



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



Hiperbolicidade Fraca Via Funções De Lyapunov Infinitesimais.

Junilson Cerqueira da Silva

Salvador-BA
Julho/2014

Hiperbolicidade Fraca Via Funções De Lyapunov Infinitesimais.

Junilson Cerqueira da Silva

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientador: **Prof. Dr. Vítor D. Martins de Araújo**

Salvador-BA
Julho/2014

Silva, Junilson Cerqueira da.

Hiperbolicidade Fraca Via Funções de Lyapunov / Junilson Cerqueira da Silva. - 2014. 88 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Vitor D. Martins de Araújo.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Salvador, 2014.

1.Funções(Matемática). 2. Teoria dos conjuntos. 3. Teoria dos sistemas. I. Araújo, Vitor D. Martins de. II. Universidade Federal da Bahia. Instituto de Matemática. III. Título.

CDD - 515.7

CDU - 517.5

Dedico este trabalho
aos meus pais, meus irmãos
e a todas as pessoas que se sentem incapazes
de vencer nesta vida.
Vocês não sabem o quão longe Deus pode lhes levar.

Agradecimentos

Ao meu Deus e criador por ser infinitamente bom comigo. Agradeço a ele por ter me capacitado para enfrentar e vencer os desafios que surgiram nestes últimos dois anos. Eu nunca esquecerei que tudo que tenho, tudo que sou e o que vier a ser vem de Deus.

À minha mãe, Joanita, exemplo de força e coragem, pelas orações diárias para que eu estivesse em segurança em uma cidade longe da nossa. Eu acredito que cada uma delas foi atendida por Deus. Agradeço aos meus queridos irmãos, Daniele, Jamile e Jandilson por acreditarem em mim. Sou eternamente grato à minha família que é minha motivação. Amo vocês.

Aos meus avós que sempre estiveram dispostos a me ajudar e também são responsáveis por esta vitória. Eu amo vocês. Agradeço aos meus tios pela disposição a ajudar quando tive problemas com estadia em Salvador.

A Caroline, minha Caroline, minha noiva amada. Muito obrigado por estar ao meu lado quando precisei chorar, me lamentar e contar com alguém. Muito obrigado pelos vários momentos de sorrisos que passamos juntos neste dois anos. Muito obrigado por acreditar em mim. Meu amor e amizade são seus por toda vida. Te amo muito e para sempre.

A Diego, pelo amigo que sempre se mostrou ser a mim, pelo apoio sempre disponível. Serei eternamente grato e amigo.

Ao professor e orientador Vítor Araújo por ser tão prestativo e dedicado ao que faz, pelas correções e orientações que foram necessárias para o desenvolvimento deste trabalho, por me oferecer algo que eu realmente gostei de estudar. Agradeço aos outros professores que também me ensinaram nesses dois últimos anos e contribuíram para minha formação.

Aos amigos da UFBA por proporcionarem um bom ambiente de estudo. Foi um prazer conhecer vocês. Espero que a amizade construída permaneça. Agradeço também aos amigos distantes que compreenderam minha ausência nestes dois anos e a todos que contribuíram direta e indiretamente para o meu sucesso, mesmo que apenas com a torcida.

Por fim, agradeço a FAPESB pelo apoio financeiro.

“Porque com Deus eu salto muralhas,
com meu Deus eu derroto exércitos.

Deus é quem me dá força e
aperfeiçoa meus caminhos.”

Salmo 18:29,32.

Resumo

Apresentamos condições necessárias e suficientes para que uma decomposição contínua invariante do fibrado tangente de um conjunto compacto invariante Λ seja hiperbólica ou parcialmente hiperbólica, com respeito a um difeomorfismo ou um fluxo C^1 (com ou sem singularidades). Nós aplicamos estes resultados ao atrator solenóide e ao atrator geométrico de Lorenz.

Palavras-chave: Decomposição dominada, conjunto parcialmente hiperbólico, hiperbolicidade e hiperbolicidade seccional.

Abstract

We present necessary and sufficient conditions for a continuous invariant splitting over a compact invariant subset Λ to be hyperbolic or partially hyperbolic, with respect to a diffeomorphism or a C^1 flow (with or without singularities). We apply the results to the solenoid attractor and the geometric Lorenz attractor.

Keywords: Dominated splitting, partial hyperbolic set, hyperbolicity, infinitesimal Lyapunov functions, strict separation.

Sumário

Lista de Figuras	viii
1 Introdução	1
1.1 Hiperbolicidade, hiperbolicidade parcial e dominação . . .	2
1.1.1 Hiperbolicidade	3
1.1.2 Hiperbolicidade parcial e dominação	3
1.1.3 Cones e campo de formas quadráticas ou funções de Lyapunov infinitesimais	6
1.2 Resultados principais	6
1.2.1 Hiperbolicidade para difeomorfismos	7
1.2.2 Hiperbolicidade Parcial para fluxos	8
1.2.3 Exemplos simples de aplicação	10
1.3 Organização do trabalho	11
2 Campo de formas quadráticas não-degeneradas	13
2.1 Teorema de Lagrange de diagonalização de formas quadrá- ticas	13
2.1.1 Persistência e continuidade da diagonalização de um campo contínuo não-degenerado de formas quadrá- ticas	16
2.1.2 Descontinuidade da diagonalização de operadores auto-adjuntos	17
2.2 Propriedades de formas quadráticas não-degeneradas . .	19
2.3 Espaços vetoriais pseudo-euclidianos	20

2.4	Formas bilineares simétricas não negativas no cone de vetores nulos de um espaço pseudo-euclidiano	25
3	Conjuntos Hiperbólicos Para Difeomorfismos	29
3.1	Prova do Teorema 1.2.2	31
3.2	Exemplo de aplicação: o solenóide	38
3.2.1	O atrator solenóide	38
3.2.2	O solenóide é hiperbólico	39
4	Conjuntos Parcialmente Hiperbólicos Para Fluxos	41
4.1	Cociclos lineares \mathcal{J} -separados sobre fluxos	41
4.2	Prova dos resultados principais	44
4.2.1	\mathcal{J} -separação estrita de cociclos e dominação	49
4.3	Hiperbolicidade parcial: provas da proposição 1.2.5 e do teorema 1.2.3	59
4.4	O atrator de Lorenz geométrico	64
5	Generalizações: Hiperbolicidade seccional e funções de Lyapunov infinitesimais	69
5.1	Extensão do teorema 4.2.10	69
5.2	Hiperbolicidade seccional	71
5.3	Funções de Lyapunov infinitesimais e hiperbolicidade seccional	73
5.4	Considerações finais	73
	Bibliografia	74

Lista de Figuras

1.1	Hiperbolicidade em superfícies	7
1.2	\mathcal{J} -separação estrita	9
3.1	Construção dos subespaços invariantes	36
3.2	Primeiras etapas de construção do solenóide	39
4.1	O atrator de Lorenz	64
4.2	O atrator de Lorenz geométrico	65

Capítulo 1

Introdução

A teoria dos sistemas dinâmicos tem uma longa história que remonta às leis da mecânica clássica expressa em termos de equações diferenciais. Um exemplo relevante nessa teoria é o problema dos n -corpos: num campo gravitacional, este problema modela, por exemplo, o nosso sistema solar. É na busca da solução de problemas como esse que muitas ferramentas matemáticas foram desenvolvidas, aprofundando a teoria de sistemas dinâmicos.

Desde Poincaré, no final do século XIX, a ênfase ao desenvolvimento da teoria tem sido o estudo do comportamento assintótico das soluções das equações diferenciais, em vez de buscar explicitamente expressões para as soluções.

Destacaremos, dentre as possíveis linhas de pesquisa da teoria dos sistemas dinâmicos, a teoria de sistemas dinâmicos hiperbólicos, desenvolvida nos anos 60 e 70, após o trabalho de Smale, Sinai, Ruelle, Bowen [5, 6, 25, 24] entre outros. Essa teoria busca entender o comportamento de conjuntos compactos invariantes Λ para fluxos e difeomorfismos em variedades compactas de dimensão finita tendo uma decomposição hiperbólica do espaço tangente.

Em muitos exemplos clássicos vindos da Mecânica, Química e outros, os modelos matemáticos envolvem um fluxo gerado por um campo de vetores X dado em alguma variedade M . Assim, é natural se perguntar se

o sistema possui algum tipo de hiperbolicidade. Em caso afirmativo, será que tal hiperbolicidade pode ser caracterizada diretamente do campo de vetores e sua derivada, isto é, das propriedades do gerador infinitesimal do fluxo, sem lidar diretamente com o fluxo X_t como requer a definição? É este o objetivo principal deste trabalho: deduzir hiperbolicidade parcial para um conjunto compacto invariante de um fluxo X_t utilizando apenas o campo de vetores X e sua derivada DX .

1.1 Hiperbolicidade, hiperbolicidade parcial e dominação

Uma variedade riemanniana M é uma variedade diferenciável com uma dada *métrica riemanniana*¹.

Seja M uma variedade compacta riemanniana n -dimensional C^∞ conexa e sem bordo. Um campo de vetores X sobre M é uma correspondência associando a cada ponto x de M um vetor $X(x)$ em T_xM , o espaço de vetores tangentes a M no ponto x . Denotamos por $\mathfrak{X}^1(M)$ o espaço dos campos de vetores de classe C^r , $r \geq 1$.

Pelo teorema de existência e unicidade de soluções, para cada campo $X \in \mathfrak{X}^1(M)$, existe um único fluxo associado representado por $X_t : M \rightarrow M$, $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{d}{dt}X_t(y)|_{t=t_0} = X(X_{t_0}(y)), \forall y \in M, t_0 \in \mathbb{R}.$$

Se M é uma variedade fechada (uma variedade sem bordo), então o fluxo está definido para todo $t \in \mathbb{R}$. Entretanto, se $\partial(M) \neq \emptyset$, o fluxo está definido no bordo apenas para $t \geq 0$.

Lembramos que um difeomorfismo f sobre M é uma aplicação diferenciável cuja inversa também é diferenciável. Para cada $t \in \mathbb{R}$ fixado, temos

¹Uma *métrica riemanniana* (ou estrutura riemanniana) em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto p de M um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ (isto é, uma forma bilinear simétrica, positiva definida) no espaço tangente T_pM , que varia diferenciavelmente (detalhes desta definição podem ser encontrados em qualquer livro de geometria riemanniana, por exemplo, [7])

que X_t é um difeomorfismo C^1 . A família $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ de difeomorfismos, satisfaz a propriedade:

1. $X_0 = Id$, onde $Id : M \rightarrow M$ é a aplicação identidade.
2. $X_t \circ X_s = X_{t+s}$, $\forall t, s \in \mathbb{R}$.

1.1.1 Hiperbolicidade

Seja X um campo de vetores e X_t o fluxo gerado por X .

Definição 1.1.1. Um conjunto compacto invariante Λ (isto é, $X_t(\Lambda) = \Lambda$, para todo $t \in \mathbb{R}$) é hiperbólico para um fluxo X_t se existe uma decomposição contínua invariante do fibrado tangente $T_\Lambda M = E^s \oplus E^X \oplus E^u$ e existem constantes $C, \lambda > 0$ tais que

$$\|DX_t|_{E_x^s}\| \leq Ce^{-\lambda t}, \quad \|DX_{-t}|_{E_x^u}\| \leq Ce^{-\lambda t}, \quad x \in \Lambda \text{ e } t \in \mathbb{R}.$$

Ou seja, E^s é uniformemente contraído e E^u é uniformemente expandido por DX_t .

Na expressão acima E^X denota o subfibrado unidimensional gerado pela direção do campo e os subfibrados são DX_t – invariantes, ou seja, são invariantes pela derivada DX_t do fluxo X_t , no seguinte sentido

$$DX_t(E_x^i) = E_{X_t(x)}^i, \quad x \in \Lambda, \quad t \in \mathbb{R}, \quad i = s, X, u.$$

Observação 1.1.2. As normas usadas são decorrentes de uma estrutura riemanniana fixada na variedade M . Como esta tem dimensão finita, as normas são equivalentes. Assim, a definição de hiperbolicidade não depende da métrica riemanniana escolhida.

1.1.2 Hiperbolicidade parcial e dominação

Na tentativa de ampliar o alcance da teoria hiperbólica, motivado, por exemplo, em entender as propriedades do atrator de Lorenz (que é um exemplo de dinâmica não-hiperbólica com singularidade) surgem várias noções mais fracas de hiperbolicidade. Este é o caso do conceito

de decomposição dominada que será estudada neste trabalho. Ela foi introduzida inicialmente nos trabalhos de Mañé [14], Liao [12] e Pliss [19], na tentativa de provar a conjectura de estabilidade ² de Palis-Smale [18].

Definição 1.1.3. *Seja Λ um conjunto compacto invariante de X . Uma decomposição contínua do fibrado tangente sobre Λ , $T_\Lambda M = E \oplus F$ invariante por DX_t com E_x, F_x não triviais ($E_x \neq 0$ e $F_x \neq 0$) para todo $x \in \Lambda$, diz-se dominada se existem constantes positivas K, λ satisfazendo*

$$\|DX_t|_{E_x}\| \cdot \|DX_{-t}|_{F_{X_t(x)}}\| \leq Ke^{-\lambda t}, \quad \forall x \in \Lambda \text{ e } \forall t > 0. \quad (1.1)$$

Isto significa que a contração/expansão ao longo da direção E é mais forte que (domina) qualquer expansão/contração na direção F .

A partir do conceito de decomposição dominada, podemos definir hiperbolicidade parcial para conjuntos compactos invariantes.

Definição 1.1.4. *Um conjunto compacto invariante Λ diz-se parcialmente hiperbólico se existe uma decomposição dominada $T_\Lambda M = E \oplus F$ tal que uma das seguintes propriedades é satisfeita:*

- *E é subfibrado uniformemente contraído, ou seja, existe constantes positivas C, λ tal que $\|DX_t|_{E_x}\| \leq Ce^{-\lambda t}$, $\forall t \geq 0$.*
- *F é subfibrado uniformemente expandido, ou seja, existe constantes positivas C, λ tal que $\|DX_{-t}|_{F_x}\| \leq Ce^{-\lambda t}$, $\forall t \geq 0$.*

Observação 1.1.5. *Note que as definições de hiperbolicidade, hiperbolicidade parcial e dominação são invariantes por troca de direção do tempo, ou seja, se uma delas vale para o campo X e seu fluxo $X_t, t \in \mathbb{R}$, então também vale para o campo $-X$ com fluxo sendo $X_{-t}, t \in \mathbb{R}$.*

Novamente, estas noções mais fracas de hiperbolicidade não dependem da norma riemanniana fixada em M .

²Tal conjectura foi provada para difeomorfismos por Mañé em [15], e para fluxos, por Hayashi em [9].

Apresentaremos a seguir noções preliminares que permeiam este trabalho.

Um *região armadilha* U para um fluxo X_t é um subconjunto da variedade M que satisfaz:

1. $X_t(U)$ está contido em U para todo $t > 0$;
2. Existe $T > 0$ tal que $\overline{X_t(U)}$ é contido no interior de U para todo $t > T$.

Definimos a órbita de X como o conjunto $\mathcal{O}(x) := \{X_t(x), \text{ onde } X_t(x) \text{ estiver definido}\}$. No caso de um difeomorfismo, $f : M \rightarrow M$, a órbita de um ponto $x \in M$ é dada por $\mathcal{O}(x) := \{f^n(x), n \in \mathbb{Z}\}$.

Uma *singularidade* para o campo de vetores X é um ponto $\sigma \in M$ tal que $X(\sigma) = 0$ ou, equivalentemente, $X_t(\sigma) = \sigma$ para todo $t \in \mathbb{R}$. O conjunto formado pelas singularidades é o conjunto singular de X . Uma singularidade σ é hiperbólica se os autovalores da derivada $DX(\sigma)$ do campo de vetores na singularidade σ têm parte real não-nula. Se σ não é uma singularidade e existe $t > 0$ tal que $X_t(\sigma) = \sigma$, dizemos que a órbita de σ é *fechada*. Se σ não é uma singularidade ou se sua órbita não é fechada, então sua órbita é chamada de *regular*.

Um conjunto Λ é dito *isolado* se existe uma vizinhança compacta (um bloco isolante) U de Λ tal que $\Lambda = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} X_t(U)$. O conjunto Λ é um *conjunto que atrai* se é isolado e com um bloco isolante U que é uma região armadilha.

Agora, seja $U \subset M$ uma *região armadilha* e seja $\Lambda = \Lambda_X(U) := \bigcap_{t > 0} \overline{X_t(U)}$ o conjunto maximal invariante associado (também chamado de sumidouro ou atrator por alguns autores).

Definição 1.1.6. *Um subconjunto compacto invariante Λ é não-trivial se*

- Λ não contém singularidades;
- ou Λ contém, no máximo, um número finito de singularidades, Λ contém alguma órbita regular e é conexo.

Isto significa que um conjunto compacto invariante Λ é não trivial se suas singularidades são acumuladas por órbitas regulares em Λ .

Denotaremos E_U como sendo o fibrado vetorial de dimensão finita sobre U .

1.1.3 Cones e campo de formas quadráticas ou funções de Lyapunov infinitesimais

Uma das dificuldades técnicas na teoria hiperbólica é efetivamente provar a existência de uma tal estrutura, mesmo nas suas formas mais fracas (decomposição dominada, hiperbolicidade parcial, hiperbolicidade singular entre outras). O modo mais usual e geométrico para fazer isso é através de um campo de cones.

Seja $\mathcal{J} : E_U \rightarrow \mathbb{R}$ um campo contínuo de formas quadráticas não-degeneradas $\mathcal{J}_x : E_x \rightarrow \mathbb{R}$ que têm índice $0 < q < \dim(E) = n$, onde $U \subset M$ é uma vizinhança de um compacto invariante Λ para o campo X em M . Lembramos que o índice de uma forma quadrática é a maior dimensão de um subespaço vetorial restrita ao qual a forma é negativa.

A hipótese de continuidade sobre \mathcal{J} significa que, para todo $v_x \in T_x M$, a aplicação $x \in U \mapsto \mathcal{J}_x(v_x) \in \mathbb{R}$ é contínua. Assumimos também que $(\mathcal{J}_x)_{x \in U}$ é continuamente diferenciável ao longo do fluxo, isto é, a aplicação $t \in \mathbb{R} \mapsto \mathcal{J}_{X_t(x)}(v_{X_t(x)}) \in \mathbb{R}$ é continuamente diferenciável para todo $x \in U$ e $v_{X_t(x)} \in T_{X_t(x)} M$. Este campo \mathcal{J} é também chamado de "função de Lyapunov infinitesimal". A partir deste, construímos os campos de cones como segue:

Denotaremos por $\mathcal{C}_\pm = \{C_\pm(x)\}_{x \in U}$ o campo de cones positivos e negativos induzidos por \mathcal{J}_x , isto é,

$$C_\pm(x) := \{0\} \cup \{v \in E_x : \pm \mathcal{J}_x(v) > 0\}, \quad x \in U$$

e também $\mathcal{C}_0 = \{C_0(x)\}_{x \in U}$ a família correspondente de vetores zeros $C_0(x) = \mathcal{J}_x^{-1}(\{0\})$ para todo $x \in U$.

1.2 Resultados principais

Apresentaremos agora os principais resultados deste trabalho. A partir deles podemos mostrar que um conjunto compacto invariante Λ é parcialmente hiperbólico para um fluxo X_t utilizando apenas o campo de vetores X e sua derivada DX .

1.2.1 Hiperbolicidade para difeomorfismos

A definição de hiperbolicidade para difeomorfismos é similar àquela para fluxos.

Definição 1.2.1. *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo. Um conjunto compacto e invariante Λ é hiperbólico se, para cada $x \in \Lambda$, existem subespaços $E_x^s \subset T_x M$ e $E_x^u \subset T_x M$ tais que:*

1. $T_x M = E_x^s \oplus E_x^u$, com esta decomposição variando continuamente.
2. $Df_x E_x^u = E_{f(x)}^u$ e $Df_x E_x^s = E_{f(x)}^s$.
3. Existem constantes $C > 0$ e $0 < \lambda < 1$ tais que:
 - a) $\|Df^n v\| \leq C\lambda^n \|v\|$ se $\forall v \in E_x^s$ e $n \geq 0$.
 - b) $\|Df^{-n} v\| \leq C\lambda^n \|v\|$ se $\forall v \in E_x^u$ e $n \geq 0$.

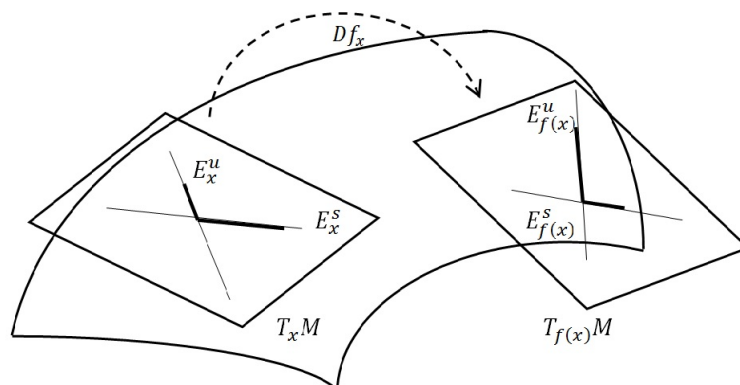


Figura 1.1: Hiperbolicidade em superfícies

Agora, apresentamos o resultado principal para difeomorfismos. O teorema 1.2.3 é uma generalização, para conjuntos parcialmente hiperbólicos, da equivalência entre os itens 1, 2 e 3 do teorema a seguir.

Teorema 1.2.2. *[[11], Lewowicz;[22], Sambarino] Seja $f : M \rightarrow f(M)$ um difeomorfismo e Λ um conjunto compacto invariante. São equivalentes as seguintes afirmações:*

1. Λ é hiperbólico
2. Existe um campo contínuo B em Λ de formas quadráticas não-degeneradas cuja dimensão é constante ao longo das órbitas e tal que $(f^*B - B)_x = B_{f(x)}(Df_x) - B_x$ é definida positiva para cada $x \in M$.
3. Existem dois campo de cones C^s e C^u em Λ com dimensões complementares e dimensão constante ao longo das órbitas tais que:
 - a) $Df_x C_x^u \subset C_{f(x)}^u$ e $Df_x^{-1} C_x^s \subset C_{f^{-1}(x)}^s$.
 - b) Existem $\sigma > 1$ e $m > 0$ tais que $\|Df^m v\| \geq \sigma \|v\|$, para todo $v \in C^u$ e $\|Df^{-m} v\| \geq \sigma \|v\|$, para todo $v \in C^s$.

1.2.2 Hiperbolicidade Parcial para fluxos

O principal resultado é o que segue.

Teorema 1.2.3. [2, Teorema A] Um conjunto que atrai não-trivial Λ de uma região armadilha U é parcialmente hiperbólico para o fluxo X_t se, e somente se, existe um campo \mathcal{J} de formas quadráticas C^1 não-degeneradas com índice constante, igual a dimensão do subespaço estável de Λ , tal que X_t é não-negativo e estritamente \mathcal{J} -separado em U .

Como havíamos dito, este teorema generaliza o resultado para difeomorfismos. Nós conseguimos hipóteses semelhantes para fluxos envolvendo cones e formas quadráticas. Chamamos atenção para a \mathcal{J} -separação e o fato do fluxo ser não-negativo. Vejamos a definição:

Definição 1.2.4. Dado um campo de formas quadráticas $\mathcal{J} : E_U \rightarrow \mathbb{R}$, dizemos que um fluxo X_t é estritamente \mathcal{J} -separado sobre X se $DX_t(x)(C_+(x) \cup C_0(x)) \subset C_+(X_t(x))$ para todo $t > 0$ e $x \in U$ (ver Figura 1.2). O fluxo X_t é dito não-negativo se o vetor direção do campo de vetores que o gera, $X(x)$, está contido no cone positivo, isto é, $\mathcal{J}_x(X(x)) > 0$, para todo $x \in U$.

