



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA - IME

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - PGMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



DECOMPOSIÇÃO DE MORSE PARA PROCESSOS
NÃO-AUTÔNOMOS

VICTOR BORGES CARNEIRO

Salvador-Bahia

Dezembro de 2018

DECOMPOSIÇÃO DE MORSE PARA PROCESSOS NÃO-AUTÔNOMOS

VICTOR BORGES CARNEIRO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Henrique Barbosa da Costa.

Salvador-Bahia

Julho de 2018

Carneiro, Victor Borges.

Decomposição de Morse para processos não-autônomos/
Victor Borges Carneiro. – Salvador, 2018.

106 f.

Orientador: Prof. Dr. Henrique Barbosa da Costa.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto
de Matemática, Pós-Graduação em Matemática, 2018.

Referências bibliográficas.

1. Análise matemática. 2. . 3. . I. Costa, Henrique Barbosa . II.
Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática. III. Título.

CDU : 517.98

DECOMPOSIÇÃO DE MORSE PARA PROCESSOS NÃO-AUTÔNOMOS

VICTOR BORGES CARNEIRO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada emde Agosto de 2018.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Henrique Barbosa da Costa (Orientador)

UFBA

Profa. Dr. Thiago Bomfim São Luiz Nunes

UFBA

Prof. Dr. Éder Ritis Aragão Costa

ICMC-USP

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar à CAPES pela oportunidade de estudar o que amo. Agradeço a minha família e amigos pelo apoio durante o processo. Agradeço aos colegas pela companhia e ajuda nessa jornada. Agradeço aos professores e funcionários do IM pelo trabalho feito com muita qualidade, competência e carinho. Agradeço a meu orientador Henrique Barbosa pelos encontros frutíferos e divertidos. Por fim, agradeço a minha querida noiva pelos momentos de alegria e amor.

Resumo

Neste trabalho, conduzimos um estudo introdutório acerca da teoria de processos de evolução (autônomos ou não), explorando as propriedades assintóticas e as características de processos que admitem uma estrutura atratora global, no sentido mais adequado. Ainda, investigamos a existência de uma função de Lyapunov associada a um processo dinamicamente gradiente, estabelecendo, no contexto adequado, a equivalência entre estes e os processos gradientes. Para este propósito, a Teoria de Morse se dispõe como ferramenta fundamental. Como consequência deste resultado, obtemos a estabilidade dos processos gradientes sob perturbação.

Abstract

In this work, we conduct an introductory study on the theory of evolution processes (autonomous or not), exploring the asymptotic properties of processes which admit a structure of attraction, on the proper sense of each context. Furthermore, we investigate the existence of a Lyapunov function associated to a dynamically gradient process, establishing, under certain conditions, the equivalence between these and gradient processes. For these purpose, Morse Theory becomes a fundamental tool. As a consequence of this result, we obtain the stability of gradient processes under perturbation.

Sumário

Introdução	11
1 Semigrupos contínuos: O caso autônomo	15
1.1 Atratores para semigrupos	16
1.2 Semigrupos gradientes	32
1.3 Semigrupos dinamicamente gradientes	35
1.4 Decomposição de Morse	43
1.5 Funções de Lyapunov para semigrupos dinamicamente gradientes	51
2 Processos de Evolução: O caso não-autônomo	57
2.1 Atratores Pullback	58
2.2 Existência de Atratores Pullback	65
2.3 Decomposição de Morse para Processos Dinamicamente Gradientes	73
2.4 Função de Lyapunov para processos dinamicamente gradientes	82
3 Aspectos de Continuidade e considerações finais	93
3.1 Continuidade dos atratores de semigrupos	93
3.2 Estabilidade dos Semigrupos Dinamicamente Gradientes	97

3.3 Caso Não-Autônomo 103

Referências **105**

Introdução

Os diversos processos e transformações que evoluem com o decorrer do tempo encontrados nos mais diversos ramos das ciências (físicas, biológicas, econômicas e etc.), são modelados pelos chamados sistemas dinâmicos, ou como chamaremos neste trabalho, processos de evolução. Um processo de evolução é uma família de operadores $\{S(t, s) : t \geq s\}$ de X em si próprio, com X um espaço métrico qualquer, de forma que $S(t, s)x$ denota o valor da variável x após uma evolução do sistema supondo tempo inicial s e tempo final t . Pedimos que esta família obedeça condições naturais de compatibilidade, isto é:

- (i) $S(t, t) = I$, para todo t , onde $I : X \rightarrow X$ é a identidade em X ,
- (ii) $S(t, \tau)S(\tau, s) = S(t, s)$, sempre que $t \geq \tau \geq s$.

Usualmente pedimos também que um processo de evolução satisfaça alguma propriedade de continuidade, mais precisamente,

- (iii) $(t, s, x) \mapsto S(t, s)x$ é contínua.

A teoria dos processos de evolução tem sido abordada por exemplo estudo das Equações Diferenciais. No caso de equações diferenciais autônomas, obtemos que o fluxo associado a uma tal equação origina um processo de evolução que independe do tempo inicial, ou seja para estes processos temos $S(t, s) = S(t - s, 0)$ para todo $t \geq s$, o qual chamaremos de processo autônomo. Se escrevemos $T(t) := S(t, 0)$ obtemos simplesmente uma família de operadores a um parâmetro $\{T(t) : t \geq 0\}$ que chamamos de semigrupo contínuo e satisfaz:

- (i) $T(0) = I$, para todo t , onde $I : X \rightarrow X$ é a identidade em X ,

- (ii) $T(t)t(s) = T(t + s)$, para todo $t, s \in \mathbb{R}^+$.
- (iii) $(t, x) \mapsto T(t)x$ é contínua.

O elemento que possui papel central na dinâmica assintótica de um sistema dinâmico, especial no caso infinito dimensional, é o atrator global. O atrator de um sistema dinâmico é um objeto que contém toda (no caso autônomo) ou parte significativa da dinâmica assintótica dos modelos associados.

Uma classe importante de processos de evolução são os chamados processos gradientes, que são aqueles que possuem uma função de Lyapunov, que por sua vez traduz também importantes características do sistema. Tal função é uma aplicação contínua que decresce a medida que o sistema evolui e é constante apenas em conjuntos invariantes isolados (por ora pensemos em pontos de equilíbrio, ou seja, estados que não se alteram a medida que o tempo evolui) pertencentes ao atrator global. Nesta classes estão justamente os campos gradientes da teoria das equações diferenciais, ou seja, dada $\mathcal{V} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciável o fluxo associado ao campo de vetores em \mathbb{R}^n dado por $\dot{X} = -\nabla\mathcal{V}(X)$ determina um semigrupo gradiente com função de Lyapunov \mathcal{V} .

Tratando-se de sistemas naturais, a estabilidade de certos modelos sob perturbações torna-se uma preocupação pertinente no que tange a confiabilidade de tais modelos, uma vez que o estudo da natureza é feito muitas vezes por aproximações. Assim, dada a dificuldade de se determinar a estabilidade de processos gradientes mais gerais, dificuldade esta de recuperar a função de Lyapunov, surge a noção de processo dinamicamente gradiente, cuja caracterização vem justamente da dinâmica do seu atrator global relativo aos seus invariantes isolados, ou equilíbrios, e abrange os sistemas gradientes. Um sistema dinamicamente gradiente é tal que seu atrator é composto destes invariantes e as soluções ligando cada um deles, isto sem formar uma estrutura cíclica, ou seja não existe uma sucessão de soluções que faça retornar à mesma estrutura invariante. O exemplo da Figura 1 abaixo dá uma ideia da dinâmica associada a este tipo de sistema. Desta nova definição, usando continuidade de atratores, mostra-se a estabilidade destes processos sob perturbações. Restava mostrar que as duas classes coincidem e a estabilidade dos sistemas gradientes seria obtida. O exemplo acima deixa claro que é possível ordenar um número finito de equilíbrios num sistema dinamicamente gradiente de acordo com sua estabilidade local, ou ainda, em níveis de energia. Tal decomposição é chamada Decomposição de Morse e é

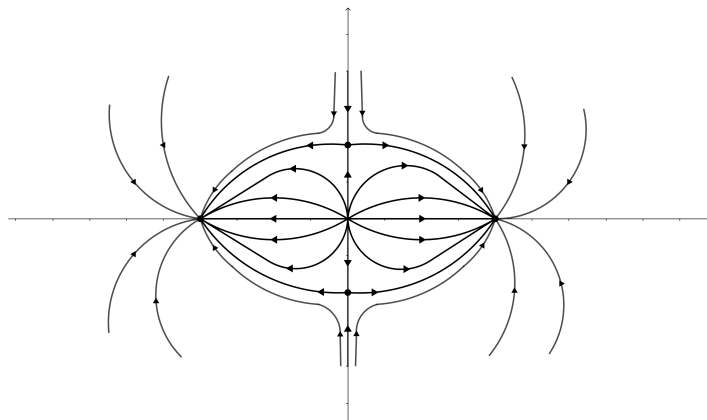


Figura 1: Semigrupo dinamicamente gradiente

peça fundamental na construção da função de Lyapunov para um sistema dinamicamente gradiente.

O objetivo deste trabalho é estudar essas classes de processos e os resultados mencionados acima, obtidos por Carvalho, Langa, Caraballo e Aragão-Costa.

Dividiremos o trabalho em tres capítulos, no primeiro deles faremos um estudo um pouco mais geral do caso autônomo, primeiramente apresentando conceitos e resultados gerais da teoria, introduzindo ferramentas utilizadas adiante. O objetivo do capítulo é mostrar a equivalência entre os semigrupos gradientes, caracterizados pela chamada Função de Lyapunov, e os semigrupos dinamicamente gradientes, definidos através da dinâmica de seu atrator. Para isso, utilizamos da decomposição de Morse obtida para um semigrupo dinamicamente gradiente para construir a função de lyapunov. Já no segundo capítulo, motivados pelo primeiro, faremos o caso não-autônomo, destacando as principais diferenças: como a definição pouco imediata de atração pullback e suas consequências e as hipóteses adicionais de limitação uniforme, necessárias para obter os resultados análogos ao caso autônomo, isto é, a equivalência entre os processo dinamicamente gradientes e gradientes. Finalmente no terceiro capítulo, faremos um breve estudo acerca da continuidade de atratores e estabilidade dos sistemas gradientes sob perturbação, mostrando alguns resultados do caso autônomo e apenas apresentando equivalentes do caso não-autônomo.

Capítulo 1

Semigrupos contínuos: O caso autônomo

Neste primeiro capítulo, seguimos de perto as ideias apresentadas no primeiro capítulo de [5]. Que por sua vez é uma versão atualizada e compilada de resultados clássicos da teoria de semigrupos encontrados em [10] e outros, e o nosso foco principal, que são os resultados obtidos em [3] e [6]. Devotamos a primeira seção a um apanhado de definições e resultados gerais à teoria de semigrupos, introduzindo as noções fundamentais de atrator global e ω -limite e suas propriedades. Nesta seção, mostramos condições suficientes e necessárias para a existência de atrator global.

Na segunda seção, introduzimos a classe dos semigrupos gradientes, que admitem uma função de Lyapunov, explorando propriedades principalmente associados a semigrupos desta classe que possuem um atrator global. Através desta seção, obtemos uma boa noção da dinâmica dentro e fora do atrator global de um semigrupo gradiente (com um número finito de pontos de equilíbrio, ou similarmente, um conjunto finito de invariantes isolados, como veremos adiante).

Na terceira seção, exploramos os semigrupos dinamicamente gradientes, que são caracterizados por um atrator global formado por um subconjunto finito de invariantes isolados e soluções limitadas unindo estes invariantes, e além disso estas soluções não podem formar uma estrutura cíclica dentro do atrator. Da seção 2, já teremos obtido estas propriedades para semigrupos gradientes, mostrando uma primeira inclusão entre estas

classes de semigrupos. Na quarta seção, utilizamos as propriedades de par atrator-repulsor dos semigrupos dinamicamente gradientes para obter uma reordenação conveniente dos seus invariantes isolados, chamada Decomposição de Morse, que se mostrará fundamental na construção da função de Lyapunov e então fechamento da equivalência dos semigrupos.

Na quinta e última seção, apresentamos o resultado de maior interesse, que constrói uma função de Lyapunov para um dado semigrupo dinamicamente gradiente, se utilizando fundamentalmente da decomposição de Morse obtida na seção anterior e suas consequências, com isto mostrando a equivalência, sob certas condições, dos semigrupos gradientes e dinamicamente gradientes. Para isto, construímos previamente duas funções auxiliares, que compartilham praticamente as mesmas propriedades da função de Lyapunov, e evidenciam como esta função de Lyapunov decompõe o espaço de fase.

1.1 Atratores para semigrupos

Nesta seção introdutória apresentaremos alguns conceitos básicos da dinâmica não-linear e o estudo de semigrupos contínuos.

Seja X um espaço métrico, não necessariamente completo, e $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ sua métrica. Denotaremos por $C(X)$ o espaço das transformações contínuas de X em X .

Definição 1.1.1. *Um sistema dinâmico em X é uma família $\{S(t, s) : t \geq s, t, s \in \mathbb{R}\} \subset C(X)$ tal que*

- i) $S(t, t)x = x$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e para todo $x \in X$,*
- ii) $S(t, \sigma) \circ S(\sigma, s) = S(t, s)$ para todo $t \geq \sigma \geq s$,*
- iii) $\{(t, s, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times X : t \geq s\} \ni (t, s, x) \mapsto S(t, s)x \in X$ é contínua.*

Nosso estudo inicial será voltado para uma classe de sistemas dinâmicos contínuos, os sistemas autônomos, que são aqueles que satisfazem $S(t, s)x = S(t - s, 0)x$ para todo $t \geq s$ e $x \in X$. Neste caso se definimos $T(t) = S(t, 0) \in C(X)$ temos que

- i) $T(0)x = x$ para todo $x \in X$,*

ii) $T(t)T(s) = T(t + s)$ para todo $t \geq s$,

iii) $[0, \infty) \times X \ni (t, x) \mapsto T(t)x \in X$ é contínua.

Uma família $\{T(t) : t \geq 0\}$ com as propriedades acima é chamada um semigrupo contínuo. Evidentemente, a partir de um semigrupo contínuo $\{T(t) : t \geq 0\}$ podemos definir um sistema dinâmico autônomo $\{S(t, s) : t \geq s\}$ fazendo $S(t, s) = T(t - s)$, $t \geq s$. Note que, no sistema dinâmico autônomo a evolução do estado x ocupado no instante inicial s para o estado $S(t + s, s)$ ocupado no instante $t + s$ é independente de s e depende apenas do tempo decorrido t . Os demais sistemas dinâmicos, que não possuem essa propriedade, serão chamados sistemas dinâmicos não autônomos.

Agora, iremos dedicar nossa atenção aos semigrupos contínuos. Escreveremos \mathbb{T} para denotar o conjunto dos números inteiros \mathbb{Z} ou o conjunto dos números reais \mathbb{R} , que serão nossos conjuntos de tempos. Ademais, denotaremos os seguintes subconjuntos $\mathbb{T}^+ = \{t \in \mathbb{T} : t \geq 0\}$, $\mathbb{T}^- = \{t \in \mathbb{T} : t \leq 0\}$, $\mathbb{T}_s^+ = \{t \in \mathbb{T} : t \geq s\}$ e $\mathbb{T}_s^- = \{t \in \mathbb{T} : t \leq s\}$. Com isto podemos dar uma definição um pouco mais geral de semigrupo contínuo.

Definição 1.1.2. *Um semigrupo contínuo é uma família $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\} \subset C(X)$ tal que*

i) $T(0)x = x$ para todo $x \in X$,

ii) $T(t)T(s) = T(t + s)$ para todo $t \geq s$,

iii) $\mathbb{T}^+ \times X \ni (t, x) \mapsto T(t)x \in X$ é contínua.

Note que no caso em que $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ a terceira condição é automaticamente satisfeita, pois toda função num conjunto discreto é contínua. Assim escrevendo $T(n) = T(1)^n = T(1) \circ T(1) \circ \cdots \circ T(1)$ n -vezes e $T := T(1)$, o semigrupo pode ser escrito na forma $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ e será simplesmente a família dos iterados do operador T .

Exemplo 1.1.3. *Se $X = \mathbb{R}^n$ e A uma matriz $n \times n$ então sabemos que o fluxo associado ao campo linear $\dot{x} = Ax$ é dado por $e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}$, e este fluxo determina um semigrupo contínuo. De um modo geral, seja X um espaço de Banach e $A \in \mathcal{L}(X)$, definimos $e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}$ a série converge absolutamente, já que $\|A^n\| \leq \|A\|^n$, e portanto*

$$\|e^{At}\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{A^n t^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|A|\|t\|)^n}{n!} = e^{|t|\|A\|}.$$

Multiplicando as séries vemos que

$$e^{A(t+s)} = e^{At} e^{As} \text{ para todo } t, s.$$

Além disso,

$$\|e^{At} - I\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(|A|\|t\|)^n}{n!} \leq |t|\|A\| e^{|t|\|A\|} \rightarrow 0$$

quando $t \rightarrow 0$, *então*

$$T(t) = e^{At}, t \geq 0,$$

é um semigrupo contínuo. De mesmo modo $x(t) = T(t)x_0$ *é solução do PVI*

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0.$$

Dado um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\} \subset C(X)$ e um subconjunto B de X , definimos os seguintes conjuntos:

1. Para cada $t \in \mathbb{T}$, a imagem de B sob $T(t)$,

$$T(t)B := \{T(t)x : x \in B\}.$$

2. A órbita positiva de B ,

$$\gamma^+(B) := \bigcup_{t \in \mathbb{T}^+} T(t)B.$$

3. A órbita parcial entre dois tempos de \mathbb{T}^+ , $t < t'$

$$\gamma_{[t,t']}^+(B) := \bigcup_{t \leq s \leq t'} T(s)B;$$

4. A órbita de $T(t)B$,

$$\gamma_t^+(B) := \gamma^+(T(t)B) = \bigcup_{s \in \mathbb{T}^+} T(t+s)B = \bigcup_{s \in \mathbb{T}_t^+} T(s)B.$$

A função $\mathbb{T}^+ \ni t \mapsto T(t)x \in X$ é a chamada solução por x do semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$. No caso em que $\mathbb{T}^+ = \mathbb{N}$ temos que a solução por x satisfaz, para $T := T(1)$, o problema discreto de valor inicial

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= Tx_n \\ x_0 &= x. \end{aligned}$$

Queremos entender o comportamento assintótico das soluções de semigrupos e para isso os atratores globais serão nossa principal ferramenta. Introduziremos alguns conceitos que nos levam à caracterização dos semigrupos que possuem atrator global.

Definição 1.1.4. Um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é dito **eventualmente limitado** se para cada limitado $B \subset X$ existe $t_B \in \mathbb{T}^+$ tal que $\gamma_{t_B}^+(B)$ é limitado. Diremos que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é **limitado** se $\gamma^+(B)$ é limitado sempre que B for limitado.

O conjunto onde a órbita de B se acumula será chamado de conjunto ω -limite e será objeto fundamental no estudo do comportamento assintótico de um semigrupo.

Definição 1.1.5. O conjunto ω -**limite** de um subconjunto B qualquer de X é definido por

$$\omega(B) = \bigcap_{t \in \mathbb{T}^+} \overline{\gamma_t^+(B)}$$

Definiremos uma solução global, um caminho em X que segue a evolução do semigrupo.

Definição 1.1.6. Uma **solução global** $\{T(t) : t \geq 0\}$ por $x \in X$ é uma função contínua $\phi : \mathbb{T} \rightarrow X$ tal que

- i) $T(t)(\phi(s)) = \phi(t+s)$ para todo $t, s \in \mathbb{T}$, $t \geq 0$, e
- ii) $\phi(0) = x$.

Uma solução global constante será chamada de solução **estacionária** e o seu valor um **ponto de equilíbrio**.

Note que como $T(t)$ não é necessariamente injetiva, se existe uma solução global por x ela não precisa ser única.

Definição 1.1.7. Quando existe uma solução global $\phi : \mathbb{T} \rightarrow X$ por $x \in X$, definiremos a órbita global de x relativa à solução global ϕ por $\gamma_\phi(x) := \{\phi(t) : t \in \mathbb{T}\}$. Neste caso, para $t \in \mathbb{T}$ escreveremos $(\gamma_\phi)_t^- := \{\phi(s) : s \leq t\}$ e definiremos o conjunto α -**limite** de x relativo a ϕ por

$$\alpha_\phi(x) = \bigcap_{t \in \mathbb{T}^-} \overline{(\gamma_\phi)_t^-(x)}.$$

A seguinte caracterização do ω -limite será frequentemente usada na demonstração dos resultados seguintes.

Proposição 1.1.8. Se $B \subset X$ é um subconjunto qualquer de X , então $\omega(B)$ é fechado e

$$\omega(B) = \{y \in X : \text{existem seqüências } \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ em } \mathbb{T}^+ \text{ e } \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ em } B \\ \text{tais que } t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \text{ e } y = \lim_{n \rightarrow \infty} T(t_n)x_n\}$$

Se $\phi : \mathbb{T} \rightarrow X$ é uma solução global do semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ por $x \in X$, então $\alpha_\phi(x)$ é fechado e

$$\alpha_\phi(x) = \{v \in X : \text{existe uma seqüência } \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ em } \mathbb{T}^+ \\ \text{tal que } t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \text{ e } \phi(-t_n) \rightarrow v\}.$$

Demonstração. Primeiramente, seja $y \in \omega(B)$. Então $y \in \bigcap_{t \in \mathbb{T}^+} \overline{\gamma_t^+(B)}$, e assim $y \in \overline{\gamma_t^+(B)}$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$. Em particular, para cada $t = n \in \mathbb{N}$ existe uma seqüência $\{y_k^n\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \gamma_n^+(B)$ tal que $y_k^n \xrightarrow{k \rightarrow \infty} y$. Como $y_k^n \in \gamma_n^+(B)$ para todo $n, k \in \mathbb{N}$, existem estados $\{x_k^n\}_{n, k \in \mathbb{N}} \subset B$ e tempos $\{q_k^n\}_{n, k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{T}^+$ tais que

$$y_k^n = T(n + q_k^n)x_k^n.$$

Da convergência de y_k^n temos que dados $n \in \mathbb{N}$ e $\epsilon > 0$, existe $k(n, \epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(y_k^n, y) < \epsilon, \text{ se } k \geq k(n, \epsilon),$$

do anterior isto é dizer, $d(T(n + q_k^n)x_k^n, y) < \epsilon$ se $k \geq k(n, \epsilon)$. Defina então $t_n := n + q_{k(n, \frac{1}{n})}^n$ e $x_n := x_{k(n, \frac{1}{n})}^n$, assim

$$d(T(t_n)x_n, y) < \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Portanto $y = \lim_{n \rightarrow \infty} T(t_n)x_n$, com $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ e $x_n \in B$ para todo $n \in \mathbb{N}$, logo a caracterização está satisfeita.

Para a recíproca, seja $y \in X$ e sequências $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{T}^+$ e $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B$, tais que $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ e $y = \lim_{n \rightarrow \infty} T(t_n)x_n$. Assim, fixado $\tau \in \mathbb{T}^+$ temos $\{T(t_n)x_n\}_{t_n \geq \tau} \subset \overline{\gamma_\tau^+(B)}$. Da arbitrariedade de τ segue que $y \in \omega(B)$.

A caracterização de $\alpha_\phi(x)$ tem prova análoga. □

Com o intuito de introduzir o atrator global, definiremos as noções de atração, absorção e invariância sob ação do semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$. Para isto, relembremos a definição de *semi-distância de Hausdorff*, denotada por $\text{dist}_H(A, B)$, entre dois subconjuntos A e B de X

$$\text{dist}_H(A, B) := \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y).$$

Denotaremos por $\text{dist}(A, B)$ a distância usual entre conjuntos, isto é,

$$\text{dist}(A, B) := \inf_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y).$$

Ainda, podemos definir a métrica ou distância de Hausdorff, denotada por $\text{Dist}_H(A, B)$ e definida como

$$\text{Dist}_H(A, B) = \max\{\text{dist}_H(A, B), \text{dist}_H(B, A)\}.$$

Um importante resultado para a semidistância de Hausdorff é o seguinte.

Proposição 1.1.9. $\text{dist}_H(A, B) = 0$ se, e somente se, $\overline{A} \subset \overline{B}$

Demonstração. Como a distância é função positiva, da definição de supremo, temos que $\text{dist}_H(A, B) = 0$ se, e somente se, $\inf_{y \in B} d(x, y) = 0$ para todo $x \in A$. Logo dada sequência

$x_n \rightarrow x \in \overline{A}$, da definição de ínfimo obtemos sequência $y_n \in B$ tal que $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$, isto implica que $y_n \rightarrow x$ e $x \in \overline{B}$. Por outro lado, se $\overline{A} \subset \overline{B}$ então $A \subset \overline{B}$ e $\inf_{y \in B} d(x, y) = 0$ para todo $x \in A$, o que conclui a demonstração. \square

Definição 1.1.10. *Se A e B são subconjuntos de X . Diremos que A **atrai** B sob a ação do semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ se*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}_H(T(t)B, A) = 0.$$

*Se existir um $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que $T(t)B \subset A$ para todo $t \geq t_0$, diremos que A **absorve** B .*

Observe que, em particular, se A absorve B , então A atrai B , a recíproca no entanto, não é verdadeira. A noção de invariância, dada a seguir, desempenha um papel fundamental no estudo da dinâmica assintótica de semigrupos.

Definição 1.1.11. *Diremos que um subconjunto A de X é **invariante** (ou **positivamente invariante**) sob a ação de um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ se $T(t)A = A$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$ (ou $T(t)A \subset A$). Um conjunto invariante unitário corresponde a um ponto de equilíbrio, ou estacionário, de $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$, isto é, um ponto $x^* \in X$ tal que $T(t)x^* = x^*$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$.*

Finalmente, estamos em condições de definir atratores globais para semigrupos.

Definição 1.1.12. *Um conjunto \mathcal{A} é chamado um **atrator global** para $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ se é compacto, invariante e atrai subconjuntos limitados de X sob ação de $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$.*

Note que o atrator global para um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é único. De fato, sejam \mathcal{A} e $\hat{\mathcal{A}}$ atratores globais para este semigrupo. Daí $\hat{\mathcal{A}}$ atrai \mathcal{A} que é compacto, em particular limitado, mas \mathcal{A} é invariante, portanto

$$\text{dist}_H(T(t)\mathcal{A}, \hat{\mathcal{A}}) = \text{dist}_H(\mathcal{A}, \hat{\mathcal{A}}) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

Assim $\overline{\mathcal{A}} \subset \overline{\hat{\mathcal{A}}}$, o que implica $\mathcal{A} \subset \hat{\mathcal{A}}$, já que são compactos, em particular fechados. Analogamente mostra-se que $\hat{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$ e obtém-se a unicidade.

Exemplo 1.1.13. *No caso do Exemplo 1.1.3 com $X = \mathbb{R}^n$, temos da teoria das equações diferenciais que o semigrupo associado ao campo $\dot{x} = Ax$ possui a origem como equilíbrio*

e este equilíbrio é atrator global se, e somente se, todos os autovalores de A tem parte real estritamente negativa. De modo similar, no caso de X espaço de Banach, o conceito de autovalor é generalizado pelo espectro do operador A e da mesma forma, temos que a origem é atrator global se o espectro está contido no semiplano negativo, ou seja, todo elemento do espectro de A tem parte real estritamente negativa.

Mostraremos agora uma importante caracterização: o atrator global é o conjunto das soluções globais limitadas de $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$.

Proposição 1.1.14. *Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo em um espaço métrico X , e suponha que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ tenha um atrator global \mathcal{A} . Assim, dado $x \in X$ temos que $x \in \mathcal{A}$ se e somente se existe solução global limitada por x .*

Demonstração. Tome $x \in \mathcal{A}$, mostremos que existe solução global limitada $\phi_x : \mathbb{T} \rightarrow X$ tal que $\phi_x(0) = x$. Note que para um tempo positivo simplesmente consideramos a solução $\mathbb{T}^+ \ni t \mapsto \phi(t) := T(t)x \in X$ que está bem definida. Esta solução é de fato limitada, pois $T(t)x \in \mathcal{A}$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$, caso contrário \mathcal{A} não seria invariante, daí como \mathcal{A} é compacto, em particular limitado, temos que $\phi(\mathbb{T}^+) \subset \mathcal{A}$ é limitado. Agora como \mathcal{A} é invariante, temos que $x \in \mathcal{A} = T(1)\mathcal{A}$, assim existe $x_{-1} \in \mathcal{A}$ tal que $T(1)x_{-1} = x$ e procedendo indutivamente, conseguimos uma sequência $\{x_{-n} : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $x_0 = x$ e $T(1)x_{-n-1} = x_{-n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, (vale ressaltar que esta sequência pode não ser unicamente determinada). Definimos então

$$\phi_x(t) = \begin{cases} T(t)x, & \text{se } t \geq 0, \\ T(j+t)x_{-j}, & \text{se } t \in [-j, j+1) \cap \mathbb{T}, j \in \mathbb{N}^*, \end{cases}$$

que é uma solução global limitada em \mathcal{A} passando por x . Reciprocamente, cada solução global limitada $\phi : \mathbb{T} \rightarrow X$ para $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é tal que $\phi(\mathbb{T}) \subset \mathcal{A}$. De fato, $\phi(\mathbb{T})$ é um limitado, logo é atraído por \mathcal{A} , mas também é invariante, então segue que

$$\text{dist}_H(T(t)\phi(\mathbb{T}), \mathcal{A}) = \text{dist}_H(\phi(\mathbb{T}), \mathcal{A}) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0,$$

assim $\overline{\phi(\mathbb{T})} \subset \mathcal{A}$. Naturalmente $\phi(\mathbb{T}) \subset \overline{\phi(\mathbb{T})} \subset \mathcal{A}$ e segue o resultado. \square

Agora vejamos alguns resultados para conjuntos compactos que serão úteis futuramente.

Proposição 1.1.15. *Seja K um subconjunto compacto de X e $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência em X tal que*

$$\text{dist}(x_n, K) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

então $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergente, além disso este limite está em K .

Demonstração. Das definições de distância e ínfimo, dado $\epsilon = \frac{1}{m}$, existem $n_m \in \mathbb{N}$ e $y_{n_m} \in K$ tais que $d(x_{n_m}, y_{n_m}) < \frac{1}{m}$. Como K é compacto podemos assumir, passando a uma subsequência se necessário, que $y_{n_m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} y_0$ para algum $y_0 \in K$. Assim, obtemos que $x_{n_m} \rightarrow y_0$, pois:

$$d(x_{n_m}, y_0) \leq d(x_{n_m}, y_{n_m}) + d(y_{n_m}, y_0) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0,$$

assim $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente a y_0 e isto conclui a prova. \square

Para a prova do próximo resultado lembremos que dado um compacto K e $r > 0$, define-se a r -vizinhança de K como o conjunto dado por $\mathcal{O}_r(K) := \{x \in X : d(x, K) < r\}$. Note que esta r -vizinhança está sempre contida numa união finita de bolas de raio $2r$. De fato, basta considerar a cobertura finita de K por bolas centradas em pontos de K e raio r , $\bigcup_{i=1}^n B_r(x_i)$. Então, dado $y \in \mathcal{O}_r(K)$ como K é compacto existe $x \in K$ tal que $d(y, x) = d(y, K) < r$. Ainda, existe $x_i \in K$ tal que $d(x, x_i) < r$. Isso implica que $d(y, x_i) < 2r$ para algum x_i e $\mathcal{O}_r(K) \subset \bigcup_{i=1}^n B_{2r}(x_i)$, como afirmamos. Assim, provemos a seguinte proposição

Proposição 1.1.16. *Dado um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ e K um subconjunto compacto de X , se K atrai um conjunto compacto K_1 , então $\gamma^+(K_1)$ é relativamente compacto e $\emptyset \neq \omega(K_1) \subset K$.*

Demonstração. Como K atrai K_1 , segue da definição de semidistância de Hausdorff, que dado $\epsilon > 0$ existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que

$$T(t)K_1 \subset \mathcal{O}_{\frac{\epsilon}{2}}(K), \text{ para todo } t \geq t_0.$$

Assim, $\bigcup_{t \geq t_0} T(t)K_1$ está contido $\mathcal{O}_{\frac{\epsilon}{2}}(K)$ que por sua vez está contida numa união finita de bolas de raio ϵ . Além disso, segue da continuidade do semigrupo e compacidade de $[0, t_0] \times K_1$ que $\bigcup_{0 \leq t \leq t_0} T(t)K_1$ é compacto, logo totalmente limitado, e portanto $\gamma^+(K_1) \cup$

K é totalmente limitado. Da Proposição 1.1.15 e do fato que K atrai K_1 , temos que toda sequência em $\gamma^+(K_1)$ tem subsequência convergente para um ponto K . Com isso, temos que $\gamma^+(K_1) \cup K$ é completo, logo compacto. Segue que $\gamma^+(K^1)$ é relativamente compacto.

