Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática - IM
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PGMAT
Dissertação de Mestrado

Formalismo Termodinâmico de aplicações não-uniformemente expansoras

Thiago Bomfim São Luiz Nunes

Salvador-Bahia
Dezembro de 2011

Formalismo Termodinâmico de aplicações não-uniformemente expansoras

Thiago Bomfim São Luiz Nunes

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Augusto Armando de Castro Jr.

Salvador-Bahia
Dezembro de 2011

Nunes, Thiago Bomfim São Luiz.

Formalismo Termodinâmico de aplicações não-uniformemente expansoras / Thiago Bomfim São Luiz Nunes. – Salvador: UFBA, 2011.

74 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Augusto Armando de Castro Jr.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2011.

Referências bibliográficas.

1. Sistemas Dinâmicos. 2. Formalismo Termodinâmico. 3. Transformações não-uniformemente expansoras. I. Castro, Augusto Armando de Jr. II. Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática. III. Título.

CDU : 517.98

: 519.218.84

Formalismo Termodinâmico de aplicações não-uniformemente expansoras

Thiago Bomfim São Luiz Nunes

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 13 de dezembro de 2011.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Augusto Armando de Castro Jr (Orientador)
UFBA

Prof. Dr. Vilton Jeovan Viana Pinheiro
UFBA

Prof. Dr. Vitor Domingos Martins de Araujo
UFRJ

A minha esposa e a todos que de algum modo contribuíram com esse trabalho.

Agradecimentos

Agradeço a todos aqueles que de alguma forma colaboraram com essa parte da minha vida acadêmica:

em especial à Adeline que é e sempre será a parte mais importante da minha vida,

ao meu orientador professor Augusto Armando de Castro Jr. por além de ser um exemplo de matemático é um exemplo de moral e ética,

ao professor Paulo Varandas por ser, além de um excelente matemático, um ombro amigo,

ao professor Vilton Pinheiro por ser uma grande inspiração de pesquisador matemático,

aos professores e funcionários do IM - UFBA por colaborarem com meu crescimento (Enaldo Vergasta, Thierry Lobão, Dona Tânia, ...),

aos meus colegas desses dois anos (Ana Paula, Andrêssa, Dimi, Emanuele, Felipe Moscozo, Fellipe Antônio, Luiz, Roberto, Rodrigo, Angela, Katia, Teófilo, ...),

ao professor Vitor Araujo por aceitar fazer parte da minha banca,

e por fim, à CAPES pelo indispensável apoio financeiro.

"Faça as coisas o mais simples que você puder, porém não se restrinja às mais simples."

(Albert Einstein)

Resumo

O presente trabalho tem com objetivo descrever as propriedades ergódicas e de estabilidade dos estados de equilíbrio de uma grande classe de transformações não-uniformemente expansoras, onde partição de Markov não é assumida. Estudamos aplicações não singulares (difeomorfismos locais, eventualmente, homeomorfismos locais) que apresentam prevalência de expansão: a variedade compacta que é o domínio da aplicação possui uma região onde a derivada da aplicação pode até mesmo possuir direções contrativas, mas a expansão em outras regiões e a transitividade do sistema permitem dar conta dos efeitos da região onde falha a expansão. Provamos que para certos potenciais com variação baixa existe um único estado de equilíbrio, tal estado de equilíbrio tem decaimento exponencial de correlações, satisfaz o teorema central do limite e é uma medida exata; além disso, para essa classe de dinâmicas e potenciais obtemos resultados de estabilidade estatística forte e estabilidade espectral. Todo o trabalho foi baseado num artigo de Castro e Varandas [CV10].

Palavras-chave: Formalismo Termodinâmico; Aplicações não-uniformemente expansoras; estados de equilíbrio, operador de Ruelle-Perron-Frobenius.

Abstract

This paper is an attempt to describe the ergodic and stability properties of the equilibrium states for a large class of non-uniformly expanding maps, where Markov partition is not assumed. The applications that we study are not singular (local diffeomorphisms, in some cases, local homeomorphisms) which show a prevalence of expansion: the compact manifold which is the application domain has a region where its derivative can have contractive directions, but expansion in other regions and transitivity of the system allow to account for the effects of the region where the expansion fails. We prove that for certain potentials with low variance there exists a unique equilibrium state. Furthermore, such state of equilibrium has exponential decay of correlations, satisfies the central limit theorem and is an exact measure; in addition to this class of dynamics and potential yields results of strong statistical stability and spectral stability. All the work was based on an article of Castro and Varandas [CV10].