Dessa forma, a \mathcal{J} -separação estrita implica que $DX_t(x)(C_+(x) \cup C_0(x)) \subset C_+(X_t(x))$ e mostramos no capítulo 4 que isto implica em $DX_{-t}(x)(C_-(x) \cup$

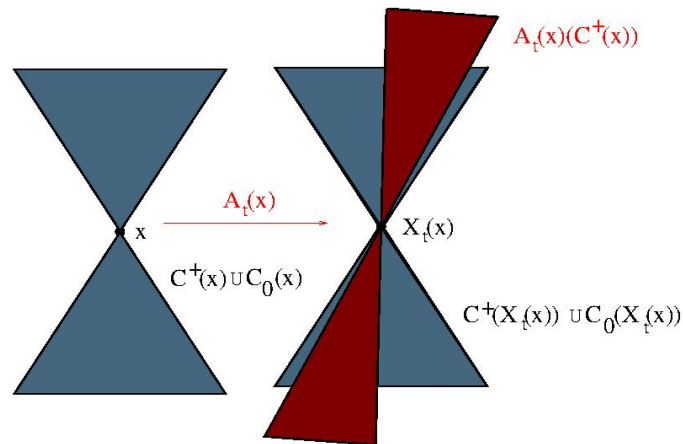


Figura 1.2: \mathcal{J} -separação estrita

$C_0(x) \subset C_-(X_{-t}(x))$. Esta é a propriedade equivalente a 3)a) do teorema 1.2.2. Além disso, veremos que a propriedade do fluxo ser \mathcal{J} -negativo garantirá a existência de contração uniforme que aparece na definição de hiperbolicidade parcial.

Dizemos que um campo de formas quadráticas \mathcal{J}_0 em U é compatível com \mathcal{J} , e escrevemos $\mathcal{J} \sim \mathcal{J}_0$, se existe $C > 1$ satisfazendo $x \in \Lambda$

$$\frac{1}{C} \cdot \mathcal{J}_0(v) \leq \mathcal{J}(v) \leq C \cdot \mathcal{J}_0(v), \quad v \in E_x \cup F_x,$$

onde $E \oplus F$ é uma DX_t -decomposição invariante de $T_\Lambda M$.

O critério que permite deduzir \mathcal{J} -separação de um fluxo X_t usando apenas o campo X e sua derivada DX é dado pelo próximo resultado.

Proposição 1.2.5. [2, Proposição 1.3] *Um campo de vetores \mathcal{J} -não-negativo X em U é (estritamente) \mathcal{J} -separado se, e somente se, existe um campo compatível de formas \mathcal{J}_0 e existe uma função $\delta : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que o operador $\tilde{\mathcal{J}}_{0,x} := \mathcal{J}_0 \cdot DX(x) + DX(x)^* \cdot \mathcal{J}_0$ satisfaz*

$$\tilde{\mathcal{J}}_{0,x} - \delta(x)\mathcal{J}_0 \quad \text{é positivo (definido) semidefinido,} \quad x \in U,$$

onde $DX(x)^*$ é a adjunta $DX(x)$ com respeito ao produto interno adaptado.

Observamos que a condição obtida na proposição é uma condição essencialmente local ou pontual, e para ser verificada não é necessário usar o fluxo X_t de X , mas apenas o campo X , sua derivada e uma função de Lyapunov infinitesimal \mathcal{J} juntamente com uma função auxiliar $\delta : U \rightarrow \mathbb{R}$.

1.2.3 Exemplos simples de aplicação

Vamos exemplificar o uso destes resultados no caso particular simples de uma singularidade hiperbólica de um campo de vetores. Um exemplo mais elaborado será apresentado no capítulo 4.

Exemplo 1.2.6. *Vamos considerar uma singularidade hiperbólica tipo sela $\sigma = (0, 0, 0)$ para um campo de vetores suave em \mathbb{R}^3 tal que os autovalores de $DX(\sigma)$, ρ_1 , ρ_2 e ρ_3 , são reais e satisfazem $\rho_1 < \rho_2 < 0 < \rho_3$. Através de uma mudança de coordenadas, nós podemos assumir que $DX(\sigma) = \text{diag}\{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}$.*

1. Seja $\mathcal{J}_1(x, y, z) = -x^2 + y^2 + z^2$. Então \mathcal{J}_1 é representado pela matriz $J_1 = \text{diag}\{-1, 1, 1\}$, isto é, $\mathcal{J}_1(v) = \langle J_1(v), v \rangle$, com $v \in \mathbb{R}^3$ e o produto interno canônico.

Dessa forma, $\tilde{J}_1 = J_1 \cdot DX(\sigma) + DX(\sigma)^* \cdot J_1 = \text{diag}\{-2\rho_1, 2\rho_2, 2\rho_3\}$ e $\tilde{J}_1 - \delta \cdot J_1 > 0 \iff 2\rho_1 < \delta < 2\rho_2 < 0$. Logo, δ tem que ser negativa e \tilde{J}_1 é não positiva definida. Do teorema 1.2.3 e da proposição 1.2.5, nós temos \mathcal{J}_1 -separação estrita, então temos hiperbolicidade parcial com $E = \{(x, 0, 0); x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \{(0, 0)\}$ contraído uniformemente (este é o subespaço maximal invariante negativo para \mathcal{J}_1) e dominando $F = \{(0, y, z); y, z \in \mathbb{R}\} = \{0\} \times \mathbb{R}^2$ (este é o subespaço maximal invariante positivo para \mathcal{J}_1).

2. Como no item anterior, seja $\mathcal{J}_2(x, y, z) = -x^2 - y^2 + z^2$ representada pela matriz $J_2 = \text{diag}\{-1, -1, 1\}$. Então $\tilde{J}_2 = \text{diag}\{-2\rho_1, -2\rho_2, 2\rho_3\}$ e $\tilde{J}_2 - \delta \cdot J_2 > 0 \iff 2\rho_2 < \delta < 2\rho_3$. Assim, δ pode assumir valores positivos ou negativos, mas ainda temos \mathcal{J} -separação estrita, nesse caso \tilde{J}_2 é positiva definida. Portanto, pelo Teorema 1.2.3, a decomposição $\mathbb{R}^3 = (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \oplus (\{(0, 0)\} \times \mathbb{R})$ em σ é parcialmente hiperbólica para

X_t , com $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ o subespaço maximal invariante negativo para \mathcal{J}_2 , logo contraído por DX_t .

Agora, se considerarmos o campo $-X$ com X_{-t} o fluxo associado e tomarmos $-J_2$ garantimos $(-\mathcal{J})$ -separação estrita para o fluxo X_{-t} trocando δ por $-\delta$ na proposição 1.2.5. Pelo teorema 1.2.3, a decomposição $\mathbb{R}^3 = (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \oplus (\{(0, 0)\} \times \mathbb{R})$ é parcialmente hiperbólica para X_{-t} e $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}$ é o subespaço maximal invariante negativo para $-J_2$ (que é positivo para \mathcal{J}_2), logo contraído por DX_{-t} (o que implica expansão por DX_t).

Portanto, temos mais hiperbolicidade parcial, conseguimos garantir quea decomposição $\mathbb{R}^3 = (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \oplus (\{(0, 0)\} \times \mathbb{R})$ em σ é hiperbólica.

3. Seja agora $\mathcal{J}_3(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$ representada por $J_3 = \text{diag}\{1, -1, 1\}$. Neste caso $\tilde{J}_3 = \text{diag}\{2\rho_1, -2\rho_2, 2\rho_3\}$ não é positiva definida e $\tilde{J}_3 - \delta \cdot J_3$ é dada pela matriz $\text{diag}\{2\rho_1 - \delta, -2\rho_2 + \delta, 2\rho_3 - \delta\}$ que representa uma forma quadrática semidefinida positiva se, e somente se, $\delta \leq 2\rho_1$, $\delta \geq 2\rho_2$ e $\delta \leq 2\rho_3$, o que é impossível. Portanto, não temos dominação do subfibrado $E = \{0\} \times \mathbb{R} \times \{0\}$ por $F = \mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R}$.

1.3 Organização do trabalho

Esta dissertação é composta de 5 capítulos. No capítulo 1, que denominamos de “Introdução”, são apresentados as definições e os resultados principais com os quais lidaremos ao longo deste trabalho.

No capítulo 2, “Campo de formas quadráticas não-degeneradas”, nós estudamos propriedades importantes das formas quadráticas que serão utilizadas nos capítulos posteriores. O resultado principal deste capítulo é o lema 2.4.1.

A partir do capítulo 3, “Conjuntos hiperbólicos para difeomorfismos”, começamos a estudar de forma detalhada a hiperbolicidade para difeomorfismos. Apresentamos o teorema 1.2.2 que relaciona hiperbolicidade, cones e formas quadráticas e encerramos o capítulo com o exemplo 3.2 para ilustrar como aplicar o teorema.

No capítulo 4, “Conjuntos parcialmente hiperbólicos para fluxos”, continuamos o estudo sobre hiperbolicidade, caracterizando um conjunto que atrai em parcialmente hiperbólico. Nele apresentamos uma generalização para fluxos da equivalência entre os itens 1, 2 e 3 do teorema 1.2.2. Esta generalização, devida a [2], é o teorema 1.2.3 que é o principal resultado deste trabalho. No final do capítulo, apresentamos na seção 4.4 como podemos deduzir hiperbolicidade parcial para o atrator geométrico de Lorenz usando os resultados apresentados.

Por fim, no capítulo 5 “Generalizações: hiperbolicidade seccional e funções de Lyapunov infinitesimais”, tratamos de algumas generalizações. Uma delas é a extensão do teorema 4.2.10 para garantir que os resultados mostrados no capítulo anterior válidos para um conjunto compacto invariante Λ também valem em uma vizinhança deste conjunto. Além disso, apresentamos o conceito de hiperbolicidade seccional e sua relação com as funções de Lyapunov infinitesimais.

Capítulo 2

Campo de formas quadráticas não-degeneradas

Vamos agora começar a apresentar resultados necessários para a prova do teorema 1.2.3. Estes resultados dizem respeito às formas quadráticas. O primeiro deles garante que podemos sempre, em um certo sentido, diagonalizar uma forma quadrática. É o teorema de Lagrange. O último é o lema de Kuhne que nos dá ferramentas para provar a proposição 1.2.5.

2.1 Teorema de Lagrange de diagonalização de formas quadráticas

Teorema 2.1.1. *Dada $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ forma quadrática não-nula, existe uma base no espaço vetorial E relativamente à qual f tem uma matriz diagonal cujos elementos não-nulos são 1 ou -1 , isto é,*

$$f(v) = -w_1^2 - w_2^2 - \dots - w_i^2 + w_{i+1}^2 + \dots + w_r^2,$$

onde $v = (w_1, w_2, \dots, w_r)$ nesta base, i é o índice de f e r é o posto de f .

Demonstração. Seja $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_m\} \subset E$ uma base qualquer na qual se tem $f(v) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij}x_i x_j$, para $v = \sum_{i=1}^n x_i u_i$. Podemos supor que $B = (b_{ij})$ é simétrica.

Dada $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de E , temos que

$$\begin{aligned} v &= y_1 v_1 + \dots + y_n v_n = y_1 \left(\sum_{k=1}^n a_{k1} u_k \right) + \dots + y_n \left(\sum_{k=1}^n a_{kn} u_k \right) \\ &= (y_1 a_{11} + \dots + y_n a_{1n}) u_1 + \dots + (y_1 a_{n1} + \dots + y_n a_{nn}) u_n \\ &= \left(\sum_{k=1}^n y_k a_{1k} \right) u_1 + \dots + \left(\sum_{k=1}^n y_k a_{nk} \right) u_n. \end{aligned}$$

Logo, como $v = \sum_{i=1}^n x_i u_i$ e a representação na base \mathcal{U} é única, temos que

$$\begin{aligned} x_i &= \sum_{k=1}^n y_k a_{ik} \text{ e } x_j = \sum_{k=1}^n y_k a_{jk}. \text{ Assim, } f(v) = \sum_{i,j} b_{ij} \left(\sum_{k=1}^n y_k a_{ik} \right) \left(\sum_{k=1}^n y_k a_{jk} \right) = \\ &= \sum_{i,j=1}^n c_{ij} y_i y_j, \text{ onde } A = (a_{ij}) \text{ é a matriz de passagem da base } \mathcal{U} \text{ para } \mathcal{V} \text{ e} \\ &C = (c_{ij}) \text{ é tal que } C = A^T B A. \end{aligned}$$

O que usaremos para demonstrar o teorema é a técnica de completar quadrados juntamente com as mudanças de variáveis necessárias. Cada mudança de variável corresponde à passagem de uma base para outra como feito acima.

Podemos supor que $b_{ii} \neq 0$ para algum $i \in \{1, \dots, n\}$. Observe que isso sempre é possível pois, se $b_{ii} = 0$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, tome $b_{rs} \neq 0$ (se é não-nula, isso acontece), com $r \neq s$. Fazemos $x_r = y_r + y_s$, $x_s = y_r - y_s$ e $x_i = y_i$ se $i \neq r, s$. E então:

$$\begin{aligned} f(v) &= \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i x_j = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i x_j + b_{rs} x_r x_s + b_{sr} x_s x_r \\ &= \sum_{i,j=1}^n c_{ij} y_i y_j + 2b_{rs} x_r x_s \\ &= \sum_{i,j=1}^n c_{ij} y_i y_j + 2b_{rs} y_r^2 - 2b_{rs} y_s^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^n c_{ij} y_i y_j + c_{rr} y_r^2 + c_{ss} y_s^2, \end{aligned}$$

com $c_{rr}, c_{ss} \neq 0$

Supondo, então, que $b_{11} \neq 0$ (reordenando os elementos da base, se necessário) e uma vez que $B = (b_{ij})$ é simétrica:

$$\begin{aligned}
 f(v) &= \sum_{i=1}^n (b_{i1}x_i x_1 + \sum_{j=2}^n b_{ij}x_i x_j) \\
 &= b_{11}x_1 x_1 + \sum_{j=2}^n b_{1j}x_1 x_j + \sum_{i=2}^n (b_{i1}x_i x_1 + \sum_{j=2}^n b_{ij}x_i x_j) \\
 &= b_{11}x_1^2 + x_1 \left(\sum_{j=2}^n b_{1j}x_j \right) + x_1 \left(\sum_{i=2}^n b_{i1}x_i \right) + \sum_{i=2}^n \left(\sum_{j=2}^n b_{ij}x_i \right) x_j \\
 &= b_{11}x_1^2 + 2x_1 \left(\sum_{j=2}^n b_{1j}x_j \right) + \psi(v') \\
 &= b_{11}x_1^2 + 2b_{11}x_1 \left(\sum_{j=2}^n \frac{b_{1j}}{b_{11}}x_j \right) + \psi(v') \\
 &= b_{11}(x_1^2 + 2x_1 \left(\sum_{j=2}^n c_j x_j \right)) + \psi(v'),
 \end{aligned}$$

onde $c_j = \frac{b_{1j}}{b_{11}}$ e $\psi(v')$ depende apenas de $v' = \sum_{j=2}^m x_j u_j$, isto é, ψ é uma forma quadrática definida no subespaço $F \subset E$, de dimensão $m - 1$, gerado por u_2, \dots, u_m .

A expressão $x_1^2 + 2x_1 \left(\sum_{j=2}^n c_j x_j \right)$ é do tipo $a^2 + 2ab$ com $a = x_1$ e $b = \sum_{j=2}^n c_j x_j$.

Sabemos que $a^2 + 2ab = (a + b)^2 - b^2$, assim:

$$x_1^2 + 2x_1 \left(\sum_{j=2}^n c_j x_j \right) = \left(x_1 + \sum_{j=2}^n c_j x_j \right)^2 - \left(\sum_{j=2}^n c_j x_j \right)^2.$$

Fazendo $z_1 = x_1 + \sum_{j=2}^n c_j x_j$, $z_2 = x_2, \dots, z_m = x_m$:

$$f(v) = b_{11} \left(z_1^2 - \left(\sum_{j=2}^n c_j x_j \right)^2 \right) + \psi(v') = b_{11} z_1^2 + f_2(v')$$

onde $f_2 : F \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2(v') = -b_{11} \left(\sum_{j=2}^n c_j x_j \right)^2 + \psi(v')$ e $\dim F = n - 1$.

Agora, escrevendo $z_1 = \frac{w_1}{\sqrt{|b_{11}|}}$ e $z_j = w_j$, $j \geq 2$, chegamos em $f(v) = \pm w_1^2 + f_2(v')$ (observe que $f(v) = \frac{b_{11}}{|b_{11}|} w_1^2 + f_2(v')$, deixando claro que o coeficiente ± 1 depende diretamente de b_{11}). Repetindo o processo para f_2 e escolhendo um $b_{11}^2 \neq 0$ (o índice 2 indica que, na 2ª etapa, escolhemos b_{ii} como antes), vamos obter $f(v) = \pm w_1^2 + \pm w_2^2 + f_3(v'')$. Se agora tivermos $b_{ii}^3 = 0$ e $b_{rs}^3 = 0$, caso em que f_3 é identicamente nula, o processo se encerra aqui. Caso contrário, continuamos da mesma forma até que na r -ésima ($r \leq n$) etapa (dependendo do sinal de cada b_{ii}):

$$f(v) = -w_1^2 - w_2^2 - \dots - w_i^2 + w_{i+1}^2 + \dots + w_r^2,$$

onde i é o índice de f e r é o posto de f (o posto da matriz que a representa). Os números w_j são as coordenadas de v na base E obtida após a última mudança de coordenadas. \square

2.1.1 Persistência e continuidade da diagonalização de um campo contínuo não-degenerado de formas quadráticas

Considere um campo de formas quadráticas $\phi_x : E_x \subseteq T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ definida para cada $x \in M$, com $\phi_x(v) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i x_j$, onde $v = (x_1, \dots, x_n) \in E_x$. Supondo que os coeficientes $b_{ij} = b_{ij}(x)$ dependem continuamente de x , mais ainda, para cada $i, j \in \{1, \dots, n\}$, a função $b : M \ni x \mapsto b_{ij}(x) \in \mathbb{R}$ é de classe C^1 . Podemos escrever então $\phi_x(v) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) x_i x_j$. Assim, se

$b_{ii} = b_{ii}(x_0) \neq 0$, então, por continuidade, $b_{ii}(x) \neq 0$, para todo x pertencente a uma vizinhança $V \subset E_x$ de x . Logo, todo o processo acima feito para ϕ_{x_0} pode ser feito para ϕ_x .

De forma análoga, se $b_{rs} = 0$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, podemos tomar $b_{rs}(x_0) \neq 0$ e então $b_{rs}(x) \neq 0$, para todo $x \in V$, repetindo o processo de diagonalização. Estamos querendo dizer é que o processo de diagonalização via completamento de quadrados varia continuamente. Com isso, podemos enunciar o próximo resultado.

Proposição 2.1.2. *Se $\phi_x : E_x \subseteq T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma forma quadrática não-degenerada, então existe uma vizinhança V_x de x tal ϕ_y é não-degenerada para todo $y \in V_x \subset E_x$. Além disso, a matriz de ϕ_x é $\text{diag}\{\pm 1, \dots, \pm 1\}$ com relação a uma família de bases que depende continuamente de x .*

Demonstração. De fato, ϕ_x é não-degenerada se, e somente se, a matriz de ϕ_x é $F_x = \text{diag}\{\pm 1, \dots, \pm 1\}$ em relação à uma base de E_x . Mas, como na demonstração do teorema de Lagrange, cada coeficiente ± 1 é encontrado quando se tem $b_{ii}(x) \neq 0$ (ou $b_{rs} \neq 0$). Segue da observação acima que existe uma vizinhança V de x tal que $b_{ii}(y) \neq 0$, para todo $y \in V$. Como a matriz F_x não possui zeros na diagonal principal, cada coeficiente ± 1 nos dará um $b_{ii}(x) \neq 0$ (ou $b_{rs} \neq 0$) e, pelo Teorema de Lagrange, a matriz de ϕ_y é $F_y = \text{diag}\{\pm 1, \dots, \pm 1\}$, isto é, ϕ_y é não-degenerada. \square

2.1.2 Descontinuidade da diagonalização de operadores auto-adjuntos

Observe que a diagonalização via completamento de quadrados varia continuamente e por isso obtivemos os resultados acima. Sabemos que dada uma forma quadrática f , existe uma matriz simétrica (ou operador auto-adjunto) tal que $f(v) = \langle Av, v \rangle$. Como todo operador auto-adjunto é diagonalizável, então existe uma base ortonormal de autovetores que diagonaliza A . Agora, será que a diagonalização de uma matriz simétrica varia continuamente com a matriz? A resposta é, em geral, não. Vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 2.1.3. [10, Exemplo 5.3, p.111]

Para cada $x \in \mathbb{R}$, seja

$$T(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \begin{pmatrix} \cos \frac{2}{x} & \operatorname{sen} \frac{2}{x} \\ \operatorname{sen} \frac{2}{x} & -\cos \frac{2}{x} \end{pmatrix},$$

se $x \neq 0$ e $T(x) = 0$, se $x = 0$.

Observe que

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} \cos \frac{2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} \operatorname{sen} \frac{2}{x} = 0,$$

pois uma das funções tende a zero enquanto a outra é limitada. Assim, $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ é contínua em 0. Veja que para cada $x \in \mathbb{R}$, $T(x)$ é uma matriz simétrica e, portanto, diagonalizável. Observe que

- Se $x = 0$, então $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ são os autovalores de $T(x)$.
- Se $x \neq 0$, então, para cada $x \in \mathbb{R}$ fixado, $\lambda_1 = e^{-\frac{1}{x^2}}$ e $\lambda_2 = -e^{-\frac{1}{x^2}}$ são os autovalores de $T(x)$ obtidos resolvendo-se a equação $p(\lambda) = \det(T(x) - \lambda Id) = 0$.
- Se $\operatorname{sen}(\frac{2}{x}) \neq 0$, então os autoespaços associados são dados por $V_{\lambda_1}(x) = [(-\operatorname{sen} \frac{2}{x}, \cos \frac{2}{x} - 1)]$ e $V_{\lambda_2}(x) = [(-\operatorname{sen} \frac{2}{x}, \cos \frac{2}{x} + 1)]$.

Denotamos por $D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ a função “diagonalização” que a cada $x \in \mathbb{R}$ associa uma única matriz $D(x)$ que diagonaliza $T(x)$ (para cada x escolhemos um representante em V_{λ_i}). Observe que, se x for tal que $\operatorname{sen}(\frac{2}{x}) \neq 0$, então $\lim_{x \rightarrow 0} D(x)$ não existe, isto é, D não é contínua em 0, mesmo T variando continuamente.

Portanto, em geral, a diagonalização de uma matriz simétrica não varia continuamente com a matriz simétrica.

2.2 Propriedades de formas quadráticas não-degeneradas

Provaremos agora dois lemas que serão usados na demonstração do teorema 1.2.2.

Lema 2.2.1. *Seja E um espaço vetorial de dimensão finita munido de produto interno. Se a matriz simétrica $S \in M_n(\mathbb{R})$ tem todos os autovalores positivos, então $\langle x, y \rangle_S = \langle x, Sy \rangle$, para $x, y \in E$, define um produto interno em E , denominado produto interno associado à matriz S .*

Demonstração. A bilinearidade de $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ segue da bilinearidade de $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Como S é simétrica, então $S = S^*$ e assim $\langle x, y \rangle_S = \langle x, Sy \rangle = \langle S^*x, y \rangle = \langle y, Sx \rangle = \langle y, x \rangle_S$, isto é, $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ é simétrico. Toda matriz simétrica é diagonalizável. Além disso, o Teorema Espectral nos garante que existe uma base ortonormal $\{u_1, \dots, u_n\} \subset E$ formada pelos autovetores de S . Dessa forma, se $x = (x_1, \dots, x_n) \neq 0$, então existe $x_i \neq 0$. Assim:

$$\langle x, x \rangle_S = \langle x, Sx \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i u_i, S \left(\sum_{i=1}^n x_i u_i \right) \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i u_i, \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i u_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2 \lambda_i > 0,$$

pois $\langle u_i, u_j \rangle = 0$, se $i \neq j$ e $\langle u_i, u_j \rangle = 1$, se $i = j$ e todos autovalores são positivos. Logo, $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ é positivo. Portanto, $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ é um produto interno em E . \square

Corolário 2.2.2. *Se $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ é uma forma quadrática positiva definida e E um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno, então existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $b\|v\|^2 \leq f(v) \leq a\|v\|^2$, onde $\|\cdot\|$ é a norma definida em E .*

Demonstração. Toda forma quadrática possui uma matriz simétrica S associada (que é sempre diagonalizável) tal que $f(v) = \langle v, Sv \rangle$. Se f é definida positiva, S tem todos autovalores positivos. Por outro lado, pelo lema 2.2.2, $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ é um produto interno e então define uma norma $\|\cdot\|_S$ tal que $\|v\|_S^2 = \langle v, v \rangle_S = f(v)$. Como E tem dimensão finita, todas

as normas são equivalentes. Logo existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $b\|v\|^2 \leq \|v\|_5^2 \leq a\|v\|^2$, ou seja, $b\|v\|^2 \leq f(v) \leq a\|v\|^2$. \square

Lema 2.2.3. *Seja K um conjunto compacto. Se $f : E_K \rightarrow \mathbb{R}$ é um campo contínuo de formas quadráticas e E_x é um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno para cada $x \in K$, então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $|f_x(v)| \leq c\|v\|^2$, para todo $x \in K$.*

Demonstração. De fato, para cada $x \in K$, existe um operador simétrico A_x tal que $f_x(v) = \langle A_x v, v \rangle$. Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz juntamente com o fato de que $\|A_x v\| \leq \|A_x\| \cdot \|v\|$, temos que

$$|f_x(v)| = |\langle A_x v, v \rangle| \leq \|A_x v\| \cdot \|v\| \leq \|A_x\| \cdot \|v\|^2.$$

Mas f varia continuamente com x num compacto K , o que implica que existe um $c \in \mathbb{R}$ tal que $\sup\{\|A_x\| : x \in K\} = c$. Logo, $|f(v)| \leq c\|v\|^2$. \square

2.3 Espaços vetoriais pseudo-euclidianos

Agora, para cada $x \in M$, considere o espaço vetorial E_x com produto interno. Associamos a cada espaço E_x a forma quadrática $\mathcal{J}_x : E_x \rightarrow E_x$ tal que $\mathcal{J}_x(v) = \langle J_x v, v \rangle$, onde $J_x : E_x \rightarrow E_x$ é um operador linear auto-adjunto (sua matriz é simétrica). Assim, a forma bilinear simétrica definida por $(v, w) = \langle J_x v, w \rangle$, $v, w \in E_x$ para $x \in M$, por ser não-degenerada, confere a E_x uma estrutura pseudo-euclideana.