Para a última parte, temos então que $\overline{\gamma_t^+(K^1)}$ é compacto e não-vazio, para todo $t \in \mathbb{T}^+$. Além disso, $\overline{\gamma_t^+(K^1)} \subset \overline{\gamma_s^+(K^1)}$ para $t \geq s$, ou seja, a família $\{\overline{\gamma_t^+(K^1)}\}_{t \in \mathbb{T}^+}$ possui a propriedade da interseção finita e assim

$$\omega(K_1) = \bigcap_{t \in \mathbb{T}^+} \overline{\gamma_t^+(K^1)} \neq \emptyset.$$

Finalmente, dados $y \in \omega(K_1)$ e $\epsilon > 0$, existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que

$$y \in \overline{\gamma_{t_0}^+(K^1)} \subset \mathcal{O}_\epsilon(K),$$

assim $\text{dist}(y, K) \leq \epsilon$. Da arbitrariedade de $\epsilon > 0$ e $y \in K$ o resultado segue. \square

Lema 1.1.17. *Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo em X . Seja $B \subset X$ um subconjunto qualquer, então $T(t)\omega(B) \subset \omega(B)$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$. Se B é tal que $\omega(B)$ é compacto e atrai B , então $\omega(B)$ é invariante.*

Demonstração. Se $\omega(B) = \emptyset$, não há o que provar. Se $\omega(B) \neq \emptyset$, fixe $t \in \mathbb{T}^+$, da Proposição 1.1.8, para um dado $y \in \omega(B)$, existem sequências $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{T}^+$ e $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B$ tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} T(t_n)x_n = y$. Segue da continuidade de $T(t)$ que $T(t)y = \lim_{n \rightarrow \infty} T(t + t_n)x_n$ e portanto $T(t)y \in \omega(B)$, pela Proposição 1.1.8. Logo $T(t)\omega(B) \subset \omega(B)$.

Supondo agora que $\omega(B)$ é compacto e atrai B , mostremos que $\omega(B) \subset T(t)\omega(B)$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$. Seja $x \in \omega(B)$, existem sequências $t_n \rightarrow \infty$ e $x_n \in B$ tais que $T(t_n)x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$. Para $t \in \mathbb{T}^+$ fixo, como $t_n \rightarrow \infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n > t$ sempre que $n \geq n_0$. Portanto $T(t)T(t_n - t)x_n = T(t_n)x_n \rightarrow x$ quando $n \rightarrow \infty$. Como $\omega(B)$ é compacto e atrai B temos que $\text{dist}(T(t)T(t_n - t)x_n, \omega(B)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Segue da Proposição 1.1.15 que $\{T(t)T(t_n - t)x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergente (que reindexamos e denotamos novamente por $\{T(t)T(t_n - t)x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$). Seja $y = \lim_{n \rightarrow \infty} T(t)T(t_n - t)x_n$, então $y \in \omega(B)$ e, pela continuidade do semigrupo, $T(t)y = x$. Portanto $\omega(B) = T(t)\omega(B)$ e isto conclui a prova. \square

Lema 1.1.18. *Seja $x \in X$ tal que existe solução global $\phi : \mathbb{T} \rightarrow X$ por x com $\overline{\phi(\mathbb{T}^-)}$ compacto. Então, $\alpha_\phi(x)$ será não-vazio, compacto e invariante.*

Demonstração. Como para cada $t \in \mathbb{T}^-$ o conjunto $\overline{(\gamma_\phi)_t^-(x)}$ é um fechado contido no compacto $\overline{\phi(\mathbb{T}^-)}$, logo um compacto, assim segue da propriedade da interseção finita e da definição de $\alpha_\phi(x)$ que este é não-vazio e compacto. Mostremos que é invariante.

Fixe $t \in \mathbb{T}^+$. Da Proposição 1.1.8, se $y \in \gamma_\phi(x)$, existe uma sequência $t_n \rightarrow \infty$ tal que $\phi(-t_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$. Da continuidade de $T(t)$ obtemos que $T(t)\phi(-t_n) = \phi(t - t_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T(t)y$ e portanto $T(t)y \in \alpha_\phi(x)$, isto prova que $T(t)\alpha_\phi(x) \subset \alpha_\phi(x)$. Por outro lado, se $w \in \alpha_\phi(x)$, existe uma sequência $t_n \rightarrow \infty$ tal que $\phi(-t_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} w$. Como $\{\phi(-t_n - t) : n \in \mathbb{N}\}$ é relativamente compacto, passando para um subsequência e reindexando se necessário, existe $z \in X$ tal que $\phi(-t_n - t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z$ e portanto $z \in \alpha_\phi(x)$. Segue da continuidade do semigrupo que $T(t)z = w$. Isto prova que $\alpha_\phi(x) \subset T(t)\alpha_\phi(x)$ e portanto $\alpha_\phi(x)$ é invariante. \square

Observação 1.1.19. *Segue imediatamente do Lema 1.1.17 que se $x \in X$, $\omega(x)$ atrai x e $\omega(x) = \{x^*\}$, então x^* é um equilíbrio para $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$. Um resultado similar vale para $\alpha_\phi(x)$.*

Lema 1.1.20. *Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo em X e $B \subset X$ tal que $\omega(B)$ é compacto e atrai B .*

1. *Se $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ e B é conexo, então $\omega(B)$ é conexo;*
2. *Se $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, B é conexo e $B \supset \omega(B)$, então $\omega(B)$ é conexo.*

Demonstração. Suponha que $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ e que $\omega(B)$ é desconexo, então $\omega(B)$ é a união disjunta de dois conjuntos compactos (portanto separados por uma distância positiva 2ρ). Como $\omega(B)$ atrai B , temos $\text{dist}_H(T(t)(B), \omega(B)) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$, mas isto implica, do fato que $T(t)B$ é conexo, que $T(t)B$ deve estar contido na ρ vizinhança de uma das componentes de $\omega(B)$ para t suficientemente grande. Do Lema 1.1.17 temos que $T(t)B$ contém $\omega(B)$, uma contradição.

Caso $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, temos $\overline{\gamma_t^+(B)}$ conexo para cada $t \geq 0$. De fato, é o fecho do $\gamma_t^+(B)$, que é conexo, pois é a imagem do conexo $[t, \infty) \times B$ pelo semigrupo contínuo. Portanto $\omega(B) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\gamma_t^+(B)}$ é interseção de conexos e é um conexo. \square

Em seguida provaremos um lema que será de importância fundamental nos seguintes resultados sobre ω -limite e atrator global.

Lema 1.1.21. *Se B é um subconjunto não-vazio de X tal que $\overline{\gamma_{t_0}^+(B)}$ é compacto para algum $t_0 \in \mathbb{T}^+$, então $\omega(B)$ é não-vazio, compacto, invariante e atrai B .*

Demonstração. Para cada $t \in \mathbb{T}^+$, $t \geq t_0$, $\overline{\gamma_t^+(B)}$ é não-vazio e compacto. Segue do fato que $\{\overline{\gamma_t^+(B)} : t \geq t_0\}$ tem propriedade da interseção finita que $\omega(B) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\gamma_t^+(B)}$ é não-vazio e compacto.

Mostremos agora que $\omega(B)$ atrai B . Suponha que não, então existem ϵ_0 e seqüências $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em B , $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em \mathbb{T}^+ com $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, tais que $d(T(t_n)x_n, \omega(B)) > \epsilon_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\overline{\gamma_{t_0}^+(B)}$ é compacto e $\{T(t_n)x_n, n \geq n_1\} \subset \overline{\gamma_{t_0}^+(B)}$ para algum $n_1 \in \mathbb{N}$ (já que $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$), existem subsequências $t_{n_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty$ e $x_{n_j} \in B$ tais que $T(x_{n_j})x_{n_j}$ é convergente para algum $y \in X$. Disto segue que $y \in \omega(B)$ e $d(y, \omega(B)) \geq \epsilon_0$, uma contradição. Logo $\omega(B)$ atrai B . Finalmente, segue do Lema 1.1.17 que $\omega(B)$ é invariante e a prova está completa. \square

Agora introduziremos alguns conceitos importantes para a caracterização de semigrupos que possuem atratores globais.

Definição 1.1.22. *Um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é dito **assintoticamente suave** se, para qualquer subconjunto fechado, limitado e não-vazio $B \subset X$, para o qual $T(t)B \subset B$, para todo $t \in \mathbb{T}^+$, existe um conjunto compacto $J \subset B$ que atrai B .*

Lema 1.1.23. *Se $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo assintoticamente suave e B é um subconjunto não-vazio de X tal que $\gamma_{t_0}^+(B)$ é limitado, para algum $t_0 \in \mathbb{T}^+$, então $\omega(B)$ é não-vazio, compacto, invariante e $\omega(B)$ atrai B .*

Demonstração. Como $T(t)$ é contínua e $T(t)\gamma_{t_0}^+(B) \subset \gamma_{t_0}^+(B)$, segue que $T(t)\overline{\gamma_{t_0}^+(B)} \subset \overline{\gamma_{t_0}^+(B)}$ para todo $t \geq 0$. Como $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente suave temos que existe um compacto $J \subset \overline{\gamma_{t_0}^+(B)}$ que atrai $\overline{\gamma_{t_0}^+(B)}$. Logo, existem seqüências $\epsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ e $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ tais que $T(t)\overline{\gamma_{t_0}^+(B)} \subset \overline{\mathcal{O}_{\epsilon_n}(J)}$ para todo $t \geq t_n$. Isto implica que $\emptyset \neq \omega(B) \subset J$. Como $\omega(B)$ é um fechado no compacto J , temos que $\omega(B)$ é compacto.

Resta mostrar que $\omega(B)$ atrai B . Suponha por absurdo que não, então existem $\epsilon_0 > 0$ e seqüências $x_n \in B$ e $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ tais que $d(T(t_n)x_n, \omega(B)) > \epsilon_0$. Da compacidade de

J e da Proposição 1.1.15, existem seqüências $x_{n_j} \in B$, $t_{n_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty$ e $z \in J$ tais que $T(t_{n_j})x_{n_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} z$. Segue que $z \in \omega(B)$ e $\text{dist}(z, \omega(B)) \geq \epsilon_0$, uma contradição. Portanto $\omega(B)$ atrai B . Portanto, $\omega(B)$ é não-vazio, compacto e atrai B , ademais, do Lema 1.1.15, é invariante. \square

Definiremos outro conceito de comportamento assintótico, que veremos ser, no contexto em que trabalhamos, equivalente à suavidade assintótica.

Definição 1.1.24. *Um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é dito **assintoticamente compacto** se, para quaisquer seqüência limitada $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e seqüência $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, a seqüência $\{T(t_n)x_n\}$ possui subsequência convergente.*

Proposição 1.1.25. *Se $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo assintoticamente compacto, então $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente suave. Reciprocamente, se $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo eventualmente limitado e assintoticamente suave, então $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto.*

Demonstração. Seja $B \subset X$ um conjunto fechado, limitado e não-vazio tal que $T(t)(B) \subset B$, para todo $t \geq 0$, então para quaisquer seqüências $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em B e $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, temos que $T(t_n)x_n \in B$ e se $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto, $T(t_n)x_n$ possui uma subsequência cujo limite está em $\bar{B} = B$. Da Proposição 1.1.8 temos que $\emptyset \neq \omega(B) \subset B$. Agora, se $\omega(B)$ não atrai B , existe $c > 0$ tal que podemos escolher seqüências $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em B e $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ tais que $d(T(t_n)x_n, \omega(B)) \geq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que é uma contradição pois por hipótese $T(t_n)x_n$ admite subsequência convergente que conseqüentemente se aproxima de $\omega(B)$. Mostremos que $\omega(B)$ é compacto. Dada seqüência $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $\omega(B)$, para cada y_n podemos tomar $t_n \geq n$ e x_n em B com $d(T(t_n)x_n, y_n) < 1/n$. Porém da compacidade assintótica, $T(t_n)x_n$ admite subsequência convergente, que acumula num $y \in \omega(B)$. Da desigualdade acima obtemos que $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$ e portanto $\omega(B)$ é compacto. Do Lema 1.1.17, segue que $\omega(B)$ é invariante. Tomando $J = \omega(B)$ mostramos que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente suave.

Por outro lado, se $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo eventualmente limitado e $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência limitada em X , existe $t_0 > 0$ tal que $B = \overline{\gamma_{t_0}^+(\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}})}$ é um conjunto limitado. Como B é positivamente invariante e $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente suave,

existe um compacto J em X que atrai B . Em particular $\{T(t_n)x_n : n \in \mathbb{N}\}$ converge para J quando n tende a infinito e portanto é relativamente compacto.

□

Definição 1.1.26. *Um semigrupo é dito **eventualmente compacto** se dado B limitado existe $t_B \in \mathbb{T}^+$ tal que $\overline{T(t_B)B}$ é compacto. Um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é dito **condicionalmente eventualmente compacto** se dado B limitado e positivamente invariante, existe $t_B \in \mathbb{T}^+$ tal que $\overline{T(t_B)B}$ é compacto.*

Teorema 1.1.27. *Um semigrupo condicionalmente eventualmente compacto é assintoticamente suave.*

Demonstração. Seja $B \subset X$ um conjunto não-vazio, fechado e limitado tal que $T(t)B \subset B$ para todo $t \geq 0$. Então, como $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é condicionalmente eventualmente compacto temos que $\overline{\gamma_t^+(B)}$ é compacto para um t suficientemente grande. Assim, do Lema 1.1.21, $\omega(B) = \bigcap_{t \in \mathbb{T}^+} \overline{\gamma_t^+(B)}$ é não-vazio, compacto e atrai B . Isto nos mostra que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente suave. □

Definição 1.1.28. *Diremos que um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é **ponto dissipativo (limitado dissipativo/compacto dissipativo)** se existir um subconjunto limitado $B \subset X$ que atrai pontos (subconjuntos limitados/subconjuntos compactos) de X .*

Observação 1.1.29. *Na definição acima podemos trocar “atrai” por “absorve” sem mudar o conceito. Segue das definições que se um subconjunto limitado A absorve outro B , em particular ele atrai B . Por outro lado, se A limitado atrai B , qualquer ε -vizinhança de A (limitada) absorve B .*

Lema 1.1.30. *Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo ponto dissipativo e assintoticamente suave. Se $\gamma^+(K)$ é limitada sempre que K é compacto, então $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é compacto dissipativo.*

Demonstração. Como $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é ponto dissipativo, existe um conjunto não-vazio e limitado B que absorve pontos de X . Defina $U = \{x \in B : \gamma^+(x) \subset B\}$. Como B absorve pontos, temos que U é não-vazio. Além disso, $\gamma^+(U) = U$, já que $\gamma^+(T(t)x) \subset \gamma^+(x) \subset B$ para todo $t \geq 0$ e $x \in U$, U é limitado, já que B é limitado, e absorve pontos, já que B absorve pontos então $T(t)x \in U$ para algum. Ainda, temos que $T(t)\overline{\gamma^+(U)} \subset \overline{\gamma^+(U)}$.

Portanto, como $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente suave, existe conjunto compacto K , com $K \subset \overline{\gamma^+(U)} = \overline{U}$, tal que K atrai U e portanto K atrai pontos de X . Mostremos agora que existe uma vizinhança V de K tal que $\gamma_t^+(V)$ é limitado para algum $t \in \mathbb{T}^+$. Se este não é o caso, tomando $1/n$ -vizinhanças, obtemos seqüências $x_n \in X$, $x_n \rightarrow y \in K$ e $t_n \rightarrow \infty$ tais que $\{T(t_n)x_n : n \in \mathbb{N}\}$ não é limitada. Considere $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, logo \overline{A} é compacto e $\gamma^+(A)$ é não-limitada, contradizendo a hipótese. Seja V uma vizinhança de K e $t_V \in \mathbb{T}^+$ tal que $\gamma_{t_V}^+(V)$ é limitado. Como K atrai pontos de X e $T(t)$ é contínua, para todo $x \in X$ existe uma vizinhança \mathcal{O}_x de x e $t_x > 0$ tal que $T(t)(\mathcal{O}_x) \subset \gamma_{t_x}^+(V)$ para $t \geq t_x$, logo $\gamma_{t_V}^+(V)$ absorve uma vizinhança de x para cada $x \in X$. Utilizando um argumento de subcoberturas finitas, mostramos que $\gamma_{t_V}^+(V)$ absorve subconjuntos compactos de X e portanto $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é compacto dissipativo. \square

Proposição 1.1.31. *Seja X um espaço métrico e $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo em X . Se K é compacto e atrai a si mesmo sob a ação de $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$, então $\omega(K) = \bigcap_{t \in \mathbb{T}^+} T(t)K$.*

Demonstração. Claramente $\bigcap_{t \in \mathbb{T}^+} T(t)K \subset \omega(K)$. Agora, para a inclusão contrária, vejamos que da Proposição 1.1.16 com $K_1 = K$ obtemos que $\omega(K) \subset K$ e $\gamma^+(K)$ é relativamente compacto. Do Lema 1.1.21 temos que $\omega(K)$ é não-vazio, compacto, invariante e atrai K . Assim

$$\omega(K) = T(t)\omega(K) \subset T(t), \text{ para todo } t \in \mathbb{T}^+,$$

Isto prova o resultado. \square

O seguinte teorema caracteriza semigrupos que possuem atratores globais.

Teorema 1.1.32. *Um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é eventualmente limitado, ponto dissipativo e assintoticamente compacto se, e somente se, $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ tem um atrator global \mathcal{A} .*

Demonstração. Como $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto, é assintoticamente suave, ademais é ponto dissipativo e eventualmente limitado, então segue do Lema 1.1.30 que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é compacto dissipativo. Seja C um conjunto limitado que absorve subconjuntos compactos de X . Considere $B = \{x \in C : \gamma^+(x) \subset C\}$. Claramente B

absorve subconjuntos compactos de X , $T(t)\overline{B} \subset \overline{B}$ e, como $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente suave, existe um conjunto compacto $K \subset \overline{B}$ que atrai B . Segue que K atrai subconjuntos compactos de X .

O conjunto $\mathcal{A} = \omega(K)$ é não-vazio, compacto e invariante. Se $J \subset X$ é compacto então $\omega(J) \subset K$ e conseqüentemente $\omega(J) = T(s)\omega(J) \subset T(s)K$ para cada $s \geq 0$. Segue da Proposição 1.1.31 que $\omega(J) \subset \bigcap_{s \in \mathbb{T}^+} T(s)K = \omega(K)$ e portanto $\omega(K)$ atrai J .

Seja B um subconjunto limitado de X , como $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é eventualmente limitado e assintoticamente compacto, segue do Lema 1.1.23 que $\omega(B)$ é não-vazio, compacto, invariante e atrai B . Como $\omega(B)$ é compacto e invariante temos que $\omega(B) \subset \mathcal{A}$ e conseqüentemente \mathcal{A} atrai B .

Reciprocamente, é claro que se $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ tem atrator global, ele é eventualmente limitado, ponto dissipativo e, pela Proposição 1.1.25, é assintoticamente compacto. \square

Em seguida, vejamos um outro resultado que assegura a existência de atrator global para um semigrupo.

Teorema 1.1.33. *Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo ponto dissipativo e eventualmente compacto. Então $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ tem um atrator global \mathcal{A} .*

Demonstração. Considerando o Lema 1.1.27 e o Teorema 1.1.32, resta mostrar que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é eventualmente limitado. Dado um conjunto limitado B , segue do fato de que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é eventualmente compacto que existe $t_B \in \mathbb{T}^+$ tal que $T(t_B)B$ é relativamente compacto. Logo, é necessário somente mostrar que a órbita de subconjuntos compactos de X são limitadas, pois $T(t)T(t_B)B \subset T(t)\overline{T(t_B)B}$. Seja K um subconjunto compacto de X e B_0 um subconjunto aberto e limitado de X que absorve pontos. Dado $x \in K$, da continuidade de $T(t)$, existem uma vizinhança \mathcal{O}_x de x e $t_x \in \mathbb{T}^+$ tal que $T(t_x)\mathcal{O}_x \subset T(t_{B_0})B_0$. Como K é compacto, existem vizinhanças $\{\mathcal{O}_{x_1}, \dots, \mathcal{O}_{x_p}\}$ que cobrem K . Sejam agora $\tau = \tau(K) = \max t_{x_i} : 1 \leq i \leq p$, $K_0 = \overline{T(t_{B_0})B_0}$ e $\tilde{K}_0 = \gamma_{[0, \tau(K)]}K_0$. Claramente K_0 e \tilde{K}_0 são subconjuntos compactos de X . Segue que $T(t)B_0 \subset \tilde{K}_0$ para todo $t \geq t_{B_0}$ e para cada subconjunto compacto K de X temos que $T(t)K \subset \tilde{K}_0$ para $t \geq \tau(K)$. Isto prova que a órbita de um subconjunto compacto de X é limitada e completa a demonstração do resultado. \square

1.2 Semigrupos gradientes

Nesta seção estudaremos os semigrupos gradientes, uma classe de semigrupos que aparece naturalmente em diversas aplicações. Suas características permitem descrever com bastante precisão a estrutura dos seus atratores a partir de seus equilíbrios.

Lembremos que $y^* \in X$ é um ponto de equilíbrio para o semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ se o conjunto $\{y^*\}$ é invariante sob a ação do semigrupo, ou seja, $T(t)y^* = y^*$ para todo $t \geq 0$. Denotaremos por \mathcal{E} o conjunto dos pontos de equilíbrio para o semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$.

Definição 1.2.1. *Um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é dito **gradiente** se admite uma função de Lyapunov, isto é, se existe uma função contínua $\mathcal{V} : X \rightarrow \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:*

- (i) $\mathbb{T}^+ \ni t \mapsto \mathcal{V}(T(t)x)$ é decrescente para cada $x \in X$;
- (ii) Se x é tal que $\mathcal{V}(T(t)x) = \mathcal{V}(x)$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$, então $x \in \mathcal{E}$.

Com efeito consideraremos semigrupos gradientes com um número finito de equilíbrios, de onde obtemos ω e α -limites dos pontos de X .

Lema 1.2.2. *Se $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo gradiente, $\omega(x)$ é um subconjunto de \mathcal{E} para cada $x \in X$. Se existe uma solução global $\phi : \mathbb{T} \rightarrow X$ por x então $\alpha_\phi(x)$ é um subconjunto de \mathcal{E} .*

Se $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é gradiente, tem atrator global \mathcal{A} e \mathcal{E} só tem pontos isolados, então \mathcal{E} é finito e para cada $x \in X$, $\omega(x)$ é um conjunto unitário. Neste caso, se $x \in \mathcal{A}$ e $\phi : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{A}$ é uma solução global limitada por x , então $\alpha_\phi(x)$ é um conjunto unitário.

Demonstração. Se $\omega(x) = \emptyset$ o resultado é trivial. Se $\omega(x) \neq \emptyset$ e tome $y \in \omega(x)$ então temos que $T(t_n)x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$ para alguma sequência $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$. Da continuidade de \mathcal{V} temos que $\mathcal{V}(T(t_n)x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{V}(y)$ e portanto $\mathcal{V}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} c$ para algum $c \in \mathbb{R}$, já que é decrescente e possui uma subsequência convergente. Como $T(t)\omega(x) \subset \omega(x)$, $t \in \mathbb{T}^+$, temos que cada ponto $y \in \omega(x)$ é tal que $\mathcal{V}(T(t)y) = \mathcal{V}(y) = c$, $t \in \mathbb{T}^+$, e da propriedade (ii) na Definição 1.2.1 temos que $y \in \mathcal{E}$. O resultado para $\alpha_\phi(x)$ é mostrado de maneira inteiramente análoga.

Agora suponhamos que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ tem um atrator global \mathcal{A} . Como \mathcal{A} é compacto e $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$, segue que se todos os pontos de \mathcal{E} são isolados, então \mathcal{E} é finito. Falta ainda mostrar que se o conjunto das soluções estacionárias é finito então $\omega(x)$ e $\alpha_\phi(x)$ são conjuntos unitários. Se $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ isto segue imediatamente do fato que $\omega(x)$ e $\alpha_\phi(x)$ são conexos. Se $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ e $\omega(x) = \{y_1^*, \dots, y_l^*\} \subset \mathcal{E}$ com $l \geq 2$, então existe uma cobertura disjunta $\{\mathbb{N}_i : 1 \leq i \leq l\}$ de \mathbb{N} com a propriedade de que cada \mathbb{N}_i é infinito e para $n \in \mathbb{N}_i$ vale o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} T(n)x = y_i^*$, $1 \leq i \leq l$. Escolha uma sequência $\{k_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $k_{2n-1} \in \mathbb{N}_1$ e $k_{2n} = k_{2n-1} + 1 \in \mathbb{N}_j$, para algum $2 \leq j \leq l$. Então, $y_1^* = T(1)y_1^* = \lim_{n \rightarrow \infty} T(k_{2n-1})T(1)x = \lim_{n \rightarrow \infty} T(k_{2n})x = y_j^*$, o que é uma contradição. Isto mostra o resultado para $\omega(x)$, a prova para $\alpha_\phi(x)$ e $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ é análoga. Concluimos a demonstração. \square

Teorema 1.2.3. *Suponha que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ seja um semigrupo gradiente, eventualmente limitado e assintoticamente compacto cujo conjunto de pontos de equilíbrio \mathcal{E} seja limitado. Então $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ tem um atrator global \mathcal{A} e, além disso, o atrator é dado por $\mathcal{A} = \mathcal{W}^u(\mathcal{E})$, onde*

$$\mathcal{W}^u(\mathcal{E}) := \{y \in X : \text{existe solução global } \phi : \mathbb{T} \rightarrow X \text{ por } y \text{ tal que } \phi(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \mathcal{E}\}$$

é denominado conjunto instável de \mathcal{E} . Se $\mathcal{E} = \{e_1^, \dots, e_n^*\}$ for finito, então $\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{W}^u(e_i^*)$. Finalmente, se existir um conjunto conexo e limitado B que contenha \mathcal{A} então \mathcal{A} será conexo.*

Demonstração. Como $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é eventualmente limitado e assintoticamente compacto, para cada $x \in X$, $\omega(x)$ é não-vazio, compacto, invariante e atrai x . Como $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é gradiente, segue que $\omega(x) \subset \mathcal{E}$ e, como \mathcal{E} é limitado, temos que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é ponto dissipativo. Do Teorema 1.1.32, $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ tem um atrator global.

Se $x \in \mathcal{A}$, existe uma solução global $\phi : \mathbb{T} \rightarrow X$ por x . Como $\phi(\mathbb{T}) \subset \mathcal{A}$ e \mathcal{A} é compacto, $\phi(-t_n)$ possui ponto de acumulação para toda $t_n \rightarrow \infty$, isto implica que $\alpha_\phi(x) \neq \emptyset$. Do Lema 1.2.2, $\alpha_\phi(x) \subset \mathcal{E}$. Isto mostra que $\mathcal{A} \subset \mathcal{W}^u(\mathcal{E})$. Por outro lado, se $x \in \mathcal{W}^u(\mathcal{E})$, existe uma solução global $\phi : \mathbb{T} \rightarrow X$ por x e $\phi(t) \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} \mathcal{E} \subset \mathcal{A}$. Logo $\phi(\mathbb{T})$ é limitado e $\phi(\mathbb{T}) \subset \mathcal{A}$, portanto $x \in \mathcal{A}$. Isto mostra que $\mathcal{A} \subset \mathcal{W}^u(\mathcal{E})$ e completa a prova de que $\mathcal{A} = \mathcal{W}^u(\mathcal{E})$.

Se $\mathcal{E} = \{e_1^*, \dots, e_n^*\}$, a igualdade $\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^n W^u(e_i^*)$ segue imediatamente do Lema 1.2.2. E, se \mathcal{A} está contido em um subconjunto B conexo e limitado de X , o Lema (1.1.20) implica que $\omega(B)$ é conexo, mas $\omega(B) = \mathcal{A}$ e \mathcal{A} é conexo. Isto conclui a demonstração. \square

O lema seguinte decorre da continuidade dos semigrupos e é fundamental para a demonstração dos resultados seguintes. Ele garante que, dado um ponto de equilíbrio y^* as órbitas de pontos próximos deste permanecem suficientemente próximas para grandes valores de tempo.

Lema 1.2.4. *Sejam $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo e y^* um ponto de equilíbrio para $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$. Dado $t \in \mathbb{T}^+$ e $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\gamma_{[0,t]}^+ B_\delta(y^*) \subset B_\epsilon(y^*)$, ou seja,*

$$\{T(s)y : 0 \leq s \leq t, y \in B_\delta(y^*)\} \subset B_\epsilon(y^*).$$

Demonstração. Suponha por absurdo que existam $t_0 \in (0, \infty)$ e $\epsilon_0 > 0$ tais que, para todo $k \in \mathbb{N}^*$ existe $x_k \in B_{1/k}(y^*)$ e $s_k \in [0, t_0]$ com $d(T(s_k)x_k, y^*) \geq \epsilon_0$. Podemos assumir que $s_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} s_0$ para algum $s_0 \in [0, t_0]$, por compacidade. Como $\mathbb{T} \times X \ni (t, x) \mapsto T(t)x \in X$ é contínua, $T(s_k)x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} T(s_0)y^*$ e obtemos $0 = d(T(s_0)y^*, y^*) \geq \epsilon_0$, uma contradição. \square

Lema 1.2.5. *Suponha que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo gradiente que tem um atrator global \mathcal{A} e que $\mathcal{E} = \{y_i^* : 1 \leq i \leq n\}$ para algum $n \in \mathbb{N}^*$. Seja $\mathcal{V} : X \rightarrow \mathbb{R}$ a função de Lyapunov associada a $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ e $\mathcal{V}(\mathcal{E}) = \{\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_p\}$ com $\mathbf{n}_i \leq \mathbf{n}_{i+1}$, $1 \leq i \leq p-1$.*

Se $1 \leq j \leq p-1$ e $\mathbf{n}_j \leq r < \mathbf{n}_{j+1}$, então $X_r = \{z \in X : \mathcal{V}(z) \leq r\}$ é positivamente invariante sob a ação de $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ e $\{T_r(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$, a restrição de $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ a X_r , tem atrator global

$$\mathcal{A}^{(j)} = \bigcup \{W^u(y_i^*) : \mathcal{V}(y_i^*) \leq \mathbf{n}_j\}.$$

Em particular, $\mathcal{V}(z) \leq \mathbf{n}_j$ para $z \in \mathcal{A}^{(j)}$, $\mathbf{n}_1 = \min\{\mathcal{V}(x) : x \in X\}$ e $\mathcal{A}^{(1)} = \{y^ \in \mathcal{E} : \mathcal{V}(y^*) = \mathbf{n}_1\}$ consiste de todos os pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis; isto é para $y^* \in \mathcal{A}^{(1)}$ existe uma vizinhança \mathcal{O}_{y^*} a qual é atraída por y^* .*

Demonstração. Decorre da definição da função de Lyapunov que X_r é positivamente invariante sob a ação de $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$. Para provar a existência de um atrator para

$\{T_r(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ notemos que as propriedades requeridas para obtermos um atrator global são herdadas de $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$: órbitas de subconjuntos limitados de X_r são limitadas, $\{T_r(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é ponto dissipativo e assintoticamente compacto. Logo $\{T_r(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}^{(j)}$. A restrição \mathcal{V}_r de \mathcal{V} a X_r é uma função de Lyapunov para $\{T_r(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ e a caracterização de $\mathcal{A}^{(j)}$ segue.

Agora provemos a última afirmação. Seja $\delta_0 = \frac{1}{2} \min\{d(x^*, y^*), x^*, y^* \in \mathcal{A}^{(1)}, x^* \neq y^*\}$. Se existem um $\delta_0 > \delta > 0$ e sequências $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em X e $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em \mathbb{T}^+ tais que $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x^*$ e $d(T(t_k)x_k, x^*) \geq \delta$ (com $d(T(t)x_k, x^*) < \delta$ para $0 \leq t < t_k$) concluímos que $\{T(t_k)x_k : k \in \mathbb{N}\}$ tem uma subsequência convergente. De fato, segue do Lema 1.2.4 que $t_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$ e o resultado segue da compacidade assintótica do semigrupo. Denote esta subsequência convergente por $\{T(t_k)x_k : k \in \mathbb{N}\}$ e seja y seu limite. É imediato do fato de que $\mathcal{V}(x_k) \rightarrow n_1$ que $\mathcal{V}(y) = \mathcal{V}(T(t)y) = n_1$. Portanto $y \in \mathcal{A}^{(1)}$ e $d(y, x^*) \geq \delta$. Por outro lado $\{T(t_k - 1)x_k : k \in \mathbb{N}\}$ também tem uma subsequência convergente e o limite z desta sequência pertence a $\mathcal{A}^{(1)} \cap \overline{B_\delta(x^*)}$. Segue que $z = x^*$ e que $x^* = T(1)x^* = T(1)z = y$, o que é uma contradição. Isto prova que, para cada $x^* \in \mathcal{A}^{(1)}$ e $0 < \delta < \delta_0$ existe um $\delta' > \delta > 0$ tal que, para todo $x \in B_{\delta'}(x^*)$, $\gamma^*(x) \subset B_\delta(x^*)$ e prova que $\mathcal{A}^{(1)}$ consiste somente dos equilíbrios estáveis. Para concluir precisamos somente notar que, para cada $x \in X$, $T(t)x \xrightarrow{t \rightarrow \infty} x^*$ para algum $x^* \in \mathcal{E}$. \square

1.3 Semigrupos dinamicamente gradientes

A definição de semigrupos gradientes via função de Lyapunov não nos induzem a esperar que uma perturbação de um semigrupo gradiente ainda seja gradiente. Contudo, uma outra família de semigrupos, os chamados dinamicamente gradientes, classificados pela dinâmica de seu atrator, nos dão esta estabilidade, o que mostraremos no terceiro capítulo. Desta maneira, nosso principal objetivo agora é estudar esta classe de semigrupos e encontrar justamente uma equivalência entre estas duas classes. Assim, no terceiro capítulo, obteremos diretamente da estabilidade dos semigrupos dinamicamente gradientes a não tão óbvia estabilidade dos semigrupos gradientes.

Antes de prosseguirmos, vamos destacar a distinção entre semigrupos gradientes e semigrupos que tem atratores do tipo gradiente,

Definição 1.3.1. *Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo com um atrator global \mathcal{A} com $\mathcal{E} = \{y_1^*, \dots, y_p^*\}$ para algum $p \in \mathbb{N}$. Se $\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^p \mathcal{W}^u(y_i^*)$, diremos que \mathcal{A} é um **atrator do tipo gradiente** e que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo com atrator do tipo gradiente.*

Segue do Teorema 1.2.3 que um semigrupo gradiente com um atrator global e um número finito de equilíbrios é um semigrupo com um atrator do tipo gradiente.

