_1^* - a_1 a_2^* + (a_2 a_1^* - a_1 a_2^*) = \pm 1. \end{aligned}$$

Note que por $a_i b = b a_i$, v comuta com b. Assim temos que v é uma unidade central em $\mathbb{Z}G$ e por, $\mathcal{U}_{g,f} = \mathcal{U}_f$ temos $vv^f = \pm 1$. De $v \in \mathbb{Z}A$, $v^f = v^*$. Logo, $vv^* = vv^f = 1$ pois, f coincide com a involução clássica. Isto mostra que v é trivial e também que $v^* = \pm v_1$. Pelo Teorema 2.2.9, devemos ter $a_1 = 0$ ou $a_2 = \pm g$ ou $a_1 = \pm g$ ou $a_2 = 0$ para algum $g \in G$. Segue que, neste caso, o centro das unidades de $\mathbb{Z}G$ é trivial.

Suponha que valha (2). Repetindo o mesmo raciocínio da primeira parte, obteremos de $v^* = \pm v_1$ que $vv_1 = \pm 1$. Assim, necessitamos provar apenas que $v = a_1 + a_2$ é uma unidade central de $\mathbb{Z}G$ e assim, também pela primeira parte, concluímos que o centro é trivial. Como $ab = ba$ para todo $a \in A$, então $ba_i = a_i b$. Resta-nos mostrar que $aa_i = a_i a$ para todo $a \in A$. Note que $au = ua$, onde $u = a_1 + a_2 b$ é uma unidade central. Disso, segue que

$$\begin{aligned} au = ua &\Rightarrow a(a_1 + a_2 b)(a_1 + a_2 b)a \\ &\Rightarrow aa_1 + aa_2 b = a_1 a + a_2 ba \\ &\Rightarrow aa_1 + aa_2 b = a_1 a + a_2 ab. \end{aligned}$$

Segue que $aa_1 = a_1 a$ e $aa_2 b = a_2 ab$. Logo, $aa_i = a_i a$ para $i = 1, 2$. Portanto, v é uma unidade central de $\mathbb{Z}G$. Logo, neste caso, o centro de $\mathbb{Z}G$ é trivial.

Suponha que valha (3). Seja $u = a_1 + a_2 b \in \mathcal{C}$ com $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}A$. Assim, $u^* = u^f$. Como $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{U}_{g,f} \subseteq \mathcal{U}_f$, então $uu^* = uu^f = 1$. Segue que u é uma unidade trivial.

Dos casos $(1), (2)$ e (3) segue que $\mathcal{C}(\mathcal{U}(\mathbb{Z}G))$ é trivial. ■

Na seção seguinte, iremos apresentar alguns resultados que estabelecem relações entre as unidades unitárias generalizadas de $\mathbb{Z}G$ e $\mathbb{Z}(G \times C_2)$.

3.2 Análogo a conjectura do normalizador

Nesta seção, faremos uso dos resultados apresentados em capítulos anteriores para apresentar um análogo a Conjectura do Normalizador. Tal conjectura nos diz que o normalizador de G no grupo das unidades de $\mathbb{Z}G$ é exatamente o produto do grupo G pelo centro do grupo das unidades, i.e., $\mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G) = \mathcal{C}(\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)G$. Esta conjectura foi provado por Coleman para grupos nilpotentes e em seguida provado por Jackowski e Marciniak para grupos com 2-subgrupo de Sylow normal. Em geral, o problema ainda encontra-se em aberto.

Não é difícil ver que $G \subseteq \mathcal{U}_f$ e que, se f é trivial, então $\mathcal{U}_f = \pm G$. Recordemos, pelo teorema 2.2.1, que o normalizador do grupo das unidades f-unitárias é exatamente o subgrupo das unidades unitárias generalizadas. Neste capítulo, será apresentado um análogo natural a Conjectura do Normalizador: para um grupo finito $G, \mathcal{U}_{g,f}(\mathbb{Z}G) = \mathcal{C}\mathcal{U}_f$. Uma ressalva a ser feita é que os resultados apresentados até o presente momento são para grupos quaisquer.

Para facilitar a leitura, denotaremos por $W = \mathcal{U}_{g,f}$ e $W_1 = \mathcal{C}\mathcal{U}_f$, o subgrupo gerado por todas unidades centrais e unidades unitárias.