Com isso, resultados importantes já conhecidos da Álgebra Linear para espaços vetoriais com produto interno são válidos para o espaço vetorial E_x com a forma bilinear (\cdot, \cdot) . Listamos alguns deles a seguir.

Proposição 2.3.1. *Seja $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear real simétrica não-degenerada sobre o espaço vetorial real de dimensão finita V .*

1. *E é um subespaço de V para o qual (\cdot, \cdot) é não-degenerada se, e somente se, $V = E \oplus E^\perp$. Lembramos que, em função de (\cdot, \cdot) , o subespaço vetorial $E^\perp := \{v \in V : (v, w) = 0 \ \forall w \in E\}$ é chamado de espaço pseudo-ortogonal*

de E . Como em espaços euclidianos, usaremos a notação $v \perp w$ para indicar que v é pseudo-ortogonal a w .

2. Toda base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de V pode ser ortogonalizada pelo processo usual de Gram-Schmidt de espaços euclidianos, isto é, existem combinações lineares dos vetores da base $\{w_1, \dots, w_n\}$ tais que elas formam uma base de V e $(w_i, w_j) = 0$ para $i \neq j$. Além disso, essa última base pode ser pseudo-normalizada: fazendo $u_i = |(w_i, w_i)|^{-\frac{1}{2}} w_i$ obtemos $(u_i, u_j) = \pm \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$, onde $\delta_{ij} = 1$, se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$, se $i \neq j$.
3. Existe uma dimensão maximal p para um subespaço P_+ de vetores \mathcal{J} -positivos ($\mathcal{J}(v) > 0$) e uma dimensão maximal q para um subespaço P_- de vetores \mathcal{J} -negativos ($\mathcal{J}(v) < 0$); temos que $p + q = \dim V$ e o número q é conhecido como o índice de \mathcal{J} .
4. Para toda aplicação linear $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ existe um único $v \in V$ tal que $L(w) = (v, w)$ para cada $w \in V$.
5. Para cada $L : V \rightarrow V$ linear existe um único operador linear $L^+ : V \rightarrow V$ (o pseudo-adjunto) tal que $(L(v), w) = (v, L^+(w))$ para todo $v, w \in V$.
6. Todo operador pseudo-autoadjunto $L : V \rightarrow V$, isto é, tal que $L = L^+$, satisfaz
 - (a) autoespaços correspondentes a autovalores distintos são pseudo-ortogonais;
 - (b) se um subespaço E é L -invariante, então E^\perp é também L -invariante.

Antes de demonstrarmos a proposição, observe que no item 2 escrevemos $u_i = |(w_i, w_i)|^{-\frac{1}{2}} w_i$, ao invés de $u_i = \|w_i\|^{-\frac{1}{2}} w_i$, pois (\cdot, \cdot) não induz uma norma em V , como acontece com o produto interno em espaços euclidianos. Essa é a razão pela qual também escrevemos $(u_i, u_j) = \pm \delta_{ij}$. No entanto, quando a matriz J_x é definida positiva, a forma bilinear é um produto interno (ver lema 2.2.1).

Demonstração. Começamos demonstrando o item 2. Seja $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V . Construiremos uma base ortogonal $\{w_1, \dots, w_n\}$ de V a partir desta.

Iniciamos o processo tomando $w_1 = v_1$ e prosseguimos por indução. Suponhamos já obtidos os vetores não-nulos w_1, \dots, w_{n-1} , dois a dois ortogonais, gerando o subespaço W_{n-1} (o mesmo que é gerado por v_1, \dots, v_{n-1}). Definimos w_n como

$$w_n = v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(w_i, v_n)}{(w_i, w_i)} w_i$$

Temos que $(w_i, w_j) = 0$, se $i \neq j$, com $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$, por hipótese de indução. Isto implica que w_n é ortogonal a w_1, \dots, w_{n-1} pois:

$$\begin{aligned} (w_j, v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(w_i, v_n)}{(w_i, w_i)} w_i) &= (w_j, v_n) - (w_j, \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(w_i, v_n)}{(w_i, w_i)} w_i) \\ &= (w_j, v_n) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(w_i, v_n)}{(w_i, w_i)} (w_j, w_i) \\ &= (w_j, v_n) - \frac{(w_j, v_n)}{(w_j, w_j)} (w_j, w_j) = 0. \end{aligned}$$

Além disso, $w_n \neq 0$ pois, se $w_n = 0$, então $v_n \in \text{Ger}\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$, mas isto não é possível pois $\{v_1, \dots, v_n\}$ é um conjunto linearmente independente. O conjunto $\{w_1, \dots, w_n\}$ também é linearmente independente. De fato, se $\sum_{i=1}^n a_i w_i = 0$, então $0 = (\sum_{i=1}^n a_i w_i, w_j) = a_j (w_j, w_j)$ e assim $a_j = 0$, para todo $j \in \{1, \dots, n\}$.

Portanto, como $\dim V = n$, o conjunto $\{w_1, \dots, w_n\}$ é uma base ortogonal de V .

A partir desta base ortogonal, podemos pseudo-normalizá-la colocando $u_i = |(w_i, w_i)|^{-\frac{1}{2}} w_i$ e teremos $\langle u_i, u_j \rangle = \pm \delta_{ij}$. Lembrando que $\delta_{ij} = 0$, se $i \neq j$, e $\delta_{ij} = 1$, se $i = j$.

Para provar o item 1, por contrapositividade, vamos assumir primeiramente que $(\cdot, \cdot)|_E$ é degenerada. Então existe $u \in E \setminus \{0\}$ tal que $(u, v) = 0$ para todo $v \in E$ e isto implica que $u \in E^\perp$. Assim $E \cap E^\perp \neq \{0\}$ e não temos

$$V = E \oplus E^\perp.$$

Assumindo agora que $(\cdot, \cdot)|_E$ é não-degenerada, vamos mostrar que $V = E \oplus E^\perp$. Bem, se $u \in E \cap E^\perp$, então, para todo $v \in E$, temos que $(u, v) = 0$, mas se $(\cdot, \cdot)|_E$ é não-degenerada, devemos ter $u = 0$. Logo, $E \cap E^\perp = \{0\}$. Agora, pela construção feita no item 1, considere uma base ortogonal $\{w_1, \dots, w_k\}$ de E . Se $v \in E$, então a decomposição é a trivial $v = v + 0$. Se $v \in V \setminus E$, então fazemos novamente $w = v - \sum_{i=1}^k \frac{(w_i, v)}{(w_i, w_i)} w_i$. Uma vez que $v \in V \setminus E$, temos que $w \neq 0$. Além disso, já mostramos que $(w, w_i) = 0$ e isto implica que $(w, u) = 0$ (basta usar a bilinearidade de (\cdot, \cdot)), para todo $u \in E$, isto é, $w \in E^\perp$. Logo, fazendo $u = \sum_{i=1}^k \frac{(w_i, v)}{(w_i, w_i)} w_i \in E$, temos que $v = u + w$. Portanto, $V = E \oplus E^\perp$.

Vamos provar agora afirmação 3. Já vimos no teorema 2.1.1 que existe uma base $\{v_1, \dots, v_n\}$ na qual $\mathcal{J}(v) = -x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_q^2 + x_{q+1}^2 + \dots + x_r^2$. Neste caso em que \mathcal{J} é não-degenerada, $r = n = \dim V$. Definimos $P_- = \text{Ger}\{v_1, \dots, v_q\}$. Observe que se $v \neq 0$ e $v \in P_-$, isto é, $v = \sum_{k=1}^q x_k v_k$ então $\mathcal{J}(v) < 0$. Agora, se $F \subset V$ e $\mathcal{J}|_F < 0$, então $\dim F \leq \dim P_-$. De fato, se o vetor não-nulo

$$v = \sum_{k=1}^n x_k v_k \in F,$$

então

$$-x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_q^2 + x_{q+1}^2 + \dots + x_n^2 < 0.$$

Assim, $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_q^2 > 0$ e $(x_1, \dots, x_q) \neq 0$. Por isso, a transformação linear

$$T : F \longrightarrow \mathbb{R}^q, T(v) = T\left(\sum_{k=1}^n x_k v_k\right) = (x_1, \dots, x_q),$$

é injetiva e assim $\dim F \leq q$. Logo, P_- é um subespaço de vetores \mathcal{J} -negativos de dimensão maximal q . De forma análoga, $P_+ = \text{Ger}\{v_{p+1}, \dots, v_n\}$ é o subespaço de vetores \mathcal{J} -positivos de dimensão maximal $p = n - q$. Temos, portanto, $\dim V = p + q$.

Agora, vamos provar a afirmação 4. Pelo item 1, existe uma base ortonormal $\{u_1, \dots, u_n\}$ de V . Seja $v = \sum_{j=1}^n L(u_j)(u_j, u_j)u_j$. Para cada $i \in$

$\{1, \dots, n\}$, temos que:

$$(u_i, v) = (u_i, \sum_{j=1}^n L(u_j)(u_j, u_j)u_j) = (u_i, L(u_i)(u_i, u_i)u_i) = L(u_i)|(u_i, u_i)|^2 = L(u_i).$$

Como esta igualdade se verifica para elementos da base, então $L(w) = (v, w)$, para todo $w \in V$. Este v é único pois se $L(w) = (v_1, w) = (v_2, w)$, para todo $w \in V$, então $(v_1 - v_2, w) = 0$ implica em $v_1 = v_2$. Provamos assim o item 4.

A fim de provar a existência do operador pseudo-adjunto, dado $w \in V$, definamos a aplicação linear $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(v) = (L(v), w)$. Pelo item 4, existe $u \in V$ tal que $f(v) = (u, v)$, ou seja, $(L(v), w) = (u, v) = (v, u)$. Construimos a aplicação $L^+ : V \rightarrow V$ que a cada w escolhido inicialmente associa o vetor u , isto é, $L^+(w) = u$. Temos então que $(L(v), w) = (v, L^+(w))$ para cada $u, w \in V$. Para mostrarmos que L^+ é linear, considere vetores $u, v_1, v_2 \in V$ e um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$. Então,

$$\begin{aligned} (u, L^+(v_1 + \lambda v_2)) &= (L(u), v_1 + \lambda v_2) = (L(u), v_1) + \lambda(L(u), v_2) \\ &= (u, L^+(v_1)) + \lambda(u, L^+(v_2)) \\ &= (u, L^+(v_1) + \lambda L^+(v_2)) \\ &= (u, L^+(v_1) + \lambda L^+(v_2)), \end{aligned}$$

para todo $u \in V$, por isso $L^+(v_1 + \lambda v_2) = L^+(v_1) + \lambda L^+(v_2)$. O mesmo argumento é usado para provar a unicidade do operador L^+ .

Vamos provar o item 6(a). Sejam λ_1, λ_2 autovalores distintos associados aos autovetores v_1, v_2 . Uma vez que L é pseudo-auto-adjunto, temos:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(v_1, v_2) = (\lambda_1 v_1, v_2) - (v_1, \lambda_2 v_2) = (L v_1, v_2) - (v_1, L v_2) = 0$$

e isto implica que v_1 e v_2 são pseudo-ortogonais. Por bilinearidade, $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}$, os autoespaços associados, são pseudo-ortogonais, isto é, $v \perp w$, para todo $v \in V_{\lambda_1}$ e $w \in V_{\lambda_2}$. No item (b), precisamos mostrar que se $w \in E^\perp$, então $L(u) \in E^\perp$. Se $w \in E^\perp$, então $(w, v) = 0$, para todo $v \in E$. Já que E

é L -invariante, se $v \in E$, então $L(v) \in E$ e assim $(w, L(v)) = 0$, mas $L = L^+$, implicando que $(L(w), v) = (w, L(v)) = 0$. Portanto, $L(w) \in E^\perp$, isto é, E^\perp é L -invariante. \square

Observação 2.3.2. *Pelo item 3 da proposição 2.3.1 e pelo teorema 2.1.1, observamos que se $\mathcal{J} : V \rightarrow \mathbb{R}$ é uma forma quadrática não-degenerada, então $V = P_+ \oplus P_-$. Assim, os cones apresentados na seção 1.1.3 podem ser definidos como $C_\pm(x) = \{0\} \cup \{(u, v) \in P_+(x) \times P_-(x) : \pm\|u\| > \pm\|v\|\}$, onde $\|\cdot\|$ é a norma em V . Observe que esta definição do cone é equivalente a inicial, basta colocarmos $\mathcal{J}(v) := \|u\|^2 - \|v\|^2$ que é uma forma quadrática.*

2.4 Formas bilineares simétricas não negativas no cone de vetores nulos de um espaço pseudo-euclidiano

Mostramos a seguir o lema de Kuhne,[2][20].

Lema 2.4.1. *Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita dotado de uma forma quadrática não-degenerada e não-positiva definida $\mathcal{J} : V \rightarrow \mathbb{R}$.*

Se uma forma bilinear simétrica $F : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é não-negativa em C_0 , então

$$r_+ = \inf_{v \in C_+} \frac{F(v, v)}{\langle \mathcal{J}v, v \rangle} \geq \sup_{u \in C_-} \frac{F(u, u)}{\langle \mathcal{J}u, u \rangle} = r_-$$

e para cada $r \in [r_-, r_+]$ temos que $F(v, v) \geq r\langle \mathcal{J}v, v \rangle$ para cada vetor v . Além disso, se F é positiva em $C_0 \setminus \{0\}$, então $r_- < r_+$ e $F(v, v) > r\langle \mathcal{J}v, v \rangle$ para todo v e $r \in (r_-, r_+)$.

Observação 2.4.2. *O lema 2.4.1 mostra que se $F(v, w) = \langle \tilde{J}v, w \rangle$ para algum operador auto-adjunto \tilde{J} e $F(v, v) \geq 0$ para todo $v \in V$ tal que $\langle \mathcal{J}v, v \rangle = 0$, então, podemos encontrar $a \in \mathbb{R}$ tal que $\tilde{J} \geq a\mathcal{J}$, o que significa que $\langle \tilde{J}v, v \rangle \geq a\langle \mathcal{J}v, v \rangle$.*

Se, além disso, tivermos $F(v, v) > 0$ para todo v tal que $\langle \mathcal{J}v, v \rangle = 0$, então obtemos uma desigualdade estrita $\tilde{J} > a\mathcal{J}$ para algum $a \in \mathbb{R}$ desde que o ínfimo na afirmação do lema 2.4.1 seja estritamente maior que o supremo.

Agora, em se tratando de um campo $\mathcal{J} : E_U \rightarrow \mathbb{R}$ de formas quadráticas não-degeneradas com índice constante, se, para cada $x \in U$, valer o lema 2.4.1, então obtemos uma função $\delta : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tilde{J}_x \geq \delta(x)J_x$, que a cada $x \in U$ escolhe um único número real a satisfazendo $\tilde{J}_x \geq aJ_x$.

Demonstração. Suponha que

$$r_+ = \inf_{v \in C_+} \frac{F(v, v)}{\langle Jv, v \rangle} < \sup_{u \in C_-} \frac{F(u, u)}{\langle Ju, u \rangle} = r_-,$$

com F não-negativa em C_0 . Então existe $u \in C_-$ tal que $\inf_{v \in C_+} \frac{F(v, v)}{\langle Jv, v \rangle} < \frac{F(u, u)}{\langle Ju, u \rangle}$. De fato, se isso não acontecer para algum $v \in C_-$, então

$$\frac{F(u, u)}{\langle Ju, u \rangle} \leq \inf_{v \in C_+} \frac{F(v, v)}{\langle Jv, v \rangle} < \sup_{u \in C_-} \frac{F(u, u)}{\langle Ju, u \rangle},$$

para todo $u \in C_-$, o que uma contradiz a definição de supremo. Por sua vez, por definição de ínfimo, temos que

$$\inf_{v \in C_+} \frac{F(v, v)}{\langle Jv, v \rangle} < \frac{F(u, u)}{\langle Ju, u \rangle}$$

implica que existe $v \in C_+$ tal que

$$\frac{F(v, v)}{\langle Jv, v \rangle} < \frac{F(u, u)}{\langle Ju, u \rangle}$$

Faça $u_0 = \frac{u}{\sqrt{c}}$ e $v_0 = \frac{v}{\sqrt{d}}$ tal que $\langle Ju, u \rangle = -c < 0$ e $\langle Jv, v \rangle = d > 0$. Vemos então que $\langle Ju_0, u_0 \rangle = -1$ e $\langle Jv_0, v_0 \rangle = 1$. Logo, $F(v_0, v_0) < -F(u_0, u_0)$, ou seja, $F(v_0, v_0) + F(u_0, u_0) < 0$. Por outro lado, existe ângulo θ tal que $v_1 = v_0 \cos \theta + u_0 \sin \theta \in C_0$ e $u_1 = -v_0 \sin \theta + u_0 \cos \theta \in C_0$, com $F(v_1, v_1) \geq 0$ e $F(u_1, u_1) \geq 0$, por hipótese, e então $F(v_1, v_1) + F(u_1, u_1) \geq 0$. Mas, a

bilinearidade de F nos dá que:

$$\begin{aligned} F(v_1, v_1) + F(u_1, u_1) &= \cos^2 \theta F(v_0, v_0) + 2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta F(v_0, u_0) \\ &\quad + \operatorname{sen}^2 \theta F(u_0, u_0) + \operatorname{sen}^2 \theta F(v_0, v_0) - \cos \theta \operatorname{sen} \theta F(v_0, u_0) \\ &\quad - \cos \theta \operatorname{sen} \theta F(u_0, v_0) + \cos^2 \theta F(u_0, u_0) \\ &= F(v_0, v_0) + F(u_0, u_0) < 0, \end{aligned}$$

uma contradição. Portanto,

$$r_+ = \inf_{v \in C_+} \frac{F(v, v)}{\langle Jv, v \rangle} \geq \sup_{u \in C_-} \frac{F(u, u)}{\langle Ju, u \rangle} = r_-.$$

Além disso, para cada $r \in [r_+, r_-]$, temos que $F(v, v) \geq r \cdot \langle Jv, v \rangle$, para todo $v \in V$. De fato,

- Se $v \in C_+$, então $\frac{F(v, v)}{\langle Jv, v \rangle} \geq r$, isto é, $F(v, v) \geq r \cdot \langle Jv, v \rangle$.
- Se $v \in C_0$, então, por hipótese, $F(v, v) \geq 0 = r \cdot \langle Jv, v \rangle$ (na verdade, para todo r real).
- Se $v \in C_-$, então, $\frac{F(v, v)}{\langle Jv, v \rangle} \leq r$, mas como $\langle Jv, v \rangle < 0$, chegamos em $F(v, v) \geq r \cdot \langle Jv, v \rangle$.

De forma análoga, se F é positiva em $C_0 \setminus \{0\}$, provamos os resultados supondo que $r_- \geq r_+$ e encontrando $F(v_0, v_0) + F(u_0, u_0) \leq 0$ para certos v_0 e u_0 . Com estes, construímos u_1, v_1 tais que $F(v_1, v_1) + F(u_1, u_1) > 0$, mas $F(v_1, v_1) + F(u_1, u_1) = F(v_0, v_0) + F(u_0, u_0) \leq 0$, chegando novamente a uma contradição. \square

Resultados adicionais como os seguintes envolvendo r_+ e r_- podem ser provados na presença de um operador \mathcal{J} -separado. Eles serão úteis na prova do teorema 4.2.14.

Proposição 2.4.3. *Seja $L : V \longrightarrow V$ um operador linear \mathcal{J} -separado. Então*

1. *L pode ser unicamente representado por $L = RU$, onde U é uma \mathcal{J} -isometria (isto é, $\mathcal{J}(U(v)) = \mathcal{J}(v)$, $v \in V$) e R é um operador \mathcal{J} -pseudo-adjunto com espectro positivo.*

2. O operador R pode ser diagonalizado por uma \mathcal{J} -isometria. Além disso, os autovalores de \mathbb{R} satisfazem

$$0 < r_-^q \leq \dots \leq r_-^1 = r_- \leq r_+ = r_1^+ \leq \dots \leq r_+^p.$$

3. O operador L é (estritamente) \mathcal{J} -monótono se, e somente se, $r_- \leq (<)1$ e $r_+ \geq (>)1$.

Capítulo 3

Conjuntos Hiperbólicos Para Difeomorfismos

Neste capítulo, estudamos os conjuntos hiperbólicos para um difeomorfismo $f : M \rightarrow f(M) \subseteq M$ em uma variedade riemanniana, isto é, uma variedade diferenciável com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ definido em cada espaço tangente $T_x M$ e variando continuamente em x . Os resultados deste capítulo nos ajudarão a entender como chegamos aos resultados principais. Assumiremos que M é uma variedade compacta, conexa e sem bordo.

A seguir, relembremos a definição de hiperbolicidade para difeomorfismos. Quando M é uma superfície, a hiperbolicidade pode ser descrita pela figura 1.1.

Definição 3.0.4. *Seja $f : M \rightarrow f(M) \subseteq M$ um difeomorfismo. Um conjunto compacto e invariante Λ é hiperbólico se, para cada $x \in \Lambda$, existem subespaços $E_x^s \subset T_x M$ e $E_x^u \subset T_x M$ tais que:*

1. $T_x M = E_x^s \oplus E_x^u$, com esta decomposição variando continuamente;
2. $Df_x E_x^u = E_{f(x)}^u$ e $Df_x E_x^s = E_{f(x)}^s$;
3. Existem constantes $C > 0$ e $0 < \lambda < 1$ tais que:
 - a) $\|Df^n v\| \leq C \lambda^n \|v\|$ se $\forall v \in E_x^s$ e $n \geq 0$.
 - b) $\|Df^{-n} v\| \leq C \lambda^n \|v\|$ se $\forall v \in E_x^u$ e $n \geq 0$.

Observação 3.0.5. A aplicação $Df_x^n : T_x M \rightarrow T_{f^n(x)} M$ é definida, de acordo com a Regra da Cadeia, como $Df_x^n = Df_{f^{n-1}(x)} \circ \dots \circ Df_x$, $n \geq 1$, .