Vejam agora um exemplo do Hale [12] que mostra que um semigrupo com atrator de tipo gradiente não é estável sob perturbação.

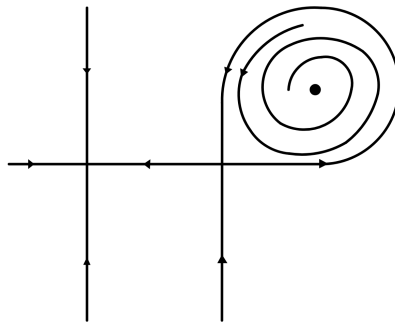


Figura 1.1: Semigrupo com atrator de tipo gradiente

A Figura 1.1 acima apresenta um atrator do tipo gradiente que não é proveniente de um semigrupo gradiente. Note que uma pequena perturbação deste semigrupo resulta de fato em um semigrupo com o atrator descrito na Figura 1.2 abaixo. Este atrator contém

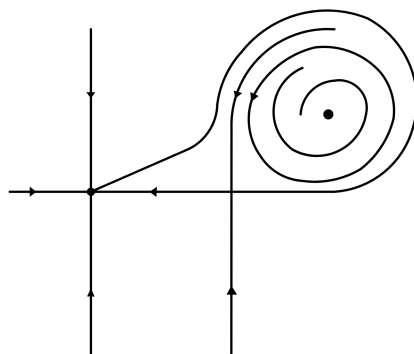


Figura 1.2: Semigrupo perturbado que não possui atrator de tipo gradiente

uma órbita periódica e portanto não é a união dos conjuntos instáveis de seus pontos de

equilíbrio.

Em [9], Carvalho et al provam que uma perturbação de um semigrupo gradiente tem atrator do tipo gradiente. Por outro lado, semigrupos que tem atratores do tipo gradiente não precisam ser gradientes. Assim, buscamos propriedades dinâmicas dos semigrupos que garantam que eles tenham atratores do tipo gradiente e que sejam estáveis por perturbações. Ainda, gostaríamos que estas propriedades sejam satisfeitas por semigrupos gradientes e suas perturbações. Com este objetivo, Carvalho e Langa introduzem o conceito de semigrupos dinamicamente gradientes em [6], originalmente gradient-like, utilizando as propriedades dinâmicas essenciais dos semigrupo gradientes. Agora iniciemos nosso estudo dessa classe de semigrupos.

Definição 1.3.2. *Considere um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ com um número finito de soluções estacionárias $\mathcal{E} = \{y_1^*, \dots, y_p^*\}$. Seja*

$$\delta_0 = \frac{1}{2} \min_{1 \leq i < j \leq p} d(y_i^*, y_j^*) > 0$$

Seja $\epsilon_0 < \delta_0$, $y^ \in \mathcal{E}$ e $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$. Uma ϵ -cadeia de y^* a y^* é um subconjunto $\{y_{l_1}^*, \dots, y_{l_k}^*\}$ de \mathcal{E} , juntamente com conjuntos $\{y_1, \dots, y_k\}$ em X e $\{t_1, \sigma_1, \dots, t_k, \sigma_k\}$ em \mathbb{T} tais que, $0 < \sigma_i < t_i$, $1 \leq i \leq k$, $k \leq p$, $d(y_i, y^*)_{l_i} < \epsilon$, $y^* = y_{l_1}^* = y_{l_{k+1}}^*$, $\text{dist}(T(\sigma_i)y_i, \mathcal{E}) > \epsilon_0$ e $d(T(t_i)y_i, y_{l_{i+1}}^*) < \epsilon$. Diremos que $y^* \in \mathcal{E}$ é **recorrente por cadeias** se existe um $\epsilon_0 > 0$ fixo e uma ϵ -cadeia de y^* a y^* , para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$.*

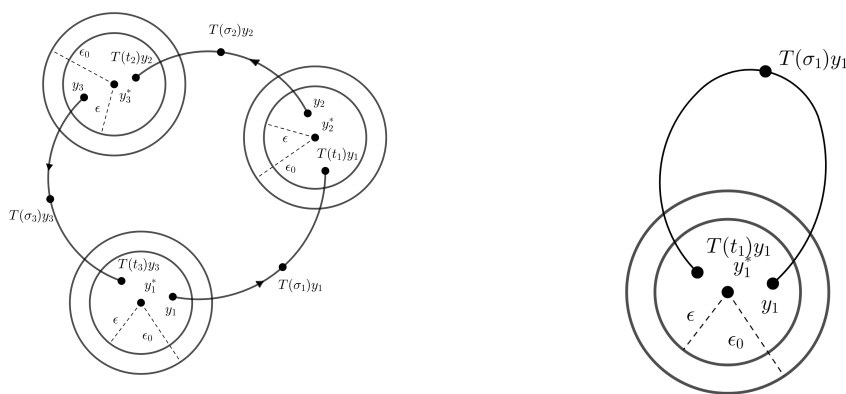


Figura 1.3: Exemplos de cadeias

Definição 1.3.3. *Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo com um número finito de soluções estacionárias $\mathcal{E} = \{y_1^*, \dots, y_p^*\}$ e suponha que ele tem um atrator global \mathcal{A} . Dizemos que*

$\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo **dinamicamente gradiente** se as seguintes condições são satisfeitas:

(G1) Dada uma solução global $\xi : \mathbb{T} \rightarrow X$ em \mathcal{A} , existem $i, j \in \{1, \dots, p\}$ tais que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi(t), y_i^*) = 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow \infty} d(\xi(t), y_j^*) = 0.$$

(G2) $\mathcal{E} = \{y_1^*, \dots, y_p^*\}$ não contém nenhum ponto recorrente por cadeia.

As hipóteses (G1) e (G2) implicam importantes propriedades dinâmicas de um semigrupo gradiente, como veremos adiante. De (G1) temos que $\mathcal{A} = \cup_{i=1}^p \mathcal{W}^u(y_i^*)$, pois se $x \in \mathcal{A}$ então existe uma solução global $\xi : \mathbb{T} \rightarrow X$ em \mathcal{A} e assim $x \in \mathcal{W}^u(y_i^*)$ para algum $1 \leq i \leq p$. Por outro lado, se $x \in \mathcal{W}^u(y_i^*)$ para algum $1 \leq i \leq p$ então, como \mathcal{A} atrai pontos, existe uma solução global limitada por x , assim $x \in \mathcal{A}$. Disto temos que o semigrupo tem atrator do tipo gradiente, como gostaríamos. Já a hipótese (G2) garante que nenhum número finito de orbitas pode produzir um contorno fechado.

Os resultados a seguir são fundamentais no desenvolvimento da teoria de atratores para semigrupos dinamicamente gradientes. O primeiro deles garante uma aproximação de soluções sob certas condições e será de extrema utilidade adiante.

Proposição 1.3.4. *Suponha que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo assintoticamente compacto. Sejam $\{\sigma_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência em \mathbb{T}^+ com $\sigma_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$, $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada em X e, para $\mathbb{J}_k = \{s \in \mathbb{T} : -\sigma_k \leq s < \infty\}$, defina $\xi^k : \mathbb{J}_k \rightarrow X$ por $\xi^k(s) = T(s + \sigma_k)u_k$, $s \in \mathbb{J}_k$. Se $\{T(s)u_k : k \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{T}^+\}$ é limitada, existe uma solução global $y : \mathbb{T} \rightarrow X$ de $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ e uma subsequência de $\{\xi^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ (que novamente denotamos por $\{\xi^k\}_{k \in \mathbb{N}}$) tal que*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \xi^k(s) \longrightarrow y(s), \forall s \in \mathbb{T}.$$

A demonstração da Proposição 1.3.4 é imediata do Lema 3.2.3, que será demonstrado mais adiante, no Capítulo 3, no caso particular em que a família de semigrupos é independente do parâmetro, ou ainda, é uma família constante.

O próximo resultado garante que, para um semigrupo dinamicamente gradiente, dada qualquer vizinhança V dos equilíbrios e qualquer subconjunto B limitado de X , num tempo suficientemente grande, as soluções iniciando em B passam pela vizinhança V .

Lema 1.3.5. *Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo com um número finito de soluções estacionárias $\mathcal{E} = \{y_1^*, \dots, y_p^*\}$ e suponha que o semigrupo tem um atrator global \mathcal{A} . Se $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ satisfaz (G1), dado $\delta < \delta_0$ e $B \subset X$ limitado, existe $t_0 = t_0(\delta, B) > 0$ tal que $\{T(t)u_0 : 0 \leq t \leq t_0\} \cap (\bigcup_{i=1}^p B_\delta(y_i^*)) \neq \emptyset$ para todo $u_0 \in B$.*

Demonstração. Suponha por absurdo que existe uma sequência $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em B e uma sequência $\{t_k\}$ em \mathbb{T}^+ (com $t_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$) tais que $\{T(s)u_k : 0 \leq s \leq 2t_k\} \cap \bigcup_{i=1}^p B_\delta(y_i^*) = \emptyset$. Usando a Proposição 1.3.4, temos que existe uma solução $\xi : \mathbb{T} \rightarrow X$ tal que $T(s + t_k)u_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \xi(s)$ para $s \in \mathbb{T}$. Claramente $\xi(s) \in \mathcal{A}$, para todo $s \in \mathbb{T}$ e como para $-t_k \leq s \leq t_k$, $T(s + t_k)u_k \in \bigcup_{i=1}^p B_\delta(y_i^*)$, $\xi(s) \in \bigcup_{i=1}^p B_\delta(y_i^*)$ para todo $s \in \mathbb{T}$, o que contradiz (G1). \square

Finalmente, no próximo resultado estabeleceremos que dada uma vizinhança V_1 de um ponto de equilíbrio, existe outra vizinhança V_2 maior tal que se uma solução começa em V_1 e deixa V_2 então ela nunca retorna a V_1 .

Lema 1.3.6. *Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo dinamicamente gradiente. Se $\mathcal{E} = \{y_1^*, \dots, y_p^*\}$ denota o conjunto de suas soluções estacionárias e \mathcal{A} o seu atrator global, dado $0 < \delta < \delta_0$, existe um $\delta' > 0$ tal que, se para algum $1 \leq i \leq p$, $d(u_0, y_i^*) < \delta'$ e, para algum $t_1 > 0$, $d(T(t_1)u_0, y_i^*) \geq \delta$, então $d(T(t)u_0, y_i^*) > \delta'$ para todo $t \geq t_1$.*

Demonstração. Suponha por absurdo que, para algum $1 \leq i \leq p$ e $\delta > 0$, existe uma sequência $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em X com $d(u_k, z_i^*) < \frac{1}{k}$ e sequências $\sigma_k < t_k$ em \mathbb{T}^+ tais que $d(T(\sigma_k)u_k, z_i^*) \geq \delta$ e $d(T(t_k)u_k, z_i^*) < \frac{1}{k}$. Isto contradiz (G2) e prova o resultado. \square

Agora provaremos que, para um semigrupo dinamicamente gradiente, o ω -limite de um ponto consiste exatamente de um dos pontos de equilíbrio. Vale ressaltar que a condição (G1) é imposta apenas para soluções no atrator.

Lema 1.3.7. *Suponha que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo dinamicamente gradiente com um conjunto de equilíbrios $\mathcal{E} = \{y_1^*, \dots, y_p^*\}$ e um atrator global \mathcal{A} . Dado $x \in X$ existe um $y_j^* \in \mathcal{E}$ tal que*

$$T(t)x \xrightarrow{t \rightarrow \infty} y_j^*.$$

Demonstração. Segue do Lema 1.3.6 que, dado $\delta \in (0, \delta_0)$ existe $\delta' \in (0, \delta)$ tal que, para todo $v \in X$ satisfazendo $d(v, y_i^*) < \delta'$ e $d(T(t_1)v, y_i^*) \geq \delta$, para algum $t_1 = t_{v, \delta} > 0$ (que depende de v), vale $d(T(t)v, y_i^*) > \delta'$ para todo $t \geq t_1$. Por outro lado seja $x \in X$ dado, como $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ possui atrator global, $\gamma^+(x)$ é limitada, segue do Lema 1.3.5 que, dado δ' existe um $t_{\delta'} = t_{\delta'}(\gamma^+(x)) \in \mathbb{T}$ tal que, para cada $v \in \gamma^+(x)$,

$$\{T(t)v : 0 \leq t \leq t_{\delta'}\} \cap \bigcup_{i=1}^p B_{\delta'}(y_i^*) \neq \emptyset.$$

Como \mathcal{E} é finito, e $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é dinamicamente gradiente, existe um $y_j^* \in \mathcal{E}$ e, para cada $\delta \in (0, \delta_0)$, um $s_\delta \in \mathbb{T}^+$ tal que $T(s)x \in B_\delta(y_j^*)$ para todo $s \geq s_\delta$. Isso completa a prova do resultado. \square

Definimos agora uma condição mais simples e similar à recorrência por cadeia que será útil futuramente.

Definição 1.3.8. *Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo com um número finito de soluções estacionárias $\mathcal{E} = \{y_1^*, \dots, y_p^*\}$ e um atrator global \mathcal{A} . Uma **estrutura homoclínica** de \mathcal{A} é um conjunto $\{y_{l_1}^*, \dots, y_{l_k}^*\} \subset \mathcal{E}$ e um conjunto de soluções globais $\{\xi^{(i)} : \mathbb{T} \rightarrow X, 1 \leq i \leq k\}$ em \mathcal{A} tal que, fazendo $y_{l_{k+1}}^* := y_{l_1}^*$,*

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \xi^{(i)}(t) = y_{l_i}^*, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \xi^{(i)}(t) = y_{l_{i+1}}^*, \quad 1 \leq i \leq k.$$

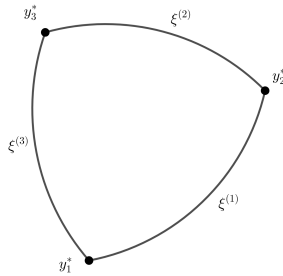


Figura 1.4: Exemplo de estrutura homoclínica

Agora provemos o seguinte resultado relacionando as condições (G1) e (G2) à não-existência de estruturas homoclínicas.

Lema 1.3.9. *Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo que possui um número finito de soluções estacionárias $\mathcal{E} = \{y_1^*, \dots, y_p^*\}$ e um atrator global \mathcal{A} . Se $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ satisfaz (G1) então (G2) é satisfeita se, e somente se, \mathcal{A} não possui estruturas homoclínicas.*

Demonstração. Se \mathcal{A} tem uma estrutura homoclínica e y^* é um equilíbrio nesta estrutura é fácil ver que y^* é recorrente por cadeias, portanto não satisfaz G2.

Por outro lado, se $y^* \in \mathcal{E}$, é recorrente por cadeias, existem $\delta < \delta_0$, pontos de equilíbrio $\{y_{l_1}^*, \dots, y_{l_{r+1}}^*\} \subset \mathcal{E}$ e para cada $\mathbb{N} \ni k > \frac{1}{\delta}$, existem pontos y_1^k, \dots, y_{r+1}^k , e tempos $t_1^k > \tau_1^k, \dots, t_r^k > \tau_r^k$ tais que

$$d(y_i^k, y_{l_i}^*) < \frac{1}{k}, \quad d(T(\tau_i^k)y_i^k, \mathcal{E}) > \delta \quad \text{e} \quad d(T(t_i^k)y_i^k, y_{l_{i+1}}^*) < \frac{1}{k}, \quad \text{com } 1 \leq i \leq r.$$

Assim, escolha $\sigma_i^k > 0$ tal que $d(T(\sigma_i^k)y_i^k, y_{l_1}^*) \geq \delta$ e $d(T(t)y_i^k, y_{l_i}^*) < \delta$, para todo $0 \leq t < \sigma_i^k$. Do Lema 1.2.4 segue que $\sigma_i^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} +\infty$.

Para $t \in [-\sigma_i^k, \infty)$ seja $\xi^{i,k}(t) = T(\sigma_i^k + t)y_i^k$. Segue da Proposição 1.3.4 que existe solução global $\xi_i : \mathbb{T} \rightarrow X$. Como cada $\xi^{(i)}$ deve convergir para um equilíbrio quando $t \rightarrow +\infty$ e quando $t \rightarrow -\infty$ e também $\xi^{(i)}(t) \in B_\delta(y_{l_i}^*)$ para todo $t < 0$ temos que $\xi^{(i)}(t) \rightarrow y_{l_i}^*$ quando $t \rightarrow -\infty$. Podemos assumir que, entre $-\sigma_k^i$ e $t_k^i - \sigma_k^i$, a solução $\xi^{i,k}$ permanece longe de $\mathcal{E} = \{y_{l_i}^*, y_{l_{i+1}}^*\}$ pois caso contrário poderíamos inserir novos pontos nas ϵ -cadeias até que este fosse o caso. Segue do Lema 1.3.6 que $\xi^{(i)}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} y_{l_{i+1}}^*$. O conjunto $\{y_{l_1}^*, \dots, y_{l_k}^*\} \subset \mathcal{E}$ e o conjunto de soluções globais $\{\xi_i : \mathbb{T} \rightarrow X, 1 \leq i \leq k\}$ são tais que,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \xi_n^{(i)} = y_{l_i}^* \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \xi_n^{(i)} = y_{l_{i+1}}^*, \quad 1 \leq i \leq k,$$

com $y_{l_{i+1}}^* := y_{l_1}^*$. O que define uma estrutura homoclínica para \mathcal{A} □

Com isto provamos a existência de dois pontos de equilíbrio distintos com características atratoras e repulsoras respectivamente. Mais adiante exploraremos essa ideia de atração local que será fundamental na construção da chamada Decomposição de Morse.

Corolário 1.3.10. *Se $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo dinamicamente gradiente e \mathcal{A} seu atrator, existem pontos de equilíbrio y_α^* e y_ω^* tais que y_α^* tem conjunto estável trivial em*

\mathcal{A} ; isto é, $W_{\mathcal{A}}^s(y_{\alpha}^*) = \{y_{\alpha}^*\}$ onde

$$W_{\mathcal{A}}^s(y_{\alpha}^*) := \{y \in \mathcal{A} : \text{tal que } T(t)y \xrightarrow{t \rightarrow \infty} y_{\alpha}^*\}$$

e y_{ω}^* tem conjunto instável trivial, isto é, $W_{\mathcal{A}}^u(y_{\omega}^*) = \{y_{\omega}^*\}$

Demonstração. Vamos mostrar a existência de um equilíbrio y_{ω}^* com um conjunto instável trivial. A existência de y_{α}^* é similar. Se $\mathcal{E} = \{y_1^*, \dots, y_p^*\}$ é o conjunto dos equilíbrios para $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ e para cada y_i^* existe uma solução $\xi^{(i)} : \mathbb{T} \rightarrow X$ tal que $\xi^{(i)} \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} y_i^*$, então como o semigrupo é dinamicamente gradiente obtemos $j \neq i$ tal que $\xi^{(i)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} y_j^*$. Assim partindo do y_1 obtemos uma sequência de equilíbrios em que termos consecutivos são distintos, como há um número finito de equilíbrios obtemos $1 \leq l \leq p$ tal que $\{y_1^*, \dots, y_l^*\}$ e $\{\xi^{(1)} \dots, \xi^{(l)}\}$ constituem uma estrutura homoclínica, o que contradiz (G2) e prova a existência de y_{ω}^* . \square

Finalmente, de posse do Lema 1.3.9, obtemos que um semigrupo gradiente é de fato dinamicamente gradiente.

Proposição 1.3.11. *Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ semigrupo gradiente com atrator global \mathcal{A} e conjunto finito de pontos de equilíbrio $\mathcal{E} = \{y_1^*, \dots, y_p^*\}$. Então $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é dinamicamente gradiente relativo a $\mathcal{E} = \{y_1^*, \dots, y_p^*\}$.*

Demonstração. De fato, do Lema 1.2.2 temos que (G1) é satisfeita. Já do Lema 1.3.9 se (G2) não é satisfeita então obtemos uma estrutura homoclínica, digamos $\{y_1^*, \dots, y_l^*\}$ e $\{\xi^{(1)} \dots, \xi^{(l)}\}$ então da continuidade da função de Lyapunov \mathcal{V} e do fato que é decrescente ao longo de órbitas obtemos

$$\mathcal{V}(y_i^*) = \lim_{s \rightarrow -\infty} \mathcal{V}(\xi^{(1)}) < \lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{V}(\xi^{(1)}) = \mathcal{V}(y_{i+1}^*)$$

Então $\mathcal{V}(y_1^*) < \mathcal{V}(y_2^*) < \dots < \mathcal{V}(y_l^*) < \mathcal{V}(y_1^*)$, uma contradição. \square

1.4 Decomposição de Morse

Nesta seção, obteremos uma decomposição de Morse para um atrator \mathcal{A} de um semigrupo dinamicamente gradiente $\{T(t) : t \geq 0\}$, que essencialmente ordena os equilíbrios, ou, como veremos adiante, os invariantes isolados deste semigrupo de acordo com sua dinâmica atratora local. Essa decomposição será peça chave na construção da função de Lyapunov para um semigrupo dinamicamente gradiente. Começamos pelo conceito de par atrator-repulsor.

Definição 1.4.1. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo com atrator global \mathcal{A} . Diremos que um subconjunto não vazio Ξ de \mathcal{A} é um **atrator local** se existe um $\varepsilon > 0$ tal que $\omega(\mathcal{O}_\varepsilon(\Xi)) = \Xi$. O **repulsor** Ξ^* associado ao atrator local Ξ é o conjunto definido por*

$$\Xi^* = \{x \in \mathcal{A} : \omega(x) \cap \Xi = \emptyset\}$$

O par (Ξ, Ξ^*) é chamado um par atrator-repulsor para $\{T(t) : t \geq 0\}$.

Vejamos que o repulsor possui boas propriedades.

Proposição 1.4.2. *Se Ξ é atrator local, então Ξ^* é fechado, invariante e $\Xi \cap \Xi^* = \emptyset$.*

Demonstração. Como $\omega(T(t)x) = \omega(x)$ para $t \geq 0$ qualquer, é claro que $T(t)x \in \Xi^*$ se $x \in \Xi^*$, logo $T(t)\Xi^* \subset \Xi^*$. Por outro lado, dado $x \in \Xi^* \subset \mathcal{A}$ seja $\phi : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{A}$ solução global com $\phi(0) = x$. Assim temos $T(t)\phi(-t) = x$ para todo $t > 0$ com $\phi(-t) \in \Xi^*$, já que $\omega(x) = \omega(\phi(-t))$. Daí $x \in T(t)\Xi^*$ e obtemos que Ξ^* é invariante.

Mostremos que é fechado. Tome $x_n \rightarrow y$, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Xi^*$. Se $y \notin \Xi^*$, então existe $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ tal que $T(t_n)y \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Xi$. Desta convergência e da continuidade do semigrupo, tomando (o máximo entre dois naturais se for preciso) n suficientemente grande obtemos

$$d(T(t_n)x_n, \Xi) \leq d(T(t_n)x_n, T(t_n)y) + d(T(t_n)y, \Xi) < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Daí $T(t_n)x_n \in \mathcal{O}_\varepsilon(\Xi)$ e $\omega(x_n) \cap \Xi \neq \emptyset$. Uma contradição. Logo Ξ^* é fechado. Finalmente, como $\omega(\Xi) = \Xi$, então Ξ^* e Ξ são disjuntos. Isto conclui a prova. \square

Observe que segue diretamente da definição que Ξ é um atrator local se, e somente se, é compacto invariante e atrai $\mathcal{O}_\varepsilon(\Xi)$ para algum ε . Observe ainda que a definição

apresentada difere um pouco da usual, como em [11], onde pede-se que o atrator local atraia uma vizinhança própria, contudo vejamos que coincidem.

Lema 1.4.3. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo em X com atrator global A . Se Ξ é um conjunto invariante compacto para $\{T(t) : t \geq 0\}$ e existe um $\varepsilon > 0$ tal que Ξ atrai $\mathcal{O}_\varepsilon(\Xi) \cap A$ então, dado $\delta > 0$ existe um $\delta' > 0$ tal que $\gamma^+(O_{\delta'}(\Xi)) \subset \mathcal{O}_\delta(\Xi)$, onde $\gamma^+(O_{\delta'}(\Xi)) = \bigcup_{x \in O_{\delta'}(\Xi)} \bigcup_{t \geq 0} T(t)x$.*

Demonstração. Dado $0 < \delta < \varepsilon$ se não existe $\delta' > 0$ tal que $\gamma^+(O_{\delta'}(\Xi)) \subset \mathcal{O}_\delta(\Xi)$, existem $x \in \Xi$, $X \ni x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ e $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ tais que

$$d(T(t_n)x_n, \Xi) = \delta \text{ e } T(t)x_n \in \mathcal{O}_\delta(\Xi), t \in [0, t_n]. \quad (1.1)$$

Como $\{T(t) : t \geq 0\}$ tem atrator global, cada solução $\xi_n : [-t_n, \infty) \rightarrow X, t \mapsto T(t + t_n)x_n$ é limitada, também $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente logo limitada, assim do Lema 3.2.3 obtemos solução global $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ tal que $\xi_n(t) \rightarrow \xi(t)$ para cada t . Portanto segue de (1.1) que $\xi(t) \in \overline{\mathcal{O}_\delta(\Xi)} \cap \mathcal{A} \subset \mathcal{O}_\varepsilon(\Xi) \cap \mathcal{A}$ para todo $t \leq 0$. Além disso, como $\xi_n(0) \rightarrow \xi(0)$ segue de (1.1) que $d(\xi(0), \Xi) = \delta$, portanto Ξ não pode atrair $\mathcal{O}_\varepsilon(\Xi) \cap \mathcal{A}$, uma contradição. \square

Em seguida, vemos que um atrator local do semigrupo restrito ao atrator é também atrator do semigrupo original.

Lema 1.4.4. *Se $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo em X com um atrator global \mathcal{A} e $S(t) := T(t)|_{\mathcal{A}}$, claramente $\{S(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo no espaço métrico \mathcal{A} . Se Ξ é um atrator local para $\{S(t) : t \geq 0\}$ no espaço métrico \mathcal{A} e K é um subconjunto compacto de \mathcal{A} tal que $K \cap \Xi^* = \emptyset$, então Ξ atrai K . Além disso Ξ é um atrator local para $\{T(t) : t \geq 0\}$ em X .*

Demonstração. Seja K um subconjunto compacto de \mathcal{A} tal que $K \cap \Xi^* = \emptyset$. Suponha por absurdo K não é atraído por Ξ , como este é atrator local segue que $\Xi = \omega(\mathcal{O}_\varepsilon(\Xi) \cap \mathcal{A})$ para algum $\varepsilon > 0$. Tome $0 < \delta' < \varepsilon$, então da definição de atração existem $\delta' \in (0, \delta)$, $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, $x \in K$ e $K \ni x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ tais que $d(T(t)x_n, \Xi) \geq \delta'$, para todo $0 \leq t \leq t_n$.

Isso implica que $d(T(t)x, \Xi) \geq \delta'$ para todo $t \geq 0$ e, conseqüentemente $\omega(x) \cap \Xi = \emptyset$ e portanto $x \in \Xi^*$, o que é uma contradição.

Para a segunda parte do resultado note que, do Lema 1.4.3, existe $\delta' \in (0, \varepsilon)$ tal que $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(\Xi) \cap \mathcal{A}$ e portanto $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)) \cap \Xi^* = \emptyset$. Como $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi))$ é invariante e Ξ atrai $\mathcal{O}_\varepsilon(\Xi) \cap \mathcal{A}$, devemos ter que $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)) \subset \Xi$. Como $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi))$ atrai $\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)$ o resultado segue. \square

No seguinte lema obtemos propriedades assintóticas do repulsor Ξ^* .

Lema 1.4.5. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo em X com um atrator global \mathcal{A} e um par atrator-repulsor (Ξ, Ξ^*) .*

- 1) *Uma solução global $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ de $\{T(t) : t \geq 0\}$ com a propriedade que $\overline{\xi(\mathbb{R})} \cap \Xi^* \neq \emptyset$ deve satisfazer $d(\xi(t), \Xi) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0$.*
- 2) *Uma solução global $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ de $\{T(t) : t \geq 0\}$ com a propriedade que $\xi(t) \in \mathcal{O}_\delta(\Xi^*)$ para todo $t \leq 0$ e algum $\delta > 0$ tal que $\mathcal{O}_\delta(\Xi^*) \cap \Xi = \emptyset$ deve satisfazer $d(\xi(t), \Xi^*) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0$.*

Demonstração. Se a conclusão de (1) é falsa, existe $\delta' > 0$ e sequência $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ tal que $d(\xi(-t_n), \Xi^*) \geq \delta'$ e, para algum $t \in [-t_n - 1, -t_n]$, $d(\xi(t), \Xi^*) < \delta'$. Isto contradiz o fato que Ξ deve atrair o subconjunto compacto $K = \{z \in \mathcal{A} : d(z, \Xi^*) \geq \delta'\}$

Para provar 2) primeiro notamos que, como $\mathcal{O}_\delta(\Xi^*)$ contém $\xi(\mathbb{R}^-)$ e o semigrupo tem atrator, $\xi(\mathbb{R})$ é limitada e conseqüentemente está contida no atrator. Portanto $\overline{\xi(\mathbb{R})}$ é compacto. Assim, se $\overline{\xi(\mathbb{R})} \cap \Xi^* = \emptyset$, do Lema 1.4.4 temos que Ξ atrai $\overline{\xi(\mathbb{R})}$, mas este é invariante, portanto $\overline{\xi(\mathbb{R})} \subset \Xi$, uma contradição. Logo $\overline{\xi(\mathbb{R})} \cap \Xi^* \neq \emptyset$ e segue de 1) que $d(\xi(t), \Xi^*) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0$. Isto completa a demonstração. \square

O próximo resultado garante que um par atrator-repulsor determina uma dinâmica gradiente.

Lema 1.4.6. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo em X com atrator global \mathcal{A} e um par atrator-repulsor (Ξ, Ξ^*) . Se $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ é uma solução global limitada para $\{T(t) : t \geq 0\}$*

por $x \notin \Xi \cup \Xi^*$, então $\xi(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \Xi$ e $\xi(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \Xi^*$. Além disso, se $x \in X \setminus \mathcal{A}$ então, $T(t)x \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \Xi \cup \Xi^*$.

Demonstração. Como por hipótese $x \in \Xi^*$ temos que $\omega(x) \cap \Xi \neq \emptyset$, logo $\xi(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \Xi$, já que Ξ é atrator local. Para mostrar que $\xi(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \infty$ consideremos o seguintes casos: Se $\overline{\xi(\mathbb{R})} \cap \Xi^* = \emptyset$, segue que $\overline{\xi(\mathbb{R})} \subset \Xi$ uma contradição. Logo, $\overline{\xi(\mathbb{R})} \cap \Xi^*$ é não vazio e do Lema (1.4.5) segue o resultado.

Para $x \in X \setminus \mathcal{A}$ provemos que $T(t)x \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \Xi \cup \Xi^*$. Se $\overline{\gamma^+(x)} \cap \Xi \neq \emptyset$ temos que $T(t)x \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \Xi$. Por outro lado, se existe $\delta > 0$ com $\gamma^+(x) \cap \mathcal{O}_\delta(\Xi) = \emptyset$, e neste caso afirmamos que $T(t)x \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \Xi^*$. Se a afirmativa é falsa, existe $\nu > 0$ e uma sequência $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ tal que $d(T(t_n)x, \Xi^*) \geq \nu$. Considerando a sequência de funções $\xi_n : [-t_n, \infty) \rightarrow X$ definida por $\xi_n(t) = T(t + t_n)x$, $t \geq -t_n$, construímos uma solução global $\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}$ tal que $d(\xi(0), \Xi^*) \geq \nu$ e $d(\xi(t), \Xi) \geq \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim $\omega(\xi(0)) \cap \Xi = \emptyset$ e $\xi(0) \in \Xi^*$ o que é uma contradição. Isto conclui a prova. \square

Motivados por estas propriedades de par atrator-repulsor, vamos agora substituir os equilíbrios por conjuntos invariantes isolados e definiremos os semigrupos dinamicamente gradientes relativos a uma família disjunta de invariantes isolados. Os resultados provados para semigrupos dinamicamente gradientes possuem análogos para este caso mais geral e suas provas são semelhantes.

Definição 1.4.7. Dizemos que $\Xi := (\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n)$ é uma **família disjunta de conjuntos invariantes isolados** se existe $\delta > 0$ tal que $\mathcal{O}_\delta(\Xi_i) \cap \mathcal{O}_\delta(\Xi_j) = \emptyset$, $1 \leq i < j \leq p$, e Ξ_i é o subconjunto invariante maximal de $\mathcal{O}_\delta(\Xi_i) := \{z \in X : \text{dist}(z, \Xi_i) < \delta\}$.

Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo com um atrator global \mathcal{A} que contém uma família disjunta de conjuntos invariantes isolados $\Xi := (\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n)$. Definimos de modo análogo ao feito para equilíbrios a recorrência por cadeia.

Definição 1.4.8. Seja δ como na Definição 1.4.7 e fixe $\varepsilon_0 \in (0, \delta)$. Para $\Xi \in \Xi$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, uma ε -cadeia de Ξ a Ξ é uma sequência $\{\Xi_{l_1}, \dots, \Xi_{l_k}\} \subset \Xi$, uma sequência $t_1, \sigma_1, \dots, t_k, \sigma_k$, com $t_i > \sigma_i, 1 \leq i \leq k \leq p$, e uma sequência de vetores $u_i, 1 \leq i \leq k$, tais que $u_i \in \mathcal{O}_\varepsilon(\Xi_{l_i}), T(\sigma_i)u_i \notin \mathcal{O}_{\varepsilon_0}(\cup_{i=1}^k \Xi_{l_i})$ e $T(t_i)u_i \in \mathcal{O}_\varepsilon(\Xi_{l_{i+1}})$, $1 \leq i \leq k$ com a identificação $\Xi = \Xi_{l_{k+1}} = \Xi_{l_1}$. Diremos que $\Xi \in \Xi$ é **recorrente por cadeias** se existe um $\varepsilon_0 \in (0, \delta)$ e ε -cadeias de Ξ a Ξ para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Definição 1.4.9. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo que possui um atrator global \mathcal{A} . Diremos que $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo **dinamicamente gradiente relativo a uma família disjunta de invariantes isolados** $\Xi := (\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n)$ se,*

(GG1) *Para cada solução global $\xi : \mathbb{T} \rightarrow X$ em \mathcal{A} existem $1 \leq i, j \leq n$ tais que*

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \text{dist}(\xi(t), \Xi_i) = 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\xi(t), \Xi_j) = 0.$$

(GG2) *Nenhum elemento de $\Xi := (\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n)$ é recorrente por cadeias.*

Assim, segue do Lema 1.4.6 o seguinte corolário .