Teorema 3.2.1. *W_1 é um subgrupo normal de W.*

Demonstração:

De fato, sejam $\alpha \in W_1$ e $\beta \in W$. Disso, segue que $\alpha = cu$ com $c \in \mathcal{C}$ e $u \in \mathcal{U}_f \trianglelefteq \mathcal{U}_{g,f}$. Assim,

$$\beta\alpha\beta^{-1} = \beta c\beta^{-1}\beta u\beta^{-1} = \beta c\beta^{-1}k \text{ com } k \in \mathcal{U}_f$$

Como $c \in \mathcal{C}$, então $\beta\alpha\beta^{-1} = ck$. Segue que $c \in \mathcal{C} \in= ck$ com $c \in \mathcal{C}$ e $k \in \mathcal{U}_f$. Logo, $W_1 \trianglelefteq W$. ■

Teorema 3.2.2. *W/W_1 é um grupo cujo o expoente divide* 2.

Demonstração:

Veja que W/W_1 é um grupo. Seja $u \in w$. Então, $uu^f = c$ com $c \in H$. Temos

$$c^f = (uu^f)^f = (u^f)^f u^f = uu^f = c.$$

Temos também que:

$$u^2(u^2)^f = uuu^f u^f = uu^f uu^f = c^2.$$

Seja $u_1 = u^2c^{-1}$. Então,

$$u_1u_1^f = u^2c^{-1}(c^{-1})^f(u^2)^f = u^2(u^2)^f c^{-2} = c^2c^{-2} = 1.$$

Portanto, $u_1 \in \mathcal{U}_f$. Disso, segue que $u^2 \in W$. Seja $\alpha \in W/W_1$. Disso, segue que $\alpha = uW_1$. Assim, $\alpha^2 = u^2W_1$. Pelo que acabamos de provar, $u^2 \in W_1$. Logo, $\alpha^2 = W_1$. Segue que para todo $\alpha \in W/W_1$ $o(\alpha) = 2$. Segue que W/W_1 é um 2-grupo ou um grupo trivial (se $W = W_1$). Em ambos os casos, o expoente divide 2. ∎

Corolário 3.2.3. *Seja G um grupo finito. W é um subgrupo de índice finito em $\mathcal{U}$, se e somente se, W_1 é um subgrupo de índice finito em $\mathcal{U}$*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Suponha que W é um subgrupo de índice finito em $\mathcal{U}$. Queremos mostrar que o mesmo ocorre para W_1. De G ser finito, temos que $\mathcal{U}$ é finitamente gerado. Por hipótese, temos que $[W : \mathcal{U}] < \infty$. Assim, W é finitamente gerado. Isso implica que que W/W_1 é finito. Assim, W_1 é um subgrupo de índice finito em W e consequentemente em $\mathcal{U}$.
($\Leftarrow$) A volta é de maneira análoga. ∎

O próximo resultado nos dá condições necessárias e suficientes para $W = W_1$. Em outra palavras, condições para que valha o análogo da conjectura do normalizador.

Teorema 3.2.4. *Para qualquer anel de grupo integral, $W = W_1$, se e somente se, $\forall v \in W$ existe $c \in \mathcal{C}$ tal que $vv^f = \pm cc^f$.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Suponha $W = W_1$. Temos que $\forall v \in W$, $v = uc$ com $u \in \mathcal{U}_f$, $c \in \mathcal{C}$. Assim,

$$vv^f = uc(uc)^f = ucc^fu^f = cc^fuu^f = \pm cc^f.$$

($\Leftarrow$) Suponha que, $\forall v \in W$, exista $c \in \mathcal{C}$ tal que $vv^f = \pm cc^f$. Mostremos que $W = W_1$.
$\subseteq$) Seja $v \in H$. Por hipótese, existe $c \in \mathcal{C}$ tal que $vv^f = \pm cc^f$. Seja $u = vc^{-1}$. Então,

$$uu^f = vc^{-1}c^{-1}v^f = c^{-1}c^{-1}vv^f = \pm c{-}1c^{-f}cc^f = \pm 1.$$

Logo, $u \in \mathcal{U}_f$. Disso, segue que $v = cu \in \mathcal{C}\mathcal{U}_f = W$. Segue que $W = W_1$.
$\supseteq$) Seja $v \in W_1$. Então, $v = c_1u$ com $c - 1 \in \mathcal{C}$ e $u \in \mathcal{U}_f$. Disso, segue que

$$vv^f = c_1u(c_1u)^f = c_1uu^fc_1^f = \pm c_1c_1^f.$$

Segue que $W = W_1$. ∎

Agora vamos estabelecer relações entre as unidades unitárias de $\mathbb{Z}G$ e $\mathbb{Z}(G \times C_2)$.