Observação 3.0.6. Se $u \in E^s$, então $\|Df_x^{-n}u\| \geq \frac{1}{C\lambda^n}\|u\|$ e se $u \in E^u$, temos $\|Df_x^n v\| \geq \frac{1}{C\lambda^n}\|v\|$, para $n \geq 0$

De fato, se $v \in E_x^s$, temos que $\|Df_x^n v\| \leq C\lambda^n\|v\|$. Mas Df_x é um isomorfismo (pois f é um difeomorfismo) para todo $x \in M$. Logo, dado $u \in E_{f^n(x)}^s$, existe $v \in E_x^s$ tal que $u = Df_x^n v$ e como $Df_{f^n(x)}^{-n}(Df_x^n v) = v$, então $\|u\| \leq C\lambda^n\|Df_{f^n(x)}^{-n}u\|$, ou seja,

$$\|Df_{f^n(x)}^{-n}u\| \geq \frac{1}{C\lambda^n}\|u\|.$$

Concluimos que Df_x^{-1} expande vetores em $E_{f^n(x)}^s$. Analogamente, chegamos em

$$\|Df_x^n u\| \geq \frac{1}{C\lambda^n}\|u\|$$

para todo $u \in E_x^u$, onde $u = Df_{f^n(x)}^{-n}v$ para algum $v \in E_{f^n(x)}^u$. Assim, Df_x expande vetores em E_x^u . Os subespaços E_x^s e E_x^u são chamados, respectivamente, de *estável* e *instável*.

Segundo a definição, para classificarmos um conjunto compacto e invariante em hiperbólico, precisamos explicitar seus subespaços estável e instável e então verificar se estes possuem as propriedades da definição.

O Teorema 1.2.2 nos dá duas condições necessárias e suficientes para deduzir hiperbolicidade para um difeomorfismo sem precisar exibir estes subespaços. A primeira, devida a [11], é uma condição dinâmica envolvendo formas quadráticas e órbitas, enquanto que a segunda requer a existência de cones com certas propriedades.

Lembramos que a equivalência entre os itens 1 e 2 do Teorema 1.2.3 será generalizada no capítulo 4 para conjuntos parcialmente hiperbólicos para fluxos. Esta generalização deve-se a [2].

3.1 Prova do Teorema 1.2.2

Recordamos primeiro o enunciado para conveniência do leitor.

Teorema 3.1.1. *Seja $f : M \rightarrow f(M) \subseteq M$ um difeomorfismo C^1 e Λ um conjunto compacto invariante. São equivalentes as seguintes afirmações:*

1. Λ é hiperbólico.
2. Existe um campo contínuo B em Λ de formas quadráticas não-degeneradas cuja dimensão é constante ao longo das órbitas e tal que $(f^*B - B)_x = B_{f(x)}(Df_x) - B_x$ é definida positiva para cada $x \in \Lambda$.
3. Existem dois campos de cones C^s e C^u em Λ com dimensões complementares e dimensão constante ao longo das órbitas tais que:

- a) $Df_x C_x^u \subset C_{f(x)}^u$ e $Df_x^{-1} C_x^s \subset C_{f^{-1}(x)}^s$,
- b) Existem $\sigma > 1$ e $m > 0$ tais que $\|Df^m v\| \geq \sigma \|v\|$, para todo $v \in C^u$ e $\|Df^{-m} v\| \geq \sigma \|v\|$, para todo $v \in C^s$.

Demonstração. (1) \Rightarrow (2).

Já que $0 < \lambda < 1$, então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $C\lambda^m \leq \frac{1}{5}$. Pelas observações feitas acima, se $v \in E_x^s$, então $\|Df^{-m} v\| \geq \frac{1}{C\lambda^m} \|v\| \geq 5\|v\|$ e se $v \in E_x^u$, temos $\|Df^m v\| \geq \frac{1}{C\lambda^m} \|v\| \geq 5\|v\|$. Precisamos mostrar agora que, para todo $v \neq 0$, temos $\|Df^{-m} v\|^2 - 2\|v\|^2 + \|Df^m v\|^2 > 0$. Isto será útil porque a forma quadrática B a ser construída terá $(f^*B - B)(v) = \|Df^{-m} v\|^2 - 2\|v\|^2 + \|Df^m v\|^2$.

Dado $v \in T_x M$, já que Λ é hiperbólico, podemos escrever $v = v^s + v^u$, com $v^s \in E_x^s$ e $v^u \in E_x^u$. Suponhamos que $\|v^s\| \geq \|v^u\|$. Logo,

$$\begin{aligned}
 \|Df^{-m} v\| &= \|Df^{-m}(v^s + v^u)\| = \|Df^{-m} v^s + Df^m v^u\| \\
 &\geq 5\|v^s\| - \frac{1}{5}\|v^u\| \\
 &\geq 5\|v^s\| - \frac{1}{5}\|v^s\| \\
 &\geq 4\|v^s\|.
 \end{aligned}$$

Mas, $4\|v^s\| = 2\|v^s\| + 2\|v^s\| \geq 2\|v^s\| + 2\|v^u\| \geq 2\|v\|$. Logo, $\|Df^{-m}v\|^2 > 2\|v\|^2$. De forma análoga, obtemos $\|Df^m v\|^2 > 2\|v\|^2$, se $\|v^s\| \leq \|v^u\|$. Portanto, em qualquer caso,

$$\|Df^{-m}v\|^2 - 2\|v\|^2 + \|Df^m v\|^2 > 0.$$

Agora, assumindo que $\|\cdot\|$ provém do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ em $T_x M$, a partir da forma bilinear $B_x(v, w) = \sum_{j=0}^{m-1} \langle Df_x^j v, Df_x^j w \rangle - \sum_{j=0}^{m-1} \langle Df_x^{-j-1} v, Df_x^{-j-1} w \rangle$, definimos a forma quadrática

$$B_x(v) = \sum_{j=0}^{m-1} \|Df_x^j v\|^2 - \sum_{j=0}^{m-1} \|Df_x^{-j-1} v\|^2$$

Considere $B : \Lambda \ni x \mapsto B_x \in \mathcal{B}(T_x M, \mathbb{R})$. Uma vez que f é difeomorfismo, a aplicação derivada Df é contínua e já que o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é contínuo em x , garantimos a continuidade de B . Vamos mostrar que $(f^*B - B)_x$ é definida positiva. Temos que:

$$\begin{aligned} B_{f(x)}(Df_x v) - B_x(v) &= \sum_{j=0}^{m-1} \|Df_{f(x)}^j (Df_x v)\|^2 - \sum_{j=0}^{m-1} \|Df_{f(x)}^{-j-1} (Df_x v)\|^2 \\ &+ \sum_{j=0}^{m-1} -\|Df_x^j v\|^2 + \sum_{j=0}^{m-1} \|Df_x^{-j-1} v\|^2 \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} (-\|Df_x^j v\|^2 + \|Df_{f(x)}^j (Df_x v)\|^2) \\ &+ \sum_{j=0}^{m-1} (-\|Df_{f(x)}^{-j-1} (Df_x v)\|^2 + \|Df_x^{-j-1} v\|^2). \end{aligned}$$

Temos aqui duas somas telescópicas. Logo, chegamos em

$$\begin{aligned} (f^*B - B)_x(v) &= -\|v\|^2 + \|Df^m v\|^2 - \|v\|^2 + \|Df^{-m} v\|^2 \\ &= \|Df^{-m} v\|^2 - 2\|v\|^2 + \|Df^m v\|^2 > 0. \end{aligned}$$

Portanto, $(f^*B - B)_x$ é definida positiva.

Agora, se $v^s \in E_x^s$, com $v^s \neq 0$, então $Df_x^{-j}v^s \in E_{f^{-j}(x)}^s$ e

$$\begin{aligned} B_x(v^s) &= \sum_{j=0}^{m-1} \|Df_x^j v^s\|^2 - \sum_{j=0}^{m-1} \|Df_x^{-j-1} v^s\|^2 \\ &= \sum_{j=0}^m \|Df_x^m(Df_x^{-j}v^s)\|^2 - \|Df_x^{-j}v^s\|^2 < 0, \end{aligned}$$

pois $\|Df_x^m(Df_x^{-j}v^s)\| \leq \frac{1}{5}\|Df_x^{-j}v^s\| < \|Df_x^{-j}v^s\|$. Além disso, se $v^u \in E_x^u$, com $v^u \neq 0$, então $Df_x^{-j}v^u \in E_{f^{-j}(x)}^u$ e assim $\|Df_x^m(Df_x^{-1}v^u)\| > 5\|Df_x^{-1}v^u\|$ pela observação feita no início desta seção. Logo, $B_x(v^u) > 0$. Agora, seja $n = \dim B_x$ (aqui n é a dimensão máxima entre todas as dimensões de subespaços F contidos em $\{v \in T_x M : B_x(v) \leq 0\}$). Afirmamos que $\dim B_x = \dim E_x^s$.

De fato, temos que $\dim E_x^s \leq \dim B_x$ pois $E_x^s \subseteq \{v \in T_x M : B_x(v) \leq 0\}$. Agora, seja F um subespaço tal que $\dim B_x = \dim F$. Temos que $F \cap E_x^u = \{0\}$, pois mostramos que $v^u \in E_x^u$ implica em $B_x(v^u) \geq 0$, com a igualdade ocorrendo apenas se $v^u = 0$. Mas sabemos que dados F_1 e F_2 subespaços de um espaço vetorial E , então $\dim F_1 + \dim F_2 = \dim (F_1 \cap F_2) + \dim (F_1 + F_2)$. Assim, $\dim F + \dim E_x^u = \dim (F + E_x^u) \leq \dim T_x M = \dim E_x^s + \dim E_x^u$ e então $\dim F \leq \dim E_x^s$. Logo, $\dim B_x = \dim E_x^s$.

Uma vez que Df_x é isomorfismo, temos que $\dim E_x^s = \dim Df_x(E_x^s) = \dim E_{f(x)}$ e, conseqüentemente, $\dim E_{f^i(x)}^s = \dim E_{f^j(x)}^s$ para quaisquer $i, j \in \mathbb{Z}$. Portanto, $\dim B_{f^i(x)} = \dim B_{f^j(x)}$, isto é, a dimensão de B é constante ao longo das órbitas de $x \in M$.

Para concluir, nos falta mostrar apenas que B_x é não-degenerada para todo $x \in \Lambda$. Bem, suponha que exista $x \in \Lambda$ tal que, para um certo $v = v^s + v^u \in T_x M$, tenhamos $B_x(v, w) = 0$, para todo $w \in T_x M$. Assim:

$$\begin{aligned} B_x(v, v^s) = B_x(v, v^u) &\iff B_x(v^s + v^u, v^s) = B_x(v^s + v^u, v^u) \iff B_x(v^s, v^s) + \\ B_x(v^u, v^s) = B_x(v^s, v^u) + B_x(v^u, v^u) &\iff B_x(v^s) = B_x(v^u). \end{aligned}$$

Isto implica que $v^s = 0 = v^u$, ou seja, $v = 0$. Logo, B_x é não-degenerada para cada $x \in \Lambda$. Portanto, vale (2).

(2) \Rightarrow (3)

Definamos $C_x^s = \{v \in T_x M : B_x(v) \leq 0\}$ e $C_x^u = \{v \in T_x M : B_x(v) \geq 0\}$. Sejam F_x^s e F_x^u subespaços de dimensão máxima em C_x^s e C_x^u respectivamente. Por hipótese, dimensão de B é constante ao longo das órbitas o que implica que dimensão de C^s é constante ao longo das órbitas e, conseqüentemente, isso acontece também para C^u . Além disso, como B é não-degenerada, pelo item 3 da proposição 2.3.1, estes cones tem dimensões complementares.

Uma vez que $(f^*B - B)_x$ é definida positiva, temos que $B_{f(x)}(Df_x v) - B_x(v) \geq 0$ (onde a igualdade é válida se, e somente se, $v = 0$) e assim $B_{f(x)}(Df_x v) \geq B_x(v)$. Se $v \in C_x^u$, então $Df_x(v) \in C_{f(x)}^u$ pois $B_{f(x)}(Df_x v) \geq B_x(v) \geq 0$. Logo $Df_x C_x^u \subset C_{f(x)}^u$. Analogamente, $B_{f(y)}(Df_y u) - B_y(u) \geq 0$ se, e somente se, $B_x(v) \geq B_{f^{-1}(x)}(Df_x^{-1}v)$ com $f(y) = x$ e $Df_y(u) = v$. Temos então que $v \in C_x^s$ implica $Df_x^{-1}(v) \in C_{f^{-1}(x)}^s$ pois $B_{f^{-1}(x)}(Df_x^{-1}(v)) \leq B_x(v) \leq 0$, isto é, $Df_x^{-1}C_x^s \subset C_{f^{-1}(x)}^s$. Provamos assim o item (a). Mostraremos que o item (b) também é válido. O resultado será mostrado para C^u , pois para C^s o processo é análogo.

Pela compacidade de Λ e pela continuidade de B , dado $a > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|w - 0\| < \sqrt{\delta}$ implica em $|B_z(w) - B_z(0)| < a$. Observe que esta última implicação é equivalente a: se $|B_z(w)| \geq a$ então $\|w\|^2 \geq \delta$. Agora, como $(f^*B - B)_x$ é definida positiva, pelo corolário 2.2.2, existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$a\|w\|^2 \leq (f^*B - B)_z(w) \leq b\|w\|^2, \quad (3.1)$$

para qualquer $z \in \Lambda$ e $w \in T_z M$.

Pelo lema 2.2.3, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $|B_x(v)| \leq c\|v\|^2$. Sejam $\delta = \delta(a)$ e m tal que $\sigma^2 = \frac{ma\delta}{c} > 1$. Consideremos $x \in \Lambda$ e $v \in C_x^u$ (já mostramos $B_x(v) \geq 0$) tal que $\|v\| = 1$, temos que $(f^*B - B)_{f^{j-1}(x)}(Df_x^{j-1}v) = B_{f^j(x)}(Df_x^j v) - B_{f^{j-1}(x)}(Df_x^{j-1}v) \geq 0$. Logo:

$$\begin{aligned}
B_{f^j(x)}(Df_x^j v) &\geq B_{f^{j-1}(x)}(Df_x^{j-1} v) \geq B_{f^{j-2}(x)}(Df_x^{j-2} v) \\
&\geq \dots \\
&\geq B_{f(x)}(Df_x v) \\
&\geq B_{f(x)}(Df_x v) - B_x(v) = (f^*B - B)_x(v) \geq a\|v\|^2 = a,
\end{aligned}$$

para qualquer $j \geq 1$. Mas já vimos que $B_{f^j(x)}(Df_x^j v) \geq a$ implica em $\|Df_x^j v\|^2 \geq \delta$. Agora, usando (3.1), chegamos em:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{m-1} am\delta &\leq \sum_{j=0}^{m-1} a\|Df_x^j\|^2 \leq \sum_{j=0}^{m-1} (B_{f^{j+1}(x)}(Df_x^{j+1} v) - B_{f^j(x)}(Df_x^j v)) \\
&= B_{f^m(x)}(Df_x^m v) - B_x(v) \leq B_{f^m(x)}(Df_x^m v) \\
&\leq c\|Df_x^m v\|^2.
\end{aligned}$$

Isto implica que $\|Df_x^m v\|^2 > \frac{ma\delta}{c} = \sigma^2$, provando assim o item (b)
(3) \Rightarrow (1)

Uma vez que $Df_x C_x^u \subset C_{f(x)}^u$ e $Df_x^{-1} C_x^s \subset C_{f^{-1}(x)}^s$, temos que

$$Df_{f^{(n+1)}(x)}^{-n} C_{f^{(n+1)}(x)}^s \subset Df_{f^n(x)}^{-n} C_{f^n(x)}^s \text{ e } Df_{f^{-(n+1)}(x)}^{(n+1)} C_{f^{-(n+1)}(x)}^u \subset Df_{f^{-n}(x)}^n C_{f^{-n}(x)}^u.$$

Definamos assim:

$$E_x^s = \bigcap_{n \geq 0} Df_{f^n(x)}^{-n} C_{f^n(x)}^s \text{ e } E_x^u = \bigcap_{n \geq 0} Df_{f^{-n}(x)}^n C_{f^{-n}(x)}^u.$$

A figura 3.1 nos dá uma ideia da construção do subespaço estável E_x^s . A construção para E_x^u é análoga.

Por definição, sabemos que $0 \in C_{f^n(x)}^s, C_{f^{-n}(x)}^u$, assim E_x^s, E_x^u não são vazios.

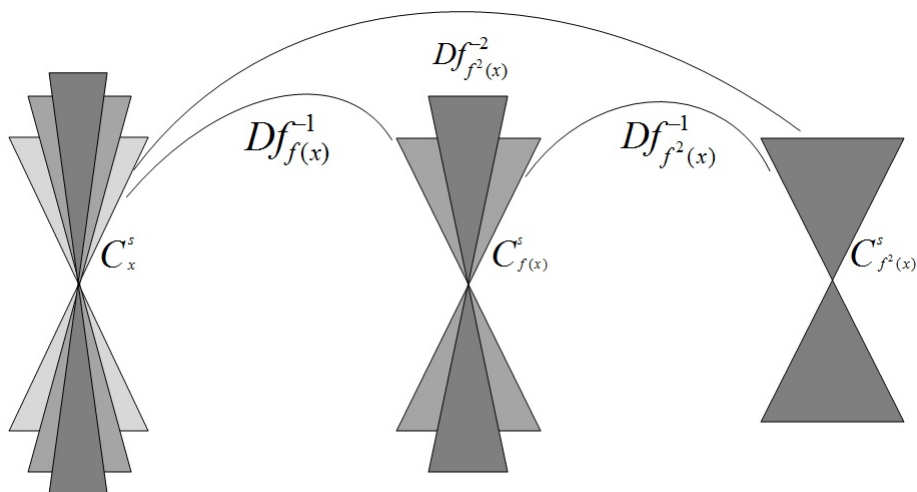


Figura 3.1: Construção dos subespaços invariantes

Afirmamos que $Df_x(E_x^s) = E_{f(x)}^s$ e $Df_x(E_x^u) = E_{f(x)}^u$. Bem,

$$\begin{aligned}
 Df_x(E_x^s) &= \bigcap_{n \geq 0} Df_x(Df_{f^n(x)}^{-n} C_{f^n(x)}^s) = \bigcap_{n \geq 0} Df_{f^{n-1}(f(x))}^{-(n-1)} C_{f^{n-1}(f(x))}^s \\
 &= C_{f(x)}^s \bigcap \left(\bigcap_{n \geq 1} Df_{f^{n-1}(f(x))}^{-(n-1)} C_{f^{n-1}(f(x))}^s \right) \\
 &= \bigcap_{n \geq 1} Df_{f^{n-1}(f(x))}^{-(n-1)} C_{f^{n-1}(f(x))}^s.
 \end{aligned}$$

Pois a sequência é decrescente. Mas isto nos dá, fazendo $k = n - 1$, que $Df_x(E_x^s) = \bigcap_{k \geq 0} Df_{f^k(f(x))}^{-k} C_{f^k(f(x))}^s = E_{f(x)}^s$. Analogamente, concluímos que $Df_x(E_x^u) = E_{f(x)}^u$. Note que ainda não mostramos que E_x^s e E_x^u são subespaços vetoriais, mas já temos que estes são invariantes pela derivada.

Provaremos agora que existem $C > 0$ e $0 < \lambda < 1$ tal que se $v \in E_x^s$, então $\|Df^n v\| \leq C\lambda^n$ se $n \geq 0$. Dado $n \in \mathbb{N}$, escrevemos $n = km + r$ com $0 \leq r < m$, onde m é, por hipótese, tal que $\|Df^{-m} v\| \geq \sigma \|v\|$ se $v \in C^s$. Seja $C_1 = \inf_{x \in M} \left\{ \min \frac{\|Df_x^{-r} w\|}{\|w\|} : 0 \leq r < m \right\}$. Façamos $w = Df_x^n v \in C_{f^n(x)}^s$ e então:

$$\|v\| = \|Df_{f^n(x)}^{-n} w\| = \|Df^{-r}(Df_{f^n(x)}^{-km} w)\| \geq C_1 \|Df_{f^n(x)}^{-km} w\| \geq C_1 \sigma^k \|w\|.$$

Logo,

$$\|Df_x^n v\| \leq \frac{1}{C_1 \sigma^k} \|v\| = C_1^{-1} \sigma^{\frac{r}{m}} (\sigma^{-\frac{1}{m}})^n \|v\| \leq C \lambda^n \|v\|,$$

onde $C = \max\{C_1^{-1} \sigma^{\frac{r}{m}} : 0 \leq r < m\}$ e $\lambda = \sigma^{-\frac{1}{m}}$. Analogamente, concluímos que $\|Df_x^{-n} v\| \leq C \lambda^n \|v\|$, para $v \in E_x^u$. Além disso, $E_x^s \cap C_x^u = \{0\}$ e $E_x^u \cap C_x^s = \{0\}$. De fato, se $v \in E_x^s \cap C_x^u$, então $\|Df_x^m v\| \geq \sigma \|v\|$, mas para $n = m$, a construção que fizemos acima nos dá que $C_1 = C = 1$ e então $\|Df_x^m v\| \leq \sigma^{-1} \|v\|$. Chegamos em $\sigma^{-1} \|v\| \geq \sigma \|v\|$, mas $\sigma > 1$ e assim $v = 0$. Da mesma forma, concluímos que $v \in E_x^s \cap C_x^u$ se, e somente se, $v = 0$.

Agora, para cada n escolhamos um subespaço $E_n \subset C_{f^n(x)}^s$ de dimensão máxima tal que $\dim E_n = \dim C_{f^n(x)}^s$ e seja $S_n = Df^{-n} E_n$. Da mesma forma, seja $F_n \subset C_{f^{-n}(x)}^u$ com $\dim F_n = \dim C_{f^{-n}(x)}^u$ e $U_n = Df^n F_n$. Observe que as dimensões de E_n e S_n são as mesmas assim como as dimensões de F_n e U_n o são pois Df é um isomorfismo. Temos que $\dim E_i = \dim E_j$, já que a dimensão de C^s é a mesma ao longo da órbita de $x \in M$, e isso implica que $\dim S_i = \dim S_j$, também temos que $\dim U_i = \dim U_j$. Além disso, S_n e E_n têm dimensões complementares.

Considere $e^n = \{e_1^n, \dots, e_k^n\}$ uma base ortonormal de S_n , isto é, $e^n \in (S^m)^k = S^m \times \dots \times S^m$ e $\langle e_i^n, e_j^n \rangle = 1$, se $i = j$ e $\langle e_i^n, e_j^n \rangle = 0$, se $i \neq j$. Observe que $(e^n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em $(S^m)^k$ que é um compacto e então possui subsequência convergente em $(S^m)^k$. Seja e o limite dessa subsequência com $e = (e^1, \dots, e^k) \in (S^m)^k$. O conjunto $\{e_1, \dots, e_k\}$ é ortonormal pois $\lim_n \langle e_i^n, e_j^n \rangle = \langle e_i, e_j \rangle$. Temos que $S = \text{ger}\{e_1, \dots, e_k\}$ é subespaço limite de S_n e, de forma análoga, construímos $U = \text{ger}\{f_1, \dots, f_l\}$ subespaço limite de U_n , com $k + l = \dim T_x M$.

Além disso, $S \subset E^s$ e $U \subset E^u$. De fato, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que $Df_{f^{n+1}(x)}^{-(n+1)} C_{f^{n+1}(x)}^s \subset Df_{f^n(x)}^{-n} C_{f^n(x)}^s$ e então $\overline{Df_{f^{n+1}(x)}^{-(n+1)} C_{f^{n+1}(x)}^s} \subset Df_{f^n(x)}^{-n} C_{f^n(x)}^s$. Dessa forma, fixado k , $S_n \subset Df_{f^n(x)}^{-n} C_{f^n(x)}^s \subset Df_{f^k(x)}^{-k} C_{f^k(x)}^s$ para todo $n \geq k$. Logo, $S_n \subset \overline{\bigcap_{n \geq k} Df_{f^n(x)}^{-n} C_{f^n(x)}^s}$. Como interseção infinita de fechados ainda é um conjunto fechado e S é um subespaço limite de S_n , segue que $S \subset \overline{\bigcap_{n \geq k} Df_{f^n(x)}^{-n} C_{f^n(x)}^s} \subset \bigcap_{n \geq k} \overline{Df_{f^{n-1}(x)}^{-(n-1)} C_{f^{n-1}(x)}^s} \subset E_x^s$, ou seja, $S \subset E_x^s$. Analogamente, $U \subset E_x^u$.

Agora, $S \subset E_x^s$ e $U \subset C_x^u$ e então $S \cap U \subseteq E_x^s \cap C_x^u = \{0\}$ e assim $S \cap U = \{0\}$.