Corolário 1.4.10. *Se $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo em X com um atrator global \mathcal{A} e (Ξ, Ξ^*) é um par atrator-repulsor para $\{T(t) : t \geq 0\}$, então $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo dinamicamente gradiente relativo à família disjunta de invariantes isolados $\{\Xi, \Xi^*\}$.*

Com estes resultados podemos começar a estudar a decomposição de Morse do atrator de um semigrupo dinamicamente gradiente relativo a uma família de conjuntos invariantes isolados. Primeiro introduziremos a definição de decomposição de Morse.

Definição 1.4.11. *Dada uma família crescente $\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_n = \mathcal{A}$, de $n + 1$ atratores locais de \mathcal{A} e $\mathcal{A} = A_0^* \supset A_1^* \supset \dots \supset A_n^* = \emptyset$ seus repulsores associados, defina $\Xi_j := A_j \cap A_{j-1}^*$, para $j = 1, \dots, n$. A n -upla ordenada $\Xi := (\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n)$ é chamada uma **decomposição de Morse** de \mathcal{A} .*

Lema 1.4.12. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo com atrator global \mathcal{A} e $\Xi \subset \mathcal{A}$ um conjunto invariante isolado. Então Ξ é um atrator local se, e somente se, $\mathcal{W}^u(\Xi) = \Xi$.*

Demonstração. Se Ξ é atrator local, sabemos que se uma solução global $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ por $x \in X \setminus \Xi$ tem α -limite não-vazio, como o semigrupo tem atrator global, esta solução é limitada e portanto está no atrator global. Segue do Lema 1.4.6 que $\text{dist}(\xi(t), \Xi^*) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0$, logo $x \notin \mathcal{W}^u(\Xi)$. Concluímos que $\mathcal{W}^u(\Xi) = \Xi$, já que Ξ é invariante. Por outro lado, se Ξ é um invariante isolado e não é atrator local, então existem $\delta > 0$, $x \in \Xi$, sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em \mathcal{A} com $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$, e uma sequência $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ tais que $T(t_n)x_n = \delta$ e $\text{dist}(T(t)x_n, \Xi) \leq \delta$ para todo $t \in [0, t_n]$. Disto podemos obter uma solução global $\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}$ tal que $\text{dist}(\xi(t), \Xi) \leq \delta$ para todo $t \leq 0$. Segue do fato que Ξ é um invariante isolado que $\alpha_\xi(\xi(0)) \subset \Xi$ e $\text{dist}(\xi(t), \Xi) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0$. \square

Deste ponto em diante consideraremos semigrupos dinamicamente gradientes relativos a famílias de invariantes isolados, generalizando a definição para pontos de equilíbrio, substituindo-os nas definições sem perda. Assim obteremos futuramente a equivalência entre semigrupos gradientes como definidos na Seção 1 e dinamicamente gradientes na Seção 2 como um caso particular.

Lema 1.4.13. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo dinamicamente gradiente relativo à família disjunta de conjuntos invariantes isolados $\Xi := (\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n)$. Então, existe um $1 \leq k \leq n$ tal que Ξ_k é um atrator local para $\{T(t) : t \geq 0\}$ em X .*

Demonstração. Do Lema 1.4.12, se não existe um atrator local em Ξ temos que, para cada $1 \leq i \leq n$, existe uma solução global $\xi_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}$ tal que $\xi_i(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \Xi_i$ e $\xi_i(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \Xi_{j(i)}$ com $j(i) \neq i$. Como há um número finito de invariantes isolados, isto produz uma estrutura homoclínica e nos dá uma contradição, o que conclui a prova. \square

Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo dinamicamente gradiente relativo à família disjunta de invariantes isolados $\Xi := (\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n)$. Se (após uma possível reordenação) Ξ_1 é um atrator local para $\{T(t) : t \geq 0\}$ e

$$\Xi^* = \{a \in \mathcal{A} : \omega(a) \cap \Xi_1 = \emptyset\}$$

cada Ξ_i , $i > 1$ está contido em Ξ_1^* e para qualquer $a \in \mathcal{A} \setminus \{\Xi_1 \cup \Xi_1^*\}$ e solução global $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}$ com $\phi(0) = a$ temos que

$$\Xi_1^* \xleftarrow{t \rightarrow -\infty} \phi_j(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \Xi_1.$$

Considerando a restrição $T_1(t)$ de $T(t)$ a $\Xi_1^* = \Xi_{1,0}^*$ temos que $T_1(t)$ é um semigrupo dinamicamente gradiente em Ξ_1^* relativo à família disjunta de conjuntos invariantes isolados $\{\Xi_2, \dots, \Xi_n\}$ e podemos assumir, sem perda de generalidade, que Ξ_2 é um atrator local para $\{T_1(t) : t \geq 0\}$ em Ξ_1^* . Se $\Xi_{2,1}^*$ é o repulsor associado ao conjunto invariante isolado Ξ_2 de $\{T_1(t) : t \geq 0\}$ em Ξ_1^* podemos prosseguir e considerar a restrição $\{T_2(t) : t \geq 0\}$ do semigrupo $\{T_1(t) : t \geq 0\}$ a $\Xi_{2,1}^*$ e $\{T_2(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo dinamicamente gradiente em $\Xi_{2,1}^*$ relativo à família disjunta de invariantes isolados $\{\Xi_3, \dots, \Xi_n\}$.

Prosseguindo com este processo, após um número finito de passos, obtemos uma reordenação de $\{\Xi_1, \dots, \Xi_n\}$ de modo que Ξ_j é um atrator local para a restrição de $\{T(t) : t \geq 0\}$ a $\Xi_{j,j-1}^*$ ($\Xi_{0,-1}^* := \mathcal{A}$).

Com esta construção, se uma solução global $\Xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}$ satisfaz

$$\Xi_l \xleftarrow{t \rightarrow -\infty} \xi(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \Xi_k$$

então $l \geq k$. Para ver isto, primeiro observamos que se (Ξ, Ξ^*) é um par atrator repulsor, qualquer solução global $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow X$ com $\sigma(0) \in \Xi^*$ satisfaz $\sigma(t) \in \Xi^*$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Da convergência de $\xi(\cdot)$ para Ξ_k , necessariamente $\xi(0) \in \Xi_{k-1, k-2}^*$ é invariante e contém somente os invariantes isolados $\{\Xi_k, \Xi_{k+1}, \dots, \Xi_n\}$. Disto segue imediatamente que $l \geq k$.

Mostraremos adiante que esta reordenação dos $\{\Xi_1, \dots, \Xi_n\}$ (que denotamos da mesma forma) é uma decomposição de Morse para \mathcal{A} com uma sequência oportunamente escolhida $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n$ de atratores locais. De fato basta definir

$$A_0 = \emptyset, A_1 = \Xi_1 \text{ e para } j = 2, 3, \dots, n$$

$$A_j = A_{j-1} \cup \mathcal{W}^u(\Xi_j) = \cup_{i=1}^j \mathcal{W}^u(\Xi_i). \quad (1.2)$$

É claro que $A_n = \mathcal{A}$.

Observe que cada A_j é compacto. Com efeito, dada uma sequência convergente $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in A_j$, como A_j é uma união finita, existem infinitos termos da sequência x_n em algum conjunto instável $\mathcal{W}^u(\Xi_i)$ com $1 \leq i \leq j$, isto é, existe uma subsequência $x_{n_k} \in \mathcal{W}^u(\Xi_i)$ com $x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x$ e $x \in \overline{(\mathcal{W}^u(\Xi_i))}$. Mostremos que $x \in A_j$.

Seja ϕ_k solução de $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ tal que $\phi_k(t_k) = x_{n_k}$ e tem seu α -limite em Ξ_i . Temos duas possibilidades: se t_k é limitada então tem uma subsequência convergente a \bar{t} . Neste caso existiria solução ϕ com $\phi(\bar{t}) = x$ e $\alpha(\phi) \subset \Xi_i$, portanto $x \in A_j$. Caso $t_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$, então pela Proposição 1.3.4 existe solução ϕ tal que $\alpha(\phi) \subset \Xi_i$ e $x \in \omega(\phi)$. Como o semigrupo é dinamicamente gradiente e dada a ordenação dos invariantes, temos que $x \in \Xi_l$ para algum $l < i$, portanto $x \in A_j$. Isto mostra que A_j é fechado e consequentemente compacto, pois está contido em \mathcal{A} compacto.

Com isto provamos a decomposição.

Teorema 1.4.14. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo dinamicamente gradiente relativamente à família disjunta de invariantes isolados $\Xi := (\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n)$ reordenada de maneira que Ξ_j é um atrator para a restrição de $\{T(t) : t \geq 0\}$ a $\Xi_{j-1, j-2}^*$. Então definido em (1.2) é um atrator local para $\{T(t) : t \geq 0\}$ em X ,*

$$\Xi_j = A_j \cap A_{j-1}^*$$

e Ξ é uma decomposição de Morse de \mathcal{A} .

Demonstração. Do Lema 1.4.4, é suficiente provar que $A_j = A_{j-1} \cup W^u(\Xi_j)$ é um atrator local para $\{T(t) : t \geq 0\}$ restrito ao atrator global \mathcal{A} .

Escolha $d > 0$ tal que $\mathcal{O}_d(\bigcup_{i=1}^j \mathcal{W}^u(\Xi_i)) \cap (\bigcup_{i=j+1}^n \Xi) = \emptyset$. Se existem $\delta < d$ e $\delta' < \delta$ tais que $\gamma^+(\mathcal{O}_{\delta'}(A_j) \cap \mathcal{A}) \subset \mathcal{O}_\delta \cap \mathcal{A}$, então $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(A_j) \cap \mathcal{A})$ atrai $\mathcal{O}_{\delta'}(A_j) \cap \mathcal{A}$ e (como $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(A_j) \cap \mathcal{A})$ é invariante) está contido em A_j provando que A_j é um atrator local em \mathcal{A} . Se este não é o caso, existe uma sequência $\{x_k\}$ em $\mathcal{A} \setminus A_j$ com $d(x_k, A_j) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, para cada x_k uma solução global $\xi_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}$ por x_k e uma sequência $t_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$, tal que $d(\xi_k(t), A_j) \leq \delta$ para todo $t \in [0, t_k]$ e $d(\xi_k(t_k), A_j) \leq \delta$ para todo $t \leq 0$ e $d(\xi(0), A_j) = \delta$. Isto nos dá uma contradição.

Para provar que $\Xi_j = A_j \cap A_{j-1}^*$ note que $\bigcup_{i=1}^j (\Xi_i) \subset A_j$ e $A_j^* = \{z \in \mathcal{A} : \omega(z) \cap A_{j-1} = \emptyset\} \supset \bigcup_{i=1}^j (\Xi_i)$. Portanto, dado $z \in A_j \cap A_{j-1}^*$ temos que um solução global $\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}$ por z deve satisfazer

$$\Xi_l \xleftarrow{t \rightarrow -\infty} \xi(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \Xi_k.$$

com $k \leq l \leq j$ (já que $z \in A_j$) e $j \leq k \leq l$ (já que $z \in A_{j-1}^*$). Disto e do fato que $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo dinamicamente gradiente em relação a Ξ , obtemos que $z \in \Xi_j$. Logo $A_j \cap A_{j-1}^* \subset \Xi_j$. A outra inclusão é imediata das definições de A_j e A_{j-1}^* . \square

Destacamos um resultado direto desta decomposição que será importante na próxima seção.

Proposição 1.4.15. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo dinamicamente gradiente relativamente à família disjunta de conjuntos invariantes isolados $\Xi := (\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n)$ reordenados de maneira que constituam uma decomposição de Morse de \mathcal{A} . Então,*

$$\bigcap_{j=0}^n (A_j \cup A_j^*) = \bigcup_{j=1}^n \Xi_j$$

Demonstração. É imediato que $\bigcup_{j=1}^n \Xi_j \subset \bigcap_{j=0}^n (A_j \cup A_j^*)$. Agora, sejam $z \in \bigcap_{j=0}^n (A_j \cup A_j^*)$, $k \in \{1, \dots, n\}$ tal que $z \in A_j$, $k \leq j \leq n$, e $z \in A_j^*$, $1 \leq j \leq k-1$ (isto porque são seqüências encaixantes de conjuntos). Segue do Teorema 1.4.14 que $z \in A_k \cap A_{k-1}^*$. Isto completa a prova. \square

1.5 Funções de Lyapunov para semigrupos dinamicamente gradientes

Finalmente provaremos a equivalência entre os semigrupos gradientes e dinamicamente gradientes, usando a decomposição de Morse para obter a função de Lyapunov. Para isto redefinimos os semigrupos gradientes considerando agora invariantes isolados.

Definição 1.5.1. *Diremos que um semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ que possui um atrator global \mathcal{A} e uma família disjunta de invariantes isolados $\Xi := (\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n)$ é um semigrupo **gradiente relativamente a Ξ** se existir uma função contínua $\mathcal{V} : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $[0, \infty) \ni t \mapsto \mathcal{V}(T(t)x) \in \mathbb{R}$ é decrescente para cada $x \in X$, \mathcal{V} é constante em Ξ_i para cada $1 \leq i \leq n$, e $\mathcal{V}(T(t)x) = \mathcal{V}(x)$ para todo $t \geq 0$ se, e somente se, $x \in \bigcup_{i=1}^n \Xi_i$. Uma função \mathcal{V} com tais propriedades é chamada uma função de Lyapunov para $\{T(t) : t \geq 0\}$.*

Lema 1.5.2. *Se $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo com atrator global \mathcal{A} , a função $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$h(x) := \sup_{t \geq 0} d(T(t)x, \mathcal{A}), x \in X,$$

está bem definida, é contínua, $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto h(T(t)x) \in \mathbb{R}$ é decrescente para cada $x \in X$ e $h^{-1}(0) = \mathcal{A}$.

Demonstração. De fato, pelo Lema 1.4.4, dado $\varepsilon > 0$ seja $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ tal que $\gamma^+(\mathcal{O}_{\varepsilon'}(\mathcal{A})) \subset \mathcal{O}_{\varepsilon}(\mathcal{A})$. Isto mostra a continuidade de h em \mathcal{A} , mostremos em $X \setminus \mathcal{A}$. Se $z_0 \in X \setminus \mathcal{A}$, então $h(z_0) > 0$. Considere $\mathcal{O}_{\mu}(\mathcal{A})$ para algum $0 < \mu < h(z_0)$. Seja V uma vizinhança limitada de z_0 tal que $d(z, \mathcal{A}) < \mu$ e se $z \in V$. Finalmente, seja $\tau > 0$ tal que $\gamma^+(T(t)V) \subset \mathcal{O}_{\mu}(\mathcal{A})$ para todo $t \geq \tau$. Para $z \in V$ vale que $h(z) = \sup_{0 \leq s < \tau} d(T(s), \mathcal{A})$ e, da continuidade do semigrupo segue que $h|_V : V \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua. Para ver que dado $z \in X$, $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto h(T(t)z) \in \mathbb{R}$ é decrescente note que, se $t_1 \geq t_2$, então

$$\begin{aligned} h(T(t_1)z) &= \sup_{t \geq 0} d(T(t)T(t_1)z, \mathcal{A}) = \sup_{t \geq 0} d(T(t+t_1)z, \mathcal{A}) \\ &= \sup_{t \geq t_1} d(T(t)z, \mathcal{A}) \leq \sup_{t \geq t_2} d(T(t)z, \mathcal{A}) \\ &= \sup_{t \geq 0} d(T(t)T(t_2)z, \mathcal{A}) = h(T(t_2)z). \end{aligned}$$

Finalmente, segue diretamente da definição de h e definição de supremo que $h(x) = 0$, se e somente se $x \in \mathcal{A}$. Isto conclui a prova do lema. \square

Proposição 1.5.3. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo com atrator global \mathcal{A} e (Ξ, Ξ^*) um par atrator-repulsor em \mathcal{A} . Então, existe uma função contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo:*

(i) $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto f(T(t)z) \in \mathbb{R}$ é decrescente para cada $z \in X$.

(ii) $f^{-1}(0) = \Xi$ e $f^{-1}(1) \cap \mathcal{A} = \Xi^*$.

(iii) Dado $z \in X$, se $f(T(t)z) = f(z)$ para todo $t \geq 0$, então $z \in (\Xi \cup \Xi^*)$.

Demonstração. Primeiramente note que Ξ e Ξ^* são subconjuntos fechados e disjuntos do conjunto compacto \mathcal{A} . Com a convenção $d(z, \emptyset) = 1$ para cada $z \in X$, definimos a função (a função canônica de Urysohn se Ξ e Ξ^* são não vazios) $l : X \rightarrow [0, 1]$ associada a (Ξ, Ξ^*)

$$l(z) := \frac{d(z, \Xi)}{d(z, \Xi) + d(z, \Xi^*)}, z \in X.$$

Claramente l está bem definida, é uniformemente contínua em X , pois, para $d_0 := d(\Xi, \Xi^*) > 0$, vale que $|l(z) - l(w)| \leq \frac{1}{d_0}d(z, w)$, para todo z e w em X . Além disso, $l^{-1}(0) = \Xi$ e $l^{-1}(1) = \Xi^*$.

Se $k : X \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$k(z) := \sup_{t \geq 0} l(T(t)z),$$

mostremos que $k : X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto k(T(t)z)$ é decrescente para cada $z \in X$, $k^{-1}(0) = \Xi$ e que $k^{-1}(1) \cap \mathcal{A} = \Xi^*$. A prova que $[0, \infty) \ni t \mapsto k(T(t)z) \in [0, 1]$ é decrescente para cada $z \in X$ é rigorosamente a mesma feita para h no Lema 1.5.2. É imediato da definição de k e da invariância de Ξ e Ξ^* que $k(\Xi) = \{0\}$ e $k(\Xi^*) = \{1\}$. Agora, se $z \in X$ é tal que $k(z) = 0$, então $l(T(t)z) = 0$ para todo $t \geq 0$. Em particular, $0 = l(T(0)z) = l(z)$, e assim, $z \in \Xi$, logo $k^{-1}(0) \subset \Xi$, mostrando que $k^{-1}(0) = \Xi$. Por outro lado, se $z \in \mathcal{A}$ é tal que $k(z) = 1$ e $z \notin \Xi^*$, então $\omega(z) \subset \Xi$. Da continuidade de l e do fato que $\omega(z)$ atrai z , obtemos que $\lim_{t \rightarrow \infty} l(T(t)z) = 0$. Logo, existe um $t_0 > 0$ tal que $1 = k(z) = \sup_{0 \leq t \leq t_0} l(T(t)z)$. Isto implica a existência de um $t' \in [0, t_0]$ tal que $l(T(t')z) = 1$, isto é, $T(t')z \in \Xi^*$. Consequentemente $\omega(z) = \omega(T(t')z) \subset \Xi^*$, o que contradiz o fato que $\omega(z) \subset \Xi$ e assim, se $k(z) = 1$ para algum $z \in \mathcal{A}$ devemos ter que $z \in \Xi^*$. Disto concluímos que $k^{-1}(1) \cap \mathcal{A} \subset \Xi^*$ e portanto $k^{-1}(1) \cap \mathcal{A} = \Xi^*$.

Agora provamos que, se $z \in \mathcal{A}$ e $k(T(t)z) = k(z)$ para todo $t \geq 0$ então $z \in \Xi \cup \Xi^*$. Se $z \notin \Xi \cup \Xi^*$, $\omega(z) \subset \Xi$, já que $z \in \mathcal{A}$ e, da definição de k e do fato que $\omega(z)$ atrai z , temos $k(z) = \lim_{t \rightarrow \infty} k(T(t)z) = 0$. Como $k^{-1}(0) = \Xi$, z deve pertencer a Ξ o que é uma contradição. A seguir provamos a continuidade de $k : X \rightarrow \mathbb{R}$, para isso, distinguimos os seguintes três casos:

1) Continuidade em Ξ^* . Como $l(z) \leq k(z) < 1$, para todo $z \in X$, dado $z_0 \in \Xi^*$ e $z \in X$ temos que

$$|k(z) - k(z_0)| = 1 - k(z) \leq 1 - l(z).$$

Isto e a continuidade de $l : X \rightarrow \mathbb{R}$ em z_0 implicam a continuidade de $k : X \rightarrow \mathbb{R}$ em z_0 .

2) Continuidade em Ξ . Dado $\varepsilon > 0$, da continuidade de l em Ξ compacto e do fato que $l(\Xi) = 0$, obtemos $\delta > 0$ tal que $l(\mathcal{O}_\delta) \subset [0, \varepsilon)$. Do Lema 1.4.3, existe $\delta' \in (0, \delta)$ tal que $\gamma^+(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)) \subset \mathcal{O}_\delta(\Xi)$, do que concluímos que $k(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)) \subset [0, \varepsilon]$.

3) Continuidade em $X \setminus (\Xi \cup \Xi^*)$. Dado $z_0 \in X \setminus (\Xi \cup \Xi^*)$, do Lema 1.4.6 temos que, ou $\lim_{t \rightarrow \infty} d(T(t)z_0, \Xi) = 0$, ou $\lim_{t \rightarrow \infty} d(T(t)z_0, \Xi^*) = 0$.

Se $\lim_{t \rightarrow \infty} d(T(t)z_0, \Xi) = 0$, provemos a continuidade de k em z_0 . Primeiramente note que $k(z_0) = 1$. Dado $\varepsilon > 0$, da continuidade de $l : X \rightarrow \mathbb{R}$ em Ξ^* existe uma vizinhança aberta V de Ξ^* em X tal que $l(V) \subset (1 - \varepsilon, 1]$. Se $t_0 > 0$ é tal que $T(t_0)z_0 \in V$, da continuidade de $T(t_0) : X \rightarrow X$, existe uma vizinhança U de z_0 tal que $T(t_0)U \subset V$. Disto segue que $k(z) > 1 - \varepsilon$ para todo $z \in U$, já que $T(t_0)z \in V$ e portanto $1 - \varepsilon < l(T(t_0)z) \leq k(z)$. Isto prova a continuidade de k em pontos z_0 de $X \setminus (\Xi \cup \Xi^*)$ para os quais $\lim_{t \rightarrow \infty} d(T(t)z_0, \Xi^*) = 0$.

Se $z_0 \in X \setminus (\Xi \cup \Xi^*)$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} d(T(t)z_0, \Xi) = 0$, temos que $l(z_0) > 0$. Escolha $\delta > 0$ tal que $l(\mathcal{O}_\delta(\Xi)) \subset [0, \frac{l(z_0)}{2})$ e, do Lema 1.4.3, existe um $\delta' \in (0, \delta)$ tal que $\gamma^+(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)) \subset \mathcal{O}_\delta(\Xi)$. Seja $t_0 > 0$ tal que $T(t_0)z_0 \in \mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)$. Da continuidade de $T(t_0) : X \rightarrow X$, existe uma vizinhança U_1 de z_0 em X tal que $T(t_0)U_1 \subset \mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)$. Então, para todo $z \in U_1$ e $t \geq t_0$ temos $T(t)z \in \mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)$. Finalmente, da continuidade de l , seja U_2 uma vizinhança de z_0 em X tal que $l(z) > \frac{l(z_0)}{2}$ para todo $z \in U_2$ e escreva $U := U_1 \cap U_2$. Dessa forma, para todo $z \in U$ vale que $k(z) = \sup_{0 \leq t \leq t_0} l(T(t)z)$. Pelo mesmo argumento feito anteriormente, obtemos a continuidade de k em pontos z_0 de $X \setminus (\Xi \cup \Xi^*)$ para os quais $\lim_{t \rightarrow \infty} d(T(t)z_0, \Xi) = 0$.

Seja $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida no Lema 1.5.2, isto é, $h(z) = \sup_{t \geq 0} d(T(t)z, \mathcal{A})$, $z \in X$, e defina $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(z) := k(z) + h(z), z \in X.$$

A continuidade de $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ segue da continuidade de k , provada acima, e de h , provada no Lema 1.5.2. Como $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto k(T(t)z) \mathbb{R}^+ t \ni t \mapsto h(T(t)z)$ são decrescentes para cada $z \in X$, f também possui essa propriedade. Claramente $f(\Xi) = \{0\}$. Por outro lado, se $f(z) = 0$ para algum $z \in X$, então $h(z) = k(z) = 0$ e devemos ter $z \in \Xi$. Isto mostra que $f^{-1}(0) = \Xi$. Além disso, como $f|_{\mathcal{A}} = k|_{\mathcal{A}}$ temos que $f^{-1} \cap \mathcal{A} = k^{-1} \cap \mathcal{A} = \Xi^*$. Resta provarmos a propriedade *iii*). Se $z \in X$ é tal que $f(T(t)z) = f(z)$ para todo $t \geq 0$, então como $f(T(\cdot)z)$ é soma de duas funções decrescentes, segue que $h(T(t)z) = h(z)$ para todo $t \geq 0$, logo $h(z) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(T(t)z) = 0$, pois \mathcal{A} é atrator global e $d(T(t)z, \mathcal{A}) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ para todo $z \in X$. Logo $z \in \mathcal{A}$ e como também vale $k(T(t)z) = k(z)$, segue que $z \in Xi \cup \Xi^*$, completando a prova. \square

Construímos enfim a função de Lyapunov para um semigrupo dinamicamente gradiente.

Teorema 1.5.4. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo com atrator global \mathcal{A} e uma família disjunta de invariantes isolados $\Xi := (\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n)$. Então, $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo gradiente relativamente a Ξ se, e somente se é um semigrupo dinamicamente gradiente relativamente à Ξ . Além disso, a função de Lyapunov $\mathcal{V} : X \rightarrow \mathbb{R}$ de um semigrupo dinamicamente gradiente relativo à Ξ pode ser escolhido de modo que $\mathcal{V}(\Xi_m) = m - 1$, para cada $m = 1, \dots, n$.*

Demonstração. É claro que um semigrupo gradiente relativamente à família disjunta de invariantes isolados Ξ é um semigrupo dinamicamente gradiente relativamente à Ξ . Suponha que $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo dinamicamente gradiente relativamente à família disjunta de invariantes isolados Ξ reordenada de modo que seja uma decomposição de Morse para \mathcal{A} . Seja $\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_n = \mathcal{A}$ a sequência de atratores locais definida em 1.2 e $\emptyset = A_n^* \subset A_{n-1}^* \subset \dots \subset A_0^* = \mathcal{A}$ os repulsores associados de forma que, para cada $j = 1, 2, \dots, n$, temos $\Xi_j = A_j \cap A_{j-1}^*$. Seja $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida no Lema 1.5.2 e $k_j : X \rightarrow \mathbb{R}$ a função construída na Proposição 1.5.3 para o par atrator-repulsor

$A_j, A - j^*$, para cada $j = 1, \dots, n$. Defina a função contínua $\mathcal{V} : X \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\mathcal{V}(z) := h(z) + \sum_{j=1}^n k_j(z), z \in X.$$

Então, $\mathcal{V} : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Lyapunov e $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo gradiente relativamente à Ξ .

De fato, dado $z \in X$, como $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto h(T(t)z) \in \mathbb{R}$ e cada $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto k_j(T(t)z) \in \mathbb{R}$, $i \leq j \leq n$, são decrescentes, segue que $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto V(T(t)z) \in \mathbb{R}$ é também decrescente.

Agora, suponha que $z \in X$ é tal que $\mathcal{V}(T(t)z) = V(z)$ para todo $z \geq 0$. Novamente como $\mathcal{V}(T(\cdot)z)$ é soma de funções decrescentes, concluímos que $h(T(t)z) = h(z)$ e cada $k_j(T(t)z) = k_j(z)$ para todo $t \geq 0$, logo $f_j(T(t)z) = k_j(T(t)z) + h(T(t)z) = k_j(z) + h(z) = f_j(z)$ para todo $t \geq 0$ e $j = 1, \dots, n$. Da parte (iii) da Proposição 1.5.3, temos que $z \in (A_j \cup A_j^*)$, para cada $j = 0, 1, \dots, n$. Logo $z \in \bigcap_{j=0}^n (A_j \cup A_j^*) = \bigcup_{j=1}^n \Xi_j$, da Proposição 1.4.15. Agora se $m \in \{1, \dots, n\}$ e $z \in \Xi_m = A_m \cap A_{m-1}^*$, segue que $z \in A_m \subset A_{m+1} \subset \dots \subset A_n = \mathcal{A}$ e $z \in A_{m-1}^* \subset A_{m-2}^* \subset \dots \subset A_0^* = \mathcal{A}$. Logo $k_j(z) = 0$ se $m \leq j \leq n$ e $k_j(z) = 1$ se $1 \leq j \leq m - 1$. Assim,

$$\mathcal{V}(z) = \sum_{j=1}^n k_j(z) = \sum_{j=0}^{m-1} k_j(z) = \sum_{j=m}^n k_j(z) = \sum_{j=0}^{m-1} 1 + \sum_{j=m}^n 0 = m - 1.$$

Isto conclui a prova do teorema. □

Finalmente podemos concluir a equivalência entre as classes de semigrupos gradientes e dinamicamente gradientes.

Teorema 1.5.5. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo em X espaço métrico e $\Xi := (\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n)$ uma família de invariantes isolados. São equivalentes:*

1. $\{T(t) : t \geq 0\}$ é semigrupo gradiente relativamente a Ξ .
2. $\{T(t) : t \geq 0\}$ é semigrupo dinamicamente gradiente relativamente a Ξ .
3. $\{T(t) : t \geq 0\}$ admite uma decomposição de Morse dada por uma reordenação de Ξ .

Capítulo 2

Processos de Evolução: O caso não-autônomo

Neste capítulo estudamos o caso de processos não-autônomos. Seguimos novamente como referência os trabalhos de Aragão-Costa ([2] e [1]) e Carvalho ([6] e [9]). O capítulo segue um esquema similar ao primeiro: Na primeira seção, introduzimos o conceito de atração pullback, visando a melhor forma de encontrar uma estrutura atratora global que estenda bem a noção do caso autônomo. Ainda nesse espírito, definimos o atrator pullback e estudamos suas propriedades, buscando sempre fazer o paralelo com o caso autônomo. Ao longo da segunda seção, reestabelecemos os conceitos de ω -limite, compacidade assintótica, dentre outros, no contexto de atração pullback e dependência do tempo. No fim desta seção, mostramos resultados que assegurem a existência de atrator pullback. Na terceira seção, apresentamos as definições generalizadas de processos dinamicamente gradientes e decomposição de Morse. Para isso, adaptamos as noções de par atrator-repulsor e buscamos resultados análogos. No fim da seção, construímos a decomposição de Morse para um processo dinamicamente gradiente relativo a um conjunto de famílias de invariantes isolados. Na quarta e última seção, utilizamos os resultados da seção anterior relativos a pares atrator-repulsor para construir duas funções auxiliares, que em seguida serão utilizadas para compor a função de Lyapunov relativa a um dado par atrator-repulsor. Por fim, obtemos a função de Lyapunov, a partir da sequência de atratores dada na decomposição de Morse, para um processo de evolução dinamicamente gradiente, de modo análogo ao feito no Capítulo 1.

2.1 Atratores Pullback

Relembremos a definição de sistema dinâmico, ou como chamaremos de agora em diante, processo de evolução.

Um **processo de evolução** em um espaço métrico X é uma família de transformações $\{S(t, s) : (t, s) \in \mathbb{R}^2, t \geq s\}$ em $C(X)$ com as seguintes propriedades

- 1) $S(t, t) = I$, para todo $t \in \mathbb{R}$
- 2) $S(t, s) = S(t, \tau)S(\tau, s)$, para todo $t \geq \tau \geq s$,
- 3) $(t, s, x) \mapsto S(t, s)x \in X$ e continua.

A transformação $S(t, s)$ toma cada estado x do sistema no instante inicial s e evolui para o estado $S(t, s)x$ do sistema no tempo final t . Por simplicidade denotaremos o processo $\{S(t, s) : (t, s) \in \mathbb{R}^2, t \geq s\}$ por $S(\cdot, \cdot)$.

Definição 2.1.1. *Uma família de conjuntos que depende do tempo $A(t)$ é dita **invariante** sob $S(\cdot, \cdot)$ se*

$$S(t, \tau)A(\tau) = A(t) \text{ para todo } t, \tau \in \mathbb{R}, t \geq \tau.$$

Faremos um abuso de notação e diremos que esta família é um conjunto invariante. Novamente uma solução será um caminho em X que evolui segundo o processo de evolução.

Definição 2.1.2. *Uma **solução global** de um processo $S(\cdot, \cdot)$ é uma função $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ que satisfaz $S(t, s)\xi(s) = \xi(t)$ para todo $t \geq s$.*

A seguir temos uma caracterização de conjuntos invariantes.