Keywords: Thermodynamic formalism; Non-uniformly expanding applications; Equilibrium states; Operator of Ruelle-Perron-Frobenius.

Sumário

Introdução

O objetivo dos Sistemas Dinâmicos é descrever a evolução a longo prazo de sistemas para qual uma regra de evolução a curtíssimo prazo é conhecida. Esse tipo de questão apresenta-se naturalmente em diversas áreas como: Física, Química, Meteorologia, Ecologia, Economia, e etc.

Em alguns casos, a mudança no sistema é observada via uma regra que é aplicada a intervalos regulares; a que dizemos tratar-se de um sistema com tempo discreto. Já outros, são sistemas em tempo contínuo cuja evolução irá ser apresentada por meio de uma equação diferencial; mesmo nesse caso em muitas situações é conveniente considerar como primeira aproximação um modelo em tempo discreto. Mais precisamente, dado um espaço de fases M, a regra de evolução de um sistema discreto é dada por uma transformação $f : M \to M$ que diz ao estado $x \in M$ qual será o seu futuro em uma unidade de tempo. Assim um problema possível consiste em descrever o comportamento, quando o tempo converge para o infinito, da maioria das órbitas; no contexto atual maioria pode significar um conjunto de probabilidade total. Um outro problema importante é saber se o comportamento assintótico da transformação é estável sob pequenas mudanças na lei de evolução. Ambas as questões são cruciais já que estamos interessados em usar um modelo matemático para simplificar um sistema real.

Inicialmente para solução de problemas dinâmicos havia uma prevalência em tentar encontrar as trajetórias, através das expressões analíticas das equações diferenciais, e tentava-se descrever o comportamento futuro; porém em muitos casos não se conseguia sequer encontrar a expressão analítica que descrevia o fenômeno estudado e mesmo quando se tinha a expressão analítica era extremamente difícil descrever o comportamento global. No final do século XIX, Poincaré propôs utilizar métodos que até então não tinham sido utilizados, como argumentos de Topologia e Teoria da Medida, para encontrar informação quantitativa sobre a dinâmica sem precisar encontrar as soluções das equações diferenciais. Essa proposta de Poincaré evoluiu ao longo de seus trabalhos culminando numa contribuição revolucionária para Mecânica Celeste, esta contribuição é considerada como o nascimento dos Sistemas Dinâmicos como disciplina matemática.

A direção proposta por Poincaré foi seguida por Birkhoff nos anos 30; particularmente ele ficou muito interessado no fenômeno de pontos homoclínicos transversais, ou seja, pontos periódicos cujas variedades estável e instável se intersectam transversalmente. Tal fenômeno foi descoberto no contexto do problema de $N-$corpos, por Poincaré; uma compreensão definitiva deste fenômeno foi iniciada na década de 60 quando Smale [Sma67] introduziu o conceito de ferradura, um modelo geométrico simples cuja dinâmica pode ser compreendida completamente, cuja presença em um sistema é equivalente a existência de pontos homoclínicos transversais.

A ferradura e outros modelos posteriores contendo uma infinidade de órbitas periódicas formam uma classe robusta que foi unificada por Smale através da noção de conjunto uniformemente hiperbólico: que é um subconjunto da dinâmica estudada, invariante pela dinâmica e cujo espaço tangente de qualquer ponto admite uma decomposição contínua em dois subespaços complementares, em um dos quais a derivada contrai uniformemente e no outro, a derivada expande uniformemente. Nesse bojo, Smale introduziu a noção de sistema dinâmico uniformemente hiperbólico (Axioma A), o qual é um sistema onde o conjunto de pontos relevantes dinamicamente tem essa estrutura rígida de contração e expansão. Assim, entre a década de 60 e meados da década de 80 a teoria de sistemas dinâmicos uniformemente hiperbólicos se desenvolveu alcançando extensões não esperadas inicialmente.