Como S e U têm dimensões complementares, segue que $T_x M = S \oplus U$. Afirmamos que $S = E_x^s$ e $U = E_x^u$. Suponha que $v \in E_x^s - S$, com $v \neq 0$ pois $0 \in S$. Temos que $v = s + u$, com $u \neq 0$ e $\|Df_x^n v\| = \|Df_x^n(u + s)\| \geq \|Df_x^n u\| - \|Df_x^n s\|$, mas $\|Df_x^n v\| \rightarrow 0$, enquanto $\|Df_x^n u\| \rightarrow \infty$, pois $u \in U \subset E_x^u$, e $\|Df_x^n s\| \rightarrow 0$, já que $s \in S \subset E_x^s$, o que é um absurdo. Logo, $E_x^s = S$ e, de modo semelhante, $E_x^u = U$. Portanto, $T_x M = E_x^s \oplus E_x^u$. Concluimos assim que Λ é hiperbólico. \square

3.2 Exemplo de aplicação: o solenóide

Como aplicação do teorema 1.2.2, mostraremos que o solenóide é um conjunto hiperbólico usando os cones invariantes. Conseguimos exibir um dos espaços da decomposição requerida na definição 3.0.4. O outro subespaço é facilmente encontrado utilizando o teorema 1.2.2.

3.2.1 O atrator solenóide

Sejam $D = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| \leq 1\}$ e $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\}$ e defina, para cada $(w, z) \in D \times S^1$, a aplicação $f : D \times S^1 \rightarrow D \times S^1$ por $f(w, z) = (\frac{w}{8} + \frac{z}{2}, z^2)$.

A aplicação f é diferenciável e injetiva. De fato, as funções $f_1(w, z) = \frac{w}{8} + \frac{z}{2}$ e $f_2(w, z) = z^2$ são diferenciáveis e isso se deve ao fato de $g_1(w) = f_1(w, z)$ e $h_1(z) = f_2(w, z)$ serem diferenciáveis, assim como $g_2(w) = f_2(w, z)$ e $h_2(z) = f_2(w, z)$ o são. A injetividade de f segue do fato de que $f(w_1, z_1) = f(w_2, z_2)$ se, e somente se, $\frac{w_1}{8} + \frac{z_1}{2} = \frac{w_2}{8} + \frac{z_2}{2}$ e $z_1^2 = z_2^2$. Se $z_1^2 = z_2^2$, então $z_2 = z_1$ ou $z_2 = -z_1$. Se esta última igualdade ocorrer, chegamos em $\|z_2\| = \|\frac{z_2}{2} + \frac{z_2}{2}\| = \frac{\|w_1 - w_2\|}{8} \leq \frac{\|w_1\| + \|w_2\|}{8} \leq \frac{1}{4}$, mas $\|z_2\| = 1$, uma contradição. Logo, $z_1 = z_2$ e então $\frac{w_1}{8} + \frac{z_1}{2} = \frac{w_2}{8} + \frac{z_2}{2}$. Assim, $(w_1, z_1) = (w_2, z_2)$.

A aplicação f não pode ser sobrejetiva pois $\|\frac{w}{8} + \frac{z}{2}\| \leq \|\frac{w}{8}\| + \|\frac{z}{2}\| \leq \frac{1}{8} + \frac{1}{2} < 1$ e $\|z^2\| = \|z\|^2 = 1$, isto é, $f(D \times S^1) \subset (D \times S^1)$. No entanto, a aplicação $f : D \times S^1 \rightarrow f(D \times S^1)$ é bijetiva com $f^{-1}(a, b) = (8a - 4\sqrt{b}, \sqrt{b})$ que também é diferenciável. Observe que pela continuidade de f , uma vez que $D \times S^1$ é compacto, $f(D \times S^1)$ também é compacto. Além disso, temos que $f^n(D \times S^1) \subset f^{n-1}(D \times S^1)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Temos então que $F_n = f^n(D \times S^1)$ é uma sequência encaixada de conjuntos compactos e então $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n = \bigcap_{n \geq 0} F_n$ é não-vazio e compacto. O conjunto $\Lambda = \bigcap_{n \geq 0} F_n = \bigcap_{n \geq 0} f^n(D \times S^1)$ é um conjunto hiperbólico chamado de **Solenóide** (ver Figura 3.2).

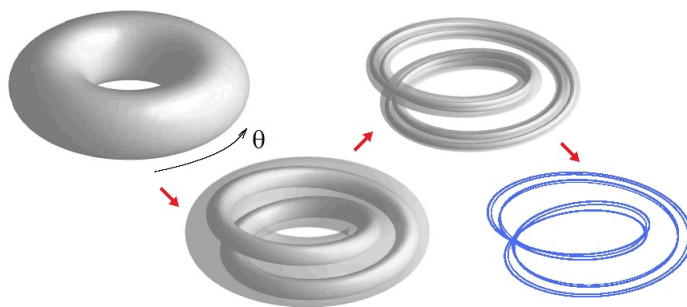


Figura 3.2: Primeiras etapas de construção do solenóide

O conjunto Λ , além de ser compacto, é invariante. De fato, como f é injetiva, então $f(\Lambda) = f(\bigcap_{n \geq 0} f^n(D \times S^1)) = \bigcap_{n \geq 1} f^n(D \times S^1) = \bigcap_{n \geq 0} f^n(D \times S^1) = \Lambda$.

3.2.2 O solenóide é hiperbólico

Identificamos $T_{(w,z)}D \times S^1 = T_w D \oplus T_z S^1 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$. Vemos que $Df_{(w,z)}(u, v) = (\frac{u}{8} + \frac{v}{2}, 2zv)$. Logo, $E_{(w,z)}^s = T_w D \oplus \{0\} = \mathbb{C} \times \{0\}$ é um fibrado invariante e $\|Df|_{E^s}\| = \frac{1}{8}$ (isso implica que $\|Df^n(v)\| \leq (\frac{1}{8})^n \|v\|, v \in E^s$). Observe que o subespaço instável $E_{(w,z)}^u$ não é dado por $\{0\} \times \mathbb{R}$, uma vez que este subespaço nem sequer é Df -invariante. Apesar disso, como na demonstração do teorema 1.2.2, podemos construir E_x^u (onde $x = (w, z)$) a partir de um cone positivamente invariante. Seja $C^u = \{(u, v) : \|u\| \leq \|v\|\}$. Este cone é invariante por Df . De fato, se $(u, v) \in C^u$, então $|\frac{u}{8} + \frac{v}{2}| \leq |\frac{u}{8}| + |\frac{v}{2}| \leq \|\frac{v}{8}\| + \|\frac{v}{2}\| < 2\|v\|$. Além disso,

$$\begin{aligned} \|Df(u, v)\|^2 &= \left\| \frac{u}{8} + \frac{v}{2} \right\|^2 + \|2zv\|^2 \geq \|2v\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|v\|^2 \\ &\geq 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 = 2\|(u, v)\|^2, \end{aligned}$$

ou seja, $\|Df(u, v)\| \geq \sqrt{2}\|(u, v)\|$. Assim, definimos $E_x^u = \bigcap_{n \geq 0} Df_{f^{-n}(x)}^n C_{f^{-n}(x)}^u$. Este é o subespaço instável que satisfaz juntamente com E_x^s as propriedades requeridas na definição de conjunto hiperbólico. Portanto, o solenóide é hiperbólico.

Capítulo 4

Conjuntos Parcialmente Hiperbólicos Para Fluxos

Este capítulo contém os resultados principais deste trabalho. Estudaremos os cociclos multiplicativos. Os resultados mostrados para cociclos são particularizados na subseção 4.3 para fluxos, provando o teorema 1.2.3 e a proposição 1.2.5.

De agora em diante, consideramos M uma variedade riemanniana de dimensão finita compacta e conexa com ou sem bordo, $U \subset M$ uma região armadilha, $\Lambda(U) = \Lambda_X(U) := \bigcap_{t>0} \overline{X_t(U)}$ o subconjunto invariante maximal positivo em U para um campo de vetores X e E_U um fibrado vetorial sobre U . Assumimos que todas as singularidades de X em U (se existem) são hiperbólicas.

4.1 Cociclos lineares \mathcal{J} -separados sobre fluxos

Seja $A : E \times \mathbb{R} \rightarrow E$ uma aplicação diferenciável dada por uma coleção de bijeções lineares

$$A_t(x) : E_x \rightarrow E_{X_t(x)}, x \in M, t \in \mathbb{R},$$

onde M é o espaço base do fibrado vetorial E de dimensão finita, satisfazendo a propriedade do cociclo:

$$A_0(x) = Id, \quad A_{t+s}(x) = A_t(X_s(x)) \circ A_s(x), \quad x \in M, \quad t, s \in \mathbb{R},$$

com $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ um fluxo diferenciável sobre M . Notemos que para cada $t > 0$ fixado a aplicação $A_t : E \rightarrow E$, $A_t(v_x) = A_t(x)v_x \in E_{X_t(x)}$ é um automorfismo do fibrado vetorial E .

O exemplo natural do cociclo multiplicativo linear sobre o fluxo diferenciável X_t na variedade é o cociclo derivada $A_t(x) = DX_t(x)$ no fibrado tangente TM de uma variedade compacta M de dimensão finita.

Os resultados seguintes dão uma caracterização de cociclos \mathcal{J} -separados $A_t(x)$ sobre um fluxo X_t em termos do gerador infinitesimal $D(x)$ de $A_t(x)$. O próximo teorema é mais geral que a proposição 1.2.5. Esta é um caso particular quando $A_t(x) = DX_t(x)$.

Seja $A_t(x)$ um cociclo multiplicativo linear sobre um fluxo X_t . Definimos o gerador infinitesimal de $A_t(x)$ por

$$D(x) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{A_t(x) - Id}{t}$$

.

Definição 4.1.1. *Dado um campo contínuo de formas quadráticas não-degeneradas \mathcal{J} com índice constante na região armadilha U para o fluxo X_t , o cociclo $A_t(x)$ sobre X é dito:*

- \mathcal{J} -separado se $A_t(x)(C_+(x)) \subset C_+(X_t(x))$, para todo $t > 0$ e $x \in U$.
- estritamente \mathcal{J} -separado se $A_t(x)(C_+(x) \cup C_0(x)) \subset C_+(X_t(x))$, para todo $t > 0$ e $x \in U$;
- \mathcal{J} -monótono se $\mathcal{J}_{X_t(x)}(A_t(x)v) \geq \mathcal{J}_x(v)$, para cada $v \in T_x M \setminus \{0\}$ e $t > 0$;
- estritamente \mathcal{J} -monótono se $\partial_t(\mathcal{J}_{X_t(x)}(A_t(x)v))|_{t=0} > 0$, para todo $v \in T_x M$, com $v \neq 0$, $t > 0$ e $x \in U$;

- \mathcal{J} -isometria se $\mathcal{J}_{X_t(x)}(A_t(x)v) = \mathcal{J}_x(v)$, para cada $v \in T_xM$ e $x \in U$.

Note que a \mathcal{J} -separação corresponde à invariância simples do cone e a \mathcal{J} -separação estrita corresponde à invariância estrita do cone sob a ação do cociclo $A_t(x)$.

Observação 4.1.2. Sabemos que, para cada $x \in U$, existe um operador auto-adjunto J_x tal que $\mathcal{J}_x(v) = \langle J_x v, v \rangle$, para todo $v \in E_x$. No entanto, no contexto de formas quadráticas não-degeneradas com índice constante, nós garantimos, fazendo uma mudança de coordenadas se necessário, que o operador J independe de $X_t(x)$, para $t \geq 0$. Assim, por exemplo, afirmar que $A_t(x)$ é \mathcal{J} -separado, é dizer que

$$\mathcal{J}_{X_t(x)}(A_t(x)v) = \langle JA_t(x)v, A_t(x)v \rangle > 0 \text{ sempre que } \mathcal{J}_x(v) = \langle Jv, v \rangle > 0.$$

Observação 4.1.3. Quando $A_t(x) = DX_t(x)$, dizemos que X_t é (estritamente) \mathcal{J} -separado em U , se $DX_t(x)$ for (estritamente) \mathcal{J} -separado em T_xM . Analogamente, o fluxo de X em U é (estritamente) \mathcal{J} -monótono, se $DX_t(x)$ for estritamente \mathcal{J} -monótono.

Se um fluxo for estritamente \mathcal{J} -separado, então

$$DX_{-t}(C_-(x) \cup C_0(x)) \subset C(X_{-t}(x)),$$

isto é, se $\mathcal{J}_x(v) \leq 0$, para $v \in T_xM$, então $\mathcal{J}_{X_{-t}(x)}(DX_{-t}v) < 0$, com $v \in E_x$ e para todo $t > 0$ e x tal que $X_{-s}(x) \in U$ para cada $s \in [-t, 0]$. De fato, se tivéssemos $\mathcal{J}_{X_{-t}(x)}(DX_{-t}v) \geq 0$, então, pela \mathcal{J} -separação estrita, $\mathcal{J}_x(v) = \mathcal{J}_x(DX_t(DX_{-t}(v))) > 0$, uma contradição.

Portanto, um fluxo X_t é estritamente \mathcal{J} -separado se, e somente se, seu fluxo inverso X_{-t} é estritamente $(-\mathcal{J})$ -separado.

A seguir, demonstramos um resultado que usamos na demonstração do teorema 4.2.1.

Lema 4.1.4. Seja $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $x(t)' \geq a(t)x(t)$ e $x(t) > 0$. Então, $x(t) \geq x_0 \exp \int_{t_0}^t a(s)ds$, onde $x(t_0) = x_0$ para algum $t_0 \in I$ escolhido.

Demonstração. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos: $\int_{t_0}^t a(s)ds \leq \int_{t_0}^t \frac{x(s)'}{x(s)} ds = \ln |x(t)| - \ln |x(t_0)|$ e, tomando a exponencial, chegamos em

$$x(t) \geq x_0 \exp \int_{t_0}^t a(s)ds,$$

onde $x(t_0) = x_0$ é uma condição inicial dada. \square

Observe que se $x(t) < 0$, então chegaríamos em $x(t) \leq x_0 \exp \int_{t_0}^t a(s)ds$.

4.2 Prova dos resultados principais

Nesta seção, demonstraremos a proposição 1.2.5 e o teorema 1.2.3, os resultados principais deste trabalho. Para isso, apresentamos resultados auxiliares cujas demonstrações são apresentadas para maioria deles e outros resultados, devido à extensão de suas demonstrações, são apenas enunciados com indicação sobre onde encontrar suas provas com maiores detalhes.

Teorema 4.2.1. *Seja X_t um fluxo definido em um subconjunto U positivamente invariante por este fluxo, $A_t(x)$ um cociclo sobre X_t em U e $D(x)$ seu gerador infinitesimal. Então:*

1. $\partial_t \mathcal{J}(A_t(x)v) = \langle \widetilde{J}_{X_t(x)} A_t(x)v, A_t(x)v \rangle$ para todo $v \in E_x$ e $x \in U$, onde

$$\widetilde{J}_x := J \cdot D(x) + D(x)^* \cdot J \quad (4.1)$$

e $D(x)^*$ denota o adjunto da aplicação linear $D(x) : E_x \rightarrow E_x$ com respeito ao produto interno adaptado em x .

2. O cociclo $A_t(x)$ é \mathcal{J} -separado se, e somente se, existe uma função $\delta : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\widetilde{J}_x \geq \delta(x)J, \text{ para todo } x \in U. \quad (4.2)$$

Em particular, obtemos que $\partial_t \log |\mathcal{J}(A_t(x)v)| \geq \delta(X_t(x))$, $v \in E_x$, $x \in U$, $t \geq 0$;

3. Se as desigualdades no item anterior são estritas, então o cociclo $A_t(x)$ é estritamente \mathcal{J} -separado. Reciprocamente, se $A_t(x)$ for estritamente \mathcal{J} -separado, então existe um campo \mathcal{J}_0 de formas compatíveis em U satisfazendo a desigualdade estrita do item 2.

4. Defina a função

$$\Delta_s^t(x) := \int_s^t \delta(X_s(x)) ds \quad (4.3)$$

Para um cociclo \mathcal{J} -separado $A_t(x)$, temos $\frac{|\mathcal{J}(A_{t_2}(x)v)|}{|\mathcal{J}(A_{t_1}(x)v)|} \geq \exp \Delta_{t_1}^{t_2}(x)$ para todo $v \in E_x$ e reais $t_1 < t_2$ tais que $\mathcal{J}(A_t(x)v) \neq 0$, para todo $t \in [t_1, t_2]$.

5. Podemos limitar δ em cada $x \in U$ por $\sup_{v \in C_-(x)} \frac{\widetilde{\mathcal{J}}(v)}{\mathcal{J}(v)} \leq \delta(x) \leq \inf_{v \in C_+(x)} \frac{\widetilde{\mathcal{J}}(v)}{\mathcal{J}(v)}$.

Antes de demonstrarmos o teorema, fazemos algumas observações.

Observação 4.2.2. Se $\delta(x) = 0$, então $\widetilde{\mathcal{J}}_x$ é um operador positivo semidefinido. Mas, se $\delta(x) \neq 0$, operador simétrico $\widetilde{\mathcal{J}}_x$ pode ser uma forma quadrática indefinida.

Observação 4.2.3. A condição necessária no item 3 do teorema 4.2.1 é provada depois da proposição 4.2.15.

Observação 4.2.4. Pela limitação de $\delta(x)$ por $r_-(x) = \sup_{v \in C_-(x)} \frac{\widetilde{\mathcal{J}}(v)}{\mathcal{J}(v)}$ e $r_+(x) = \inf_{v \in C_+(x)} \frac{\widetilde{\mathcal{J}}(v)}{\mathcal{J}(v)}$, podemos tomar $\delta(x) = \frac{r_-(x) + r_+(x)}{2}$ já que, pelo lema 2.4.1, $\delta(x) \in [r_-(x), r_+(x)]$. Além disso, como os cones variam continuamente, então $r_-(x)$ e $r_+(x)$ são contínuas e a função δ pode ser tomada sempre como função contínua de x .

Observação 4.2.5. Complementando a observação 4.1.3, a condição necessária e suficiente nos itens 2 – 3 do teorema 4.2.1 para \mathcal{J} -separação (estrita), mostra que um cociclo $A_t(x)$ é \mathcal{J} -separado (estritamente) se, e somente se, seu inverso $A_{-t}(x)$ é $(-\mathcal{J})$ -separado (estritamente).

Observação 4.2.6. A desigualdade 4.2 mostra que δ é a medida da "taxa de expansão instântanea minimal" de $|\mathcal{J} \circ A_t(x)|$ sobre vetores positivos;

Demonstração. Para cada x fixado, definamos $\psi : \mathbb{R} \times E_x \rightarrow \mathbb{R}$ por $\psi(t, v) := \langle JA_t(x)v, A_t(x)v \rangle$. Usando agora o gerador infinitesimal de $A_s(X_t(x))$, com $t \in \mathbb{R}$, e as propriedades do cociclo de $A_s(x)$, temos que

$$\partial_t A_t(x)v = D(X_t(x)) \cdot A_t(x)v. \quad (4.4)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \partial_t(A_t(x)v) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A_{s+t}(x)v - A_t(x)v}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A_s(X_t(x))(A_t(x)v) - A_t(x)v}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(A_s(X_t(x)) - Id)A_t(x)v}{s} \\ &= \left(\lim_{s \rightarrow 0} \frac{(A_s(X_t(x)) - Id)}{s} \right) A_t(x)v \\ &= D(X_t(x))A_t(x)v, \end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, $x \in M$, $v \in E_x$. Assim,

$$\begin{aligned} \partial_t \psi(t, v) &= \langle \partial_t(JA_t(x)v), A_t(x)v \rangle + \langle JA_t(x)v, \partial_t A_t(x)v \rangle \\ &= \langle J \cdot D(X_t(x)) \cdot A_t(x)v, A_t(x)v \rangle + \langle JA_t(x)v, D(X_t(x)) \cdot A_t(x)v \rangle \\ &= \langle J \cdot D(X_t(x)) \cdot A_t(x)v, A_t(x)v \rangle + \langle D(X_t(x))^*(J \cdot A_t(x)v), A_t(x)v \rangle \\ &= \langle J \cdot D(X_t(x)) \cdot A_t(x)v + D(X_t(x))^*(J \cdot A_t(x)v), A_t(x)v \rangle. \end{aligned}$$

Como $\langle J(A_t(x)v), A_t(x)v \rangle = \mathcal{J}(A_t(x)v)$, fazendo $\widetilde{J}_x = J \cdot D(x) + D(x)^* \cdot J$ chegamos em $\partial_t \mathcal{J}(A_t(x)v) = \langle \widetilde{J}_{X_t(x)} A_t(x)v, A_t(x)v \rangle$.

Note que o argumento é o mesmo caso $x = \sigma$ seja uma singularidade de X_t .

Para provar o segundo item, vamos assumir que $A_t(x)$ é \mathcal{J} -separado. Assim, fixado $x \in U$, para todo $t \geq 0$, temos que

$$\mathcal{J}_{X_t(x)}(A_t(x)v) = \langle JA_t(x)v, A_t(x)v \rangle > 0 \text{ sempre que } \mathcal{J}_x(v) = \langle Jv, v \rangle > 0.$$

Agora, para todo $t > 0$ e $v \in C_0$, podemos encontrar $w \in C_+$ tal que $v + w \in C_+$. Assim, se $\lambda > 0$, temos que para $v \in C_0$ existe $w \in C_+$ com $\langle JA_t(x)(v + \lambda w), A_t(x)(v + \lambda w) \rangle > 0$. Dessa forma, por continuidade de $A_t(x)$ e de $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

$$\langle JA_t(x)v, A_t(x)v \rangle = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \langle JA_t(x)(v + \lambda w), A_t(x)(v + \lambda w) \rangle > 0.$$

Portanto, para $v \in C_0$, temos que $\psi(t, v) = \langle JA_t(x)v, A_t(x)v \rangle \geq 0 = \langle Jv, v \rangle = \psi(0, v)$ e assim, como ψ é diferenciável,

$$\partial_t \psi(t, v)|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\psi(t, v) - \psi(0, v)}{t} \geq 0.$$

Com isso, temos que

$$\partial_t \psi(t, v)|_{t=0} = \langle (J \cdot D(x) + D(x)^* \cdot J)v, v \rangle \geq 0$$

para $v \in C_0$. Além disso, como J é auto-adjunto, então $(J \cdot D(x) + D(x)^* \cdot J)$ é auto-adjunto e a forma bilinear $F_x : E_x \times E_x \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F_x(v, w) = \langle (J \cdot D(x) + D(x)^* \cdot J)v, w \rangle$$

é simétrica e $F(v, v) \geq 0$ para todo $v \in C_0$. Estamos então com as hipóteses do lema 2.4.1 que nos garante, juntamente com a observação 2.4.2, que existe uma função $\delta : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\widetilde{J}_x \geq \delta(x)J$, para todo $x \in U$. Fazendo $\widetilde{\mathcal{J}}_x(v) = \langle \widetilde{J}_x v, v \rangle$, o lema 2.4.1 ainda nos garante que

$$\sup_{v \in C_-(x)} \frac{\widetilde{\mathcal{J}}(v)}{\mathcal{J}(v)} \leq \delta(x) \leq \inf_{v \in C_+(x)} \frac{\widetilde{\mathcal{J}}(v)}{\mathcal{J}(v)}$$

(onde $\delta(x)$ é um real $r \in [r_-, r_+]$), para cada $x \in U$ fixado, provando o item 6.