Lema 2.1.3. *Um família de conjuntos dependente do tempo $A(\cdot)$ é invariante sob $S(\cdot, \cdot)$ se, e somente se consiste de uma coleção de soluções globais.*

Demonstração. Se $\mathcal{U} = \{u_i : \mathbb{R} \rightarrow X, i \in I\}$ é uma coleção de soluções globais de $S(\cdot, \cdot)$, então é claro que o conjunto dependente do tempo $U(t)$ definido por

$$U(t) = \{u_i(t) : i \in I\} \text{ para cada } t \in \mathbb{R}$$

é invariante, por definição de solução global e invariância. Por outro lado, suponha que $\mathcal{A}(\cdot)$ é invariante. Se $u(s) \in \mathcal{A}(s)$ então $S(t, s)u(s) \in \mathcal{A}(t)$ para todo $t \geq s$, da invariância de $\mathcal{A}(\cdot)$, e podemos usar o processo indutivo da Proposição 1.1.14 para construir a solução para trás. \square

Poderíamos tentar definir um atrator global seguindo uma generalização direta do caso autônomo. Assim, buscamos uma família $\mathcal{A}(\cdot)$ invariante, com $\mathcal{A}(t)$ compacto para cada $t \in \mathbb{R}$ e que atrai limitados quando $t \rightarrow \infty$, isto é, para cada limitado $B \subset X$ e cada $s \in \mathbb{R}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(S(t, s)B, \mathcal{A}(t)) = 0.$$

Contudo, um conjunto satisfazendo estas propriedades só existira em contextos muito específicos e restritos. Vejamos um exemplo que explicita os problemas envolvendo esta tentativa de definição. Considere

$$\dot{x} = h(t)x - x^3 \quad (2.1)$$

onde $h : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ é uma função decrescente continuamente diferenciável que é igual a 0 para $t \leq 0$ e igual a 1 para $t \geq 1$. Se $h(t)$ fosse um parâmetro independente do tempo, teríamos uma bifurcação como a descrita abaixo.

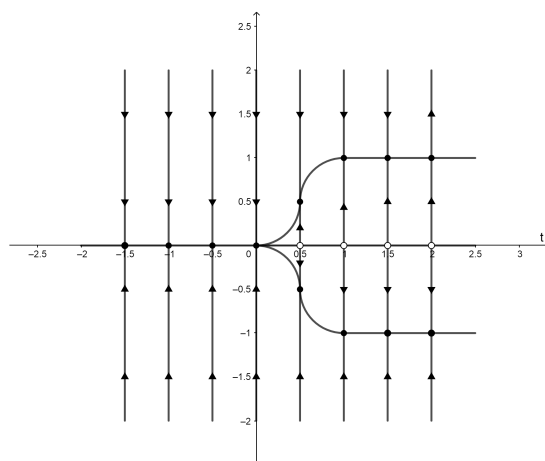


Figura 2.1: Bifurcação

Este não é o caso, pois $x = x(t)$ e $h(t)$ dependem de t , mas dá uma ideia do processo de evolução associado a equação (2.1). Este simples exemplo não possui atrator no sentido na definição acima. Basta ver que qualquer conjunto fechado que atrai limitados para todo $t \geq 1$ deve conter o intervalo $[-1, 1]$, no entanto, sob a dinâmica de (2.1) este intervalo

contem condições iniciais em $t = 1$ para soluções que explodem em tempo finito fazendo t para trás - mais especificamente todos os pontos em $[-1, 1] \setminus \{0\}$ - de modo que este conjunto não pode ser invariante. Assim, devemos abandonar esta tentativa dada a sua aplicabilidade limitada.

Poderíamos tentar contornar este problema enfraquecendo as hipóteses, requerendo as propriedades apenas a partir de um tempo fixado. Assim buscamos uma família $\{\mathcal{A}(t) : t \geq \tau\}$ tal que $\mathcal{A}(t)$ é compacto para cada $t \geq \tau$, $\mathcal{A}(\cdot)$ é invariante para $t \geq \tau$ e atrai limitados quando $t \rightarrow \infty$, ou seja, para cada $B \subset X$ e cada $s \in \mathbb{R}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(S(t, s)B, \mathcal{A}(t)) = 0.$$

Assim para a equação (2.1), o conjunto $\mathcal{A}(t) = [-1, 1]$ para todo $t \geq 1$, satisfaz justamente as condições acima e deveria ser a escolha natural de atrator. Contudo, este não é o único conjunto que se encaixa na definição dada. De fato, se fixamos qualquer compacto K cujo interior contem $\{0\}$ e um tempo $t_0 \in \mathbb{R}$ então a família

$$\mathcal{A}(t) = S(t, t_0)K$$

satisfaz todas as propriedades desejadas. Deste modo, devemos novamente abandonar esta definição, já que não conseguimos obter unicidade do atrator.

Ainda com este exemplo em mente, observemos que a dependência do tempo inicial e final gera dois comportamentos distintos na dinâmica da equação. Em particular, note que em ambos casos a estrutura atratora quando $t \rightarrow \infty$ pode ser obtida via um limite ‘pullback’

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} S(t, s)x,$$

para todo $x \in R$. Este limite pullback determina um conjunto atrator para todo $t \in \mathbb{R}$ e da origem a um objeto com propriedades dinâmicas.

Definição 2.1.4. *Seja $S(\cdot, \cdot)$ um processo de evolução. Dado $t \in \mathbb{R}$, um conjunto $K \subset X$ **pullback atrai** um conjunto D no tempo t sob ação de $S(\cdot, \cdot)$ se*

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \text{dist}(S(t, s)D, K) = 0. \quad (2.2)$$

Dizemos que K pullback atrai conjuntos limitados no tempo t se (2.2) vale para cada subconjunto limitado D de X .

Ainda, uma família dependente do tempo $K(\cdot)$, pullback atrai limitados de X sob $S(\cdot, \cdot)$ se $K(t)$ pullback atrai limitados no tempo t sob ação de $S(\cdot, \cdot)$, para cada $t \in \mathbb{R}$

Definição 2.1.5. Uma família $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é dita um **atrator pullback** para um processo $S(\cdot, \cdot)$ se

- (i) $\mathcal{A}(t)$ é compacto para cada $t \in \mathbb{R}$,
- (ii) $\mathcal{A}(\cdot)$ é invariante com respeito a $S(\cdot, \cdot)$,
- (iii) $\mathcal{A}(\cdot)$ pullback atrai limitados de X , e
- (iv) $\mathcal{A}(\cdot)$ é a família minimal de conjuntos fechados que satisfaz (iii).

Explicitemos a minimalidade da propriedade (iv): se existe outra família $C(\cdot)$ de conjuntos fechados que atrai pullback limitados de X , então $\mathcal{A}(t) \subset C(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Em geral isto é requerido para garantir a unicidade do atrator global. Note que no caso autônomo dos semigrupos, isto é uma consequência imediata da compacidade e invariância nesse contexto. Esta distinção está fortemente associada à mudança na definição de invariância. Até mesmo um processo $S_T(\cdot, \cdot)$ associado a um semigrupo $T(\cdot)$, isto é $S_T(t, s) = T(t - s)$, pode admitir famílias de compactos, invariantes e pullback atratores que não são minimais. De fato, se

$$T(t)x = e^{-t}, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0,$$

então para $S_T(\cdot, \cdot)$ a família $\{[-e^{-t}, e^{-t}] : t \in \mathbb{R}\}$ é invariante e para cada $t \in \mathbb{R}$ o intervalo $[-e^{-t}, e^{-t}]$ é compacto e atrai conjuntos limitados de \mathbb{R} no tempo t .

Apesar da atração pullback não necessariamente implicar a atração para frente em geral, o lema seguinte relaciona atração pullback e para frente caso haja uniformidade na taxa de atração.

Lema 2.1.6. Seja $\mathcal{A}(\cdot)$ um conjunto invariante para $S(\cdot, \cdot)$, e B um conjunto limitado em X . Então

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} \text{dist}_H(S(t, t - s)B, \mathcal{A}(t)) = 0$$

se e somente se

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} \text{dist}_H(S(t + s, t)B, \mathcal{A}(t + s)) = 0.$$

Demonstração. Para um s fixado temos,

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \text{dist}(S(t, t-s)B, \mathcal{A}(t)) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \text{dist}(S(t+s, t)B, \mathcal{A}(t+s))$$

e o resultado segue imediatamente. \square

Em seguida definimos limitação para trás e para frente.

Definição 2.1.7. Dizemos que uma solução global $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ de um processo $S(\cdot, \cdot)$ é **limitada para trás ou limitada no passado**, se existe $\tau \in \mathbb{R}$ tal que $\{\xi(t) : t \leq \tau\}$ é limitado. Similarmente, $\xi(\cdot)$ é **limitada para frente ou limitada no futuro**, se existe $\tau \in \mathbb{R}$ tal que $\{\xi(t) : t \geq \tau\}$ é limitado. Adotamos uma terminologia análoga para qualquer família dependente do tempo, ou família não-autônoma.

Se um processo $S(\cdot, \cdot)$ tem um atrator pullback $\mathcal{A}(\cdot)$ e $\xi(\cdot)$ é uma solução global limitada para trás, então $\xi(t) \in \mathcal{A}(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, já que $\mathcal{A}(\cdot)$ pullback atrai o limitado $\{\xi(t) : t \leq \tau\}$. De fato, o atrator pullback deve conter todo o "conjunto instável" dessa dada solução, ou de qualquer conjunto invariante limitado para trás, como veremos adiante.

Definição 2.1.8. Seja $E(\cdot)$ um conjunto invariante. O **conjunto instável** de $E(\cdot)$, denotado por $\mathcal{W}^u(E(\cdot))(\cdot)$, é definido por

$$\mathcal{W}^u(E(\cdot))(t) = \{x \in X : \text{existe solução global } \phi : \mathbb{R} \rightarrow X \\ \phi(t) = x \text{ e } \lim_{s \rightarrow -\infty} \text{dist}(\phi(s), E(s)) = 0\}$$

Lema 2.1.9. Se $E(\cdot)$ é um conjunto invariante que é limitado para trás então para cada $t \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{W}^u(E(\cdot))(t) \subset \mathcal{A}(t).$$

Demonstração. Tome $x \in \mathcal{W}^u(E(\cdot))(t)$, então por definição existe uma solução global $\phi : \mathbb{R} \rightarrow X$ tal que $\phi(t) = x$ e

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \text{dist}(\phi(s), E(s)) = 0.$$

Em particular, como $E(\cdot)$ é limitado para trás, $\{\phi(s) : s \leq t\}$ é limitado. Ainda, como $x = \phi(t) = S(t, s)\phi(s)$, segue $x \in S(t, s)(B)$ para todo $s \leq t$. Portanto, do fato que $\mathcal{A}(t)$ atrai pullback limitados de X temos $x \in \mathcal{A}(t)$. \square

Quando o atrator pullback é também limitado para trás, então ele é união de soluções limitadas para trás:

Teorema 2.1.10. *Se um atrator pullback $\mathcal{A}(t)$ é limitado para trás então*

$$\mathcal{A}(t) = \{\xi(t) : \xi(\cdot) \text{ é uma solução limitada para trás } \}.$$

Demonstração. Já sabemos que $\xi(t) \in \mathcal{A}(t)$ para toda solução $\xi(t)$ limitada para trás. Agora, dado $x \in \mathcal{A}(t)$ obtemos uma solução limitada para trás $\xi(\cdot)$ com $\xi(t) = x$ da invariância de $\mathcal{A}(\cdot)$ e usando o mesmo argumento da Proposição 1.1.14. \square

Corolário 2.1.11. *Se um atrator pullback é limitado, ou seja uniformemente limitado em t , então é dado como união de soluções globais limitadas.*

Demonstração. Por um lado, qualquer solução limitada é, em particular, limitada para trás, portanto está contida no atrator pullback. Por outro lado, dado $s \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathcal{A}(s)$ qualquer a solução para frente através de x está em $\mathcal{A}(t)$ para todo $t \geq s$ já que o atrator é invariante. Como o atrator é limitado a solução é limitada para frente, e do teorema anterior, é limitada para trás, portanto limitada. \square

Vejamos que o atrator pullback generaliza o atrator global do caso autônomo.

Lema 2.1.12. *Sejam $T(\cdot)$ um semigrupo e $S_T(\cdot, \cdot)$ o processo associado (definido por $S_T(t, s) = T(t - s)$ para $t \geq s$). Então $T(\cdot)$ tem um atrator global \mathcal{A} se e somente se $S_T(\cdot, \cdot)$ tem um atrator pullback $\mathcal{A}(\cdot)$, e então $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Se $T(\cdot)$ tem um atrator global \mathcal{A} então é claro que a família constante $\{\mathcal{A}(t) = \mathcal{A} : t \in \mathbb{R}\}$ atrai pullback subconjuntos limitados de X sob $S_T(\cdot, \cdot)$. A minimalidade segue do fato que \mathcal{A} é limitado e $S_T(t, s)\mathcal{A} = T(t - s)\mathcal{A} = \mathcal{A}$ para todo $t \geq s$. Por outro lado, supondo que $S_T(\cdot, \cdot)$ tem um atrator pullback $\mathcal{A}(\cdot)$, então $\lim_{s \rightarrow -\infty} \text{dist}(S_T(t, s)D, \mathcal{A}(\tau)) = 0$ para todo subconjunto limitado D de X e $\tau \in \mathbb{R}$. Portanto, como este limite pode ser reescrito como abaixo e não se altera tomando t fixado em vez de τ obtemos,

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \text{dist}(T(t - s)D, \mathcal{A}(\tau)) = 0 \forall t, \tau \in \mathbb{R} \text{ e } D \subset X \text{ limitado.}$$

Portanto, dado $\tau \in \mathbb{R}$, a família $\tilde{\mathcal{A}}(\cdot)$, dada por $\tilde{\mathcal{A}}(t) = \mathcal{A}(\tau)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, atrai pullback limitados de X . Segue da minimalidade de $\mathcal{A}(t)$ que $\mathcal{A}(t) \subset \tilde{\mathcal{A}}(t) = \mathcal{A}(\tau)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Da arbitrariedade de τ , obtemos $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Finalmente, é fácil ver que \mathcal{A} é também atrator global para $\mathbb{T}(\cdot)$. \square

2.2 Existência de Atratores Pullback

Iniciamos esta seção generalizando a noção do conjunto ω -limite para o caso de processos não-autônomos, veremos que a linguagem do pullback é a mais adequada para tal. Futuramente, construiremos o atrator pullback como união destes conjuntos.

Definição 2.2.1. *O ω -limite pullback no tempo t de um subconjunto B de X é definido por*

$$\omega(B, t) := \bigcap_{\sigma \leq t} \overline{\bigcup_{s \leq \sigma} S(t, s)B}$$

ou, equivalentemente,

$$\omega(B, t) = \left\{ y \in X : \text{existem sequências } \{s_k\} \leq t, s_k \rightarrow -\infty \text{ quando } k \rightarrow \infty \right. \\ \left. \text{e } \{x_k\} \text{ em } B, \text{ tal que } y = \lim_{k \rightarrow \infty} S(t, s_k)x_k \right\}, \quad (2.3)$$

análogo ao caso autônomo.

É claro que se $T(\cdot)$ é um semigrupo e $S_T(\cdot, \cdot)$ é o processo associado, então $\omega(B, t)$ é independente de t e coincide com a definição de ω -limite para semigrupos.

Obteremos em diante resultados semelhantes ao caso de semigrupos, acerca da não-vacuidade e compacidade, invariância e atração do ω -limite.

Lema 2.2.2. *Seja $S(\cdot, \cdot)$ um processo num espaço métrico X .*

- (i) *Para qualquer $B \subset X$, $\omega(B, s)$ é positivamente invariante: $S(t, s)\omega(B, s) \subset \omega(B, t), t \geq s$.*
- (ii) *Se $\omega(B, s)$ é compacto e atrai pullback B no tempo s , então $S(t, s)\omega(B, s) = \omega(B, t)$, para todo $t \geq s$.*
- (iii) *Se $\omega(B, t)$ é compacto e atrai pullback C no tempo t , com C conexo que contém B , então $\omega(B, t)$ é conexo.*

Demonstração. (i) Se $\omega(B, t) = \emptyset$, então não há o que provar. Se $\omega(B, s) \neq \emptyset$, então da continuidade de $S(t, s)$ e de (2.3), é imediato que $S(t, s)\omega(B, s) \subseteq \omega(B, t)$.

(ii) Se $\omega(B, s)$ é compacto e atrai pullback B , resta mostrar que $\omega(B, t) \subseteq S(t, s)\omega(B, s)$. De fato, para $x \in \omega(B, t)$ existem sequências $\{\sigma_k\} \leq t$ com $\sigma_k \rightarrow -\infty$ e $\{x_k\} \in B$ tais que $S(t, \sigma_k)x_k \rightarrow x$, quando $k \rightarrow \infty$. Como $\sigma_k \rightarrow \infty$, existe um $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que σ_k para todo $k \geq k_0$. Portanto $S(t, s)S(s, \sigma_k)x_k = S(t, \sigma_k)x_k \rightarrow x$ para $k \geq k_0$. Como $\omega(B, s)$ é compacto e atrai pullback B no tempo s , temos $\text{dist}(S(s, \sigma_k)x_k, \omega(B, s)) \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. Segue do Lema 1.1.15 que $S\{(s, \sigma)x_k\}$ tem uma subsequência que converge para um $y \in \omega(B, s)$. Segue da continuidade do processo que $S(t, s)y = x$. Portanto $\omega(B, t) = S(t, s)\omega(B, s)$.

(iii) Suponha por absurdo que $\omega(B, t)$ é desconexo; então decomposto numa união disjunta de dois conjuntos não-vazios ω_1, ω_2 que são portanto separados de uma distância 2δ . Como $\omega(B, t)$ atrai C e $B \subseteq C$, segue que $\omega(B, t) = \omega(C, t)$ e existe $s_0 < 0$ tal que $S(t, s)C \subset \mathcal{O}_\delta(\omega(C, t))$, para todo $s \leq s_0$. Da conexidade de C , existe $i \in \{1, 2\}$ tal que $S(t, s)C \cap \mathcal{O}_\delta(\omega_i) = \emptyset$ para todo $s \leq s_0$. Isto contradiz o fato de que ambos ω_1 e ω_2 são não-vazios. \square

Note que a prova do item (iii) acima implica que o atrator pullback deve ser conexo, se existe.

Corolário 2.2.3. *Se $A(t)$ é compacto e atrai pullback C no tempo t , com C conexo que contém $A(t)$, então $A(t)$ é conexo. Em particular, se X é um espaço de Banach, ou um métrico em que bolas são conexas, então o atrator pullback é conexo, se existe.*

Lema 2.2.4. *Seja $S(\cdot, \cdot)$ um processo num espaço métrico X . Suponha que B é um subconjunto limitado não-vazio de X que é atraído pullback por algum compacto K no tempo t . Então $\omega(B, t)$ é não-vazio, compacto, atrai B no tempo t e $S(\tau, t)\omega(B, \tau) = \omega(B, t)$ para todo $\tau \geq t$.*

Demonstração. Primeiro note que para quaisquer sequências $\{x_n\} \in B$ e $\{s_n\} \rightarrow -\infty$, segue do fato de que K atrai B que $\text{dist}(S(t, s_n)x_n, K) \rightarrow 0$. Do Lema 1.1.15, $\{S(t, s_n)x_n\}$ tem uma subsequência convergente cujo limite, por definição em (2.3), deve estar em $\omega(B, t)$, e portanto $\omega(B, t)$ é não-vazio.

Agora provaremos que $\omega(B, t)$ atrai pullback B no tempo t por contradição. Suponha que existam $\varepsilon > 0$, sequências $\{s_n\} \rightarrow -\infty$ e $\{x_n\} \in B$ tais que

$$\text{dist}(S(t, s_n)x_n, \omega(B, t)) > \varepsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Porém já mostramos que deve existir subsequência de $\{S(t, s_n)x_n\}$ que converge a um elemento de $\omega(B, t)$, contradizendo a condição acima.

Finalmente, $\omega(B, t)$ é compacto, já que está contido em K e é fechado por definição. \square

Este resultado será de extrema importância para a construção do atrator pullback.

Agora generalizamos a definição de compacidade assintótica.

Definição 2.2.5. *Um processo $S(\cdot, \cdot)$ num espaço métrico X é dito **pullback assintoticamente compacto** se, para cada $t \in \mathbb{R}$, cada sequência $\{s_k\} \leq t$ com $s_k \rightarrow -\infty$ quando $k \rightarrow \infty$ e cada subsequência limitada $\{x_k\} \in X$ a sequência $\{S(t, s_k)x_k\}$ tem uma subsequência convergente.*

Claro que se um processo possui atratores pullback, então é pullback assintoticamente compacto.

Lema 2.2.6. *Se $S(\cdot, \cdot)$ tem uma família de compactos pullback atratores $K(\cdot)$, então é pullback assintoticamente compacto.*

Demonstração. Tome sequências $\{s_k\} \leq t$ com $s_k \rightarrow \infty$ e $\{x_k\} \in X$ contida no limitado B . Então, como $\text{dist}(S(t, s)B, K(t)) \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow \infty$ e $K(t)$ é compacto, o Lema 1.1.15 garante que $\{S(t, s)x_k\}$ tem uma subsequência convergente. \square

Agora obtemos uma condição para que $\omega(B, t)$ atraia B no tempo t , como no caso autônomo.

Lema 2.2.7. *Seja $S(\cdot, \cdot)$ um processo pullback assintoticamente compacto e suponha que B é um limitado não-vazio em X . Então, para cada $t \in \mathbb{R}$, $\omega(B, t)$ é não-vazio, compacto, atrai pullback B no tempo t e $S(\tau, t)\omega(B, t) = \omega(B, \tau)$ para todo $\tau \geq t$.*

Demonstração. Primeiro mostremos que existe s_0 tal que

$$\overline{\bigcup_{s \leq s_0} S(t, s)B} \text{ é limitado.}$$

Se não, então existiria $\{s_k\} \rightarrow -\infty$ e uma sequência $\{x_k\} \in B$ tal que $\{S(t, s_k)x_k\}$ é ilimitado, o que contradiria a compacidade assintótica, pois poderíamos construir uma

subsequência x_{n_k} satisfazendo $d(x_1, x_{n_k}) \geq k$ e esta não admite subsequência convergente. Agora, para quaisquer sequências $\{x_k\} \in B$ e $\{s_k\} \leq s_0$, com $s_k \rightarrow -\infty$ quando $k \rightarrow \infty$, segue do fato que $S(\cdot, \cdot)$ é pullback assintoticamente compacto que existe subsequência de $\{S(t, s_k)x_k\}$ que converge para um $y \in X$. Então $y \in \omega(B, t)$ por definição e $\omega(B, t)$ é não-vazio. Que $\omega(B, t)$ atrai pullback B segue exatamente como na prova do Lema 2.2.4. Para concluir, mostremos que $\omega(B, t)$ é compacto. Dada uma sequência $\{y_k\} \in \omega(B, t)$, existem $x_k \in B$ e $\{s_k\} \leq \min(s_0, -k)$, tais que $d(S(t, s_k)x_k, y_k) \leq \frac{1}{k}$. Como $\{S(t, s_k)x_k\}$ tem uma subsequência que converge a um elemento y de $\omega(B, t)$, consequentemente $\{y_k\}$ tem uma subsequência que converge para $y \in \omega(B, t)$, e portanto $\omega(B, t)$ é compacto. \square

Novamente associamos o atrator com os ω -limites de limitados.

Teorema 2.2.8. *Se $S(\cdot, \cdot)$ é um processo num espaço métrico X , então são equivalentes:*

- (i) $S(\cdot, \cdot)$ tem um atrator pullback $\mathcal{A}(\cdot)$.
- (ii) Existe uma família de compactos $K(\cdot)$ que atrai pullback limitados de X sob $S(\cdot, \cdot)$.

Em ambos casos,

$$\mathcal{A}(t) = \overline{\bigcup \{\omega(B, t) : B \subset X, B \text{ limitado}\}} \quad (2.4)$$

e $\mathcal{A}(\cdot)$ é mínimo no sentido que, se existe outra família de limitados e fechados $\hat{\mathcal{A}}(\cdot)$ que atrai pullback limitados de X sob $S(\cdot, \cdot)$, então $\mathcal{A}(t) \subseteq \hat{\mathcal{A}}(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Se $S(\cdot, \cdot)$ tem um atrator pullback $\mathcal{A}(\cdot)$, então cada $\mathcal{A}(t)$ é compacto e atrai pullback limitados de X no tempo t .

Provemos a recíproca. Primeiro note que, como uma consequência imediata da caracterização em (2.3), $\omega(B, t) \subseteq K(t)$, para todo $B \subseteq X$ limitado e $t \in \mathbb{R}$. Segue do Lema 2.2.4 que $\omega(B, t)$ atrai B e então, do Lema 2.2.4 (ii), que $\omega(B, t)$ é invariante. Então, se definimos $\mathcal{A}(t)$ como em (2.4), então construímos um compacto que atrai pullback todos os limitados de X .

A invariância de $\mathcal{A}(\cdot)$ segue da invariância de cada ω -limite. De fato, dado $x_0 \in \mathcal{A}(s)$, existe $x_n \in \omega(B_n, s)$ com $x_n \rightarrow x_0$ quando $n \rightarrow \infty$. Então $S(t, s)x_n = y_n \in \omega(B_n, t)$, e, por

continuidade do processo, $S(t, s)x_n = y_n \rightarrow S(t, s)x_0$, o que implica que $S(t, s)x_0 \in \mathcal{A}(t)$, e portanto $S(t, s)\mathcal{A}(s) \subseteq \mathcal{A}(t)$. Agora, escolha algum $y_0 \in \mathcal{A}(t)$. Logo existem $y_n \in \omega(B_n, t)$ com $y_n \rightarrow y_0$ quando $n \rightarrow \infty$. Então, novamente pela invariância da família $\omega(B_n, \cdot)$, existem $x_n \in \omega(B_n, s)$ com $S(t, s)x_n = y_n$. Mas como $x_n \in \omega(B_n, s) \subseteq \mathcal{A}(s)$, e $\mathcal{A}(s)$ é compacto, existe uma subsequência x_{n_j} que converge para algum $x_0 \in \mathcal{A}(s)$, o que implica $S(t, s)x_0 = \lim_{j \rightarrow \infty} S(t, s_{n_j}x_{n_j}) = \lim_{j \rightarrow \infty} y_{n_j} = y_0$. Concluimos que $S(t, s)\mathcal{A}(s) \supseteq \mathcal{A}(t)$, e então $\mathcal{A}(\cdot)$ é invariante.

A minimalidade segue simplesmente da observação de que se $\hat{\mathcal{A}}(t)$ é fechado e limitado e atrai pullback limitados no tempo t , então $\omega(B, t) \subseteq \hat{\mathcal{A}}(t)$ para todo limitado B de X , e portanto $\mathcal{A}(t) \subseteq \hat{\mathcal{A}}(t)$. \square

O seguinte corolário para semigrupos permite uma caracterização do atrator global.

Corolário 2.2.9. *Seja $T(\cdot)$ um semigrupo num espaço métrico X . Então $T(\cdot)$ tem um atrator global \mathcal{A} se e somente se existe um compacto K que atrai limitados de X sob $T(\cdot)$, e neste caso $\mathcal{A} = \omega(K)$.*

Demonstração. É imediato do Teorema 2.2.8 que

$$\mathcal{A} = \overline{\bigcup \{ \omega(B) : B \subset X, B \text{ limitado} \}}$$

é o atrator global para $T(\cdot)$. É imediato disto que $\omega(K) \subseteq \mathcal{A}$, por outro lado, como K atrai limitados de X , devemos ter $\omega(B) \subseteq \omega(K)$ para todo limitado B em X , o que completa a prova. \square

Na prova do Teorema 2.2.8, nos utilizamos do Lema 2.2.4 para garantir as propriedades do ω -limite. Contudo já conhecemos um resultado semelhante ao Lema 2.2.4, no caso o Lema 2.2.7, que usa a noção de compacidade assintótica ao invés de assumir a existência de uma família de compactos atratores. Assim, faz sentido se substituirmos uma hipótese pela outra no nosso teorema de atrator (Teorema 2.2.8) para obter um resultado mais facilmente aplicável. Antes disso, daremos uma condição suficiente para que um processo seja pullback assintoticamente compacto.

Definição 2.2.10. *Um processo $S(\cdot, \cdot)$ é dito **pullback limitado** se para cada limitado B e $t \in \mathbb{R}$ a órbita pullback de B no tempo t , isto é,*

$$\gamma_p(B, t) := \bigcup_{s \leq t} S(t, s)B,$$

é limitado.

Note que se $T(\cdot)$ é um semigrupo então o processo associado $S_T(\cdot, \cdot)$ é pullback limitado se e somente se $\gamma^+(B) = \bigcup_{t \geq 0} T(t)B$ é limitado para cada B limitado, ou seja $T(\cdot)$ é limitado.

Definição 2.2.11. Um processo $S(\cdot, \cdot)$ é dito **pullback eventualmente compacto** se é pullback limitado e existe $\tau \geq 0$ tal que, se B é um limitado de X e $t \in \mathbb{R}$, então $\overline{S(t, t - \tau)B}$ é compacto.

Assim obtemos a seguinte implicação.

Lema 2.2.12. Seja $S(\cdot, \cdot)$ um processo num espaço métrico X . Se $S(\cdot, \cdot)$ é pullback eventualmente compacto, então $S(\cdot, \cdot)$ é pullback assintoticamente compacto.

Demonstração. Seja $\{x_n\} \in X$ uma sequência limitada, e $\{s_n\} \leq t$ tal que $s_n \rightarrow \infty$. Se $B = \gamma_p(\{x_n\}, t - \tau)$, então B é limitado e portanto $S(t, t - \tau)B$ é relativamente compacto e contém $\{S(t, s_n)x_n\}$. Segue que $\{S(t, s_n)x_n\}$ é relativamente compacto. \square

Corolário 2.2.13. Seja $T(\cdot)$ um semigrupo eventualmente compacto, então $T(\cdot)$ é assintoticamente compacto.

Agora adicionamos uma hipótese de 'dissipatividade' à compacidade assintótica com intuito de reaver propriedades atratoras dos ω -limites e obter a atração pullback.

Definição 2.2.14. Dizemos que um processo $S(\cdot, \cdot)$ é **pullback limitado dissipativo** se existe uma família $B(\cdot)$ de limitados tais que $B(t)$ atrai pullback limitados no tempo t , para cada $t \in \mathbb{R}$.

Novamente se $T(\cdot)$ é um semigrupo e $S_T(\cdot, \cdot)$ é o processo associado, então $S_T(\cdot, \cdot)$ é pullback limitado dissipativo se e somente se $T(\cdot)$ é limitado dissipativo.

Teorema 2.2.15. Se $S(\cdot, \cdot)$ é pullback assintoticamente compacto, então para cada $t \in \mathbb{R}$ o conjunto $\mathcal{A}(t)$ dado por (2.4) é fechado, invariante e atrai pullback limitados de X no

tempo t . Ademais, a família $\mathcal{A}(\cdot)$ é minimal nas famílias $C(\cdot)$ de fechados que atraem pullback limitados de X em cada tempo $t \in \mathbb{R}$. Se adicionalmente $S(\cdot, \cdot)$ é pullback limitado dissipativo, então $\mathcal{A}(t)$ é limitado para cada $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Note que as hipóteses do Lema 2.2.7 estão satisfeitas, e portanto $\omega(B, t)$ é não-vazio, compacto, invariante e atrai pullback B no tempo t para qualquer limitado B em X . Portanto, se $\mathcal{A}(t)$ é definido como em (2.4), ou seja,

$$\mathcal{A}(t) = \overline{\bigcup \{ \omega(B, t) : B \subset X, B \text{ limitado} \}},$$

então $\mathcal{A}(\cdot)$ é fechado, invariante e atrai pullback limitados de X . Se $C(t)$ é fechado e pullback atrai limitados no tempo t , é claro que $\omega(B, t) \subset C(t)$ para cada limitado B de X e, conseqüentemente, $\mathcal{A}(t) \subseteq C(t)$. Agora, se $S(\cdot, \cdot)$ for pullback limitado dissipativo, para cada $t \in \mathbb{R}$ existe um limitado $B(t)$ que atrai pullback limitados de X . Portanto $\omega(D, t) \subset \overline{B(t)}$ para cada limitado D em X , logo $\mathcal{A}(t) \subset B(t)$, o que mostra que $\mathcal{A}(t)$ é limitado. \square

Note que este resultado não nos dá compacidade de $\mathcal{A}(t)$. Contudo, no caso de semi-grupos é possível obter compacidade.

Corolário 2.2.16. *Se $T(\cdot)$ é limitado dissipativo e assintoticamente compacto, então possui um atrator global \mathcal{A} .*

Demonstração. Para mostrar que \mathcal{A} é compacto, tome $\{x_n\} \in \mathcal{A}$. Como \mathcal{A} é invariante, $x_n = T(n)y_n$ para algum $y_n \in \mathcal{A}$. Como $\{y_n\}$ é limitado, segue da compacidade assintótica de $T(\cdot)$ que $\{T(n)y_n\} = \{x_n\}$ tem uma subsequência convergente. \square

Para obter um resultado equivalente para processos, é necessário uma hipótese mais forte que traga uniformidade à dissipatividade de $S(\cdot, \cdot)$.

Definição 2.2.17. *Dizemos que um processo $S(\cdot, \cdot)$ é **fortemente pullback limitado dissipativo** se para cada $t \in \mathbb{R}$ existe um limitado $B(t)$ de X que atrai pullback limitados de X no tempo τ para qualquer $\tau \leq t$, ou seja, dado limitado D e $\tau \leq t$, $\lim_{s \rightarrow -\infty} \text{dist}(S(\tau, s)D, B(t)) = 0$.*

Note que a família $B(\cdot)$ dada nesta definição não precisa ser limitada como conjunto, contudo podemos construí-la de modo que seja limitada para trás. Assim, o teorema seguinte dá condição suficiente para existência de um atrator pullback compacto $\mathcal{A}(\cdot)$ que seja limitado para trás.