Em 1968; Oseledets [Ose68] prova que dado um difeomorfismo $f : M \to M$ agindo sobre uma variedade compacta, o conjunto de pontos onde existe uma decomposição do espaço tangente e faz sentido definir o valor limite da taxa de expansão da norma da derivada (expoente de Lyapunov) é um conjunto de probabilidade total, no entanto tal decomposição varia só mensuravelmente. Nesse contexto, se μ é uma probabilidade invariante tal que (f, μ) tem somente expoentes de Lyapunov não nulos q.t.p., então teremos uma decomposição do espaço tangente como no caso uniformemente hiperbólico, no entanto ele ocorre q.t.p.. Dizemos nesse caso que μ é hiperbólica; em 1976 Pesin [Pes76] prova a existência de folhas estáveis / instáveis sobre esse tipo de sistema (f, μ). Esse tipo de sistema (f, μ) foi chamado de não-uniformemente hiperbólico (no sentido de Pesin).

Ao longo desse processo já citado percebeu-se que uma das formas interessantes de se estudar a dinâmica era através das medidas SRB (Sinai, Bowen, Ruelle), que são medidas que realizam o teorema de Birkhoff em um conjunto de medida positiva em relação a Lebesgue. No caso uniformemente expansor (uniformemente hiperbólico onde só há expansão) em geral a medida SRB é uma medida que é absolutamente contínua em relação a Lebesgue e em alguns casos não-uniformemente hiperbólicos (a medida μ é Lebesgue) a SRB é essencialmente uma medida que é absolutamente contínua em relação a Lebesgue ao longo de direções estáveis.

Um outro tipo de medida importante para o estudo de uma dinâmica são os estados de equilíbrio, que são medidas invariantes que carregam consigo uma informação métrica e topológica acerca do sistema; a teoria dos estados de equilíbrio para sistemas dinâmicos suaves foi iniciada por trabalhos pioneiros de Sinai, Ruelle e Bowen. No contexto de difeomorfismos uniformemente hiperbólicos eles provaram que estados de equilíbrio existem e são únicos para um potencial Hölder contínuo: a estratégia básica é semi-conjugar a dinâmica com a de um subshift de tipo finito via partição de Markov. Fora do contexto uniformemente hiperbólico, apesar de um importante progresso, um cenário geral ainda não é claro, já que por exemplo em muitos casos partições de Markov podem não existir, e mesmo se existirem podem não ser finitas; ademais, os estados de equilíbrio podem até não existir.

Especificamente para um caso não-uniformemente expansor (a menos de uma região aberta onde pode haver um pouco de contração, o difeomorfismo local expande), podemos citar os seguinte trabalhos: em 2003 Oliveira [Oli03] prova a existência de estados de equilíbrio, ele trabalha num contexto em que o potencial é contínuo e tem variação baixa, a dinâmica expande bastante volume e para obter resultados sobre medidas de máxima entropia ele exige a existência de uma partição de Markov; em 2007 Oliveira e Viana [OV08] provam a existência e unicidade de estados de equilíbrio, essencialmente eles precisam que o potencial seja Hölder e tenha variação baixa, além de algumas condições não muito naturais como a existência de partições de Markov; num contexto similar (precisa-se de partição de Markov), Arbieto e Matheus [AM06] provam que o estado de equilíbrio associado a um potencial Hölder tem decaimento exponencial de correlações. Já Varandas [Va07] retira completamente o uso das partições de Markov obtendo resultados sobre existência e unicidade que descrevem completamente os estados de equilíbrio para potenciais Hölder contínuos. Em [VV10], Varandas e Viana, estendem esses resultados para o contexto de homeomorfismos locais agindo sobre uma espaço métrico de Besicovitch. Seguindo algumas ideias presentes em Arbieto e Matheus [AM06], em 2010 Castro e Varandas [CV10] (preprint), num contexto similar a Varandas e Viana [VV10], descrevem propriedades das medidas que no contexto Varandas e Viana [VV10] são estados de equilíbrio, obtendo decaimento exponencial de correlações, teorema central do limite, estabilidade estatística e estabilidade espectral.

Nossa dissertação detalhará este último trabalho devido a Castro e Varandas. Como vimos acima, estudaremos aplicações não singulares (difeomorfismos locais, eventualmente, homeomorfismos locais) que apresentam prevalência de expansão: a variedade compacta que é o domínio da aplicação possui uma região onde a derivada da aplicação pode mesmo possuir direções contrativas. Mas a expansão em outras regiões e a transitividade do sistema permitem dar conta dos efeitos da região onde falha a expansão.