Teorema 3.2.5. *Dado $\alpha \in \mathbb{Z}G$ tem-se que $1+2\alpha$ é uma unidade central em $\mathbb{Z}G$ se, e somente se, $1+\alpha(1-c)$ é uma unidade central em $\mathbb{Z}(G \times C_2)$.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Suponha que $1+2\alpha$ seja um unidade central em $\mathbb{Z}G$. Mostremos que $1+\alpha(1-c)$ é uma unidade unitária em $\mathbb{Z}(G \times C_2)$. Ou seja, $gc(1+\alpha(1-c)) = (1+\alpha(1-c))gc$. De $1+2\alpha$ ser central tem-se

$$g(1+2\alpha) = (1+2\alpha)g \Rightarrow g + g2\alpha = g + 2\alpha g \Rightarrow g\alpha = \alpha g.$$

Assim:

$$\begin{aligned} gc(1+\alpha(1-c)) &= gc + gc\alpha - gc\alpha c \\ &= gc + g\alpha c - \alpha cgc \\ &= gc + \alpha g - \alpha cgc \\ &= (1+\alpha(1-c))gc \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) A volta é análoga. ■

Teorema 3.2.6. *Dado $\alpha \in \mathbb{Z}G$, $1+2\alpha$ é uma unidade unitária generalizada de $\mathcal{U}$ se, e somente se, $1+\alpha(1-c)$ é uma unidade generalizada em $\mathcal{U}(\mathbb{Z}(G \times C_2))$.*

Demonstração:

Este teorema é demonstrado de maneira análoga ao Teorema 2.1.6. ■

3.3 Relação entre unidades hipercentrais e unidades unitárias generalizadas

Nesta seção, introduziremos em termos das unidades hipercentrais de $\mathcal{U}$, uma definição equivalente das unidades unitárias generalizadas de um anel de grupo integral quando G é periódico. Além disso, obteremos condições necessárias e suficientes para $\mathcal{U}_{g,f} = \widetilde{Z}(\mathcal{U})$. Não faremos um estudo profundo desse tipo de unidade. Portanto, alguns resultados serão apresentados sem demonstração.

Sejam G um grupo arbitrário e

$$1 = Z_0(\mathcal{U}) \leq Z_1(\mathcal{U}) \leq ... \leq Z_n(\mathcal{U}) \leq ...$$

a série superior central do grupo das unidades $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$. Seja $Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n(\mathcal{U})$ o subgrupo normal de $\mathcal{U}$ chamado de *hipercentro* de $\mathcal{U}$. Na sua tese, Yuanlin Li prova que a altura da série central do grupo das unidades de um anel de grupo integral de um grupo periódico é no máximo 2. Ou seja, a série estaciona. Entretanto, não apresentaremos a prova deste resultado. A mesma pode ser encontrada em [9].

Seja G um grupo arbitrário, f um homomorfismo orientado e

$$\mathcal{H} = \{u \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}G); uu^f \in Z_2(\mathcal{U}(\mathbb{Z}G))\}.$$

Então temos o seguinte:

Teorema 3.3.1. *Seja G um grupo arbitrário e f um homomorfismo orientado. Então, $\mathcal{U}_{g,f} \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{N}_{\mathcal{U}}(\mathcal{U}_{g,f})$. Em particular, se G é periódico, então $\mathcal{H} = \mathcal{U}_{g,f}$.*

Demonstração:

Observe que necessitamos provar apenas que $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{N}_{\mathcal{U}}(\mathcal{U}_{g,f})$, pois, $\mathcal{U}_{g,f} \subseteq \mathcal{H}$. Sejam $h \in \mathcal{H}$ e $u \in \mathcal{U}_{g,f}$. Então, $hh^f \in Z_2$ e $uu^f = c \in Z_1$. Assim, $u^f = cu^{-1}$. Tomando $v = h^{-1}uh$, nosso objetivo é mostrar que $v \in \mathcal{U}_{g,f}$,i.e., $vv^f \in Z_1$. Temos :

$$\begin{aligned} v = h^{-1}uh \quad &\Rightarrow \quad vv^f = h^{-1}uh(h^{-1}uh)^f \\ &\Rightarrow \quad vv^f = h^{-1}uhh^f u^f h^{-f} \\ &\Rightarrow \quad h^{-f}vv^f h^f = h\ -fh^{-1}uhh^f u^f \\ &\Rightarrow \quad h^{-f}vv^f h^f = (hh^f)^{-1}u(hh^f)cu^{-1} = [(hh^f)^{-1}, u]c \in Z_1 \end{aligned}$$