Teorema 2.2.18. *Se um processo $S(\cdot, \cdot)$ é fortemente pullback limitado dissipativo, com $B(\cdot)$ a família de atratores limitados, e pullback assintoticamente compacto, então $S(\cdot, \cdot)$ tem um atrator pullback compacto $\mathcal{A}(\cdot)$ tal que $\mathcal{A}(t) = \omega(\overline{B}(t), t)$ e $\bigcup_{s \leq t} \mathcal{A}(s)$ é limitado para cada $t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Só precisamos checar que $\mathcal{A}(t)$ definida como em (2.4) é compacto. Fixe t , assim para cada $\tau \leq t$, como $B(t)$ atrai pullback limitados no tempo τ , temos que $\omega(D, \tau) \subseteq B(t)$ para cada limitado $D \subseteq X$. Da invariância de $\omega(D, \cdot)$ segue

$$\omega(D, t) = S(t, \tau)\omega(D, \tau) \subseteq S(t, \tau)\overline{B}(t)$$

para todo $\tau \leq t$. Portanto

$$\omega(D, t) \subseteq \bigcap_{\sigma \leq t} \overline{\bigcup_{\tau \leq \sigma} S(t, \tau)B(t)} = \omega(\overline{B}(t), t).$$

Agora, como isto vale para todo limitado D , segue que $\mathcal{A}(t) \subset \omega(\overline{B}(t), t)$, e consequentemente $\mathcal{A}(t)$ é compacto, já que é fechado dentro de $\omega(\overline{B}(t), t)$, que é compacto do Lema 2.2.7. Como $\omega(\overline{B}(t), t) \subset \mathcal{A}(t)$, da definição de $\mathcal{A}(\cdot)$, concluímos que $\mathcal{A}(t) = \omega(\overline{B}(t), t)$. Finalmente, da primeira observação da prova já segue que $\mathcal{A}(\tau) \subseteq \overline{B}(t)$ para todo $\tau \leq t$, portanto $\mathcal{A}(\cdot)$ é limitado para trás. \square

Note que se um processo tem um atrator pullback que é limitado para trás, então deve ser fortemente pullback limitado dissipativo (pondo $B(t) = \bigcup_{s \leq t} \mathcal{A}(s)$); e já vimos também (Lema 2.2.6) que um processo que com atrator pullback deve ser pullback assintoticamente compacto. Isto significa que as condições do teorema acima são de fato necessárias e suficientes para a existência de um atrator pullback que é limitado no passado.

2.3 Decomposição de Morse para Processos Dinamicamente Gradientes

Nesta seção estudamos as propriedades de processos dinamicamente gradientes com objetivo de construir uma decomposição de Morse para este e conseqüentemente uma função de Lyapunov. Primeiro definamos

Definição 2.3.1. *Seja $\Xi := \{\Xi(t) : t \in \mathbb{R}\}$ uma família invariante para o processo $S(\cdot, \cdot)$. Ξ é dita uma **família invariante isolada** se existe $\delta > 0$ tal que qualquer solução global $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ com $\xi(t) \in \mathcal{O}_\delta(\Xi(t))$ deve satisfazer $\xi(t) \in \Xi(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Um conjunto $\Xi := (\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n)$ é dito um **conjunto disjunto de famílias invariantes isoladas** se cada Ξ_i , $1 \leq i \leq n$, é uma família invariante isolada e existe $\delta > 0$ tal que $\mathcal{O}_\delta(\Xi_i(t)) \cap \mathcal{O}_\delta(\Xi_j(t)) = \emptyset$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e $1 \leq i < j \leq n$.*

Definiremos os conceitos de atrator local e par atrator-repulsor.

Definição 2.3.2. *Seja $S(\cdot, \cdot)$ um processo de evolução no espaço métrico X com atrator pullback $\mathcal{A}(\cdot)$. Dizemos que um família invariante isolada $A := \{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$, com $A(t) \subset \mathcal{A}(t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$, é um **atrator local** se $W^u(A)(t) = A(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Se A é um atrator local, definimos o seu **repulsor** associado $A^* := \{A^*(t) : t \in \mathbb{R}\}$ como

$$A^*(t) := \{z \in \mathcal{A}(t) : d(S(r+t, t)z, A(r+t)) \not\rightarrow 0 \text{ quando } r \rightarrow \infty\}, \quad (2.5)$$

para cada $t \in \mathbb{R}$. O par (A, A^*) é chamado um par atrator-repulsor.

O próximo resultado garante que a definição acima estende sua contraparte autônoma.

Teorema 2.3.3. *Seja $T(\cdot)$ um semigrupo no espaço métrico X com atrator global \mathcal{A} . Um invariante isolado $A \subseteq \mathcal{A}$ é atrator local se e somente se a família constante $A(t) \equiv A$ é um atrator local para $S_T(\cdot, \cdot)$.*

Demonstração. Note que

$$W^u(A) = W^u(\{A(t) : t \in \mathbb{R}\}(t)), \forall t \in \mathbb{R},$$

onde $W^u(A) := \{z \in X : \text{existe solução global } \xi : \mathbb{R} \rightarrow X \text{ com } \xi(0) = z \text{ e } \xi(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} A\}$. Além disso se A é invariante isolado para $T(\cdot)$ tal que $W^u(A) = A$, então para todo $\delta > 0$ existe $\delta' > 0 \in (0, \delta)$ com

$$\gamma^+(\mathcal{O}_{\delta'}(A)) \subset \mathcal{O}_{\delta}(A).$$

A prova segue do fato que $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(A))$ atrai $\mathcal{O}_{\delta'}(A)$ e é invariante (portanto deve estar contido em A). \square

Para processos autônomos (semigrupos) um repulsor é automaticamente fechado, mas este não é o caso para um processo não-autônomo. Contudo, se existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{O}_{\varepsilon}(A(t)) \cap \mathcal{O}_{\varepsilon}(A^*(t)) = \emptyset, \forall t \in \mathbb{R}$, então $A^*(t)$ é fechado para cada $t \in \mathbb{R}$.

Primeiro introduzimos a noção de processo dinamicamente gradiente. Para isso precisamos definir recorrência por cadeia.

Definição 2.3.4. *Seja δ como na definição (2.3.1) e fixe $\varepsilon_0 \in (0, \delta)$. Para $\Xi \in \Xi$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ uma ε -cadeia de Ξ para Ξ é uma seqüência $l_i \in \{1, \dots, n\}, 1 \leq i \leq k$, seqüências de reais $t_i < \sigma_i < \tau_i$ e uma seqüência de pontos $z_i \in X, 1 \leq i \leq k$, tais que*

$$z_i \in \mathcal{O}_{\varepsilon}(\Xi_{l_i})(\tau_i), \quad T(\sigma_i, \tau_i)z_i \notin \mathcal{O}_{\varepsilon_0}\left(\bigcup_{i=1}^n \Xi_i(\sigma_i)\right) \text{ e}$$

$$T(t_i, \tau_i)z_i \in \mathcal{O}_{\varepsilon}(\Xi_{l_{i+1}}(t_i)), 1 \leq i \leq k, \text{ com } \Xi = \Xi_{l_{k+1}=\Xi_{l_1}}.$$

*Dizemos que $\Xi \in \Xi$ é **recorrente por cadeia** se existe um $\varepsilon_0 \in (0, \delta)$ tal que para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ existe ε -cadeia de Ξ para Ξ .*

Note que o ε_0 discriminado acima só se faz necessário no caso $k = 1$. Já que $k > 1$ implica que a solução deve sair de $\mathcal{O}_{\varepsilon_0}(\bigcup_{i=1}^n \Xi_i(t))$, para algum $t \in \mathbb{R}$, enquanto se desloca de um invariante para outro.

Definição 2.3.5. *Sejam $S(\cdot, \cdot)$ um processo em X um espaço métrico com atrator pullback $\mathcal{A}(\cdot)$ e um conjunto disjunto de famílias invariantes isoladas $\Xi := (\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n)$ em $\mathcal{A}(\cdot)$. Dizemos que $S(\cdot, \cdot)$ é um processo de evolução **dinamicamente gradiente com respeito a Ξ** se as duas seguintes condições são satisfeitas:*

(H1) *Qualquer solução global $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ em $\mathcal{A}(\cdot)$ satisfaz*

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \text{dist}(\xi(t), \Xi_i(t)) = 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\xi(t), \Xi_j) = 0,$$

para algum $1 \leq i, j \leq n$.

(H2) $\Xi := (\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n)$ não contém família invariante isolada que seja recorrente por cadeia.

Definamos agora a noção de estrutura homoclínica.

Definição 2.3.6. *Seja $S(\cdot, \cdot)$ um processo de evolução que possui um conjunto disjunto de famílias invariantes isoladas $\Xi := (\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n)$. Uma **estrutura homoclínica** associada a Ξ é um subconjunto $\{\Xi_{i_1}, \dots, \Xi_{i_p}\}$ de Ξ junto com um conjunto de soluções globais $\{\xi_1, \dots, \xi_p\}$ tal que*

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \text{dist}(\xi_k(t), \Xi_{i_k}(t)) = 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\xi_k(t), \Xi_{i_{k+1}}(t)) = 0, 1 \leq k \leq p,$$

onde $\Xi_{i_{p+1}} := \Xi_{i_1}$.

É fácil ver que se um processo tem estrutura homoclínica, então não satisfaz (H2), isto será útil adiante. Agora provamos a invariância do repulsor A^* de um atrator local A .

Proposição 2.3.7. *Seja $S(\cdot, \cdot)$ um processo de evolução com um atrator pullback $\mathcal{A}(\cdot)$ e seja $A = \{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ um atrator local. Então, o repulsor A^* de A é invariante.*

Demonstração. Se $A^*(t_0)$ é vazio para algum $t_0 \in \mathbb{R}$, então é vazio para todo $t \in \mathbb{R}$ e a prova é óbvia. Assuma que $A^*(t)$ é não-vazio para todo $t \in \mathbb{R}$, assim seja $s \in \mathbb{R}, t \leq s$ e $w \in A^*(s)$. Se $S(t, s)w \notin A^*(t)$ temos que

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \text{dist}(S(\tau, t)S(t, s)w, A(\tau)) = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \text{dist}(T(\tau, s)w, A(\tau)) = 0,$$

o que contradiz o fato que $w \in A^*(s)$ e prova $S(t, s)A^*(s) \subset A^*(t)$.

Reciprocamente, se $z \in A^*(t) \subset \mathcal{A}(t) = S(t, s)\mathcal{A}(s)$, tome $w \in \mathcal{A}(s)$ tal que $z = S(t, s)w$. Segue que $w \in A^*(s)$, pois caso contrário

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \text{dist}(S(\tau, s)w, A(\tau)) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \text{dist}(S(\tau, t)S(t, s)w, A(\tau)) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \text{dist}(S(\tau, t)z, A(\tau)), \end{aligned}$$

contradizendo o fato que $z \in A^*(t)$ e provando $A^*(t) \subset S(t, s)A^*(s)$. \square

Note que se A_0, A_1, \dots, A_n são $n + 1$ atratores locais com $\emptyset = A_0(t) \subset A_1^* \subset \dots \subset A_n(t) = \mathcal{A}(t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$, então $\emptyset = A_n^*(t) \subset A_{n-1}^* \subset \dots \subset A_0^*(t) = \mathcal{A}(t)$, para cada $t \in \mathbb{R}$.

Agora, definimos decomposição de Morse para processos não-autônomos.

Definição 2.3.8. *Seja $S(\cdot, \cdot)$ um processo com atrator pullback $\mathcal{A}(\cdot)$ e sejam $A_0(\cdot), \dots, A_n(\cdot)$ $n + 1$ atratores locais com $\emptyset \subset A_0(t) \subset A_1(t) \subset \dots \subset A_n(t) = \mathcal{A}(t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$.*

Defina $\Xi_j(t) := A_j(t) \cap A_{j-1}^(t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$ e $j = 1, 2, \dots, n$. O conjunto ordenado de famílias invariantes $\Xi := (\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n)$ é dito uma **decomposição de Morse** para o atrator pullback $\mathcal{A}(\cdot)$.*

Mais adiante descrevemos a construção de uma decomposição de Morse para o atrator pullback de um processo dinamicamente gradiente relativo ao conjunto disjunto de família de famílias invariantes isoladas $\Xi := (\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n)$, e da coleção crescente de atratores locais associados obtida desta família. O seguinte resultado terá papel fundamental nisto.

Lema 2.3.9. *Seja $S(\cdot, \cdot)$ um processo de evolução dinamicamente gradiente associado ao conjunto disjunto de famílias invariantes isoladas $\Xi := (\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n)$. Então existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que Ξ_i é atrator local.*

Demonstração. Primeiro note que cada Ξ_i é um família de invariantes isolados que não é recorrente por cadeia, e precisamos mostrar que existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $W^u(\Xi_i)(t) = \Xi_i(t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

Se este não é o caso, para cada $1 \leq i \leq n$ existe solução global $\xi_i(t) \in \mathcal{A}(t)$ (com $\xi_i(s) \notin \Xi_i(s)$ para algum $s \in \mathbb{R}$), tal que $\lim_{t \rightarrow -\infty} \text{dist}(\xi_i(t), \Xi(t)) = 0$. Como $\Xi_i(t)$ necessariamente converge para algum elemento de Ξ quando $t \rightarrow \infty$ e podemos repetir esse processo indefinidamente. Contudo como há um número finito de elementos em Ξ , num número finito de repetições obteremos uma estrutura homoclínica, contradizendo (H2). \square

Com isto iniciamos a construção de nossa decomposição: Seja $S(\cdot, \cdot)$ processo dinamicamente gradiente associado a $\Xi := (\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n)$. Se, após uma possível reordenação,

Ξ_1 é um atrator local e Ξ^* seu repulsor associado, então temos que cada $\Xi_i(s)$, para $i \leq 2$ e $s \in \mathbb{R}$, está contido em $\Xi^*(s)$, além disso se $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ é uma solução global limitada e $\text{dist}(\xi(t), \Xi_i(t)) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ com $i > 1$, devemos ter $\xi(s) \in \Xi^*(s)$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Assim para cada $z \in \mathcal{A}(t) \setminus (\Xi_1(t) \cup \Xi_1^*(t))$ e solução global $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ com $\xi(s) \in \mathcal{A}(s)$, para todo $s \in \mathbb{R}$, e $\xi(t) = z$ temos

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \text{dist}(\xi(s), \Xi_1^*(s)) = 0 \text{ e } \lim_{s \rightarrow \infty} \text{dist}(\xi(s), \Xi_1(s)) = 0.$$

Podemos então repetir o argumento do Lema 2.3.9 para concluir que existe $i \geq 2$ tal que

$$W^u(\Xi_i)(t) \cap \Xi^*(t) = \Xi_i(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Então renomeamos esta família invariante isolada como Ξ_2 e definimos

$$\Xi_{2,1}^* := \{z \in \Xi^*(t) : \text{dist}(S(r+t, t)z, \Xi_2(r+t)) \not\rightarrow 0, r \rightarrow \infty\} \quad (2.6)$$

Temos assim que, para cada $t \in \mathbb{R}$ e $i = 3, \dots, n$ $\Xi_i(t) \subset \Xi_{2,1}^*(t)$ (além disso se $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ é uma solução global limitada e $\text{dist}(\xi(t), \Xi_i(t)) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ com $i > 2$, nós temos que $\xi(s) \in \Xi^*(s)$ para todo $s \in \mathbb{R}$, e portanto $\xi(s) \in \Xi_{2,1}^*$ para todo $s \in \mathbb{R}$). Como antes, podemos assumir que $W^u(\Xi_3)(t) \cap \Xi_{2,1}^*(t) = \Xi_3(t)$ para cada t e definimos $\Xi_{3,2}^*$ de modo análogo a (2.6). Prosseguindo desta forma até que tenhamos reordenado todas as famílias invariante isoladas de forma que Ξ_1 é um atrator local para $S(\cdot, \cdot)$ e

$$W^u(\Xi_i)(t) \cap \Xi_{i-1, i-2}^*(t) = \Xi_i(t) \quad \forall t \text{ e } i = 2, \dots, n,$$

onde $\Xi_{1,0}^* := \Xi_1^*$, e para $i = 2, \dots, n$,

$$\Xi_{i, i-1}^*(t) := \{z \in \Xi_{i-1, i-2}^*(t) : \text{dist}(S(t+r, t)z, \Xi_i(r+t)) \not\rightarrow 0, r \rightarrow \infty\}.$$

Considerando esta reordenação, obtemos o seguinte lema.

Lema 2.3.10. *Seja $S(\cdot, \cdot)$ um processo de evolução dinamicamente gradiente associado ao conjunto de família invariantes isoladas (reordenado) $\Xi := (\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n)$. Então qualquer solução global limitada $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ satisfaz*

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \text{dist}(\xi(t), \Xi_i(t)) = 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\xi(t), \Xi_j(t)), \quad (2.7)$$

com $i \geq j$.

Demonstração. De fato, se $j = 1$ em (2.7) não há nada a provar. Se $j = 2$ e vale (2.7), temos que $\xi(t) \in \Xi^*(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, assim se $1 = i < j = 2$, temos que $\xi(t) \in W^u(\Xi_1)(t) = \Xi_1(t)$ para cada t , o que contradiz o fato de $\Xi_1^*(t) \cap \Xi_1(t) = \emptyset$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Segue que $i \geq j$. Para o caso geral, suponha que $j \geq 3$ e vale (2.7). Então $\xi(t) \in \Xi_{j-1, j-2}^*(t)$ para todo t . Se por absurdo $i < j$, então teríamos $\Xi_{j-1, j-2}^*(t) \subset \Xi_{i-1, i-2}^*(t)$ para todo t e $\xi(t) \in W^u(\Xi_i)(t) \cap \Xi_{i-1, i-2}^*(t) = \Xi_i(t)$ para todo t . Graças ao fato das famílias invariantes em Ξ serem isoladas, devemos ter $i = j$, o que é uma contradição. Isto prova o lema. \square

Provaremos que esta reordenação de $\Xi := (\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n)$ é uma decomposição de Morse para $\{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ com uma escolha adequada da sequência $A_0(t) \subseteq A_1(t) \subseteq \dots \subseteq A_n(t)$ de atratores local:

Para cada $t \in \mathbb{R}$, defina $A_0(t) := \emptyset$, $A_1(t) := \Xi(t)$, e para cada $j = 2, 3, \dots, n$,

$$A_j(t) := A_{j-1}(t) \cup W^u(\Xi_j)(t) = \bigcup_{i=1}^j W^u(\Xi^i)(t) \quad (2.8)$$

É claro que $A_n(t) = \mathcal{A}(t)$. Assim mostramos o resultado principal desta seção

Teorema 2.3.11. *Seja $S(\cdot, \cdot)$ um semigrupo dinamicamente gradiente com atrator pull-back $\mathcal{A}(\cdot)$ e um conjunto de famílias invariantes isoladas $\Xi := (\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n)$ reordenada como acima. Assuma que existe $\delta > 0$ tal que, para $j = 1, 2, \dots, n-1$ e $t \in \mathbb{R}$, vale*

$$\mathcal{O}_\delta(A_j(t)) \cap \left(\bigcup_{i=j+1}^n \Xi_i(t) \right) = \emptyset \quad (2.9)$$

Então, para cada $j = 0, 1, \dots, n$, a família invariante A_j definida em (2.8) é um atrator local para $S(\cdot, \cdot)$ e

$$\Xi_j = A_j(t) \cap A_{j-1}^*(t), \forall t \in \mathbb{R} \text{ e } 1 \leq j \leq n.$$

Consequentemente, Ξ define uma decomposição de Morse para $\mathcal{A}(\cdot)$.

Demonstração. Claramente $\{A_j(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é invariante e $A_j(t) \subseteq W^u(A_j)(t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Por outro lado, se $z \in W^u(A_j)(t)$, existe solução global $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ com $\xi(t) = z$ e $\lim_{s \rightarrow -\infty} \text{dist}(\xi(s), A_j(s)) = 0$. Como $S(\cdot, \cdot)$ é dinamicamente gradiente e de (2.9) temos que existe $k \in \{1, 2, \dots, j\}$ tal que $\lim_{s \rightarrow -\infty} \text{dist}(\xi(s), \Xi_k(s)) = 0$. Portanto, $z \in W^u(\Xi_k)(t)$ com $k \leq j$. Isto implica que $z \in A_j$ e $W^u(A_j)(t) \subseteq A_j(t)$. Agora provamos que $\{A_j(t) : t \in \mathbb{R}\}$

é uma família invariante isolada. De fato, seja $\delta > 0$ como em (2.9) e $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ uma solução global com $\xi(t) \in \mathcal{O}_\delta(A_j(t))$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Como $S(\cdot, \cdot)$ é dinamicamente gradiente, existe um $k \in \{1, \dots, j\}$ tal que $\text{dist}(\xi(t), \Xi_k(t)) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0$. Isto prova que $\{A_j(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é um atrator local.

Das definições, é fácil ver que $\Xi_j(t) \subset A_j(t) \cap A_{j-1}^*(t)$. Para a outra inclusão, fixe $z \in A_j(t) \cap A_{j-1}^*(t)$, então existe solução global $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ com $\xi(t) = z$. Como $z \in A_j(t)$, devemos ter $\lim_{s \rightarrow -\infty} \text{dist}(\xi(s), \Xi_k(s)) = 0$ para algum $k \leq j$. Como $S(\cdot, \cdot)$ é dinamicamente gradiente, existe um $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $\lim_{s \rightarrow \infty} \text{dist}(\xi(s), \Xi_i(s)) = 0$ e, dado que $z \in A_{j-1}^*(t)$, segue que $i \leq j$. Como do Lema 2.3.10 nós temos que $i \leq k$, segue que $k = i = j$, e novamente levando em consideração a dinâmica gradiente, devemos ter $\xi(s) \in \Xi_j(s)$ para cada $s \in \mathbb{R}$, caso contrario obteríamos uma recorrência por cadeia. Em particular $z = \xi(t) \in \Xi_j(t)$, isto prova que $A_j(t) \cap A_{j-1}^*(t) \subset \Xi_j(t)$ e completa a demonstração. \square

Lembremos que a hipótese (2.9) não é necessária no caso autonômo, já que não há dependência do tempo.

O resultado seguinte desempenha um papel importante na prova dos principais resultados desta seção no que diz respeito à continuidade da função de Lyapunov construída para um processo dinamicamente gradiente.

Lema 2.3.12. *Sejam $S(\cdot, \cdot)$ um processo de evolução com atrator pullback $\mathcal{A}(\cdot)$ e $A(\cdot)$ um atrator local que não é recorrente por cadeia. Suponha que existe $\varepsilon > 0$ com*

$$\mathcal{A}(t) \cap \mathcal{O}_\varepsilon(A(t)) \cap \mathcal{O}_\varepsilon(A^*(t)) = \emptyset, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.10)$$

Então, para cada $\delta \in (0, \varepsilon)$ existe um $\delta' \in (0, \delta)$ tal que

$$S(t, s)(\mathcal{A}(s) \cap \mathcal{O}_{\delta'}(A(s))) \subseteq \mathcal{A}(t) \cap \mathcal{O}_\delta(A(t)), \quad \forall t \geq s.$$

Demonstração. Provemos por contradição. Supondo que existam $\delta > 0$, seqüências $(s_j)_{j \in \mathbb{N}}, (t_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ e $(x_j)_{j \in \mathbb{N}} \in X$ com $x_j \in \mathcal{A}(s_j)$ para cada j , tal que

$$s_j \leq t_j,$$

$$\text{dist}(x_j, A(s_j)) < \frac{1}{j}, \quad \text{mas } \text{dist}(T(t_j, s_j)x_j, A(t_j)) \geq \delta,$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Escolha $j_0 \in \mathbb{N}$ satisfazendo $\text{dist}(x_j, A(s_j)) < \frac{1}{j} < \varepsilon$ para todo $j \geq j_0$ existe um $\tau_j \geq t_j$ tal que

$$\text{dist}(T(\tau_j, s_j)x_j, A(\tau)) < \frac{1}{j}.$$

Segue que A é recorrente por cadeia, uma contradição. Assim o lema está provado. \square

Observação 2.3.13. *Note que a hipótese de separação uniforme assumida em (2.10) é automaticamente satisfeita no caso autônomo.*

Podemos olhar para uma espécie de recíproca.

Proposição 2.3.14. *Seja $A(\cdot)$ uma família invariante isolada para o processo de evolução $S(\cdot, \cdot)$ com atrator pullback $\mathcal{A}(\cdot)$, tal que $A(t) \subseteq \mathcal{A}(t)$ para todo t , e para cada $\delta > 0$ existe $\delta' > 0 \in (0, \delta)$ satisfazendo*

$$S(t, s)(\mathcal{A}(s) \cap \mathcal{O}_{\delta'}(A(s))) \subseteq \mathcal{A}(t) \cap \mathcal{O}_\delta(A(t)), \quad \forall t \geq s. \quad (2.11)$$

Então $A = \{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é um atrator local para $S(\cdot, \cdot)$ que não é recorrente por cadeia.

Demonstração. Fixando $s_\delta \in \mathbb{R}$ tal que $\text{dist}(\xi(s), A(s)) < \delta'$ para todo $s \leq s_\delta$, devemos ter por (2.11) que $\xi(t) \in \mathcal{O}_\delta(A(t))$ para todo $t \in \mathbb{R}$ (podemos usar (2.11) já que $\xi(t) \in W^u(A(t)) \subseteq W^u(\mathcal{A}(t)) = \mathcal{A}(t)$). Consequentemente, $\xi(t) \in A(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, já que $A(\cdot)$ é invariante isolado e $W^u(A)(t) \subseteq A(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Finalmente, se $\mathcal{A}(\cdot)$ for recorrente por cadeia, então existem $\delta > 0$, sequências $(s_j)_{j \in \mathbb{N}}$, $(t_j)_{j \in \mathbb{N}}$ e $(\tau_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de números reais, e uma sequência $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ em X , com $x_j \in \mathcal{A}(s_j)$ para cada j , tal que

$$s_j \leq t_j \leq \tau_j,$$

$$\text{dist}(x_j, A(s_j)) < \frac{1}{j}, \quad \text{dist}(S(t_j, s_j)x_j, A(t_j)) \geq \delta, \quad \text{e}$$

$$\text{dist}(T(\tau_j, s_j)x_j, A(\tau_j)) < \frac{1}{j}.$$

Isto é claramente uma contradição à existência de $\delta' \in (0, \delta)$ que satisfaça (2.11) e portanto a prova está completa. \square

Nosso próximo resultado é uma consequência do Lema 2.3.12.

Lema 2.3.15. *Seja $S(\cdot, \cdot)$ um processo de evolução e $A(\cdot)$ um atrator local que não é recorrente por cadeia. Suponha que exista $\varepsilon > 0$ satisfazendo (2.10). Se $K \subseteq \mathcal{A}(t)$ é compacto e $K \cap A^*(t) = \emptyset$, então*

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \text{dist}(T(\tau, t)K, A(\tau)) = 0.$$

Demonstração. Provemos por contradição. Assuma que existam $\delta > 0$, seqüências $(\tau_j)_{j \in \mathbb{N}}$ em \mathbb{R} com $\tau_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty$ e $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ em K com $x_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x_0 \in K$ tais que

$$\text{dist}(S(\tau_j, t)x_j, A(\tau_j)) \geq \delta, \forall j. \quad (2.12)$$

Graças ao Lema 2.3.12, podemos escolher $\delta' > 0 \in (0, \delta)$ tal que

$$S(t, s)\mathcal{O}_{\delta'}(A(r)) \subseteq \mathcal{O}_\delta(A(S)), \forall s \geq r.$$

Então, segue de (2.12) que

$$\text{dist}(S(t, s)x_j, A(s)) \geq \delta', \forall s \in [t, \tau_j] \text{ e } j \in \mathbb{N}.$$

Como $\tau \rightarrow \infty$, segue da condição acima que $\text{dist}(S(s, t)x_0, A(s)) \geq \delta'$ para $s \geq t$. Da definição de repulsor temos que $x_0 \in A^*(t)$, uma contradição pois $K \cap A^*(t) = \emptyset$, e a prova está completa. \square

2.4 Função de Lyapunov para processos dinamicamente gradientes

Nesta seção iremos provar que processos dinamicamente gradientes são de fato gradientes. Um processo gradiente é definido como se segue.

Definição 2.4.1. Dizemos que um processo $S(\cdot, \cdot)$ com atrator pullback $\mathcal{A}(\cdot)$ e um conjunto disjunto de famílias invariantes isoladas $\Xi := (\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n)$ é um **processo de evolução dinamicamente gradiente com respeito a Ξ** se existe função $\mathcal{V} : \mathbb{R} \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

- i) Para cada $z \in X$ e $t \in \mathbb{R}$, a função $[0, \infty) \ni r \mapsto \mathcal{V}(r+t, S(r+t, t)z) \in \mathbb{R}$ é não-crescente.
- ii) Dados $t \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathcal{A}(t)$, então $\mathcal{V}(r+t, S(r+t, t)z) = \mathcal{V}(t, z)$ para todo $r \geq 0$ se e somente se $z \in \bigcup_{i=1}^n \Xi_i(t)$ e $\mathcal{V}(t, \Xi_i(t))$ é um conjunto unitário para cada $t \in \mathbb{R}$ e $i \in \{1, \dots, n\}$.
- iii) Para cada $t \in \mathbb{R}$, a função $\mathcal{V}_t : \mathcal{A}(t) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $\mathcal{V}_t(z) := \mathcal{V}(t, z)$ para $z \in \mathcal{A}(t)$, é contínua.

Uma função \mathcal{V} satisfazendo essas propriedades é chamada **função de Lyapunov** para o processo $S(\cdot, \cdot)$ com respeito a Ξ .

Antes de partir para o resultado principal desta sessão mostremos a continuidade do par atrator-repulsor. No resultado seguinte considere

$$\text{Dist}_H(A, B) = \max\{\text{dist}_H(A, B), \text{dist}_H(B, A)\}$$

a distância de Hausdorff.

Lema 2.4.2. Sejam $S(\cdot, \cdot)$ um processo dinamicamente gradiente com atrator pullback $\mathcal{A}(\cdot)$ e (A, A^*) um par atrator-repulsor para $S(\cdot, \cdot)$. Então, para cada $t_0 \in \mathbb{R}$ nós temos

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \text{Dist}_H(A(t), A(t_0)) = 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow t_0} \text{Dist}_H(A^*(t), A^*(t_0)) = 0. \quad (2.13)$$

Demonstração. Provemos apenas que $\lim_{t \rightarrow t_0} \text{Dist}_H(A(t), A^*(t_0))$, o correspondente para o repulsor $A^*(\cdot)$ é análogo. Começemos mostrando a semicontinuidade superior, isto é,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \text{dist}_H(A(t), A(t_0)) = 0. \quad (2.14)$$

Se por absurdo isto não ocorre, existem $\varepsilon > 0$ e uma sequência de números reais $(t_j)_{j \in \mathbb{N}}$ com $t_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} t_0$ tais que

$$\text{dist}_H(A(t_j), A(t_0)) > \varepsilon \text{ para todo natural } j.$$

Da definição de semidistância de Hausdorff obtemos uma sequência $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de pontos de X com $x_j \in A(t_j)$ e

$$\text{dist}(x_j, A(t_0)) \geq \varepsilon \text{ para todo natural } j.$$

Por outro lado, pela invariância de $\mathcal{A}(\cdot)$, para cada natural j podemos escolher uma solução global $\xi_j : \mathbb{R} \rightarrow X$ do processo $S(\cdot, \cdot)$ tal que $\xi_j(t_j) = x_j$ e $\xi_j(t) \in \mathcal{A}(t)$ para todo T real. Assim, temos que a sequência $(\xi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência (ver Observação 2.4.3), que reindexamos da mesma maneira, para a qual existe uma solução global $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ tal que $\lim_{j \rightarrow \infty} \xi_j(t) = \xi(t)$ uniformemente para t em compactos da reta. Daí concluímos que

$$d(x_j, \xi_j(t_0)) \leq d(\xi_j(t_j), \xi(t_j)) + d(\xi(t_j), \xi(t_0)) + d(\xi(t_0), \xi_j(t_0)) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0.$$

Mas isto contradiz o fato que $d(x_j, \xi_j(t_0)) \geq \inf_{x \in A(t_0)} d(x_j, x) = d(x_j, A(t_0)) \geq \varepsilon$ para todo natural j . Portanto obtemos a semicontinuidade superior (2.14). De modo análogo mostramos a semicontinuidade inferior, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \text{dist}_H(A(t_0), A(t)).$$

Isto conclui a prova do Lema. □

Observe que não definimos formalmente semicontinuidade, faremos isso com detalhe no próximo capítulo e estudaremos condições de continuidade do caso autônomo.

Observação 2.4.3. *Para obtermos uma subsequência convergente a uma solução global na demonstração do teorema anterior, precisamos de um resultado que generalize a ideia da Proposição 1.3.4, ou ainda o Lema 3.2.3 do Capítulo 3, para o caso não-autônomo. Assim o que precisamos é apenas o caso particular de um resultado bastante geral que pode ser encontrado em [1], a saber o Lema 7.5.3.*

Para construir a função de Lyapunov para um processo dinamicamente gradiente, faremos o processo similar ao caso autônomo, definindo as funções auxiliares que irão compor esta função.