O corpo da presente dissertação está dividido em três capítulos e três apêndices cujos conteúdos e objetivos estão brevemente discriminados a seguir:

- **Capítulo 1:** Apresentação das preliminares necessárias ao estudo. Nesse capítulo são definidos e discutidos propriedades a cerca do *Jacobiano*, *Entropia* e *Pressão*, e *Operador de Ruelle-Perron-Frobenius*, vale ressaltar que esse último ocupa um lugar de extrema importância na obtenção dos resultados que seguem.

- **Capítulo 2:** Apresentação do problema sob estudo, os resultados obtidos em [VV10] e os avanços obtidos através de [CV10]. Nesse capítulo vemos a descrição da existência e unicidade dos estados de equilíbrio para a nossa classe de dinâmicas não-uniformemente expansoras e potenciais Hölder de variação baixa através do trabalho de Varandas e Viana [VV10], nele descobrimos que existem um número finito de estados de equilíbrio ergódico e que todo estado de equilíbrio é gerado por estes; tais estados de equilíbrio ergódicos são obtidos através do estudo das medidas conformes do operador de Ruelle-Perron-Frobenius associado a dinâmica e potencial. Para garantir a unicidade dos estados de equilíbrio em [VV10] é exigido uma hipótese de transitividade, a saber, é exigido que a dinâmica seja topologicamente exata.

  Exigindo um controle na norma Hölder do potencial provamos que existe um único, tal fato não era conhecido em [VV10], estado de equilíbrio, mesmo sem a priori exigirmos qualquer hipótese de transitividade, tal estado de equilíbrio é obtido através de uma medida conforme do operador de Ruelle-Perron-Frobenius e de um ponto fixo do mesmo; vale ressaltar que descobrimos que existe uma única medida conforme, tal fato também não era conhecido em [VV10]. A obtenção desse ponto fixo é feita as custas da técnica de cones, na verdade com a técnica de cones provamos que o operador de Ruelle-Perron-Frobenius tem um gap espectral em $\mathcal{C}^\alpha$, devido a tal gap obtemos que o único estado de equilíbrio tem decaimento de correlações em $\mathcal{C}^\alpha$, satisfaz o teorema central do limite e é uma medida exata.

  Em [VV10] é provado que, assumindo a hipótese de que a pressão topológica varia continuamente com respeito a classe de dinâmicas e potenciais estudados (o que equivale a exigir que o raio espectral do operador de Ruelle-Perron-Frobenius varie continuamente), então existe estabilidade estatística, ou seja, o estado de equilíbrio varia continuamente (na topologia fraca*) com respeito à dinâmica e ao potencial. Como já dissemos, utilizamos a técnica de cones para obter o gap espectral do operador de Ruelle-Perron-Frobenius; como obtivemos uma uniformidade dos cones utilizados em relação a dinâmica e potencial, nos provamos que, de fato, o raio espetral, e portanto a pressão topológica, varia continuamente com respeito à dinâmica e ao potencial; além disso provamos que a medida conforme e o ponto fixo do operador de Ruelle-Perron-Frobenius também variam continuamente com respeito à dinâmica e ao potencial.

Usando mais uma vez a uniformidade dos cones invariantes, conseguimos resultados de estabilidade espectral, a saber: dada uma dinâmica e um potencial iniciais fazemos uma pertubação aleatória sobre eles, podemos então definir o operador de Ruelle-Perron-Frobenius aleatório como uma média dos operadores de Ruelle-Perron-Frobenius de dinâmicas e potenciais próximos aos inicias, onde tal média é dada pela distribuição aleatória; nesse contexto provamos que, desde que o "ruído" aleatório seja pequeno, o operador Ruelle-Perron-Frobenius aleatório tem o mesmo tipo de gap espetral do operador associado a dinâmica e potenciais iniciais, além disso, o ponto fixo e a medida conforme do operador de Ruelle-Perron-Frobenius aleatório convergem para o ponto fixo e a medida conforme do operador de Ruelle-Perron-Frobenius associado a dinâmica e potenciais iniciais quando o "ruído" aleatório converge para 0.

Ainda nesse capítulo; exigindo regularidade da dinâmica e do potencial, bem como um controle das normas $\mathcal{C}^r$ conseguimos melhorar alguns resultados obtidos, a saber: obtemos que o operador de Ruelle-Perron-Frobenius tem um gap espetral em $\mathcal{C}^r$, que a estabilidade estatística é $\mathcal{C}^r$ e que a estabilidade espectral sob pertubações aleatórias é $\mathcal{C}^r$.