Segue que $vv^f \in \mathcal{C}(\mathcal{U})$. Isso implica que $v \in \mathcal{U}_{g,f}$ e portanto, $h \in \mathcal{N}_{\mathcal{U}}(\mathcal{U}_{g,f})$. Quando G é periódico, o Teorema 2.2.5 nos diz que $\mathcal{H} = \mathcal{U}_{g,f}$. ■

Seja $\mathcal{H}_1 = \{u \in \mathcal{U}; uu^f = \widetilde{Z}(\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)\}$. Recordando do resultado (não demonstrado no presente trabalho) que a altura da série central do grupo das unidades de um anel de grupo integral com o grupo G periódico é no máximo 2, podemos obter uma definição equivalente das unidades unitárias generalizadas quando G é periódico. Temos o teorema a seguir:

Corolário 3.3.2. *Seja G um grupo periódico. Então, $\mathcal{H}_1 = \mathcal{U}_{g,f}(\mathbb{Z}G)$.*

Demonstração:

Suponha que G seja periódico. Usando o fato (não demonstrado na dissertação) que a altura da série central de um anel de grupo integral quando G é periódico temos que $Z_2 = Z_3 = ...$ Pela definição de hipercentro temos que $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$. Disso, segue que usando o teorema anterior segue que $\mathcal{H}_1 = \mathcal{U}_{g,f}$. ■

Como $\widetilde{Z}(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{H}_1$ obtemos :

Corolário 3.3.3. *Seja G um grupo periódico e f qualquer homomorfismo orientado. Então, $\widetilde{Z}(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U}_{g,f}(\mathbb{Z}G)$. Em particular, $\widetilde{Z}(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G)$.*

Demonstração: Segue direto do corolário anterior. ■

Uma pergunta natural a se fazer é: quando temos $\widetilde{Z}(\mathcal{U}) = \mathcal{H}_1$? O próximo teorema nos fornece uma resposta. Para provar tal teorema enunciaremos apenas um resultado que pode ser encontrado em [9]. Ressaltamos que a prova não será exibida pois o objetivo desta seção é apenas apresentar os resultados que relacionam as unidades hipercentrais e as unidades unitárias generalizadas.

Teorema 3.3.4. *Seja G um grupo periódico. Então exatamente umas das afirmações seguintes vale:*

1. *G é um 2-grupo hamiltoniano e $T = T(\widetilde{Z}(U))$(subgrupo de todas unidades de torção de $\widetilde{Z}(\mathcal{U})$);*
2. *$T = Z_1(G)$;*
3. *G tem um subgrupo normal abeliano H de índice 2 contendo um elemento de ordem 4 tal que para cada $g \in G \backslash H$, $g^2 = a^2$ e $ghg^{-1} = h^{-1}$ para cada $h \in H$, e $T = \langle a \rangle \oplus E = Z_2(\mathcal{U}) \bigcap Z_2(G)$, com E um 2-grupo elementar abeliano.*

Teorema 3.3.5. *Seja G um grupo periódico e f um homomorfismo orientado. Então, as seguintes afirmações são equivalentes.*

1. *$\widetilde{Z}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}_{g,f}$;*
2. *$G = T$;*
3. *G ou é um 2- grupo hamiltoniano ou um grupo abeliano de torção;*
4. *$\widetilde{Z}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$.*

Demonstração:

(1) $\Rightarrow$ (2) Suponha que $\widetilde{Z}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}_{g,f}$. Então, temos que $G \subseteq \widetilde{Z}(\mathcal{U})$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Suponha que $G = T$ é não abeliano. Então, pelo caso 1 do teorema citado acima, temos o resultado.

(3) $\Rightarrow$ (4) Se G é um 2-grupo hamiltoniano, então $\mathcal{U} = \pm G = \widetilde{Z}(\mathcal{U})$. Se G é abeliano, então $\mathcal{U} = \mathcal{C}(\mathcal{U}) = \widetilde{Z}$.

(4) $\Rightarrow$ (1) O resultado segue imediatamente do Corolário 3.3.3. ■

Para o leitor que queira conhecer melhor as unidades hipercentrais, ver [6], [9] e [10].

Conclusão

Neste trabalho, estudamos um tipo de unidade; a unidade f-unitária e também estudamos as unidades f-unitárias generalizadas que são generalizações da primeira. Vimos que o subgrupo gerado por todas unidades f-unitárias generalizadas é exatamente o normalizador do subgrupo das unidades f-unitárias. Como foi dito ao longo do texto, o grupo das unidades é um grupo difícil de estudar e encontrar subgrupos unitários com índice finito no grupo das unidades nos fornece alguma informação sobre as unidades.