Teorema 2.4.4. *Sejam $S(\cdot, \cdot)$ um processo de evolução com atrator pullback $\mathcal{A}(\cdot)$ e (A, A^*) um par atrator-repulsor para $S(\cdot, \cdot)$ que não é recorrente por cadeia. Suponha que existe $\varepsilon > 0$ satisfazendo*

$$\mathcal{O}_\varepsilon(A(t)) \cap \mathcal{O}_\varepsilon(A^*(t)) = \emptyset, \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \quad (2.15)$$

Então, existe função $k : \mathbb{R} \times X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes propriedades

- i) Para cada $z \in X$ e $t \in \mathbb{R}$, a função $[0, \infty) \ni r \mapsto k(r+t, S(r+t, t)z) \in \mathbb{R}$ é não-crescente.
- ii) Para cada função $k_t : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $K_t(z) := k(t, z)$, $t \in \mathbb{R}$ e $z \in X$, vale $k_t^{-1}(0) = A(t)$ e $k_t^{-1}(1) \cap \mathcal{A}(t) = A^*(t)$.
- iii) Dado $t \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathcal{A}(t)$, se $k(r_t, S(r+t, t)z) = k(t, z)$ para todo $r \geq 0$, então $z \in A(t) \cup A^*(t)$.
- iv) $k_t : \mathcal{A}(t) \rightarrow \mathbb{R}$ é contínuo, em $\mathcal{A}(t)$, para cada $t \in \mathbb{R}$

Demonstração. Primeiro, com a convenção $\text{dist}(z, \emptyset) = 1$, definimos então $l : \mathbb{R} \times X \rightarrow [0, 1]$ como a função de Uryshon associada ao par atrator-repulsor (A, A^*) . Isto é, para cada $t \in \mathbb{R}$ e $z \in X$,

$$l(t, z) := \frac{\text{dist}(z, A(t))}{\text{dist}(z, A(t)) + \text{dist}(z, A^*(t))}.$$

Temos que l é bem definida. Além disso, afirmamos que $l(\mathbb{R} \times X) \subseteq [0, 1]$ é contínua em ambas variáveis e, para cada $t \in \mathbb{R}$, é uniformemente Lipschitz contínua em X . De fato, por (2.15),

$$d_0 := \inf_{t \in \mathbb{R}} \{ \inf \{ d(x, y) : x \in A(t), y \in A^*(t) \} \} \geq \varepsilon > 0, \quad (2.16)$$

segue que $|l(t, z) - l(t, w)| \leq \frac{2}{d_0} d(z, w)$, para quaisquer $z, w \in X$ e $t \in \mathbb{R}$.

Agora, do Lema 2.4.2, não é difícil de ver que $l : \mathbb{R} \times X \rightarrow [0, 1]$ é contínuo em ambas as variáveis. Ademais, é fácil ver que $l_t^{-1}(0) = A(t)$ e $l_t^{-1}(1) = A^*(t)$. Definimos agora $k : \mathbb{R} \times X \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$k(t, z) := \sup_{r \geq 0} l(r + t, S(r + t, t)z).$$

Mostremos que k tem as propriedades *i*) – *iv*) acima.

Claramente, a função é não-crescente ao longo de soluções, isto é, vale *i*). De fato, se $0 \leq r_1 \leq r_2$, temos que

$$\begin{aligned} k(r_2 + t, S(r_2 + t, t)z) &= \sup_{r \geq 0} l(r + r_2 + t, S(r + r_2 + t, t)z) \\ &= \sup_{r \geq r_2} l(r + t, S(r + t, t)z) \\ &\leq \sup_{r \geq r_1} l(r + t, S(r + t, t)z) \\ &= \sup_{r \geq 0} l(r + r_1 + t, S(r + r_1 + t, t)z) = k(r_1 + t, S(r_1 + t, t)z). \end{aligned}$$

Da definição de k e da invariância de A e A^* , segue que $k_t(A(t)) = \{0\}$ e $k_t(A^*(t)) = \{1\}$. Agora, se $z \in X$ é tal que $k(t, z) = 0$, então $l(r + t, S(r + t, t)z) = 0$ para todo $r \geq 0$. Em particular, $0 = l(t, z)$, e então, $z \in A(t)$, assim $k_t^{-1}(0) \subset A(t)$, o que mostra que $k_t^{-1}(0) = A(t)$. Por outro lado, suponha que $z \in \mathcal{A}(t)$ é tal que $k_t(z) = 1$ e por absurdo $z \notin A^*(t)$, então $\lim_{r \rightarrow \infty} d(S(r + t, t)z, A(r + t)) = 0$. Da definição de l obtemos que $\lim_{r \rightarrow \infty} l(r + t, S(r + t, t)z) = 0$. Portanto, existe $r_0 > 0$ tal que $1 = k(t, z) = \sup_{0 \leq r \leq r_0} l(r + t, S(r + t, t)z)$. A continuidade de l em t garante que existe $r' \in [0, r_0]$ tal que $l(r' + t, S(r' + t, t)z) = 1$; isto é, $S(r' + t, t)z \in A^*(r' + t)$ o que contradiz o fato que $\lim_{r \rightarrow \infty} l(S(r + t, t)z, A(r + t)) = 0$. Portanto, se $k(t, z) = 1$ para algum $t \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathcal{A}(t)$, então $z \in A^*(t)$. Disto, concluímos que $k^{-1}(1) \cap \mathcal{A}(t) = A^*(t)$.

Agora provamos que $z \in \mathcal{A}(t)$ e $k(r + t, S(r + t, t)z) = k(t, z)$ para todo $r \geq 0$, então $z \in A(t) \cup A^*(t)$. Se $z \notin A(t) \cup A^*(t)$, então $\lim_{r \rightarrow \infty} d(S(r + t, t)z, A(r + t)) = 0$, e da definição de k , devemos ter $k(t, z) = \lim_{r \rightarrow \infty} k(r + t, S(r + t, t)z) = 0$. Como $k_t^{-1}(0) = A(t)$, então $z \in A(t)$, uma contradição.

Em seguida provaremos a continuidade de $k_t : \mathcal{A}(t) \rightarrow \mathbb{R}$. Dividimos a prova em 3 casos:

Caso 1: Continuidade em $A^*(t)$. Como $l(t, z) \leq k(t, z) \leq 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e $z \in X$,

dado $z_0 \in \mathcal{A}^*(t)$ e $z \in X$ temos

$$|k(t, z) - k(t, z_0)| = 1 - k(t, z) \leq 1 - l(t, z)$$

Segue da continuidade de l a continuidade de k_t em z_0 .

Caso 2: Continuidade em $A(t)$. Da equicontinuidade da família de funções $\{l_t : X \rightarrow \mathbb{R} : t \in \mathbb{R}\}$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $l_s(\mathcal{O}_\delta(A(s))) \subset [0, \varepsilon]$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Assim, o Lema 2.3.12 garante a existência de $\delta' \in (0, \delta)$ tal que $S(r+t, t)(\mathcal{A}(t) \cap \mathcal{O}_{\delta'}(A(t))) \subset \mathcal{A}(r+t) \cap \mathcal{O}_\delta(A(r+t))$, para todo $r \geq 0$, de onde podemos concluir que $k_t(\mathcal{A}(t) \cap \mathcal{O}_{\delta'}(A(t))) \subset [0, \varepsilon]$

Caso 3: Continuidade em $\mathcal{A}(t) \setminus (A(t) \cup A^*(t))$. Dado $z \in \mathcal{A}(t) \setminus (A(t) \cup A^*(t))$, como $z \notin A^*(t)$, segue que $\lim_{r \rightarrow \infty} d(S(r+t, t)z, A(r+t)) = 0$ e, como $z \notin A(t)$, vale $l(t, z) > 0$. Escolha $\delta > 0$ tal que $l_s(\mathcal{O}_\delta(A(s))) \subset [0, \frac{l(t, z)}{2})$ para todo $s \in \mathbb{R}$ e, do Lema 2.3.12, podemos tomar $\delta' \in (0, \delta)$ tal que $S(r+t, t)(\mathcal{A}(t) \cap \mathcal{O}_{\delta'}(A(t))) \subset \mathcal{A}(r+t) \cap \mathcal{O}_\delta(A(r+t))$, para todo $r \geq 0$.

Como $\lim_{r \rightarrow \infty} d(S(r+t, t)z, A(r+t)) = 0$, existe $\sigma > 0$ satisfazendo $S(r+t, t)z \in \mathcal{O}_{\delta'}(A(r+t))$, para todo $r \geq \sigma$. Da continuidade de $S(\cdot, \cdot)$, existe uma vizinhança U_1 de z em X tal que $T(\sigma+t, t)U_1 \subset \mathcal{O}_{\delta'}(A(\sigma+t))$. Portanto, para todo $w \in U_1$ temos que $S(\sigma+t, t)w \in \mathcal{O}_{\delta'}(A(\sigma+t))$ de modo que $S(r+t, t)w \in \mathcal{O}_\delta(A(r+t))$ para todo $r \geq \sigma$ e $w \in U_1 \cap \mathcal{A}(t)$.

Finalmente, da continuidade de l_t , obtemos U_2 vizinhança de z em X tal que $l(t, w) > \frac{l(t, z)}{2}$ para todo $w \in U_2$. Assim defina $U := U_1 \cap U_2 \cap \mathcal{A}(t)$, vizinhança de z em $\mathcal{A}(t)$. Logo para todo $w \in U$ vale $k(t, w) = \sup_{0 \leq r \leq \sigma} l(r+t, S(r+t, t)w)$, de onde obtemos a continuidade de k_t em pontos de $\mathcal{A}(t) \setminus (A(t) \cup A^*(t))$. \square

A prova do próximo resultado é similar a do Teorema 2.4.4 e explora um caso particular em que a continuidade da até então ‘função de Lyapunov’ vale em ambas as variáveis. Observemos que o teorema anterior garante a continuidade apenas para t fixado e dentro do atrator pullback.

Proposição 2.4.5. *Seja $S(\cdot, \cdot)$ um processo de evolução com atrator pullback $\mathcal{A}(\cdot)$ e um par atrator-repulsor (A, A^*) com*

$$\mathcal{O}_{\varepsilon_0}(A(t)) \cap \mathcal{O}_{\varepsilon_0}(A^*(t)) = \emptyset, \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \quad (2.17)$$

para algum $\varepsilon_0 > 0$. Além disso, assumindo que:

(a) Vale a conclusão do Lema 2.3.12, considerando vizinhanças de A em X . Isto é, para cada $\delta > 0$ existe $\delta' \in (0, \delta)$ tal que

$$S(r+t, t)(\mathcal{O}_{\delta'}(A(t))) \subset \mathcal{O}_{\delta}(A(r+t)) \text{ para todo } r \geq 0 \text{ e } t \in \mathbb{R}.$$

(b) Para cada $t \in \mathbb{R}$ e $z \in X \setminus (A(t) \cup A^*(t))$ vale

$$\lim_{r \rightarrow \infty} d(S(r+t, t)z, A(r+t)) = 0 \text{ ou } \lim_{r \rightarrow \infty} d(S(r+t, t)z, A^*(r+t)) = 0.$$

Então, a função $k : \mathbb{R} \times X \rightarrow \mathbb{R}$, definida no Teorema 2.4.4 é contínua (em ambas variáveis e em todo seu domínio).

Demonstração. Provemos a continuidade de k num ponto $(t_0, z_0) \in \mathbb{R} \times X$ qualquer. Como no Teorema 2.4.4, consideraremos três casos:

Caso 1: $z_0 \in A^*(t_0)$. Como $l(t, z) \leq k(t, z) \leq 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e $z \in X$, temos que

$$|k(t, z) - k(t_0, z_0)| = 1 - k(t, z) \leq 1 - l(t, z).$$

Isto e a continuidade (em ambas variáveis) de $l : \mathbb{R} \times X \rightarrow \mathbb{R}$ em (t_0, z_0) implicam a continuidade de $k : \mathbb{R} \times X \rightarrow \mathbb{R}$ em (t_0, z_0) .

Caso 2: $z_0 \in A(t_0)$. Vimos que

$$|l(t, z) - l(t, w)| \leq \frac{2}{\varepsilon_0} d(z, w), \forall z, w \in X \text{ e } t \in \mathbb{R},$$

então dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $l(s, \mathcal{O}_{\delta}(A(s))) \subset [0, \varepsilon)$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Por outro lado, de (a) existe $\delta' \in (0, \delta)$ tal que $S(r+t, t)(\mathcal{O}_{\delta'}(A(t))) \subset \mathcal{O}_{\delta}(A(r+t))$, para todo $r \geq 0$ e $t \in \mathbb{R}$, de onde concluímos que $k(t, \mathcal{O}_{\delta'}(A(t))) \subset [0, \varepsilon]$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Agora, do Lema 2.4.2, seja $\delta'' > 0$ tal que $\mathcal{O}_{\delta'/2}(A(t_0)) \subset \mathcal{O}_{\delta'}(A(t))$ sempre que $|t - t_0| < \delta''$. Assim, para $|t - t_0| < \delta''$ e $d(z, z_0) < \frac{\delta'}{2}$ temos que $k(t, z) \leq \varepsilon$. Isto prova a continuidade de $k : \mathbb{R} \times X \rightarrow \mathbb{R}$ em (t_0, z_0) com $z_0 \in A(t_0)$.

Caso 3: $z_0 \in X \setminus (A(t_0) \cup A^*(t_0))$. Da hipótese (b) temos que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} d(S(r+t_0, t_0)z_0, A(r+t_0)) = 0 \text{ ou } \lim_{r \rightarrow \infty} d(S(r+t_0, t_0)z_0, A^*(r+t_0)) = 0.$$

Primeiro consideremos o subcaso $\lim_{r \rightarrow \infty} d(S(r+t_0, t_0)z_0, A(r+t_0)) = 0$. Como $z_0 \notin A^*(t_0)$ segue que $l(t_0, z_0) > 0$. Tome $\delta > 0$ tal que $l(s, \mathcal{O}_\delta(A(s))) \subset [0, \frac{l(t_0, z_0)}{2}]$ para todo $s \in \mathbb{R}$ e, da hipótese (a), escolhemos $\delta' \in (0, \delta)$ tal que $S(r+t, t)(\mathcal{O}_{\delta'}(A(t))) \subset \mathcal{O}_\delta(A(r+t))$, para todo $r \geq 0$. Como $\lim_{r \rightarrow \infty} d(S(r+t_0, t_0)z_0, A(r+t_0)) = 0$, existe $\sigma > 0$ satisfazendo $S(\sigma+t_0, t_0)z_0 \in \mathcal{O}_{\delta'}(A(\sigma+t_0))$. Da continuidade de $S(\cdot, \cdot)$ e do Lema 2.4.2, existe uma vizinhança U_1 de z_0 em X e $\delta'' > 0$ tais que $S(r+t, t)U_1 \subset \mathcal{O}_{\delta'/2}(A(\sigma+t_0)) \subset \mathcal{O}_{\delta'}(A(\sigma+t))$ sempre que $|t - t_0| < \delta''$. Então, para todo $z \in U_1$ e $t \in (t_0 - \delta'', t_0 + \delta'')$, temos que $S(\sigma+t, t)z \in \mathcal{O}_{\delta'}(A(\sigma+t))$ logo $T(r+t, t)z \in \mathcal{O}_\delta(A(r+t))$ para todo $r \geq \sigma$, $z \in U_1$ e $t \in (t_0 - \delta'', t_0 + \delta'')$. Agora da continuidade de $l : \mathbb{R} \times X \rightarrow \mathbb{R}$, seja U_2 uma vizinhança de z_0 em X e $0 < \eta < \delta''$ tais que $l(t, z) > \frac{l(t_0, z_0)}{2}$ para todo $z \in U_2$ e $|t - t_0| < \eta$. Assim definindo $U := U_1 \cap U_2$ temos que, para todo $z \in U$ e $|t - t_0| < \eta$, vale $k(t, z) = \sup_{0 \leq r \leq \sigma} l(r+t, S(r+t, t)z)$, de onde obtemos a continuidade de k em pontos (t_0, z_0) com $z_0 \in X \setminus (A(t_0) \cup A^*(t_0))$ e $\lim_{r \rightarrow \infty} d(S(r+t_0, t_0)z_0, A(r+t_0)) = 0$.

Agora consideramos o subcaso $\lim_{r \rightarrow \infty} d(S(r+t_0, t_0)z_0, A^*(r+t_0)) = 0$. Assim $k(t_0, z_0) = 1$ e, dado $\varepsilon > 0$, podemos escolher $\delta > 0$ tal que $l(s, \mathcal{O}_\delta(A^*(s))) \subset (1-\varepsilon, 1]$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Ainda, escolhemos $\sigma > 0$ satisfazendo $S(\sigma+t_0, t_0)z_0 \in \mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(A^*(\sigma+t_0)) \subset \mathcal{O}_\delta(A^*(\sigma+t))$ quando $|t - t_0| < \delta'$ e a prova da proposição está completa \square

Agora, a fim de construir futuramente a função de Lyapunov, obteremos uma função contínua $h : \mathbb{R} \times X \rightarrow \mathbb{R}$ que seja não-crescente ao longo de soluções e que, dado $t \in \mathbb{R}$ e $z \in X$, se $h(r+t, S(r+t, t)z) = h(t, z)$ para todo $r \geq 0$, então $z \in \mathcal{A}(t)$.

Lema 2.4.6. *Seja $S(\cdot, \cdot)$ um processo de evolução com atrator pullback $\mathcal{A}(\cdot)$ satisfazendo para cada $z \in X$*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} d(S(r+t, t)z, \mathcal{A}(r+t)) = 0,$$

e para cada $\delta > 0$ existe $\delta' \in (0, \delta)$ tal que

$$S(r+t, t)(\mathcal{O}_{\delta'}(\mathcal{A}(t))) \subset \mathcal{O}_\delta(\mathcal{A}(r+t)), \text{ para todo } r \geq 0 \text{ e } t \in \mathbb{R}.$$

Então, a função $h : \mathbb{R} \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$h(t, z) := \sup_{r \geq 0} d(S(r+t, t)z, \mathcal{A}(r+t)), (t, z) \in \mathbb{R} \times X,$$

é contínua (em ambas variáveis), e satisfaz

- i)* Para cada $z \in X$ e $t \in \mathbb{R}$, a função $[0, \infty) \ni r \mapsto h(r+t, S(r+t, t)z) \in \mathbb{R}$ é não-crescente.
- ii)* Para cada função $h_t : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h_t(z) := h(t, z)$, $t \in \mathbb{R}$ e $z \in X$, vale $h_t^{-1}(0) = \mathcal{A}(t)$.
- iii)* Dado $t \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathcal{A}(t)$, se $h(t, S(r+t, t)z) = h(t, z)$ para todo $r \geq 0$, então $z \in \mathcal{A}(t)$.

Demonstração. De fato, a propriedade 1) decorre de sua definição e a prova é análoga a feita para k no Teorema 2.4.4. A prova da continuidade também segue de modo análogo ao feito nos casos 2) e 3) da Proposição 2.4.5. Da mesma maneira, a propriedade *ii)* decorre diretamente da definição de h e das propriedades de supremo. Agora sejam $z \in X$ e $t \in \mathbb{R}$, satisfazendo $h(t, S(r+t, t)z) = h(t, z)$ para todo $r \geq 0$. Como $\mathcal{A}(t)$ é atrator pullback segue que $\lim_{r \rightarrow \infty} d(S(r+t, t)z, \mathcal{A}(r+t)) = 0$, logo $h(t, z) = \lim_{r \rightarrow \infty} h(t, S(r+t, t)z) = 0$. Do item *iii)* do Teorema 2.4.4 segue que $z \in \mathcal{A}(t) \cup \mathcal{A}^*(t)$. O que conclui a prova do Lema. \square

Finalmente, estamos em condição de construir a função de Lyapunov para um processo com par atrator-repulsor.

Teorema 2.4.7. *Seja $S(\cdot, \cdot)$ um processo de evolução com atrator pullback $\mathcal{A}(\cdot)$ satisfazendo para cada $z \in X$*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} d(S(r+t, t)z, \mathcal{A}(r+t)) = 0,$$

e para cada $\delta > 0$ existe $\delta' \in (0, \delta)$ tal que

$$S(r+t, t)(\mathcal{O}_{\delta'}(\mathcal{A}(t))) \subset \mathcal{O}_{\delta}(\mathcal{A}(r+t)), \text{ para todo } r \geq 0 \text{ e } t \in \mathbb{R}.$$

Além disso, seja (A, A^) um par atrator-repulsor para $S(\cdot, \cdot)$ com*

$$\mathcal{O}_{\varepsilon}(A(t)) \cap \mathcal{O}_{\varepsilon}(A^*(t)) = \emptyset, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}$$

para algum $\varepsilon > 0$ e, ademais, satisfazendo as seguintes condições:

- (a) *Vale a conclusão do Lema 2.3.12, considerando vizinhanças de A em X . Isto é, para cada $\delta > 0$ existe $\delta' \in (0, \delta)$ tal que*

$$S(r+t, t)(\mathcal{O}_{\delta'}(A(t))) \subset \mathcal{O}_{\delta}(A(r+t)) \text{ para todo } r \geq 0 \text{ e } t \in \mathbb{R}.$$

(b) Para cada $t \in \mathbb{R}$ e $z \in X \setminus (A(t) \cup A^*(t))$ vale

$$\lim_{r \rightarrow \infty} d(S(r+t, t)z, A(r+t)) = 0 \text{ ou } \lim_{r \rightarrow \infty} d(S(r+t, t)z, A^*(r+t)) = 0.$$

Então, existe uma função $f : \mathbb{R} \times X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes quatro propriedades:

- i) Para cada $(t, z) \in \mathbb{R} \times X$, a função $[0, \infty) \ni r \mapsto f(r+t, S(r+t, t)z) \in \mathbb{R}$ é não crescente.
- ii) Se $t \in \mathbb{R}$ e $f_t : X \mapsto \mathbb{R}$ é definida por $f_t(z) := f(t, z)$, para cada $z \in X$, então $f_t^{-1}(0) = A(t)$ e $f_t^{-1}(1) \cap A(t) = A^*(t)$.
- iii) Dado $t \in \mathbb{R}$ e $z \in X$, se $f(r+t, S(r+t, t)z) = f(t, z)$ para todo $r \geq 0$, então $z \in A(t) \cup A^*(t)$.
- iv) $f : \mathbb{R} \times X \mapsto \mathbb{R}$ é contínua (em ambas variáveis).

Demonstração. De fato, seja $k : \mathbb{R} \times X \mapsto \mathbb{R}$ a função dada no Teorema 2.4.4 e $h : \mathbb{R} \times X \mapsto \mathbb{R}$ a função obtida no Lema 2.4.6. Definimos $f : \mathbb{R} \times X \mapsto \mathbb{R}$ por

$$f(t, z) := k(t, z) + h(t, z), (t, z) \in \mathbb{R} \times X.$$

Segue imediatamente das propriedades de h e k que f é contínua (em ambas variáveis e não-crescente ao longo de órbitas, isto é vale *i*) e *iv*).

Provemos agora *ii*). Primeiro seja $z \in A(t) \subset \mathcal{A}(t)$. Então $h(t, z) = 0$ e, do Teorema 2.4.4, temos que $k(t, z) = 0$. Portanto $f(t, z) = 0$ e $A(t) \subset f_t^{-1}(0)$. Por outro lado se $z \in X$ é tal que $f_t(z) = 0$, temos que $h(t, z) = 0$ e $k(t, z) = 0$, portanto $z \in \mathcal{A}(t)$, e pelo item *ii*) do Teorema 2.4.4, $z \in A(t)$. Isto prova que $f_t^{-1}(0) \subset A(t)$. Suponhamos agora que $z \in A^*(t) \subset \mathcal{A}(t)$, temos que $h(t, z) = 0$, e assim, $f(t, z) = k(t, z) + h(t, z) = k(t, z) = 1$. Segue que $A^*(t) \subset f^{-1}(1) \cap \mathcal{A}(t)$. Por outro lado, se $z \in \mathcal{A}(t)$ e $f(t, z) = 1$, então temos que $h(t, z) = 0$ e $k(t, z) = 1$. Portanto $z \in A^*(t)$ e a prova de *ii*) está completa.

Provemos o item *iii*). Seja $(t, z) \mapsto \mathbb{R} \times X$ com $f(r+t, S(r+t, t)z) = f(t, z)$ para todo $r \geq 0$. Como $f(\cdot + t, S(\cdot + t, t)z)$ é soma de funções decrescentes, temos que cada uma deve ser constante. Isto é, $h(r+t, S(r+t, t)z) = h(t, z)$ para todo $r \geq 0$, e do Lema 2.4.6, temos que $z \in \mathcal{A}(t)$. Ainda, também vale $k(r+t, S(r+t, t)z) = k(t, z)$ para todo $r \geq 0$, e como $z \in \mathcal{A}(t)$, segue do item *iii*) do Teorema 2.4.4 que $z \in A(t) \cup A^*(t)$. Isto conclui a prova do Teorema. \square

Finalmente, juntando todos os resultados obtidos, obtemos que um processo dinamicamente gradiente é de fato gradiente, de modo análogo ao Teorema 1.5.4.

Teorema 2.4.8. *Seja $S(\cdot, \cdot)$ um processo dinamicamente gradiente relativo a um conjunto de famílias de invariantes isolados $\Xi := (\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n)$ reordenada como no Teorema 2.3.11, com um atrator pullback $\mathcal{A}(\cdot)$. Seja $A_j(t) = \bigcup_{i=1}^j \mathcal{W}^u(\Xi_i)(t)$, para $1 \leq j \leq n$ e $t \in \mathbb{R}$. Assuma as seguintes condições*

(S1) *Existe $\delta > 0$ tal que $\mathcal{O}_\varepsilon(A_j(t)) \cap \mathcal{O}_\varepsilon(A_j^*(t)) = \emptyset$ para todo $1 \leq j \leq n$ e $t \in \mathbb{R}$.*

(S2) *Dado $\delta > 0$, existe $\delta' \in (0, \delta)$ tal que*

$$T(r+t, t)(\mathcal{A}(t) \cap \mathcal{O}_{\delta'}(A_j(t))) \subset \mathcal{A}(r+t) \cap \mathcal{O}_\delta(A_j(r+t)),$$

para todo $r \geq 0$, $1 \leq j \leq n$ e $t \in \mathbb{R}$.

Então $S(\cdot, \cdot)$ é processo de evolução gradiente e podemos tomar $\mathcal{V} : \mathbb{R} \times X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo $\mathcal{V}(t, \Xi_k(t)) = \{k-1\}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $k = 1, \dots, n$. Ademais, se vale (S2) para vizinhanças dos A_j em X e dado $(t, z) \in \mathbb{R} \times X$ e $1 \leq j \leq n$, $\lim_{r \rightarrow \infty} \text{dist}(T(r+t, t)z, A_j(r+t) \cup A_j^(r+t)) = 0$, então a função de Lyapunov \mathcal{V} pode ser escolhida contínua em ambas variáveis.*

Capítulo 3

Aspectos de Continuidade e considerações finais

Neste terceiro e último capítulo estudamos os aspectos de continuidade dos atratores de processos de evolução, buscando entender a questão da estabilidade de classes de processos via perturbação. Assim, na primeira seção, estudamos semicontinuidade de atratores de semigrupos e obtemos condições razoáveis para a semicontinuidade superior e posteriormente inferior. Na segunda seção, fazemos o estudo de perturbações de semigrupos, mais especificamente obtemos a estabilidade de semigrupos dinamicamente gradientes via perturbações, e conseqüentemente, dos semigrupos gradientes graças à equivalência vista no Capítulo 1, isto é, o Teorema 1.5.5. Na terceira e última seção, apresentamos resultados obtidos por Aragão-Costa et al que generalizam os apresentados nas seções anteriores para o contexto não-autônomo.

3.1 Continuidade dos atratores de semigrupos

No contexto da matemática aplicada, é fundamental garantir a estabilidade sob perturbações de uma modelagem, já que estas se apoiam firmemente numa certa confiabilidade das aproximações. Sob este ponto de vista, estudaremos nesta seção a continuidade dos atratores relativamente a perturbações num dado semigrupo.

Definição 3.1.1. *Seja X um espaço métrico, $d(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ sua métrica, Λ outro*

espaço métrico e $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de subconjuntos de X .

1. Diremos que $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é semicontínua superiormente em λ_0 se

$$\text{dist}_H(\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_{\lambda_0}) = \sup_{x_\lambda \in \mathcal{A}_\lambda} d(x_\lambda, \mathcal{A}_{\lambda_0}) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \lambda_0} 0$$

2. Diremos que $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é semicontínua inferiormente em λ_0 se

$$\text{dist}_H(\mathcal{A}_{\lambda_0}, \mathcal{A}_\lambda) = \sup_{x \in \mathcal{A}_{\lambda_0}} d(x, \mathcal{A}_\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \lambda_0} 0$$

Lema 3.1.2. *Seja $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ um família de subconjuntos em X . Se para $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda_0$ temos que toda sequência $\{x_{\lambda_n}\}$ com cada $x_{\lambda_n} \in \mathcal{A}_{\lambda_n}$, tem uma subsequência convergente com limite em \mathcal{A}_{λ_0} então $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é semicontínua superiormente em λ_0 . Reciprocamente, se $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é semicontínua superiormente em λ_0 e $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda_0$, qualquer sequência $\{x_{\lambda_n}\}$ com $x_{\lambda_n} \in \mathcal{A}_{\lambda_n}$ tem uma subsequência convergente com limite pertencendo a \mathcal{A}_{λ_0} .*

Demonstração. Se qualquer sequência $\{x_{\lambda_n}\}$ com $x_{\lambda_n} \in \mathcal{A}_{\lambda_n}$, $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda_0$, tem um subsequência convergente com limite pertencendo a \mathcal{A}_{λ_0} , e $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ não é semicontínua superiormente em λ_0 então, existem $\varepsilon > 0$ e sequência $\{\lambda_n\}$ com $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda_0$ tal que $\sup_{x \in \mathcal{A}_{\lambda_n}} \text{dist}(x, \mathcal{A}_{\lambda_0}) \geq 2\varepsilon, n \in \mathbb{N}$. Logo, para algum $x_{\lambda_n} \in \mathcal{A}_{\lambda_n}$, temos que $\text{dist}(x_{\lambda_n}, \mathcal{A}_{\lambda_0}) \geq \varepsilon, n \in \mathbb{N}$. Isto contradiz, o fato de que $\{x_{\lambda_n}\}$ tem uma subsequência que converge para um elemento de \mathcal{A}_{λ_0} . A recíproca decorre diretamente da definição. \square

Lema 3.1.3. *Seja $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ um família de subconjuntos em X . Se \mathcal{A}_{λ_0} é compacto e para qualquer $x \in \mathcal{A}_{\lambda_0}$ e $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda_0$ existe uma subsequência $\lambda_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \lambda_0$ com cada $x_{\lambda_{n_k}} \in \mathcal{A}_{\lambda_{n_k}}$, que converge para x , então $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é semicontínua inferiormente em λ_0 . Reciprocamente, se $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é semicontínua inferiormente em λ_0 , $x \in \mathcal{A}_{\lambda_0}$ e $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda_0$, existe uma subsequência $\lambda_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \lambda_0$ com cada $x_{\lambda_{n_k}} \in \mathcal{A}_{\lambda_{n_k}}$, que converge para x .*

Demonstração. Se \mathcal{A}_{λ_0} é compacto e para qualquer $x \in \mathcal{A}_{\lambda_0}$ e $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda_0$ existe uma subsequência $\lambda_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \lambda_0$, e sequência $\{x_{\lambda_{n_k}}\}$ com $x_{\lambda_{n_k}} \in \mathcal{A}_{\lambda_{n_k}}$ que converge para x e $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ não é semicontínua inferiormente em λ_0 então, existem $\varepsilon > 0$ e sequência $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda_0$ tais que $\sup_{x \in \mathcal{A}_{\lambda_0}} \text{dist}(x, \mathcal{A}_{\lambda_n}) \geq 2\varepsilon, n \in \mathbb{N}$. Logo, para algum $x_{\lambda_n} \in \mathcal{A}_{\lambda_n}$, temos que $\text{dist}(x_{\lambda_n}, \mathcal{A}_{\lambda_0}) \geq 2\varepsilon, n \in \mathbb{N}$. Como \mathcal{A}_{λ_0} é compacto podemos assumir que $\{x_{\lambda_n}\}$ converge para algum $x \in \mathcal{A}_{\lambda_0}$ e que $\text{dist}(x, \mathcal{A}_{\lambda_n}) \geq \varepsilon, n \in \mathbb{N}$. Das hipóteses,

existe uma subsequência $\lambda_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \lambda_0$ e sequência $y_{\lambda_{n_k}} \in \mathcal{A}_{\lambda_{n_k}}$ tal que $y_{\lambda_{n_k}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x$ e $\varepsilon \leq \text{dist}(x, \mathcal{A}_{\lambda_{n_k}}) \leq \text{dist}(x, y_{\lambda_{n_k}}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, o que nos leva a um absurdo. A recíproca decorre diretamente da definição. \square

Definição 3.1.4. Diremos que uma família de semigrupos $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta \in [0,1]}$ é contínua em $\eta = 0$ se $T_\eta(t, x) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} T_0(t, x)$ uniformemente para (t, x) em subconjuntos compactos de $\mathbb{T}^+ \times X$ quando $\eta \rightarrow 0$.

Teorema 3.1.5. Seja $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta \in [0,1]}$ uma família de semigrupos contínua em $\eta = 0$. Se $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta \in [0,1]}$ tem um atrator global \mathcal{A}_η para cada $\eta \in [0, 1]$ e $\overline{\cup_{\eta \in [0,1]} \mathcal{A}_\eta}$ é compacto, então a família $\{\mathcal{A}_\eta : \eta \in [0, 1]\}$ é semicontínua superiormente em $\eta = 0$.