Vamos mostrar agora que a existência de uma função $\delta : U \rightarrow \mathbb{R}$ verificando a desigualdade (4.2) é suficiente para a \mathcal{J} -separação de $A_t(x)$. Bem, como $X_t(x) \in U$ para $t \geq 0$ (pois U é positivamente invariante pelo fluxo), então vale $\widetilde{\mathcal{J}}_{X_t(x)}(A_t(x)v) \geq \delta(X_t(x))\mathcal{J}(A_t(x)v)$, mas isto quer dizer que

$\partial_t \mathcal{J}(A_t(x)v) \geq \delta(X_t(x))\mathcal{J}(A_t(x)v)$. Seja $v \in E_x$ tal que $\langle Jv, v \rangle > 0$. Temos que $x(t) = \mathcal{J}(A_t(x)v)$ é contínua e $x(0) > 0$, assim, conseguimos um intervalo $[-s, s]$ tal que $x(t) = \mathcal{J}(A_t(x)v) > 0$ para todo $t \in [-s, s]$. O lema 4.1.4 garante que

$$|\mathcal{J}(A_t(x)v)| \geq |\mathcal{J}(v)| \exp\left(\int_0^t \delta(X_s(x))ds\right) = |\mathcal{J}(v)| \exp \Delta(x, t) > 0.$$

Assim, $\mathcal{J}(A_t(x)v) \neq 0$ para todo $t \in [0, s]$. Suponha que exista um $t_0 > 0$ tal que $\mathcal{J}(A_{t_0}(x)v) < 0$. Por hipótese, $\mathcal{J}(A_t(x)v) > 0$ para $t = 0$, então, por causa da continuidade de $\mathcal{J}(A_t(x)v)$, o Teorema do Valor Intermediário garante um $t_1 \in (0, t_0)$ tal que $\mathcal{J}(A_{t_1}(x)v) = 0$, uma contradição. Seja $s_0 = \sup S := \sup\{s > 0 : x(t) > 0, t \in [0, s]\} < \infty$. Consideremos agora uma sequência $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset S$ tendendo a s_0 . Temos que

$$x(s_n) \geq x(0) \exp\left(\int_0^{s_n} \delta(X_s(x))ds\right) = x(0) \exp \Delta(x, s_n) > 0$$

implica, pela continuidade de x , que

$$x(s_0) \geq x(0) \exp\left(\int_0^{s_0} \delta(X_s(x))ds\right) = x(0) \exp \Delta(x, s_0) > 0.$$

e se $x(s_0) \leq 0$, então $\exp\left(\int_0^{s_0} \delta(X_t(x))dt\right) = 0$, a não ser que $\int_0^{s_0} \delta(X_t(x))dt = -\infty$ o que é impossível já que δ foi tomada sendo limitada e contínua. Logo, $x(s_0) > 0$ e, pela continuidade de x , existe um intervalo $(-\epsilon + s_0, s_0 + \epsilon)$ tal que $x(t) > 0$ para todo t neste intervalo, mas isto contradiz a escolha de s_0 como supremo. Portanto, $s_0 = \infty$ e concluímos que $\mathcal{J}(A_t(x)v) > 0$, para todo $v \in C_+(x)$, isto é, $A_t(x)$ é \mathcal{J} -separado.

Agora, se as desigualdades do item 2 são estritas, conseguimos também que $|\mathcal{J}(A_t(x)v)| > |\mathcal{J}(v)| \exp \Delta(x, t) = 0$ e se $v \in C_0$, então $\mathcal{J}(A_t(x)v) > 0$, pelo mesmo argumento anterior. Assim, $A_t(x)(C_+(x) \cup C_0(x)) \subset C_+(X_t(x))$. Portanto, A_t é estritamente \mathcal{J} -separado.

Como $A_t(x)$ é \mathcal{J} -separado, para cada $v \in C_0(x)$, temos que $|\mathcal{J}(A_t(x)v)| > 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim $\partial_t \log |\mathcal{J}(A_t(x)v)| \geq \delta(X_t(x))$, pelo lema 4.1.4, o que

implica, para todo $v \in E_x$ e $t_1 < t_2$ tais que $\mathcal{J}(A_t(x)v) \neq 0$ para $t \in [t_1, t_2]$, que

$$\log \frac{|\mathcal{J}(A_{t_2}(x)v)|}{|\mathcal{J}(A_{t_1}(x)v)|} \geq \int_{t_1}^{t_2} \partial_t \log |\mathcal{J}(A_t(x)v)| dt \geq \int_{t_1}^{t_2} \delta(X_t(x)) dt = \Delta_{t_1}^{t_2}(x).$$

Portanto, $\frac{|\mathcal{J}(A_{t_2}(x)v)|}{|\mathcal{J}(A_{t_1}(x)v)|} \geq \exp \Delta_{t_1}^{t_2}(x)$. □

4.2.1 \mathcal{J} -separação estrita de cociclos e dominação

Assumimos de agora em diante que a família $A_t(x)$ de cociclos multiplicativos lineares num subfibrado E_U sobre o fluxo X_t numa região armadilha $U \subset M$ tem sido dada. Mostraremos que se, além disso, houver um campo de formas quadráticas não-degeneradas \mathcal{J} em E_U com índice constante q menor que a dimensão de E_U tal que $A_t(x)$ é estritamente \mathcal{J} -separado, então E_U admite uma decomposição dominada com respeito a $A_t(x)$. Por outro lado, se já tivermos decomposição dominada, então podemos construir um campo \mathcal{J} de formas quadráticas não-degeneradas com índice constante menor que a dimensão E_U tal que $A_t(x)$ é \mathcal{J} -separado.

Observe que como \mathcal{J}_x tem o mesmo índice q para todo $x \in U$, então o cone $C_-(x) = \{0\} \cup \{v \in E_x : \mathcal{J}(v) > 0\}$ tem dimensão q para todo $x \in U$, já que o índice de \mathcal{J}_x é a máxima dimensão de um subespaço contido em $\{v \in E_x : \mathcal{J}_x(v) > 0\}$. Consequentemente, a dimensão de $C_+(x)$ é $p = \dim M - q = n - q$ para todo $x \in U$. Assim, se β é uma base de um subespaço de dimensão q em $C_-(x)$ e γ é uma base de um subespaço de dimensão p em $C_+(x)$, então $\alpha = \beta \cup \gamma$ é uma base de $T_x M$.

Mostraremos como dominação implica \mathcal{J} -separação estrita. Para isso, apresentaremos alguns resultados técnicos. O primeiro deles apresenta uma relação entre a norma riemanniana e uma dada forma quadrática \mathcal{J} .

Lema 4.2.7. *Suponha que $|\mathcal{J}(w)|, \mathcal{J}(v) > 0$, para todos $w \in F_-$ e $v \in F_+$, com $w, v \neq 0$. Existe uma constante $K > 0$ tal que para cada par de vetores não-nulos $(w, v) \in F_-(x) \times F_+(x)$ temos que $\frac{1}{K} \|w\|^2 \leq |\mathcal{J}(w)| \leq K \|w\|^2$ e $\frac{1}{K} \|v\|^2 \leq \mathcal{J}(v) \leq K \|v\|^2$*

$$\frac{1}{K} \sqrt{\frac{|\mathcal{J}(w)|}{\mathcal{J}(v)}} \leq \frac{\|w\|}{\|v\|} \leq K \sqrt{\frac{|\mathcal{J}(w)|}{\mathcal{J}(v)}}.$$

Demonstração. Temos que $|\mathcal{J}(w)|, \mathcal{J}(v) > 0$, se $w \in F_-$ e $v \in F_+$, com $w, v \neq 0$, isto é, $|\mathcal{J}|_{F_-}, |\mathcal{J}|_{F_+}$ são positivas. Pelo corolário 2.2.2, existem constantes $K_-(x), K_+(x) > 0$ (observe que tais constantes variam com o x) tais que $\frac{1}{K_-(x)}\|w\|^2 \leq |\mathcal{J}(w)| \leq K_-(x)\|w\|^2$ e $\frac{1}{K_+(x)}\|v\|^2 \leq \mathcal{J}(v) \leq K_+(x)\|v\|^2$. Tome agora $K = \max\{K_-(x), K_+(x)\}$ que existe pois as funções $\Lambda \ni x \mapsto K_-(x) \in \mathbb{R}$ e $\Lambda \ni x \mapsto K_+(x) \in \mathbb{R}$ são contínuas (pois os cones variam continuamente) e estão definidas num compacto. Logo, $\frac{1}{K}\|w\|^2 \leq |\mathcal{J}(w)| \leq K\|w\|^2$ e $\frac{1}{K}\|v\|^2 \leq \mathcal{J}(v) \leq K\|v\|^2$. Agora, manipulando essas duas últimas expressões, chegamos em

$$\frac{1}{K} \sqrt{\frac{|\mathcal{J}(w)|}{\mathcal{J}(v)}} \leq \frac{\|w\|}{\|v\|} \leq K \sqrt{\frac{|\mathcal{J}(w)|}{\mathcal{J}(v)}}.$$

□

Nós estamos supondo dominação. Na definição de decomposição dominada, usamos a norma riemanniana, porém o próximo resultado nos permite trocar esta norma por uma outra equivalente tal que a nova constante C na definição seja igual a 1. Esta outra norma é chamada de *norma adaptada*.

Seja Λ um conjunto compacto invariante para um campo de vetores X C^1 e seja E um fibrado vetorial sobre M . Usamos a seguir o resultado de Gourmelon[8].

Teorema 4.2.8. *Suponha que $T_\Lambda M = F_- \oplus F_+$ é uma decomposição dominada para um cociclo linear multiplicativo $A_t(x)$ sobre E . Existe uma vizinhança V de Λ e uma métrica riemanniana $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ induzindo uma norma (norma adaptada) $|\cdot|$ em E_V tal que existe $\lambda > 0$ satisfazendo para todo $t > 0$ e $x \in \Lambda$*

$$|A_t(x)|_{F_-(x)} \cdot |(A_t(x)|_{F_+(x)})^{-1}| < e^{-\lambda t}.$$

Observação 4.2.9. *Sejam \mathcal{J}_x^1 e \mathcal{J}_x^2 formas quadráticas de mesmo índice que não mudam de sinal em $F_\pm(x)$. Pelo lema 2.2.1, $\pm\mathcal{J}_x^1$ e $\pm\mathcal{J}_x^2$ são produtos internos em $F_\pm(x)$ e definem duas normas em $F_\pm(x)$ que são equivalentes, isto é, existem constantes $C_\pm(x) \in \mathbb{R}$ tais que $C_\pm(x)^{-1}|\mathcal{J}_x^1(v)| \leq |\mathcal{J}_x^2(v)| \leq C_\pm(x)|\mathcal{J}_x^1(v)|$ com $v \in F_\pm(x)$. Agora, tomemos $C = \max\{C_-(x), C_+(x) : x \in \Lambda\}$ já que $x \mapsto C_\pm(x)$ são*

funções contínuas pois $x \mapsto \mathcal{J}_x^i$, $i = 1, 2$, também são. Chegamos assim em

$$C^{-1}|\mathcal{J}_x^1(v)| \leq |\mathcal{J}_x^2(v)| \leq C|\mathcal{J}_x^1(v)|, \quad v \in F_{\pm}.$$

Além disso, temos também que a norma riemanniana $\|\cdot\|$ de M e a norma adaptada $|\cdot|$ também são equivalentes: podemos assumir que $C^{-1}|\cdot| \leq \|\cdot\| \leq C|\cdot|$.

Podemos assumir, sem perda de generalidade, que V dado pelo Teorema 4.2.8 coincide com U . Agora, usando a métrica riemanniana garantida pelo teorema 4.2.8, o próximo teorema nos permite construir um campo de formas quadráticas quando se tem decomposição dominada em E_{Λ} .

Teorema 4.2.10. *Suponha que Λ tem uma decomposição dominada $E_{\Lambda} = F_{-} \oplus F_{+}$. Então existe um campo C^1 de formas quadráticas \mathcal{J} em Λ tal que $A_t(x)$ é estritamente \mathcal{J} -separado em Λ com respeito a X . Mais precisamente, existem constantes $\kappa, \omega > 0$ tais que*

$$|\mathcal{J}(A_t(x)v_{-})| \leq \kappa e^{-\omega t} \mathcal{J}(A_t(x)v_{+}), \quad v_{\pm} \in F_{\pm}(x), \quad \mathcal{J}(v_{\pm}) = \pm 1;$$

onde F_{\pm} são os subfibrados da decomposição dominada de E_{Λ} .

Demonstração. Primeiramente, escolhemos um campo de bases ortonormais (com respeito à métrica adaptada do teorema 4.2.8) $\{e_1(x), \dots, e_s(x)\}$ de $F_{-}(x)$ e $\{e_{s+1}(x), \dots, e_{s+c}(x)\}$ de $F_{+}(x)$ para $x \in \Lambda$, onde $s = \dim F_{-}$ e $c = \dim F_{+}$. Então $\{e_i(x)\}_{i=1}^{s+c}$ é uma base para E_x , $x \in \Lambda$. Agora, para cada $x \in \Lambda$, seja $v = \sum_{i=1}^{s+c} \alpha_i e_i(x) \in T_x M$ e considere a forma quadrática

$$\mathcal{J}_x(v) := |v^{+}|^2 - |v^{-}|^2 = \sum_{i=s+1}^{s+c} \alpha_i^2 - \sum_{j=1}^s \alpha_j^2, \quad (4.5)$$

onde $v^{\pm} \in F_{\pm}(x)$ são únicos tais que $v = v^{-} + v^{+}$ (já sabemos que $T_{\Lambda} M = F_{-} \oplus F_{+}$). Assim, temos um campo de formas quadráticas em Λ .

Observe que, já que $F_{-} \oplus F_{+}$ é $A_t(x)$ -invariante para $x \in \Lambda$, e o campo vetorial X e o fluxo X_t são C^1 , o campo de formas quadráticas construído acima é diferenciável ao longo da direção do fluxo, porque $F_{\pm}(X_t(x)) =$

$A_t(x) \cdot F_{\pm}$ é diferenciável em $t \in \mathbb{R}$ para cada $x \in \Lambda$. Da construção, vemos que F_- é um subespaço \mathcal{J} -negativo e F_+ é um subespaço \mathcal{J} -positivo, logo o índice de \mathcal{J} é igual a s e a forma definida por 4.5 é não-degenerada pois $\dim F_- + \dim F_+ = V$.

Além disso, temos \mathcal{J} -separação estrita sobre Λ . De fato, $v = v^- + v^+ \in C_+(x) \cup C_0(x)$ para $x \in \Lambda$ significa que $\mathcal{J}_x(v) \geq 0$, ou seja, $|v^+| \geq |v^-|$ e, pela invariância de F_{\pm} por $A_t(x)$, $A_t(x)v^{\pm} \in F_{\pm}(X_t(x))$ com $A_t(x)v = A_t(x)(v^- + v^+) = A_t(x)v^- + A_t(x)v^+$. Temos ainda, pelo teorema 4.2.8, que $\sqrt{\mathcal{J}(A_t(x)v^+)} = |A_t(x)v^+| > e^{\lambda t}|A_t(x)v^-| > \sqrt{|\mathcal{J}(A_t(x)v^-)|}$, e daí $A_t(x)v \in C_+(X_t(x))$, isto é, $A_t(x)$ é estritamente \mathcal{J} -separado.

Bem, vamos agora mostrar a desigualdade.

Observe que do teorema 4.2.8, para $v_- \in F_-$ e $v_+ \in F_+$ com $|v_-| = |v_+| = 1$, então $|A_t(x)v_-| < e^{-\lambda t}|A_t(x)v_+|$. Assim

$$\begin{aligned} |\mathcal{J}(A_t(x)v_-)| &\leq K\|A_t(x)v_-\|^2 \leq C^2|A_t(x)v_-|^2 \\ &\leq C^2Ke^{-2\lambda t}|A_t(x)v_+|^2 \leq C^4Ke^{-2\lambda t}\|A_t(x)v_-\|^2 \\ &\leq C^4K^2e^{-2\lambda t}\mathcal{J}(A_t(x)v_+), \end{aligned}$$

fazendo $\kappa = C^4K^2$ e $w = 2\lambda$, temos o resultado. □

A seguir mostraremos como a existência de um campo de formas quadráticas não-degeneradas nos permite concluir dominação.

Dado $x \in \Lambda$, fixemos $C_+ = C_+(x)$ e denotemos por $G_p(C_+)$ todos p -subespaços de C_+ , onde $p = n - q$. Esta variedade pode ser identificada com o conjunto de todas as matrizes $q \times p$ com entradas reais tais que $T^*T < I_p$, onde I_p é a matriz identidade e " $<$ " indica que para o produto interno canônico em \mathbb{R}^p temos $\langle T^*Tu, u \rangle < \langle u, u \rangle$, para todo $u \in \mathbb{R}^p$. Daremos a seguir um esboço de como é feita tal identificação.

Lema 4.2.11. $G_p(C_+)$ pode ser naturalmente identificado com

$$N = \{T \in \mathbb{M}(\mathbb{R}, q \times p) : T^*T < I_p\}$$

Demonstração. Seja E_p um p -subespaço em C_+ e E_q o q -subespaço em C_- . Podemos identificá-los com \mathbb{R}^p e \mathbb{R}^q , respectivamente. Uma vez que $E_x = E_p \oplus E_q$, pela observação 2.3.2, escrevemos $C_+ = \{0\} \cup \{(u, v) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q : \|u\| > \|v\|\}$. Agora, seja $E_p = \text{Ger}\{v_1, \dots, v_p\} \subset C_+$, onde $\{v_1, \dots, v_p\}$ é L.I em \mathbb{R}^{p+q} . Podemos escrever $v_i = (v_i^1, v_i^2)$, com $v_i^1 \in \mathbb{R}^p$, $v_i^2 \in \mathbb{R}^q$, $i = 1, \dots, p$ e, além disso, $\|v_i^1\| > \|v_i^2\|$.

Afirmamos que $\{v_1^1, v_2^1, \dots, v_p^1\}$ é L.I. em \mathbb{R}^p . De fato, se $\sum_{i=1}^p a_i v_i^1 = 0$, então $\sum_{i=1}^p a_i (v_i^1, v_i^2) = (0, \sum_{i=1}^p a_i v_i^2) \in C_+$ implica que $\sum_{i=1}^p a_i v_i^2 = 0$. Assim, $0 = \sum_{i=1}^p a_i (v_i^1, v_i^2) = \sum_{i=1}^p a_i v_i$, mas $\{v_1, \dots, v_p\}$ é L.I em \mathbb{R}^{p+q} , logo $a_i = 0$, para $i = 1, \dots, p$. Observe que se $v_i = (a, c)$ e $v_j = (a, b)$, com $i \neq j$, então $v_i - v_j = (0, c - b) \in E_p$, o que implica que, ou $v_i - v_j = 0$ ou $0 > \|v_i - v_j\|$, logo $v_i = v_j$.

Portanto, o conjunto $\{v_1^1, v_2^1, \dots, v_p^1\}$, que é L.I, define uma aplicação linear $L : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ tal que $L(v_i^1) = v_i^2$ cujo gráfico é E_p . Isto implica que $\|u\| > \|Lu\|$, para todo $u \in \mathbb{R}^p$. Se considerarmos $T_{q \times p}$ sendo a matriz de L na base canônica ($L(v) = Tv$), então, sabendo que $\|u\| > \|Tu\|$, temos que:

$$\|Tu\|^2 < \|u\|^2 \iff \langle Tu, Tu \rangle < \langle u, u \rangle \iff \langle T^*Tu, u \rangle < \langle u, u \rangle.$$

□

Esta identificação não depende do ponto $x \in \Lambda$, já que só usamos o fato de que $E_p \subset C_+(x)$ tem dimensão p , mas isto acontece para todo $x \in \Lambda$. Assim, podemos ver $G_p(C_+(x))$ e $G_p(C_+(y))$ como os mesmos espaços. Um operador \mathcal{J} -separado L envia naturalmente $G_p(C_+)$ em si mesmo. De fato, se $A_i(x)$ é \mathcal{J} -separado, então $A_i(x)C_+(x) \subset C_+(X_i(x))$, mas como $A_i(x)$ é isomorfismo linear, então leva base em base e assim $A_i(x)E_p$ é um p -subespaço em $C_+(X_i(x))$. Além disso, esta operação é uma contração em uma distância apropriada, como afirma o teorema seguinte.

Teorema 4.2.12. *Existe uma distância dist em $G_p(C_+)$ tal que $G_p(C_+)$ torna-se um espaço métrico completo e, se $L : V \rightarrow V$ é \mathcal{J} -separado e $T_1, T_2 \in G_p(C_+)$,*

então

$$\text{dist}(L(T_1), L(T_2)) \leq \frac{r_-}{r_+} \text{dist}(T_1, T_2),$$

onde r_{\pm} são dados pela proposição 2.4.3.

Para ver a demonstração deste teorema, confira [27, Teorema 1.6], onde se usa que $G_p(C_+)$ é um espaço métrico e sua métrica riemanniana natural para definir a distância dist .

Apresentaremos agora o teorema 4.2.14 envolvendo dominação e \mathcal{J} -separação estrita. Usaremos o lema a seguir que nos oferece um critério para decomposição dominada quando já se tem decomposição contínua. A demonstração pode ser encontrada em [21], p.23.

Lema 4.2.13. *Seja X_t um fluxo C^1 e Λ um conjunto compacto invariante para X_t admitindo uma decomposição contínua invariante $T_\Lambda M = F_- \oplus F_+$. Então esta decomposição é dominada se, e somente se, existe uma métrica riemanniana em Λ induzindo uma norma tal que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|A_t(x)|_{F_-(x)}\| \cdot \|A_{-t}(X_t(x))|_{F_+(X_t(x))}\| = 0,$$

para todo $x \in \Lambda$.

Teorema 4.2.14. *O cociclo $A_t(x)$ é estritamente \mathcal{J} -separado se, e somente se, E_U admite uma decomposição dominada $F_- \oplus F_+$ com respeito a $A_t(x)$ no subconjunto maximal invariante Λ de U , com dimensões constantes sendo $\dim F_- = q$ e $\dim F_+ = p$, $\dim M = p + q$.*

Demonstração. Vamos iniciar provando a existência da decomposição dominada quando se tem \mathcal{J} -separação estrita do cociclo.

Direções invariantes

Pelo teorema 4.2.12, temos que $(G_p(C_+(x)); \text{dist})$ é um espaço métrico e $A_t(x)$ é uma contração em $G_p(C_+)$. Considere agora, para cada $x \in \Lambda$ e $t \in \mathbb{R}$ fixado, a sequência $(S_n(x)) = (A_{nt}(X_{-nt}) \cdot C_+(X_{-nt}))_{n \in \mathbb{N}}$. Esta é uma sequência encaixada de cones em $C_+(x)$ com diâmetro de $S_n(x)$ convergindo a zero em relação à distância dist : $\sup\{\text{dist}(U_p, V_p) : U_p, V_p \subset C_n(x)\} \rightarrow 0$,

quando $n \rightarrow \infty$. Portanto, $F_+(x) = \bigcap_n S_n(x)$ está bem definido. De forma análoga, pela observação 4.2.5, $A_{-t}(x)$ é $-\mathcal{J}$ -separado e assim, pelo mesmo argumento, existe $F_-(x) \in G_q(C_-(x))$ tal que $A_{-t}(x)F_-(x) = F_-(X_{-t}(x))$, para todo $x \in \Lambda$.

Mostremos que $F_{\pm}(x)$ não depende da escolha de t . De fato, se $s < t$, então $A_{ns}(X_{-ns})C_+(X_{-nt}) \supset A_{nt}(X_{-nt})C_+(X_{-nt})$ e se $ms > nt$ temos que $A_{ms}(X_{-ms})C_+(X_{-mt}) \subset A_{nt}(X_{-nt})C_+(X_{-nt})$. Logo, $F_+(x)$ não depende de s, t . Analogamente, mostramos também que $F_-(x)$ não depende da escolha de t . Observe que, para $X_t(x) \in \Lambda$, temos que $A_{-t}(X_t(x))F_-(X_t(x)) = F_-(X_{-t}(X_t(x))) = F_-(x)$ e observando que

$$Id = A_{t-t}(X_t(x)) = A_t(X_{-t}(X_t(x))) \circ A_{-t}(X_t(x)) = A_t(x) \circ A_{-t}(X_t(x))A_{-t}(X_t(x)),$$

então $A_{-t}(X_t(x))F_-(X_t(x)) = F_-(x)$ é equivalente a $A_t(x)F_-(x) = F_-(X_t(x))$. Assim, $F_-(x)$ e $F_+(x)$ são invariantes pelo cociclo. Uma vez que $\dim(A_{nt}(X_{-nt}) \cdot C_+(X_{-nt})) = p$, para todo $x \in \Lambda$, o que implica que $\dim F_+(x) = p$ e também temos que $\dim F_-(x) = q$, com $\dim F_+(x) \cap F_-(x) = \{0\}$. Portanto, $T_x M = F_- \oplus F_+$.

Vamos mostrar dominação para o cociclo.