- **Capítulo 3:** Discussão de questões naturais que surgiram após a dissertação, bem como, apresentação, sem provas, de resultados inéditos na linha de *Linear response formula*, decorrentes de um trabalho em progresso realizado conjuntamente entre Thiago Bomfim, Armando Castro e Paulo Varandas [BCV11].

- **Apêndice A:** Apresentação de conceitos e resultados topológicos que são importantes ao longo do texto. Nele é obtido resultados de controle das pré-imagens de homeomorfismos locais.

- **Apêndice B:** Uma breve apresentação da teoria de *Cones* e *Métricas Projetivas.*

- **Apêndice C:** Apresentação de conceitos e resultados sobre esperança condicional, bem como do *Teorema de Gordin* que é extremamente útil na prova de teoremas centrais do limite.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Jacobiano

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo local C^1, m a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ e A um boreliano tal que $f_{|A}$ é injetiva; sabemos que $m(f(A)) = \int_A |\det Df(x)| dm(x)$. A função $J_m(f) : U \xrightarrow[x \mapsto |\det Df(x)|]{} \mathbb{R}$ é chamada de determinante do Jacobiano de f no ponto x. Pelo resultado citado anteriormente, percebemos que $J_m(f)$ ajusta a integral de forma a manter o seu valor após aplicarmos f ao boreliano. Nosso próximo objetivo é estender essa ideia de Jacobiano para uma medida μ e uma aplicação $f : X \to X$ mais gerais.

Definição 1.1 (Jacobiano)**.** *Seja X um espaço topológico compacto Hausdorff, $f : X \to X$ uma aplicação localmente injetiva e μ uma medida boreliana sobre X. Uma função $J_\mu f : X \to \mathbb{R}^+$, $J_\mu f \in L^1(\mu)$, é dita um Jacobiano de μ em relação a f se:*

$$\mu(f(A)) = \int_A J_\mu f d\mu$$

para qualquer boreliano $A \subset X$ tal que $f_{|A}$ seja injetiva.

Notemos que, em geral, $f(A)$ não é um boreliano, logo o Jacobiano só vai fazer sentido em contextos em que isso ocorra; se f for contínua sabemos que sendo A aberto $f(A)$ será aberto em $f(K)$, pois K é compacto Hausdorff, e assim $f(A)$ é um boreliano qualquer que seja A boreliano com $f_{|A}$ é injetiva; desse modo o Jacobiano faz sentido no contexto de f contínua. Notemos que, se o Jacobiano existir, então ele é único a menos de um conjunto de medida nula em relação a μ.

Definição 1.2. *Sejam $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \to (X, \mathcal{A}, \mu)$ mensurável para a frente (a imagem de mensurável é mensurável) e μ uma medida σ-finita. Dizemos que f é μ-absolutamente* *contínua (para a frente) se $\mu \circ f \ll \mu$.*

Podemos notar na definição do Jacobiano que ela nos induz a pensar que $J_\mu f = \frac{d\mu\circ f}{d\mu}$, porém para isso ocorrer precisamos que $\mu \circ f$ seja uma medida e que $\mu \circ f \ll \mu$. A próxima proposição será útil na prova da existência do Jacobiano pois ela dirá que existe uma medida que se confunde com $\mu \circ f$ em borelianos onde f seja injetiva.

Lema 1.3. *Sejam K um espaço topológico compacto, μ um medida boreliana finita e $f : K \to K$ mensurável para a frente, localmente injetiva. Então existe, e é única, uma medida finitamente aditiva sobre os borelianos ν tal que*

$$\nu(A) = \mu(f(A)),$$

para todo A boreliano com $f_{|A}$ injetiva. Ademais, ν é $\sigma-$aditiva e é finita.

Prova. Seja $\mathcal{C} := \{C_1, \ldots, C_n\}$ um cobertura de K por abertos tais f é injetiva sobre cada um deles. Consideremos os borelianos

$$\begin{aligned} A_1 &:= C_1 \\ A_2 &:= C_2 \setminus A_1 \\ &\vdots \\ A_n &:= C_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j; \end{aligned} \tag{1.1}$$

$A_1, \ldots, A_n$ é uma família de borelianos disjuntos cuja união cobre K e tal que f é injetiva sobre cada um deles.