Vimos que quando o grupo das unidades $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$ coincide com o subgrupo das unidades f-unitárias, então também vale para $\mathcal{U}(\mathbb{Z}(G \times C_2))$, i.e, $\mathcal{U}(\mathbb{Z}(G \times C_2))$ coincide com o subgrupo f_1-unitário. Desta forma, conseguimos estender uma propriedade inicialmente do anel de grupo $\mathbb{Z}G$ para o anel de grupo $\mathbb{Z}(G \times C_2)$. Além disso, foi discutido que quando o grupo G é periódico, então o segundo normalizador do subgrupo das unidades f-unitária estaciona.

Tendo em vista a dificuldade de se estudar o grupo das unidades, é relevante sabermos, por exemplo, quando que o grupo das unidades será um subgrupo das unidades bicíclicas, ou subgrupo f-unitário ou um subgrupo f-unitário generalizado. Na dissertação, apresentamos a demonstração provada por Bovdi e Sehgal que caracteriza grupos para que tenhamos $\mathcal{B}_2 \leq \mathcal{U}_f$. Na sua tese, Yuanlin Li, demonstrou que, sempre que o subgrupo das unidades bicíclicas estiver contido no subgrupo das unidades f-unitárias generalizadas, então também estará contido no subgrupo das unidades f-unitárias. Este resultado nos permitiu usar a mesma demonstração provada por Bovdi e Sehgal para provar o teorema que caracteriza grupos para os quais $\mathcal{B}_2 \leq \mathcal{U}_{g,f}$.

Apresentamos algumas relações entre as unidades hipercentrais e as unidades f-unitárias generalizadas. Dentre essas relações, mostrando quando que elas seriam iguais. Como as unidades hipercentrais não foram estudas no trabalho com detalhes, o leitor interessado pode consultar em [6] e [10].

Referências

[1] BOVDI, A.A. Unitarity of the Multiplicative Group of an Integral Group Ring, *Math. USSR Sbornik.*, v. **47**, no. 2 p. 377-383, 1992.

[2] BOVDI, A.A. Unitarity of the Multiplicative Group of an Integral Group Ring, *Math. USSR Sbornik.*, v. **119**, no. 2 p. 387-400, 1982.

[3] BOVDI, A.A; SEHGAL, Sudarshan K. Unitary Subgroup of Integral Group Rings, *Manuscrita Math.*, v. **36**, p. 197-204, 1992.

[4] BOVDI, A.A; SEHGAL, Sudarshan K. Unitary Subgroup of Integral Group Rings, *Manuscrita Math.76*, v. **85**, no. 2-3, p. 213-222, 1992.

[5] CLIFF, Gerald H; SEHGAL, Sudarshan K. Groups which are Normal in the Unit Groups of their Group Rings, *Archiv der Mathmatik.*, v. **33**, no. 1-3, p. 529-537, 1979.

[6] HERTWECK, Martin; IWAKI,E; JURIAANS, S.O. On Hypercentral Units in Integral Group Rings. *Journal of Group Theory.*, p. 1-28, 2007.

[7] HIGMAN, Graham. The Units of Group Rings, *Manuscrita Math.*, v. **85**, no. 1-3, p. 231-248, 1939.

[8] JESPERS, Eric; POLCINO MILIES, César. Units of Group Rings. *Journal of Pure and Applied Algebra 107.*, p.233-251, 1996.

[9] LI,Y. Units in Integral Group Rings, Ph.D Thesis, Memorial University of Newfoundland, St. John's, Canada, 1996.

[10] LI,Y; PARMENTER. M.M. Some Results on Hypercentral Units in Integral Group Rings, Canada.

[11] POLCINO MILIES, César; SEHGAL, Sudarshan K. An Introduction to Group Rings. Dordrecht: Kluwer Academic, 2002. (Algebras and Applications, 1).

[12] PARMENTER, M.M. Unitary Units in Group Ring of Groups of Order 16, *Journal of mathematics.*, v. **24**, no. 2 p. 673-680, 1995.

[13] RITTER, Jurgen; SEHGAL, Sudarshan K. Generators of Subgroup of $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)^*$. *Contemporary Mathematics.*,v.**93**, 1989.

[14] SEHGAL, Sudarshan K. Units in Integral Group Rings. New York: Longman Scientific Technical.

[15] SEHGAL, Sudarshan K. Topics in Group Rings. Marcel Dekker, New York,1978.

[16] SCOTT. Willian R. *Group Theory.* New York.