Dominação

Vamos fixar $t > 0$ no que segue. Agora, para $v \in E_x$, $v = v_- + v_+$, $v_{\pm} \in F_{\pm}(x)$, consideraremos a norma $|\cdot|$ induzida em E_x para cada $x \in U$ por

$$\|v\| := \sqrt{\mathcal{J}(v_-)^2 + \mathcal{J}(v_+)^2}$$

Pela contração dos cones C_+ e C_- por $A_t(x)$ e $A_{-t}(x)$, respectivamente, já temos que $A_t(x)F_{\pm}(x) = F_{\pm}(X_t(x))$, para $x \in \Lambda$. Fixados $x \in \Lambda$ e $t > 0$, considere $F : E_x \times E_x \rightarrow \mathbb{R}$ com $F(u, v) = \langle JA_t(x)u, A_t(x)v \rangle$. Observe que se $v_0 \in C_0$, então $F(v_0, v_0) = \langle JA_t(x)v_0, A_t(x)v_0 \rangle = \mathcal{J}(A_t(x)v_0) > 0$ pela \mathcal{J} -separação estrita de $A_t(x)$. Assim, pelo lema 2.4.1,

$$r_+ = \inf_{v \in C_+} \frac{F(v, v)}{\langle Jv, v \rangle} \geq \sup_{u \in C_-} \frac{F(u, u)}{\langle Ju, u \rangle} = r_-, \quad (4.6)$$

mas se $v \in F_+(x)$, então $A_t(x)v \in C_+(X_t(x))$ e assim $|A_t(x)v| = \sqrt{\mathcal{J}(A_t(x)v)^2} = \mathcal{J}(A_t(x)v) = F(v, v)$ e se $u \in F_-(x)$, então $A_t(x)u \in F_-(X_t(x))$ e assim $|A_t(x)u| = \sqrt{\mathcal{J}(A_t(x)u)^2} = |\mathcal{J}(A_t(x)u)|$ e daí $-|A_t(x)u| = \mathcal{J}(A_t(x)u) = F(u, u)$. Como $|u| = -\mathcal{J}(u)$ e $|v| = \mathcal{J}(v)$, a expressão (4.6) nos dá que

$$\frac{|A_t(x)v|}{|v|} \geq r_+ > r_- \geq -\frac{|A_t(x)u|}{|u|}$$

e assim $|A_t(x)v| \geq |v|$, $v \in F_+$ e $|A_t(x)u| \leq |u|$, $u \in F_-$. Pela proposição 2.4.3, $0 < r_- < r_+$, e assim $\frac{|A_t(x)u|}{|A_t(x)v|} \leq \frac{r_-|u|}{r_+|v|} < \frac{|u|}{|v|}$.

Denotaremos a função que a cada $x \in \overline{X_t(U)}$ associa o número $\frac{r_-^t(x)}{r_+^t(x)}$ por r . A função $r : \overline{X_t(U)} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e então r atinge o supremo no compacto $\overline{X_t(U)}$. Assim, se $|u| = |v| = 1$, então

$$\frac{|A_t(x)u|}{|A_t(x)v|} \leq \frac{r_-^t(x)}{r_+^t(x)} \leq s_t := \sup_{z \in \overline{X_t(U)}} \frac{r_-^t(z)}{r_+^t(z)} = a < 1$$

Observe que

$$|A_{2t}(x)u| = |A_t(X_t(x))(A_t(x)u)| \leq r_-^t(X_t(x))|A_t(x)u| \leq r_-^t(X_t(x)) \cdot r_-^t(x)|u|$$

e

$$|A_{2t}(x)v| = |A_t(X_t(x))(A_t(x)v)| \geq r_+^t(X_t(x))|A_t(x)v| \geq r_+^t(X_t(x)) \cdot r_+^t(x)|v|.$$

Desta última desigualdade, fazendo $w = A_{2t}(x)v$, temos que $|A_{-2t}(x)w| \leq r_+^t(X_t(x)) \cdot r_+^t(x)|w|$. Repetindo esse processo para $A_{nt}(x)$, com $n \in \mathbb{N}$, chegamos em $|A_{nt}(x)u| \cdot |A_{-nt}(x)w| \leq a^n|u| \cdot |w|$. Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |A_{nt}(x)|_{F_-(x)} \cdot |A_{-nt}(x)|_{F_+(X_{nt}(x))} = 0$$

para cada $t > 0$ fixado e portanto

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |A_t(x)|_{F_-(x)} \cdot |A_{-t}(x)|_{F_+(X_t(x))} = 0. \quad (4.7)$$

Supondo que a decomposição varie continuamente (o que mostraremos

em seguida), o lema 4.2.13 nos garante que a decomposição $F_-(x) \oplus F_+(x)$ é dominada.

Continuidade da decomposição

Precisamos mostrar a continuidade da decomposição. Mostraremos que, quando $n \rightarrow \infty$, se $x_n \rightarrow x$, então $F_{\pm}(x_n) \rightarrow F_{\pm}(x)$. A convergência de $F_{\pm}(x_n)$ a $F_{\pm}(x)$ significa que para todo $v \in F_+$ e $u \in F_-$, existem sequências $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tais que $v_n \rightarrow v$ e $u_n \rightarrow u$, com $v_n \in F_+(x_n)$ e $u_n \in F_-(x_n)$.

Sejam $e_+^n = \{e_1^n, \dots, e_p^n\}$ e $f_-^n = \{f_1^n, \dots, f_q^n\}$ bases ortonormais de $F_+(x_n)$ e $F_-(x_n)$ respectivamente. Lembre que para cada $x \in \Lambda$, $F_-(x)$ e $F_+(x)$ têm dimensões constantes. Como na demonstração do teorema 1.2.2, obtemos subsequências $(e_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ e $(f_{n_l})_{l \in \mathbb{N}}$ e então subespaços $E_+ = \text{ger}\{e_1, \dots, e_p\}$ e $E_- = \text{ger}\{f_1, \dots, f_q\}$. Afirmamos que $E_+ = F_+(x)$ e $E_- = F_-(x)$.

Seja $v \in E_+$ e $u \in E_-$, onde $v = \sum_{i=1}^p \alpha_i e_i$ e $u = \sum_{i=1}^q \beta_i f_i$. Observe que definindo $v_{n_k} := \sum_{i=1}^p \alpha_i e_i^{n_k} \in F_+(x_{n_k})$ e $u_{n_l} := \sum_{i=1}^q \beta_i f_i^{n_l} \in F_-(x_{n_l})$, garantimos que $v_{n_k} \rightarrow v$ e $u_{n_l} \rightarrow u$. Por (4.7), temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|A_t(x_{n_l})u_{n_l}|}{|A_t(x_{n_k})v_{n_k}|} = 0,$$

e quando n_k, n_l crescem teremos também

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|A_t(x)u|}{|A_t(x)v|} = 0, \quad (4.8)$$

para todo $v \in E_+$ e $u \in E_-$. Em particular, se w fosse um vetor unitário em $E_+ \cap E_-$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} |A_t(x)w| \cdot |A_t(x)w|^{-1} = 0$, um absurdo. Portanto, $E_+ \cap E_- = \{0\}$ e assim $E_x = E_+ \oplus E_-$, já que $\dim E_+ + \dim E_- = p + q = n$. Então temos que $F_+(x) \oplus F_-(x) = E_x = E_+ \oplus E_-$ e falta mostrar que $E_+ = F_+(x)$ e $E_- = F_-(x)$. Observe que (4.8) é válida para todo $u \in E_-$ e $v \in E_+$, assim como para todo $u \in F_-(x)$ e $v \in F_+(x)$. Suponha que E_- não esteja contido em $F_-(x)$. Dessa forma, existe $v \in E_-$ tal que $v \notin F_-(x)$, com $v = v_{F_+} + v_{F_-}$ e $v_{F_+} \neq 0$. O limite em (4.8) nos dá que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|A_t(x)v|}{|A_t(x)v_{F_+}|} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{|A_t(x)v_{F_+}|}{|A_t(x)v_{F_+}|} + \frac{|A_t(x)v_{F_-}|}{|A_t(x)v_{F_+}|} \right) = 1$$

e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|A_t(x)v|}{|A_t(x)v_{F_+}|} \geq \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{|A_t(x)v_{F_+}|}{|A_t(x)v_{F_+}|} - \frac{|A_t(x)v_{F_-}|}{|A_t(x)v_{F_+}|} \right) = 1.$$

Concluimos que $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|A_t(x)v|}{|A_t(x)v_{F_+}|} = 1$ o que implica que v e v_{F_+} crescem à mesma taxa pelo cociclo. Por outro lado, $v_{F_+} = v_{E_-} + v_{E_+}$ e se v_{E_+} fosse não nulo, então, também chegaríamos em $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|A_t(x)v|}{|A_t(x)v_{E_+}|} = 1$, uma contradição já que $v \in E_-$ e $v_{E_+} \in E_+$. Segue que $v_{F_+} = v_{E_-} \in F_+ \cap F_-$.

Mas também existe $w \in F_-(x)$ com $w \notin E_-$ e $w = w_{E_-} + w_{E_+}$ com w_{E_+} não nulo.

Fazendo

$$\frac{|A_t(x)v_{F_+}|}{|A_t(x)w|} \leq \frac{|A_t(x)v_{F_+}|}{|A_t(x)w_{E_+} - |A_t(x)w_{E_-}|} = \frac{|A_t(x)v_{F_+}|}{|A_t(x)w_{E_+}|} \cdot \left(1 - \frac{|A_t(x)w_{E_-}|}{|A_t(x)w_{E_+}|}\right)^{-1}$$

chegamos em

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|A_t(x)v_{F_+}|}{|A_t(x)w|} = 0 \text{ contradizendo (4.8).}$$

Logo, $E_- = F_-(x)$ e, analogamente, $E_+ = F_+(x)$. Portanto, a decomposição do fibrado E_U varia continuamente.

Concluimos que E_U admite decomposição dominada $F_- \oplus F_+$ com respeito a $A_t(x)$ no subconjunto Λ e $\dim F_- = q$, $\dim F_+ = p$ e $\dim M = p + q$.

Agora, supondo que exista dominação, usamos o teorema 4.2.10 para garantir a existência de um campo \mathcal{J} de formas quadráticas tal que o cociclo $A_t(x)$ é estritamente \mathcal{J} -separado, completando a prova do teorema. \square

Por fim, podemos agora demonstrar a recíproca do item 3 do teorema 4.2.1.

Proposição 4.2.15. *Se o cociclo $A_t(x)$ é estritamente \mathcal{J} -separado sobre um subconjunto Λ compacto X_t -invariante, então existe um campo \mathcal{J}_0 de formas quadráticas compatível e uma função $\delta : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tilde{\mathcal{J}}_{0,x} > \delta(x)\mathcal{J}_0$ para todo $x \in \Lambda$.*

Demonstração. O teorema 4.2.14 já nos garante que um cociclo estritamente \mathcal{J} -separado admite uma decomposição dominada $E = F_- \oplus F_+$. Então,

construimos um campo de formas quadráticas \mathcal{J}_0 de acordo com os argumentos anteriores da seguinte forma: $\mathcal{J}_0(u) = |u_+|^2 - |u_-|^2$, para cada $x \in \Lambda$, onde $u = u^+ + u^-$. Agora, para todo $t > 0$, vamos escrever a forma $\mathcal{J}_0(A_t(x)v) = |A_t(x)v_+|^2 - |A_t(x)v_-|^2$. Sejam $x \in \Lambda$ e $v_0 \in C_0(x)$, $v_0 = v^- + v^+$ com $v^\pm \in F_\pm(x)$ e $|v^\pm| = 1$. Usando o 4.2.8,

$$\mathcal{J}_0(A_t(x)v_0) = |A_t(x)v^-|^2 \left(\frac{|A_t(x)v^+|^2}{|A_t(x)v^-|^2} - 1 \right) \geq |A_t(x)v^-|^2 \cdot (e^{2\lambda t} - 1). \quad (4.9)$$

Usando (4.9) e sabendo que $\mathcal{J}_0(A_t(x)v_0)$ é diferenciável em t , conseguimos que

$$\begin{aligned} \partial_t(\mathcal{J}_0(A_t(x)v_0))|_{t=0} &= \lim_{t \searrow 0} \frac{\mathcal{J}_0(A_t(x)v_0) - \mathcal{J}_0(A_0(x)v_0)}{t} = \lim_{t \searrow 0} \frac{\mathcal{J}_0(A_t(x)v_0)}{t} \\ &\geq \lim_{t \searrow 0} \frac{|A_t(x)v^-|^2 \cdot (e^{2\lambda t} - 1)}{t} = \partial_t(|A_t(x)v^-|^2 \cdot (e^{2\lambda t} - 1))|_{t=0} \\ &= (2\lambda e^{2\lambda t}|A_t(x)v^-|^2 + (e^{2\lambda t} - 1)\partial_t|A_t(x)v^-|^2)|_{t=0} = 2\lambda \geq 0. \end{aligned}$$

Argumentando agora como fizemos na demonstração do item 2 do teorema 4.2.1, chegamos em

$$\tilde{\mathcal{J}}_x(v_0) = \partial_t \mathcal{J}_0(A_t(x)v_0)|_{t=0} \geq 2\lambda > 0, \quad x \in \Lambda,$$

para $0 \neq v_0 \in C_0(x)$, implicando, pelo lema 2.4.1, que $\tilde{\mathcal{J}}_x > \delta(x)\mathcal{J}_0$ para alguma função real $\delta(x)$.

Além disso, pela observação 4.2.9, as formas \mathcal{J}_0 e \mathcal{J} são compatíveis pois não mudam de sinal em F_\pm . \square

4.3 Hiperbolicidade parcial: provas da proposição 1.2.5 e do teorema 1.2.3

Apresentaremos as demonstrações dos resultados principais deste trabalho. Com eles, podemos deduzir hiperbolicidade parcial através do

campo de vetores X , sem exibir o fluxo associado como requer a definição.

A partir de agora, vamos considerar o cociclo derivada DX_t do fluxo diferenciável X_t no lugar de $A_t(x)$ e usar os resultados obtidos anteriormente. Neste contexto, temos que o gerador infinitesimal é dado por $D(x) = DX(x)$, a derivada espacial do campo de vetores X .

A \mathcal{J} -separação estrita em U para X_t implica que qualquer subfibrado invariante de T_xM ao longo da órbita do fluxo X_t tem que estar contido em $F_{\pm}(x)$. Em particular, o espaço característico correspondente à direção do fluxo está contido em $F_+(x)$. Mostramos isso no próximo lema. Para prová-lo usamos a definição de ângulo entre subespaços, inspirada na noção de ângulo entre subespaços unidimensionais. Essa definição está relacionada com a projeção paralela de subespaços. Não daremos detalhes dessa definição, mas o leitor interessado pode conferir [23]. Vejamos o seguinte lema:

Lema 4.3.1. *Seja Λ um conjunto compacto invariante para o fluxo X_t de um campo vetorial X em M .*

1. *Dado uma decomposição contínua $T_{\Lambda}M = E \oplus F$ tal que E é uniformemente contraído, então $X(x) \in F_x$ para todo ponto regular $x \in \Lambda$.*
2. *Assumindo que Λ é não-trivial e tem uma decomposição dominada $T_{\Lambda}M = E \oplus F$ tal que $X(x) \in F_x$ para todo $x \in \Lambda$, então E é um subfibrado uniformemente contraído.*

Demonstração. Denote $\pi(E_x) : T_xM \rightarrow E_x$ a projeção de E_x paralelo a F_x em T_xM e $\pi(F_x) : T_xM \rightarrow F_x$ a projeção de F_x paralelo a E_x em T_xM . Note que para $x \in \Lambda$

$$X(x) = \pi(E_x) \cdot X(x) + \pi(F_x) \cdot X(x)$$

e para $t \in \mathbb{R}$, temos pela linearidade de DX_t e a invariância da decomposição $T_{\Lambda}M = E \oplus F$ por DX_t que

$$\begin{aligned} DX_t \cdot X(x) &= DX_t \cdot (\pi(E_x) \cdot X(x) + \pi(F_x) \cdot X(x)) \\ &= DX_t \cdot (\pi(E_x) \cdot X(x)) + DX_t(\pi(F_x) \cdot X(x)) \\ &= \pi(E_{X_t(x)}) \cdot DX_t \cdot X(x) + \pi(F_{X_t(x)}) \cdot DX_t \cdot X(x) \end{aligned}$$

Considere agora z um ponto limite da órbita negativa de x . Isto é, estamos supondo que há uma sequência estritamente crescente $t_n \rightarrow +\infty$ tal que $x_n = X_{-t_n}(x)$ satisfaz, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} X_{-t_n}(x) = z$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} DX_{-t_n} \cdot X(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} X(x_n) = X(z)$ para algum $z \in \Lambda$. Por outro lado temos que

$$\begin{aligned} \|\pi(E_x) \cdot X(x)\| &= \|DX_{t_n} \underbrace{(DX_{-t_n} \cdot \pi(E_x) \cdot X(x))}_{\in E_{X_{t_n}(x)}}\| \\ &\leq ce^{-\lambda t_n} \|DX_{-t_n} \cdot \pi(E_x) \cdot X(x)\| \end{aligned}$$

Daí temos que $\|DX_{-t_n} \cdot (\pi(E_x) \cdot X(x))\| \geq c^{-1}e^{\lambda t_n} \|\pi(E_x) \cdot X(x)\|$.

Supondo que $\pi(E_x) \cdot X(x) \in E_x$ não é o vetor nulo e usando a contração uniforme em E_x , obtemos

$$\|DX_{-t_n} \cdot (\pi(E_x) \cdot X(x))\| \geq c^{-1}e^{\lambda t_n} \|\pi(E_x) \cdot X(x)\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty. \quad (4.10)$$

Só que $\|\pi(E_{x_n})\| \geq \|\pi(E_{x_n}) \cdot X(x_n)\| = \|DX_{-t_n} \cdot (\pi(E_x) \cdot X(x))\|$, o que implica que o ângulo entre E_{x_n} e F_{x_n} tende a zero quando $n \rightarrow +\infty$.

De fato, usando a metrica riemanniana em T_yM , o ângulo $\alpha(y) = \angle(E_y, F_y)$ está relacionado com a norma de $\pi(E_y)$ como se segue:

$$\|\pi(E_y)\| = \frac{1}{\sin(\alpha(y))} \rightarrow +\infty \implies \sin(\alpha(y)) \rightarrow 0$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|DX_{-t_n} \cdot (\pi(E_x) \cdot X(x))\| &= \|\pi(E_{x_n}) \cdot DX_{-t_n} \cdot X(x)\| \\ &\leq \|\pi(E_{x_n})\| \cdot \|DX_{-t_n} \cdot X(x)\| \\ &= \frac{1}{\sin(\alpha(x_n))} \cdot \|X(x_n)\| \end{aligned}$$

para todo $n \geq 1$. Assim se a sequência (4.10) é ilimitada concluimos que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(\alpha(X_{-t_n}(x))) = 0$. No entanto, já que a decomposição $E \oplus F$ é contínua no compacto Λ , o ângulo $\alpha(y)$ é uma função contínua e positiva de $y \in \Lambda$ e deve admitir um mínimo positivo em Λ , mas $\sin \alpha(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(\alpha(X_{-t_n}(x))) = 0$, implica que $\alpha(x) = 0$.

Esta contradição mostra que $\pi(E_x) \cdot X(x)$ é o vetor nulo e assim $X(x) \in F_x$, $\forall x \in \Lambda$.

Provemos o item 2. Fixe $x \in \Lambda$ com $X(x) \neq 0$, tome $v \in E_x$ e como $X(x) \in F_x$, usamos a dominação e obtemos, para cada $t > 0$:

$$Ke^{-\lambda t} \geq \frac{\|DX_t(x)v\|}{\|DX_t(x)(X(x))\|} \geq \frac{\|DX_t(x)v\|}{\|X(X_t(x))\|} \geq C^{-1}\|DX_t(x)v\|,$$

onde $0 < C = \sup\{\|X(y)\| : y \in \Lambda\} < \infty$ pela compacidade de Λ e continuidade de X .

Suponha agora $\sigma \in \Lambda$ com $X(\sigma) = 0$. Escolhemos $T > 0$ tal que $CKe^{-\lambda T} < \frac{1}{2}$ e, já que Λ é não-trivial, podemos encontrar uma sequência $x_n \rightarrow \sigma$ de pontos regulares de Λ . Temos que $\|DX_T|E_{x_n}\| \leq CKe^{-\lambda T} < \frac{1}{2}$. Pela continuidade da decomposição e do cociclo derivada, $E_{x_n} \rightarrow E_\sigma$ e $\|DX_T|E_\sigma\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|DX_T|E_{x_n}\| \leq \frac{1}{2}$. Portanto, quando $t \rightarrow \infty$, vemos que E_σ também é um subespaço uniformemente contraído. \square

A seguir, demonstraremos a proposição 1.2.5. Através dela podemos garantir \mathcal{J} -separação para o fluxo X_t , usando o campo. Recordamos o enunciado antes da prova.

Proposição 4.3.2. [2, Proposição 1.3] *Um campo de vetores \mathcal{J} -não-negativo X em U é (estritamente) \mathcal{J} -separado se, e somente se, existe um campo compatível de formas \mathcal{J}_0 e existe uma função $\delta : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que o operador $\tilde{J}_{0,x} := J_0 \cdot DX(x) + DX(x)^* \cdot J_0$ satisfaz*

$$\tilde{J}_{0,x} - \delta(x)J_0 \text{ é positivo (definido) semidefinido, } x \in U,$$

onde $DX(x)^*$ é a adjunta $DX(x)$ com respeito ao produto interno adaptado.

Demonstração. Considere um campo de vetores \mathcal{J} -não-negativo X em U que é estritamente \mathcal{J} -separado. Usamos agora a proposição 4.2.15 para garantir a existência de um campo de formas compatíveis \mathcal{J}_0 e uma função $\delta : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tilde{\mathcal{J}}_{0,x} > \delta(x)\mathcal{J}_0$, isto é, $\tilde{J}_{0,x} - \delta(x)J_0$ é positivo definido, $x \in \Lambda$.

Vamos provar agora a recíproca da proposição. Se $\tilde{J}_{0,x} - \delta(x)J_0$ é positivo (definido) semidefinido, pelo teorema 4.2.1, o campo $DX_t(x)$ é (estritamente) \mathcal{J}_0 -separado, isto é, X é (estritamente) \mathcal{J}_0 -separado. Agora, pela compatibilidade de \mathcal{J} e \mathcal{J}_0 , $C^{-1}\mathcal{J}_0(v) \leq \mathcal{J}(v) \leq C\mathcal{J}_0(v)$. Assim, se $v \in C_0(x) \cup C_+(x)$, então $\mathcal{J}_0(DX_t(x)) > 0$ e então $\mathcal{J}(DX_t(x)v) > 0$. Portanto, X é (estritamente) \mathcal{J} -separado. \square

A seguir, a demonstração do teorema 1.2.3.

Nós mostramos que \mathcal{J} -separação estrita de um fluxo \mathcal{J} -não-negativo X_t numa região armadilha U implica a existência de uma decomposição dominada e que o fibrado dominante (aquele onde a contração é mais forte) é necessariamente uniformemente contrator; ou seja, temos de fato decomposição parcialmente hiperbólica.

Uma vez que a direção do fluxo $E_x^X := \mathbb{R} \cdot X(x) = \{s \cdot X(x) : s \in \mathbb{R}\}$ é DX_t -invariante para todo $t \in \mathbb{R}$, se U é uma região armadilha onde X_t é \mathcal{J} -separado e $\mathcal{J}(X(x)) \geq 0$ para algum $x \in U$, então $\mathcal{J}(DX_t(X(x))) \geq 0$ para todo $t > 0$ e esta função é limitada.

Teorema 4.3.3. [2, Teorema A] *Um conjunto que atrai não-trivial Λ de uma região armadilha U é parcialmente hiperbólico para o fluxo X_t se, e somente se, existe um campo \mathcal{J} de formas quadráticas C^1 não-degeneradas com índice constante, igual a dimensão do subespaço estável de Λ , tal que X_t é não-negativo estritamente \mathcal{J} -separado em U .*

Demonstração. Suponha que exista um campo C^1 de formas quadráticas \mathcal{J} não-degeneradas com índice constante, tal que X_t é não-negativo estritamente \mathcal{J} -separado em U . Pelo teorema 4.2.14, Λ admite decomposição dominada $F_+ \oplus F_-$ com respeito a $DX_t(x)$. Como X_t é não-negativo, $\mathcal{J}(X(x)) \geq 0$ e então $X(x) \in F_+$. Pelo lema 4.3.1, F_- é uniformemente contraído e o índice de \mathcal{J} é igual a dimensão de F_- , o subespaço estável de Λ .

Provando agora a recíproca. Por hipótese, Λ admite decomposição parcialmente hiperbólica $E_\lambda = F_- \oplus F_+$ com um subfibrado uniformemente contraído, suponhamos que seja F_- . Pelo teorema 4.2.10, como Λ admite decomposição hiperbólica, então existe um campo C^1 de formas quadráticas \mathcal{J} tal que $DX_t(x)$ é estritamente \mathcal{J} -separado em U . Na construção deste

campo, colocamos o subfibrado uniformemente contraído F_- para ser o subespaço \mathcal{J} -negativo. Pelo lema 4.3.1, $X(x) \in F_+$, isto é, X_t é não-negativo. Além disso, por construção de \mathcal{J} , a dimensão de $F_-(x)$ é o índice de \mathcal{J}_x .