Demonstração. Considere as subsequências $\eta_k \rightarrow 0$, $\{u_{\eta_k}\}_{k=1}^\infty$, $u_{\eta_k} \in \mathcal{A}_{\eta_k}$. Como $\overline{\cup_{\eta \in [0,1]} \mathcal{A}_\eta}$ é compacto em X , existe $u_0 \in X$ tal que $u_{\eta_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u_0$. Para mostrarmos a semicontinuidade superior, resta provar que $u_0 \in \mathcal{A}_0$. Para isto, é suficiente mostrar que existe uma solução global limitada de $\{T_0 : t \in \mathbb{T}\}$ por u_0 . Da invariância dos atratores \mathcal{A}_{η_k} , para cada $k \in \mathbb{N}$, existe uma solução global limitada $\psi^{(\eta_k)} : \mathbb{T} \rightarrow X$ por u_{η_k} . Para $t \geq 0$, segue da continuidade de $[0, 1] \ni \eta \mapsto T_\eta(t)x \in X$ uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{T}^+ \times X$ que

$$\psi^{(\eta_k)}(t) = T_{\eta_k}(t)u_{\eta_k} \rightarrow T_0(t)u_0,$$

uniformemente para t em limitados de \mathbb{T}^+ . Agora, construímos uma solução global por u_0 da seguinte maneira. Se $\eta_k^0 := \eta_k$, $k \in \mathbb{N}$, dado $j \in \mathbb{N}^*$ existe uma subsequência $\{\eta_k^j\}$ de $\{\eta_k^{j-1}\}$ e u_{-j} tal que $\psi^{\eta_k^j}(-j) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u_{-j}$ (lembramos que $\{\psi^{\eta_k}(-j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ está em $\overline{\cup_{\eta \in [0,1]} \mathcal{A}_\eta}$.) Da convergência de $x \mapsto T_\eta(1)x$ para $x \mapsto T_0(1)x$ uniformemente em subconjuntos compactos de X segue que, para $0 \leq i \leq j$,

$$\psi^{(\eta_k^j)}(-j) = T_{\eta_k^j}(i)\psi^{(\eta_k^j)}(-j-i) \rightarrow u_{-j} = T_0(i)u_{-j-i}.$$

Definindo

$$\psi^{(0)}(t) := \begin{cases} T_0(t)u_0, & \text{para } t \geq 0 \\ T_0(t+j)u_{-j}, & \text{para } -j \leq t < -j+i, j \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

temos que $\psi^{(0)} : \mathbb{T} \rightarrow X$ é uma solução global de $\{T_0 : t \in \mathbb{T}^+\}$ por u_0 e

$$\psi^{(\eta_k^k)}(t) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \psi^{(0)}(t), \forall t \in \mathbb{T}.$$

Como $\psi^{(0)} : \mathbb{T} \rightarrow X$ é limitada, sua imagem deve estar contida em \mathcal{A}_0 e em particular $u_0 \in \mathcal{A}_0$. Agora o resultado segue do Lema 3.1.2. \square

Observação 3.1.6. *A hipótese que $\overline{\cup_{\eta \in [0,1]} \mathcal{A}_\eta}$ seja compacto no Teorema 3.1.5 pode ser enfraquecida assumindo em seu lugar uma compacidade coletiva, isto é, dada uma sequência $\{\eta_k\}$ em $[0, 1]$ com $\eta_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ e uma sequência $\{x_k\}$ com $x_k \in \mathcal{A}_{\eta_k}$, então $\{x_k\}$ tem uma subsequência convergente. Note que isto implica que existe $\eta_0 \in (0, 1]$ tal que $\cup_{\eta \in [0,1]} \mathcal{A}_\eta$ é limitado. A demonstração do Teorema 3.1.5 com esta hipótese mais fraca é inteiramente análoga a demonstração acima.*

Antes de mostrarmos as condições para semicontinuidade inferior definamos conjunto instável local.

Definição 3.1.7. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo e $y^* \in X$ equilíbrio. Dado $\delta > 0$ definimos o conjunto instável local $\mathcal{W}_\delta^u(y^*)$ por*

$$\mathcal{W}_\delta^u(y^*) := \{y \in B_\delta(y^*) : \text{existe solução global } \phi_y : \mathbb{T} \rightarrow X \text{ tal que ,}$$

$$\phi_y(0) = y, \phi_y(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} y^* \text{ e } \phi_y(t) \in B_\delta(y^*) \text{ para todo } t \in \mathbb{T}^-\}.$$

Agora damos condições para a semicontinuidade inferior.

Teorema 3.1.8. *Seja $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta \in [0,1]}$ uma família contínua em $\eta = 0$ de semigrupos que satisfaz*

- a) $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta \in [0,1]}$ tem um atrator global \mathcal{A}_η , para cada $\eta \in [0, 1]$.
- b) Se \mathcal{E}_η denota o conjunto das soluções estacionários de $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta \in [0,1]}$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{E}_\eta = \{y_1^{*,\eta}, \dots, y_p^{*,\eta}\}$, para todo $\eta \in [0, 1]$.
- c) Suponha que, para algum $\delta > 0$ pequeno,

$$\{\mathcal{W}_\delta^u(y_j^{*,\eta}) : \eta \in [0, 1]\}$$

é semicontínua inferiormente em $\eta = 0$.

- d) $\mathcal{A}_0 = \cup_{j=1}^p \mathcal{W}^u(y_j^{*,0})$.

Então, $\{\mathcal{A}_\eta : \eta \in [0, 1]\}$ é semicontínua inferiormente em $\eta = 0$.

Demonstração. De *d*) temos que $\mathcal{A}_0 = \cup_{j=1}^p \mathcal{W}^u(y_j^{*,0})$. Segue que, se $u_0 \in \mathcal{A}_0$, existe uma solução global $\phi^{(0)} : \mathbb{T} \rightarrow X$ por u_0 , $1 \leq l \leq p$ e $\tau \in \mathbb{T}^+$ tal que $\phi^{(0)}(-\tau) \in \mathcal{W}_\delta^u(y_l^{*,0})$. De *c*), existe $u_\eta^{-\tau} \in \mathcal{W}_\delta^u(y_j^{*,\eta})$ tal que $u_\eta^{-\tau}$ tal que $\psi^{(\eta)}(0) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} \phi^{(0)}(-\tau)$. Segue de *a*) e da continuidade de $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta \in [0,1]}$ em $\eta = 0$ que

$$T_\eta(\tau)\psi^{(\eta)}(0) \rightarrow u_0.$$

O resultado segue do Lema 3.1.3. □

Assim notamos que a semicontinuidade superior requer condições muito mais razoáveis que a semicontinuidade inferior. Fato que deverá se repetir no contexto não-autônomo.

3.2 Estabilidade dos Semigrupos Dinamicamente Gradientes

Nesta seção obteremos uma importante consequência da equivalência entre os semigrupos gradiente e dinamicamente gradientes. Mostrando a estabilidade sob perturbações dos dinamicamente gradientes, obtemos estabilidade dos gradientes.

Consideremos uma família de semigrupos $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta \in [0,1]}$. Começamos com um resultado que estende o Lema 1.2.4 para a família $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta \in [0,1]}$. Denotaremos por \mathcal{E}_η o conjunto dos pontos de equilíbrio de $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta \in [0,1]}$ para cada parâmetro $\eta \in [0, 1]$.

Lema 3.2.1. *Se $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta \in [0,1]}$ é contínua em $\eta = 0$ e os equilíbrios $y^{*,\eta} \in \mathcal{E}_\eta$, $\eta \in [0, 1]$ são tais que $y^{*,\eta} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} y^{*,0}$, então dado $t \in \mathbb{T}^+$ e $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ e $\eta_0 > 0$ tais que $\{T_\eta(s)y : 0 \leq s \leq t, y \in B_\delta(y^{*,\eta})\} \subset B_\epsilon(y^{*,\eta})$ para todo $\eta \leq \eta_0$.*

Demonstração. Se, por absurdo, o resultado não ocorre, podemos dizer que existe uma sequência de parâmetros $\{\eta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ com $\eta_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ e uma distância $\epsilon > 0$, $y_k \in B_{\frac{1}{k}}(y^{*,\eta_k})$ e $t_0 \in \mathbb{T}$ e sequência de tempos $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em $[0, t_0]$ tal que $d(T_{\eta_k}(s_k)y_k, y^{*,\eta_k}) \geq \epsilon_0$. Podemos assumir que $s_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} s_0$ para algum $s_0 \in [0, t_0]$, da compacidade do intervalo. Portanto $d(T_0(s_0)y^{*,0}, y^{*,0}) \geq \epsilon_0$, o que é uma contradição. □

Definição 3.2.2. Diremos que a família de semigrupos $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta \in [0,1]}$ é **coletivamente assintoticamente compacta** em $\eta = 0$ se, dadas uma seqüência η_k com $\eta_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, uma seqüência limitada de pontos $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em X e uma seqüência de tempos $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em \mathbb{T}^+ com $t_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$ e $\{T_{\eta_k}(t_k)u_k : k \in \mathbb{N}\}$ limitada, então $\{T_{\eta_k}(t_k)u_k : k \in \mathbb{N}\}$ é relativamente compacta.

Lema 3.2.3. Seja $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta \in [0,1]}$ uma família de semigrupos que é contínua e coletivamente assintoticamente compacta em $\eta = 0$. Seja η_k uma seqüência em $[0,1]$ tal que $\eta_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em \mathbb{T}^+ com $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$, $\mathbb{J}_k := \{s \in \mathbb{T} : s \geq -s_k\}$ e $\mathbb{J}_k^- = \{s \in \mathbb{J}_k : s \leq 0\}$. Se, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe uma solução $\xi_{\eta_k} : \mathbb{J}_k \rightarrow X$ de $\{T_{\eta_k}(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ e $B_0 := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \xi_{\eta_k}(s_k)$ é limitado, então existe uma subsequência (que novamente denotaremos por $\xi_{\eta_k}(s_k)$) e uma solução global $\xi_0 : \mathbb{T} \rightarrow X$ de $\{T_0(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_{\eta_k}(s) \rightarrow \xi_0(s)$$

para todo $s \in \mathbb{T}^+$. Além disso, se $B_1 := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \xi_{\eta_k}(\mathbb{J}_k^-)$ é limitado, $\xi_0(s) \in \overline{B_1}$ para todo $s \leq 0$.

Demonstração. Como $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta \in [0,1]}$ é coletivamente assintoticamente compacto e B_0 é limitado, existe uma subsequência que novamente denotamos por η_k e $x_0 \in X$ tal que $\xi_{\eta_k}(0) = T_{\eta_k}(s_k)\xi_{\eta_k}(-s_k) \rightarrow x_0$. Seja $\xi_0(\cdot) : \mathbb{T}^+ \rightarrow X$ a solução de $\{T_0(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ definida por $\xi_0(t) := T_0(t)x_0$, $t \in \mathbb{T}^+$. Com isto, segue

$$\xi_{\eta_k}(s) = T_{\eta_k}(s)\xi_{\eta_k}(0) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} T_0(s)x_0 = \xi_0(s), \forall s \in \mathbb{T}^+.$$

Procedendo de maneira análoga, $\{\xi_{\eta_k}(-1)\}$ tem uma subsequência convergente $\xi_{\eta_k^1}(-1)$ com limite x_{-1} . Definindo $\xi_0(s) := T_0(s+1)x_{-1}$, $s \in \{s \in \mathbb{T} : s \geq -1\}$, temos que $T_0(1)x_{-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} T_{\eta_k^1}(1)\xi_{\eta_k^1}(-1) = \lim_{k \rightarrow \infty} \xi_{\eta_k^1}(0) = x_0$ e $\xi_0 : \{s \in \mathbb{T} : s \geq -1\} \rightarrow X$ é uma solução de $\{T_0(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ com $\xi_0(-1) = x_{-1}$, $\xi_0(0) = x_0$ e

$$\xi_{\eta_k^1}(s) = T_{\eta_k^1}(s+1)\xi_{\eta_k^1}(0) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} T_0(s+1)x_{-1} = \xi_0(s), \forall s \in \mathbb{T}^+, s \geq -1.$$

Indutivamente, suponha que tenhamos obtido subsequências $\{\xi_{\eta_k^i}\}_{k \in \mathbb{N}}$, $1 \leq i \leq m-1$, tais que $\{\eta_k^i\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de $\{\eta_k^{i-1}\}_{k \in \mathbb{N}}$ e $\eta_{\eta_k^i}(-i) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_{-i}$, $1 \leq i \leq m-1$ e $T_0(1)x_{-i} = x_{-i+1}$, $1 \leq i \leq m-1$. É claro que $\xi_{\eta_k^i} = T_{\eta_k^i}(s+1)x_{-i}$ converge para uma solução de $\{T_0(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ definida em $\{s \in \mathbb{T} : s \geq -i\}$, $0 \leq i \leq m-1$.

Agora construímos $\{\eta_k^m\}_{n=1}^\infty$ uma subsequência e $\{\eta_k^{m-1}\}_{n=1}^\infty$ tal que $\xi_{\eta_k^m}(-m)$ é convergente, assim denotemos seu limite por x_{-m} . Temos que $T_0(1)x_{-m} = x_{-m+1}$, assim, se definirmos $\xi_0(s) = T(s+m)x_{-m}$ para $s \geq -m$, então $\xi_0 : \{s \in \mathbb{T} : s \geq m\} \rightarrow X$ é uma solução de $\{T_0(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ com $\xi_0(-i) = x_{-i}$, $0 \leq i \leq m$ e $\xi_{\eta_k^m}(s)$ converge para $\xi_0(s)$ para todo $s \in \mathbb{T}, s \geq -m$.

Portanto construímos uma sequência $\{\xi_{\eta_k^k}\}_{k=1}^\infty$ e uma solução $\xi_0 : t \in \mathbb{T}^+$ com $\xi_0(-i) = x_{-i}$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e tal que $\xi_{\eta_k^k}(s) \rightarrow \xi_0(s)$ para todo $s \in \mathbb{T}$. A prova da última afirmação do lema decorre da definição de fecho. \square

Corolário 3.2.4. *Seja $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta \in [0,1]}$ uma família de semigrupos que é contínua e coletivamente assintoticamente compacta em $\eta = 0$. Seja $\{\eta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $(0, 1]$ tal que $\eta_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ e para cada $k \in \mathbb{N}$ seja $\xi_{\eta_k} : \mathbb{T} \rightarrow X$ uma solução global de $\{T_{\eta_k}(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$. Se $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \xi_{\eta_k}(\mathbb{T})$ é limitado, então para qualquer sequência $s = \{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em \mathbb{T}^+ , existe subsequência de $\{\xi_{\eta_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ que denotaremos por $\{\xi_{\eta_k^s}\}_{k \in \mathbb{N}}$ e uma solução global $\xi_{\eta_0^s} : \mathbb{T} \rightarrow X$ de $\{T_0(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ tal que*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_{\eta_k^s}(t + s_k) \rightarrow \xi_{\eta_0^s}(t)$$

para todo $t \in \mathbb{T}$

Lema 3.2.5. *Seja $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta \in [0,1]}$ uma família de semigrupos que é contínua e coletivamente assintoticamente compacta em $\eta = 0$. Se $\{T_0(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é dinamicamente gradiente, $\mathcal{E} = \{y_1^*, \dots, y_p^*\}$ é o conjunto de seus pontos de equilíbrio, $\delta < \delta_0$ e $B \subset X$ é limitado, existem $\eta_0 = \eta_0(B) \in (0, 1]$ e $t_0 = t_0(\delta, B) > 0$, independente de $\eta \in [0, \eta_0]$, tal que $\{T_\eta(t)u_0 : 0 \leq t \leq t_0\} \cap \bigcup_{i=1}^p B_\delta(y_i^*) \neq \emptyset$ para todo $u_0 \in B$.*

Se, além dessas hipóteses, supomos que o conjunto de equilíbrio de $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é $\mathcal{E}_\eta = \{y_1^{,\eta}, \dots, y_p^{*,\eta}\}$ e $\max_{1 \leq i \leq p} d(y_i^{*,\eta}, y_i^*) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$ podemos substituir y_i^* na conclusão acima por $y_i^{*,\eta}$.*

Demonstração. Fazemos esta prova por contradição. Suponha por absurdo que existe $0 < \delta < \delta_0$, uma sequência $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em B , uma sequência $\{\eta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em $[0, 1]$ com $\eta_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, uma sequência $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em \mathbb{T}^+ com $t_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$ tais que $\{T_{\eta_k}(s)x_k : 0 \leq s \leq 2t_k\} \cap \bigcup_{i=1}^p B_\delta(y_i^*) = \emptyset$.

Como $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta \in [0,1]}$ é coletivamente assintoticamente compacta em $\eta = 0$, passando a uma subsequência se necessário, existe $y \in X$ tal que $T_{\eta_k}(t_k)x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} y$. Como

$\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta \in [0,1]}$ é contínua em $\eta = 0$, $T_{\eta_k}(t + t_k)x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} T_0(t)y$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$. Do Lema 1.3.7, existe um $t_\delta \in \mathbb{T}^+$ e $y_j^* \in \mathcal{E}$ tal que $d(T_0(t)y, y_j^*) < \delta$ para todo $t \geq t_\delta$ e assim chegamos a uma contradição. \square

Lema 3.2.6. *Seja $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta \in [0,1]}$ uma família de semigrupos contínua e coletivamente assintoticamente compacta em $\eta = 0$. Denote por \mathcal{E}_n o conjunto das soluções estacionárias de $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta \in [0,1]}$ e suponha que $\max_{1 \leq i \leq p} d(y_i^{*,\eta}, y_i^{*,0}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Se $\{T_0(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é dinamicamente gradiente, dado $0 < \delta < \delta_0$, existe $\eta_0 > 0$ e $\delta' > 0$ (independente de η) de maneira que, se $\eta \in [0, \eta_0]$, $d(u_0, y_i^{*,\eta}) < \delta'$, $1 \leq i \leq p$, e para algum $t_1 \in \mathbb{T}^+$ temos $d(T_\eta(t_1)u_0, y_i^{*,\eta}) \geq p$, então $d(T_\eta(t)u_0, y_i^{*,\eta}) > \delta'$ para todo $t \geq t_1$.*

Demonstração. Suponha que, para algum $0 < \delta < \delta_0$, $1 \leq i \leq p$, existe uma sequência u_k em X , $\eta_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, $d(u_k, y_i^{*,\eta_k}) < 1/k$ e sequências $\sigma_k < \tau_k$ em \mathbb{T}^+ tais que $d(T_{\eta_k}(\sigma_k)u_k, y_i^{*,\eta_k}) \geq \delta$ e $d(T_{\eta_k}(\sigma_k)u_k, y_i^{*,\eta_k}) < 1/k$. Mostremos que isto contradiz a propriedade (G2) de $\{T_0(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$. Note primeiramente que σ_k podem ser escolhidos de forma que $T_{\eta_k}(s)u_k \in B_\delta(y_i^{*,\eta_k})$ para todo $s < \sigma_k$ e, do Lema 3.2.1, $\sigma_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$. Tomando subsequências construímos uma solução global $\xi_0 : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{A}$ tal que $\xi_0(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} y_i^*$. Do fato de que $\{T_0(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é dinamicamente gradiente temos que existe $j \neq i$ tal que $\xi_0(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} y_j^*$.

Do fato de que $\xi_0(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} y_j^*$ e da construção de ξ_0 , existe subsequência $\{\eta_{k_m}\}$ de $\{\eta_k\}$ e sequências $\{\sigma_{k_m}\}$, $\{t_{k_m}\}$ em \mathbb{T}^+ , $\sigma_{k_m} < t_{k_m} < \tau_{k_m}$, tais que $d(T_{\eta_{k_m}}(\sigma_{k_m})u_{k_m}, y_j^{*,\eta_{k_m}}) < \frac{1}{m}$ e $d(T_{\eta_{k_m}}(\sigma_{k_m})u_{k_m}, y_j^{*,\eta_{k_m}}) \geq \delta$. Procedendo exatamente como no passo anterior obtemos uma solução $\xi_1 : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{A}$ tal que $\xi_1(s) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} y_j^*$. Do fato de que $\{T_0(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é dinamicamente gradiente temos que existe $y_i^* \in \mathcal{E}$, $y_i^* \notin \{y_i^*, y_j^*\}$, tal que $\xi_1(s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} y_i^*$. Continuando com este procedimento chegamos em uma contradição em um número finito de passos. \square

Teorema 3.2.7. *Seja $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta \in [0,1]}$ uma família de semigrupos contínua e coletivamente assintoticamente compacta em $\eta = 0$ tal que*

- a) $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta \in [0,1]}$ tem um atrator global \mathcal{A}_η para cada $\eta \in [0, 1]$ e $\cup_{\eta \in [0,1]} \mathcal{A}_\eta$ é limitado.
- b) $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta \in [0,1]}$ tem um número finito de soluções estacionárias \mathcal{E}_n , para todo $\eta \in [0, 1]$, $d(y_i^{*,\eta}, y_i^{*,0}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, $1 \leq i \leq p$. Além disso, existem $\delta > 0$ e $\eta_0 > 0$

tais que a única solução global de $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta \in [0,1]}$ contida em $B_\delta(y_i^{*,\eta})$ é $y_i^{*,\eta}$, $1 \leq i \leq p$, $0 \leq \eta \leq \eta_0$.

c) $\{T_0(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo dinamicamente gradiente.

Então, existe $\eta_0 > 0$ tal que, para todo $\eta \in [0, \eta_0]$, o semigrupo $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta \in [0,1]}$ é dinamicamente gradiente.

Demonstração. Vamos provar por redução ao absurdo que, para η suficientemente pequeno, toda solução global $\xi^{(\eta)} : \mathbb{T} \rightarrow X$ em \mathcal{A}_η satisfaz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\xi^{(\eta)}(t), y_i^{*,\eta}) = 0, \text{ para algum } 1 \leq i \leq p.$$

Note que $y_i^{*,\eta} \rightarrow y_i^{*,0} =: y_i^*$ e que existe um $\delta > 0$ tal que, para η suficientemente pequeno, se uma solução $\xi^{(\eta)} : \mathbb{T} \rightarrow X$ satisfaz $d(\xi^{(\eta)}(t), y_i^*) \leq \delta$ para todo $t \geq t_0$ e para algum $t_0 \in \mathbb{T}$, então $\xi^{(\eta)}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} y_i^{*,\eta}$. Suponha que existe uma sequência $\eta_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ e soluções globais correspondentes $\xi^{(k)}$ em \mathcal{A}_{η_k} tais que

$$\sup_{s \geq t} \text{dist}(\xi^{(k)}(s), \mathcal{E}) > \delta, \forall t \in \mathbb{T}^+ \quad (3.1)$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Pelo Corolário 3.2.4 tomando subsequências $\xi^{(k)}(t) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \xi^{(0)}(t)$ para cada $t \in \mathbb{T}$ onde $\xi^{(0)}$ é uma solução global em \mathcal{A}_0 . Como $\xi^{(0)}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} y_i^*$, para algum $1 \leq i \leq p$, temos que, dado $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ existem $t_r \in \mathbb{T}$ e $k_r \in \mathbb{N}$ tais que $d(\xi^{(k)}(t_r), y_i^*) < \frac{1}{r}$, para cada $k \geq k_r$. De (3.1), existe $t'_r > t_r$ tal que $d(\xi^{(k_r)}(t), y_i^*) < \delta$ para todo $t \in [t_r, t'_r)$ e $d(\xi^{(k_r)}(t'_r), y_i^*) \geq \delta$.

Tomando subsequências se necessário, seja $\xi^{(1)}(t) = \lim_{r \rightarrow \infty} \xi^{(k_r)}(t + t'_r)$. Então, como $t'_r - t_r \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \infty$, $d(\xi^{(1)}(t), y_i^*) \leq \delta$ para todo $t < 0$ e conseqüentemente $\xi^{(1)}(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} y_i^*$. Além disso $\xi^{(1)}(t)$ para todo $t \in \mathbb{T}$ temos que, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe um instante $t_m > 0$ e índices $k_m \in \mathbb{N}$ tais que $d(\xi^{(k_r)}(t_m), y_j^*) < \frac{1}{m}$ para todo $k_r \geq k_m$. Novamente, de (3.1), existem $t'_m > t_m$ tais que $d(\xi^{(k_m)}(t), y_j^*) < \delta$ para todo $t \in [t_m, t'_m)$ e $d(\xi^{(k_m)}(t'_m), y_j^*) \geq \delta$. Procedendo exatamente como antes obtemos uma solução $\xi^{(2)} : \mathbb{T} \rightarrow X$ tal que $\xi^{(2)} \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} y_j^*$ e $\xi^{(2)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} y_l^*$ com $l \notin \{i, j\}$. Em um número finito de passos chegamos a uma contradição. Isto prova que existe um $\eta_0 > 0$ tal que, para toda solução global $\xi^{(\eta)}$ em \mathcal{A}_η com $\eta \leq \eta_0$, temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\xi^{(\eta)}(t), y_i^{*,\eta}) = 0.$$

Para provar que existe um $\eta_1 > 0$ tal que, para toda solução global $\xi^{(\eta)}$ em \mathcal{A}_η com $\eta \leq \eta_1$, temos que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi^{(\eta)}(t), y_i^{*,\eta}) = 0,$$

procedemos exatamente da mesma maneira. Isto completa a prova de que, para η suficientemente pequeno, $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ satisfaz (G1).

Vamos provar que, para η suficientemente pequeno, $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta \in [0,1]}$ também satisfaz (G2). Novamente argumentaremos por contradição. Usando o Lema 1.3.9, suponha que existe uma sequência $\eta_k \rightarrow 0$ e, para cada $k \in \mathbb{N}$, pontos de equilíbrio $y_1^{*,\eta_k}, \dots, y_q^{*,\eta_k}$ em \mathcal{E}_{η_k} e soluções globais $\xi^{k,i}$ em \mathcal{A}_{η_k} com

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \xi^{k,i}(t) = y_i^{*,\eta} \text{ e } \lim_{t \rightarrow \infty} \xi^{k,i}(t) = y_{i+1}^{*,\eta}$$

onde $y_1^{*,\eta} = y_{q+1}^{*,\eta}$ (o número ou ordem dos pontos de equilíbrios nas sequências acima poderiam variar com k mas é sempre possível uma uniformização por passagem a uma subseqüência). Procedendo como na prova de (G1) construímos uma estrutura homoclínica para $\{T_0^n : n \in \mathbb{N}\}$ e chegamos a uma contradição. \square

Como consequência imediata deste teorema obtemos o seguinte resultado de caracterização.

Corolário 3.2.8. *Sob as hipóteses do Teorema 3.2.7, existe um $\eta_0 > 0$ tal que*

$$\mathcal{A}_\eta = \cup_{i=1}^p \mathcal{W}^u(y_i^{*,\eta}), \forall \eta \in [0, \eta_0].$$

A equivalência entre os semigrupos gradientes e os semigrupos dinamicamente gradientes relativos a uma família disjunta de invariantes isolados, mostrada no Capítulo 2, juntamente com o Teorema 3.2.7, provam que os semigrupos gradientes relativos a uma família disjunta de invariantes isolados são estáveis por perturbação. Isto é,

Teorema 3.2.9. *Seja $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta \in [0,1]}$ uma família de semigrupos contínua e coletivamente assintoticamente compacto em $\eta = 0$. Suponha que*

- a) $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta \in [0,1]}$ tem atrator global \mathcal{A}_η para cada $\eta \in [0, 1]$ e $\bigcup_{\eta \in [0,1]} \mathcal{A}_\eta$ é limitado.

- b) Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que \mathcal{A}_η tem n conjuntos invariantes isolados $\Xi_\eta := (\Xi_{1,\eta}, \Xi_{2,\eta}, \dots, \Xi_{n,\eta})$ para todo $\eta \in [0, 1]$ e $\sup_{1 \leq i \leq n} [\text{dist}_H(\Xi_{i,\eta}, \Xi_{i,0}) + \text{dist}_H(\Xi_{i,0}, \Xi_{i,\eta})] \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$.
- c) $\{T_0(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo gradiente relativamente à Ξ_0 .

Então existe $\eta_0 > 0$ tal que, para todo $\eta \leq \eta_0$, $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^*\}$ é um semigrupo gradiente relativamente à Ξ_η .

3.3 Caso Não-Autônomo

Nesta seção faremos apenas comentários gerais, sem provas, acerca dos resultados obtidos por Carvalho, Aragão-Costa et al (em [6],[2], [9]) que generalizam os resultados acerca de continuidade deste capítulo. A saber, a continuidade de atratores para o caso não-autônomo e a estabilidade de processos dinamicamente gradientes sob-perturbação.

Primeiramente para se obter a semicontinuidade superior de uma família de atratores $\{S_n(\cdot, \cdot) : n \in \bar{\mathbb{N}}\}$, com $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, pedem-se hipóteses razoáveis: os processos $S_n(\cdot, \cdot)$ convergem de maneira uniforme em compactos para $S_\infty(\cdot, \cdot)$, a união dos atratores é pré-compacta e os atratores são uniformemente limitados para trás.

Teorema 3.3.1. *Seja $\{S_n(\cdot, \cdot) : n \in \bar{\mathbb{N}}\}$ uma sequência de processos com atratores pullback $\{\mathcal{A}_n(\cdot, \cdot) : n \in \bar{\mathbb{N}}\}$. Suponha que valem*

(i) $\sup_{\tau \in [0, T]} \sup_{x \in K} d(S_n(t, t - \tau)x, S_\infty(t, t - \tau)x) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ para cada $t, T \in \mathbb{R}$ e $x \in K$ compacto.

(ii) $\overline{\bigcup_{n \in \bar{\mathbb{N}}} \mathcal{A}_n(t)}$ é compacto para cada $t \in \mathbb{R}$

(iii) $\bigcup_{n \in \bar{\mathbb{N}}} \bigcup_{s \leq t} \mathcal{A}_n(s)$ é limitado para cada $t \in \mathbb{R}$.

Então $\{\mathcal{A}_n(\cdot, \cdot) : n \in \bar{\mathbb{N}}\}$ é semicontínua superiormente.

O seguinte resultado adiciona hipóteses sobre a estrutura do atrator pullback para garantir semicontinuidade inferior, e conseqüentemente a continuidade.

Teorema 3.3.2. *Seja $\{S_n(\cdot, \cdot) : n \in \overline{\mathbb{N}}\}$ uma família de processos com atratores pullback associados $\mathcal{A}_n(\cdot)$. Assuma que vale as Hipóteses (i) – (iii) do Teorema 3.3.1. Se valem*

- *Existe uma sequência de famílias de invariantes isolados limitados para trás $\{E_j^*(\cdot)\}_{j \in \mathbb{N}}$ de $S_\infty(\cdot, \cdot)$ tal que*

$$\mathcal{A}_\infty(t) = \overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{W}^u(E_j^*(\cdot))(t)}.$$

- *Para cada $j \in \mathbb{N}$ existe uma sequência $\{E_{j,n}^*(\cdot)\}_{n \in \mathbb{N}}$ onde $E_{j,n}^*$ é uma família invariante de subconjuntos limitados para trás de $S_n(\cdot, \cdot)$, e um $t_j \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\sup_{t \leq t_j} \text{Dist}_H(E_{j,n}^*(t), E_j^*(t)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ e}$$

- *O conjunto instável local de $E_{j,n}^*(\cdot)$ se comporta continuamente quando $n \rightarrow \infty$, isto é, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $\delta_j > 0$ e $t_j \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\sup_{t \leq t_j} \text{Dist}_H(\mathcal{W}_{\delta_j}^u(E_{j,n}^*)(t), \mathcal{W}_{\delta_j}^u(E_j^*)(t)) \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Então a família $\{\mathcal{A}_n(\cdot) : n \in \mathbb{N}\}$ é contínua quando $n \rightarrow \infty$, isto é,

$$\text{Dist}_H(\mathcal{A}_\infty(t), \mathcal{A}_n(t)) \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Em [7], Carvalho apresenta a demonstração dos Teoremas 3.3.1 e 3.3.2.

Agora, no que tange à estabilidade dos processos de evolução dinamicamente gradientes, Carvalho apresenta em [9] a estabilidade de perturbações não-autônomas de processos de evolução dinamicamente gradientes relativos a um conjunto de equilíbrios. Ainda, em [2], Aragão-Costa mostra a continuidade da decomposição de Morse e função de Lyapunov em si para perturbações não-autônomas de processos.

Referências Bibliográficas

- [1] E. R. Aragão-Costa - Sistemas Gradientes, decomposição de Morse e funções de Lyapunov sob perturbação. Tese de Doutorado. USP - São Carlos, 2012.
- [2] E. R. Aragão-Costa, T. Caraballo, A. N. Carvalho, J. A. Langa - Non-autonomous Morse-decomposition and Lyapunov functions for gradient-like processes, 2013).
- [3] E. R. Aragão-Costa, T. Caraballo, A. N. Carvalho, J. A. Langa, Stability of gradient semigroups under perturbations, *Nonlinearity* 24 2099-2117 (2012).
- [4] V. I. Arnold - Ordinary Differential Equations. 3rd ed. New York: Springer, 1997.
- [5] A.N. Carvalho - Notas de Aula de Sistemas dinâmicos não-lineares. Departamento de Matemática, ICMC-USP, São Carlos, 2017.
- [6] A. N. Carvalho, J. A. Langa - An extension of the concept of gradient systems which is stable under perturbation, *J. Differential Equations*, 246 (7) 2646-2668 (2009).
- [7] A. N. Carvalho, J. A. Langa, J. C. Robinson - Attractors for infinite-dimensional non-autonomous dynamical systems.
- [8] A. N. Carvalho, J. A. Langa, J. C. Robinson - Lower Semicontinuity of attractors for non-gradient dynamical systems. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 29 (6) 1765-1780 (2009).
- [9] A. N. Carvalho, J. A. Langa, J. C. Robinson, A. Suárez - Characterization of nonautonomous attractors of a perturbed infinite-dimensional gradient system, *Journal of Differential Equations*, 236 (2007) 570-603.
- [10] J.W. Cholewa, T. Dlotko - Global Attractors in Abstract Parabolic Problems, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

- [11] C. Conley - Isolated invariant sets and the Morse index. CBMS Regional Conference
- [12] J. K. Hale - Asymptotic Behavior of Dissipative Systems, Mathematical Surveys and Monographs 25 (American Mathematical Society, Providence, RI) (1988).
- [13] M. Kline - Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. Volume 2. Oxford University Press, New York 1990.
- [14] M. Kline - Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. Volume 3. Oxford University Press, New York 1990.
- [15] E. L. Lima - Curso de análise. Vol. 1. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1976.
- [16] E. L. Lima - Curso de análise. Vol. 2. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1981.
- [17] E. L. Lima - Espaços Métricos. 5a edição. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2015.
- [18] W. Rudin - Principles of mathematical analysis. Third edition. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, 1976.
- [19] W. Rudin - Real and complex analysis. Third edition. McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.