Portanto, a prova do teorema 1.2.3 está completa. \square

4.4 O atrator de Lorenz geométrico

Exemplo 4.4.1. *O atrator Lorenz de geométrico*

O Teorema 1.2.3 e a Proposição 1.2.5 garantem que o atrator de Lorenz geométrico (ver Figura 4.2), que é parcialmente hiperbólico, admite um campo \mathcal{J} de formas quadráticas de índice 1 para qual o fluxo é estritamente \mathcal{J} separado. Reciprocamente, podemos deduzir que este conjunto é parcialmente hiperbólico, construindo um campo diferenciável de formas quadráticas de índice constante tais que o campo X seja estritamente \mathcal{J} -separado, como mostramos a seguir.

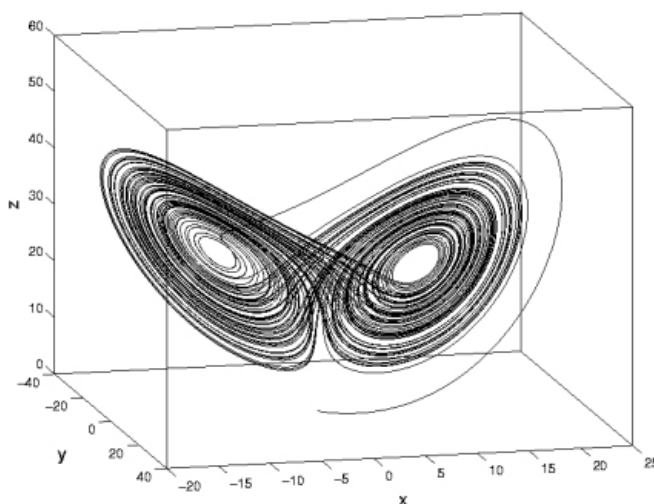


Figura 4.1: O atrator de Lorenz

Mostraremos a seguir que o atrator de Lorenz geométrico é parcialmente hiperbólico. O atrator de Lorenz é onde se acumulam as órbitas do fluxo $X_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ associado as equações de Lorenz:

$$x' = a(y - x), \quad y' = rx - y - xz, \quad z' = xy - bz,$$

onde $a = 10$, $r = 28$ e $b = \frac{8}{3}$, partindo da maioria dos pontos do espaço. Na figura 4.1, vemos o comportamento da órbita de um ponto deste sistema se acumulando no atrator de Lorenz.

O atrator apresentado na figura acima pode ser representado geometricamente por um modelo conhecido como o *atrator de Lorenz geométrico* descrito na figura abaixo. Sugerimos que o leitor não familiarizado com tal modelo veja sua construção detalhada em [3]. Mostraremos que o atrator de Lorenz geométrico é parcialmente hiperbólico usando o teorema 1.2.3 juntamente com a proposição 1.2.5.

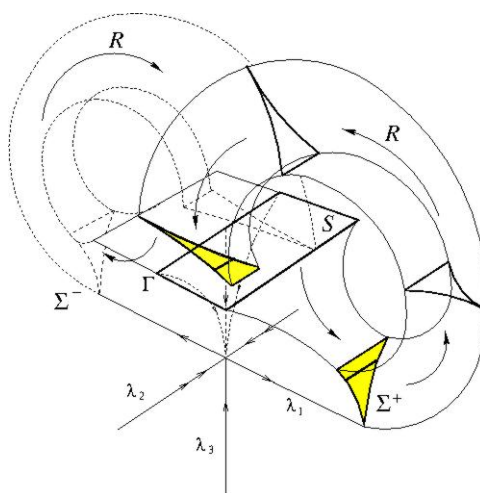


Figura 4.2: O atrator de Lorenz geométrico

Observando a figura 4.2, vemos que o atrator de Lorenz geométrico é constituído por duas regiões que denominaremos de "lóbulos" e uma região contida no cubo unitário.

Analisaremos a hiperbolicidade parcial do atrator de Lorenz geométrico, dividindo-o em três partes.

Parte 1

Temos que $\sigma = (0, 0, 0)$ é uma singularidade hiperbólica pois os autovalores de $DX(\sigma)$ são não-nulos dados por $\lambda_1 = -\frac{11}{2} + \frac{\sqrt{1201}}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{11}{2} - \frac{\sqrt{1201}}{2}$ e

$\lambda_3 = -\frac{8}{3}$. Assim, em uma vizinhança V da origem, o teorema de Hartman-Grobman para fluxos a seguir nos garante que as equações de Lorenz são equivalentes a um sistema linear por uma conjugação.

Teorema 4.4.2. *Seja $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo C^r e $\sigma = 0$ uma singularidade hiperbólica de X . Seja $L = DX(\sigma)$. Então X é localmente equivalente a L em 0 .*

No modelo geométrico do atrator de Lorenz, assumimos que $X(x) = D \cdot x$, onde $D = DX(\sigma)$ e então $DX(x) = D$, para todo $x \in V$, e que V se estende até o cubo unitário $[-1, 1]^2 \times [0, 1]$. Os autovalores de $DX(\sigma)$ que são dados por $\lambda_1 \approx 11,83$, $\lambda_2 \approx -22,83$ e $\lambda_3 \approx -2,67$ satisfazem $\lambda_2 < \lambda_3 < 0 < \lambda_1$. Como no ítem 1 do exemplo 1.2.6, consideramos $\mathcal{J}(x, y, z) = -x^2 + y^2 + z^2$ e mostramos que temos \mathcal{J} -separação estrita, pela proposição 1.2.5, já que podemos escolher δ tal que $2\lambda_2 < \delta < 2\lambda_3 < 0$, isto é, δ negativa e limitada por constante menor que zero. Assim, pelo teorema 1.2.3 temos hiperbolicidade parcial com o eixo y contraído uniformemente, já que $\dim E$ é igual ao índice de \mathcal{J} e este é o subespaço \mathcal{J} -negativo, que domina pelo plano xz , o subespaço \mathcal{J} -positivo.

Parte 2

Vamos agora mostrar hiperbolicidade parcial nos lóbulos, onde o fluxo é uma combinação de uma rotação no plano xz , uma dilatação e uma translação na direção do eixo y (ver seção 3.3 em [3]).

No interior dos lóbulos, podemos escrever o sistema como $X'_i = A \cdot (X_i - C_i) + P_i$, onde C_i é o centro da rotação, P_i é um vetor representando uma translação e

$$A_i = \begin{pmatrix} \tau\lambda_1 & 0 & -(-1)^i \\ 0 & \zeta\lambda_2 & 0 \\ (-1)^i & 0 & \tau\lambda_1 \end{pmatrix} \text{ com } 0 < \tau, \zeta \ll 1, \quad i = 1, 2.$$

Aqui $i = 1$ corresponde ao lóbulo começando com $x > 1$ e $i = 2$ para o outro lóbulo. Observamos que, fazendo $Y_i = X_i - C_i + A_i^{-1}P_i$ com $Y'_i = X'_i$, podemos escrever a equação do campo X_i acima como $Y'_i = A_i \cdot Y_i$. Usando

a mesma forma quadrática \mathcal{J} , temos

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{J}}_i &= J \cdot A_i + A_i^* \cdot J \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tau\lambda_1 & 0 & -(-1)^i \\ 0 & \zeta\lambda_2 & 0 \\ (-1)^i & 0 & \tau\lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau\lambda_1 & 0 & (-1)^i \\ 0 & \zeta\lambda_2 & 0 \\ -(-1)^i & 0 & \tau\lambda_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\tau\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & -2\zeta\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\tau\lambda_1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Assim $\tilde{\mathcal{J}}_i$ é positiva definida e

$$\tilde{\mathcal{J}}_i - \delta \cdot J = \text{diag}\{2\tau\lambda_1 - \delta, -2\zeta\lambda_2 + \delta, 2\zeta\lambda_1 - \delta\}$$

é positivo se, e somente se, $2\lambda_2 < \delta < 2\lambda_1$.

Parte 3

Resta-nos agora verificar hiperbolicidade parcial na região de transição entre a região linear e os lóbulos.

Podemos encontrar um caminho diferenciável \tilde{A} indo de D na região linear V a A_i nos lóbulos através de matrizes, assegurando que $\tilde{\mathcal{J}}$ permanecerá diagonal. Vejamos:

Considere o segmento de reta em $\mathbb{M}(\mathbb{R}, 3)$ que liga D a A_i , isto é, $[A_i, D] = \{(1 - \mu)A_i + \mu D : 0 \leq \mu \leq 1\}$. Para cada μ , o campo Z_i na região de transição será dado pela combinação linear $\mu X + (1 - \mu)X_i$ dos campos associados a região linear e aos lóbulos. Temos que

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{J}} &= J \cdot ((1 - \mu)A_i + \mu D) + ((1 - \mu)A_i + \mu D)^* \cdot J \\ &= (1 - \mu) \cdot (J \cdot A_i + A_i^* \cdot J) + \mu \cdot (J \cdot D + D^* \cdot J) \\ &= \text{diag}\{2\lambda_1(\mu + (1 - \mu)\tau), -2\lambda_2(\mu + (1 - \mu)\tau), 2(\mu\lambda_3 + (1 - \mu)\tau\lambda_1)\}.\end{aligned}$$

Para que $\tilde{\mathcal{J}} - \delta \cdot J > 0$, devemos ter

$$2\lambda_1(\mu + (1 - \mu)\tau) < \delta < 2(\mu\lambda_3 + (1 - \mu)\tau\lambda_1)$$

, para cada $0 \leq \mu \leq 1$, assim se $\mu = 1$ então $2\lambda_2 < \delta < 2\lambda_3 < 0 < 2\lambda_1$ como antes.

Concluimos que, se tomarmos δ tal que $2\lambda_2 < \delta < 2\lambda_3 < 0 < 2\lambda_1$, garantimos \mathcal{J} -separação estrita. E, pelo teorema 1.2.3, temos que a forma quadrática $\mathcal{J}(x, y, z) = -x^2 + y^2 + z^2$ nos dá hiperbolicidade parcial para o atrator de Lorenz geométrico, com o subespaço \mathcal{J} -negativo contraído uniformemente.

Capítulo 5

Generalizações: Hiperbolicidade seccional e funções de Lyapunov infinitesimais

Apresentamos neste capítulo resultados e conceitos mais gerais. Começamos com a extensão do teorema 4.2.10 e então introduzimos a noção de hiperbolicidade seccional bem como este conceito está relacionado com as funções de Lyapunov infinitesimais.

5.1 Extensão do teorema 4.2.10

O teorema 4.2.10 pode ser generalizado no seguinte sentido: dada uma decomposição dominada de um fibrado vetorial sobre um subconjunto compacto invariante Λ da base, para um campo $X \in C^1$ numa região armadilha U , existem um campo diferenciável de formas quadráticas \mathcal{J} e uma vizinhança V de Λ tais que para cada campo de vetores Y suficientemente C^1 -perto de X e cada cociclo correspondente a este campo perto o bastante do cociclo associado a X , temos que Y é estritamente \mathcal{J} -separado em E_V sobre uma vizinhança V de Λ .

Precisamos, antes de tudo, de definir uma distância entre cociclos diferenciáveis.

Sejam $D_A(x), D_B(x) : E_x \rightarrow E_x$ os geradores infinitesimais dos cociclos $A_t(x), B_t(x)$ sobre o fluxos de X e Y respectivamente. Definimos a distância d entre os cociclos A_t e B_t por

$$d((A_t)_t, (B_t)_t) := \sup_{x \in M} \|D_A(x) - D_B(x)\|.$$

Cabe aqui algumas observações a respeito desta distância. Primeiramente, note que o supremo sempre existe devido à compacidade de M e continuidade do gerador infinitesimal. Além disso, dentre as propriedades satisfeitas pela distância d , temos que $d((A_t)_t, (B_t)_t) = 0 \iff A_t = B_t$ devido ao seguinte fato: $\|D_A(x) - D_B(x)\| = 0$, para todo $x \in M$, se, e somente se, $D_A = D_B$, mas, por causa da equação (4.4), cada cociclo A_t satisfaz a equação diferencial ordinária não-autônoma

$$\begin{cases} Y' = D_A(X_t(x))Y \\ Y(0) = Id \end{cases}$$

Assim, se $D_A = D_B$, então A_t e B_t satisfazem a mesma equação diferencial e, pela unicidade de soluções, temos $A_t = B_t$.

Como antes, seja $\Lambda = \Lambda(U)$ um subconjunto maximal positivamente invariante para um campo vetorial X de classe C^1 com um cociclo multiplicativo $A_t(x)$ definido num fibrado vetorial sobre U . Seja agora U uma região armadilha para o fluxo de X e denotemos $\Lambda(U) = \Lambda_X(U)$ o conjunto que atrai correspondente.

Lema 5.1.1. *Existe uma vizinhança \mathcal{U} de X em $\mathfrak{X}^1(M)$ e uma vizinhança aberta \mathcal{V} de $\Lambda(U)$ tal que \mathcal{V} é uma região armadilha para todo $Y \in \mathcal{U}$, isto é, existe $t_0 > 0$ para o qual*

- $Y_t(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V} \subset U$ para todo $t > 0$;
- $\overline{Y_t(\mathcal{V})} \subset \mathcal{V}$ para todo $t > t_0$ e
- $\overline{Y_t(\mathcal{V})} \subset U$ para todo $t > 0$.

Podemos considerar, no que segue, $\Lambda_Y = \Lambda_Y(U) = \bigcap_{t>0} \overline{Y_t(U)}$ para $Y \in \mathcal{V}$, uma C^1 -vizinhança suficientemente pequena de X .

Usando o lema anterior e a desigualdade que define a \mathcal{J} -separação estrita, é possível demonstrar o seguinte resultado (veja [2]).

Teorema 5.1.2. *Suponha que Λ tem uma decomposição dominada $E_\Lambda = F_- \oplus F_+$. Então existe um campo C^1 de formas quadráticas \mathcal{J} numa vizinhança $V \subset U$ de Λ , uma C^1 -vizinhança \mathcal{V} de X e uma C^0 -vizinhança \mathcal{W} de $A_t(x)$ tal que $B_t(x)$ é estritamente \mathcal{J} -separado em V com respeito a $Y \in \mathcal{V}$ e $B \in \mathcal{W}$. Mais precisamente, existe constantes $\kappa, \omega > 0$ tal que, para cada $Y \in \mathcal{V}$, $B \in \mathcal{W}$, $x \in \Lambda_Y$, $x \in \Lambda_Y$ e $t \geq 0$.*

$$|\mathcal{J}(B_t(x)v_-)| \leq \kappa e^{-\omega t} \mathcal{J}(B_t(x)v_+), v_\pm \in F_\pm^B(x), \mathcal{J}(v_\pm) = \pm 1;$$

onde F_\pm^B são os subfibrados da decomposição dominada de E_{Λ_Y} .

5.2 Hiperbolicidade seccional

Seja M uma variedade compacta n -dimensional, $n \geq 3$, com ou sem bordo e X um campo de vetores de classe pelo menos C^1 , tal que X aponta transversalmente para dentro do bordo, se este existir.

Motivado pelo Atrator de Lorenz temos a seguinte noção mais fraca que a de expansão uniforme.

Definição 5.2.1. *Um subfibrado DX_t – invariante, $F \subset T_\Lambda M$ é dito “seccionalmente expansor” se $\dim F_x \geq 2$ é constante para todo $x \in \Lambda$ e existem constantes positivas C, λ tais que para todo $x \in \Lambda$ e todo subespaço bidimensional $L_x \subset F_x$ tem-se*

$$|\det(DX_t |_{L_x})| > Ce^{\lambda t}, \quad \forall t > 0. \quad (5.1)$$

Noutras palavras, a expansão seccional é a expansão de área ao longo de todo subespaço bidimensional do subfibrado F . Notamos que um subespaço invariante expansor com dimensão maior do que ou igual a 2 é sempre seccionalmente expansor, pois expansão de comprimento de vetores em todas as direções implica, em particular, expansão de área ao longo

de todo plano bidimensional. Mas expansão de área não garante expansão de comprimento de qualquer vetor: tome por exemplo, a transformação linear $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $A(x, y) = (2x, y)$ que tem $\det A = 2$ e autovetor $e_2 = (0, 1)$ com autovalor $\lambda = 1$.

A definição a seguir é uma extensão da noção de hiperbolicidade para fluxos abarcando conjuntos que podem ter singularidades acumuladas por órbitas regulares (veja definição 1.1.6), que se fez necessária pelo estudo do atrator de Lorenz; ver Tucker [26], Morales-Pacífico-Pujals [17] para fluxos em dimensão três e Metzger-Morales [16] em dimensões maiores.

Definição 5.2.2. *Um conjunto compacto invariante Λ é dito seccionalmente hiperbólico, se Λ é um conjunto parcialmente hiperbólico cujas singularidades são hiperbólicas e o subfibrado central é seccionalmente expansor.*

Mais precisamente, temos que Λ é seccionalmente hiperbólico se existe decomposição contínua e DX_t -invariante $T_\Lambda M = E \oplus F$ que satisfaz

1. $\|DX_t|_{E_x}\| \leq Ce^{-\lambda t}$;
2. $|\det(DX_t|_{L_x})| > Ce^{\lambda t}$; para todo subespaço linear bidimensional $L_x \subset F_x$;
3. $\|DX_t|_{E_\sigma}\| \cdot \|DX_{-t}|_{F_\sigma}\| \leq Ce^{-\lambda t}$, $\forall \sigma \in \Lambda \cap \text{Sing}(X)$.

para algumas constantes positivas C, λ .

A noção de hiperbolicidade seccional é uma extensão natural da noção de hiperbolicidade para conjuntos invariantes com singularidades, como mostra o teorema seguinte.

Teorema 5.2.3. *(Lema Hiperbólico). Todo subconjunto compacto invariante sem singularidade de um conjunto seccionalmente hiperbólico é um conjunto hiperbólico.*

5.3 Funções de Lyapunov infinitesimais e hiperbolicidade seccional

No trabalho [1] se acha uma condição necessária e suficiente para hiperbolicidade seccional via funções de Lyapunov infinitesimais no caso de campos tridimensionais, generalizando os critérios apresentados nesta dissertação.

Como é sabido que o atrator das equações de Lorenz[13]

$$\begin{cases} x' = a(y - x) & a = 10 \\ y' = rx - y - xz & b = \frac{8}{3} \\ z' = xy - bz & r = 28 \end{cases}$$

é hiperbólico-seccional, mas a prova conhecida foi obtida com a assistência de métodos computacionais. Como as equações de Lorenz dão um campo de vetores X com componentes polinomiais de segunda ordem, os resultados obtidos para funções de Lyapunov infinitesimais poderão ser usados para obter uma prova mais direta da hiperbolicidade seccional deste e de outros atratores caóticos.

5.4 Considerações finais

Vimos, ao longo deste trabalho, como deduzir hiperbolicidade para difeomorfismos e hiperbolicidade parcial para fluxos. Chamamos a atenção para o fato de que isto pode ser feito a partir da existência de um campo de formas quadráticas e cones invariantes, o que é mais fácil de se garantir do que exibirmos os subespaços da decomposição e verificarmos as propriedades requeridas pela hiperbolicidade parcial, pois necessitaríamos explicitamente do fluxo. Assim, o teorema 1.2.3 e a proposição 1.2.5 aparecem como ferramentas importantes na teoria hiperbólica, garantem hiperbolicidade parcial sem a necessidade de exibir a derivada do fluxo X_t .

Além disso, trabalhamos desde o capítulo 2 com resultados que se

estendem para vizinhança dos conjuntos apresentados finalizando com o teorema 5.1.2. Dessa forma, ampliamos o alcance da teoria apresentada neste trabalho.

Para trabalhos futuros, podemos explorar hiperbolicidade seccional e a relação desta com as funções de Lyapunov infinitesimais. Estudar o uso das funções de Lyapunov infinitesimais para obter outros resultados na teoria hiperbólica que envolvem fluxos incompressíveis e fluxos que expandem volume.

Bibliografia

- [1] Araújo, V., Salgado, L. S., Dominated splitting for exterior K-powers of cocycles and singular hyperbolicity. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/1204.4843v4>
- [2] Araújo, V., Salgado, L. S., Infinitesimal Lyapunov functions for singular flows. *Mathematische Zeitschrift* (online). DOI 10.1007/s00209-013-1163-8, abril, 2013.
- [3] Araújo, V., Pacifico, M. J., Three-dimensional flows, Vol. 53 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*, Springer, Heidelberg (2010), ISBN 978-3-642-11413-7. With a foreword by Marcelo Viana.
- [4] Bonatti, C., Díaz, L. J., Viana, M., Dynamics beyond uniform hyperbolicity, volume 102 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 2005. A global geometric and probabilistic perspective, Mathematical Physics, III.
- [5] Bowen, R., Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms, *Lect. Notes in Math.*, Vol. 470, Springer Verlag. 1975.
- [6] Bowen, R., Ruelle, D., The ergodic theory of Axiom A flows, *Invent. Math.*, 29, 181–202. 1975.
- [7] Carmo, M. do, Geometria riemanniana, 5 ed. Coleção projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

- [8] Gourmelon, N.: Adapted metrics for dominated splittings. *Ergodic Theory Dyn. Syst.* **27**(6), 1839-1849 (2007).
- [9] Hayashi, S., Connecting invariant manifolds and the solution of the C^1 stability and Ω -stability conjectures for flows, *Annals of Math.*, 145, no. 1, 81-137. 1997.
- [10] Kato, Tosio. Perturbation theory for linear operators, *Classics in Mathematics*, Springer-Verlag. 2013. ISBN: 354058661X
- [11] Lewowicz, J., Lyapunov functions and topological stability, *J. Differential Equations*, 38(2), 192-209. 1980.
- [12] Liao, S., On the stability conjecture, *Chinese Ann. of Math.*, 1, 9-30. 1980.
- [13] Lorenz, E.N.: Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.* 20, 130-141 (1963).
- [14] Mañé, R., Contributions to the stability conjecture, *Topology*, 17, 383-396. 1978.
- [15] Mañé, R., A proof of C^1 -stability conjecture, *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.*, 66, 161-210. 1988.
- [16] Metzger, R., Morales, C., Sectional-hyperbolic systems, *Ergodic Theory and Dynamical System*, 28 1587–1597. 2008.
- [17] Morales, C., Pacifico, M. J., Pujals, E. R., Robust transitive singular sets for 3-flows are partially hyperbolic attractors or repellers, *Ann. of Math.*, (2), 160, no. 2, 375–432. 2004.
- [18] Palis, J., Smale, S., Structural stability theorems, *Proc. A. M. S. Symp. Pure Math.*, 14, 223-232. 1970.
- [19] Pliss, V., On a conjecture due to Smale, *Differ. Uraun.*, 8, 262–268. 1972.
- [20] Potapov, V.P.: Linear-fractional transformations of matrices. In: *Studies in the Theory of Operators and Their Applications (Russian)*, pp. 75-97, 177. Naukova Dumka, Kiev (1979).

- [21] Salgado, L. S., Sobre hiperbolicidade fraca para fluxos singulares. Tese de doutorado em matemática. Rio de Janeiro UFRJ/PGPIM, 2012.
- [22] Sambarino, M., Hiperbolicidad y estabilidad, *XXII Escuela venezolana de matematicas*. Merida, Venezuela, 09/09/2009.
- [23] Santos, F.F.. Sobre decomposição denominada para fluxos singulares, pp. Dissertação (Mestrado em Matemática)-Instituto de Matemática, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2014.
- [24] Sinai, Y. Markov partitions and C-diffeomorphisms, *Func. Anal. and Appl.*, 2, 64–89. 1968.
- [25] Smale, S., Differentiable dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, Vol. 73. 747-817. 1967.
- [26] Tucker, W., The Lorenz attractor exists, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 328, Série I, 1197–1202. 1999.
- [27] Wojtkowski, M.P.: Monotonicity, J-algebra of Potapov and Lyapunov exponents. Em: Smooth Ergodic Theory and its Applications (Seattle, WA, 1999). *Proceedings of Symposia Pure Mathematics*, vol. 69, pp. 499-521. American Mathematical Society, Providence (2001).

Universidade Federal da Bahia-UFBA
Instituto de Matemática / Colegiado da Pós-Graduação em Matemática

Av. Adhemar de Barros, s/n, Campus de Ondina, Salvador-BA
CEP: 40170 -110
www.pgmat.ufba.br