Seja B boreliano, então $B = \bigsqcup_{j=1}^{n}(B \cap A_j)$. Definamos então ν:

$$\nu(B) := \sum_{j=1}^{n} \mu\big(f(B \cap A_j)\big),$$

inicialmente iremos provar que ν é uma medida. Obviamente $\nu(\emptyset) = 0$; seja $B = \sum_{i=1}^{\infty} B_i$, onde cada B_i é um boreliano:

Afirmação: $\{f(B_i \cap A_j) : i \in \mathbb{N}\}$ é uma família de conjuntos dois a dois disjuntos. Com efeito; suponha por absurdo que existe $i \neq k$ e $y \in K$ tal que $y \in f(B_i \cap A_j) \cap f(B_k \cap A_j)$, logo existem $x_{ij} \in B_i \cap A_j$ e $x_{kj} \in f(B_k \cap A_j)$ tais que $y = f(x_{ij})$ e $y = f(x_{kj})$. Como B_i e B_k são disjuntos, em particular existem dois elementos de A_j que possuem a mesma imagem por f, absurdo, pois f é injetiva em A_j.

Sendo assim:

$$\nu(B) := \sum_{j=1}^{n} \mu\big(f(\sum_{i=1}^{\infty} B_i \cap A_j)\big) = \sum_{j=1}^{n} \mu\big(\sum_{i=1}^{\infty} f(B_i \cap A_j)\big) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \mu\big(f(B_i \cap A_j)\big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \nu(B_i);$$

desse modo ν é uma medida $\sigma-$aditiva sobre os borelianos. Pela definição de ν e construção dos $A_{j,s}$, teremos que ν é finita e $\nu(A) = \mu(f(A))$ para todo A boreliano com $f_{|A}$ injetiva.

Provemos que ν é única. Seja η uma medida sobre os borelianos tal que

$$\eta(A) = \mu(f(A)),$$

para todo A boreliano com $f_{|A}$ injetiva. Então, para B boreliano:

$$\eta(B) = \eta\big(\sum_{j=1}^{n}(B \cap A_j)\big) = \sum_{j=1}^{n} \eta(B \cap A_j) = \sum_{j=1}^{n} \mu\big(f(B \cap A_j)\big) = \sum_{j=1}^{n} \nu(B \cap A_j) = \nu(B);$$

ou seja, $\eta = \nu$ sobre os borelianos. ■

Pela unicidade obtida no lema anterior ao tratarmos $\mu \circ f$ como medida na verdade estamos tratando de ν.

Usando a proposição anterior e o teorema de Radon-Nikodym (veja [Rud70], página 122 e 124) vemos que:

Teorema 1.4. *Seja K um espaço topológico compacto Hausdorff, $f : K \to K$ uma aplicação mensurável para a frente (em relação a $\sigma-$álgebra dos borelianos) localmente injetiva e μ uma medida boreliana de probabilidade. Se f é $\mu-$absolutamente contínua (para a frente). Então, existe o Jacobiano de f com respeito à medida μ; ademais, $J_\mu f = \frac{d\mu \circ f}{d\mu}$.*

1.2 Operador de Ruelle-Perron-Frobenius

Nesta seção faremos uma apresentação de um operador importantíssimo para Teoria Ergódica, o operador de Ruelle-Perron-Frobenius.

Definição 1.5 (Definição clássica)**.** *Sejam $f : X \to X$ um homeomorfismo local agindo sobre um espaço topológico compacto Hausdorff e $\phi : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua. O operador de Ruelle-Perron-Frobenius $\mathcal{L}_\phi : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(X)$ é dado por:*

$$\mathcal{L}_\phi g(x) := \sum_{y \in f^{-1}(x)} e^{\phi(y)} g(y)$$

para $g \in \mathcal{C}(X)$ *e* $x \in X$.

A próxima proposição nos dirá que $\mathcal{L}_\phi$ está bem definido, bem como algumas propriedades.

Proposição 1.6. *Seja* X *um espaço topológico compacto Hausdorff e* $f : X \to X$ *um homeomorfismo local. Então:*

i) $\mathcal{L}_\phi$ *está bem definido e é um operador linear positivo e contínuo dotando* $\mathcal{C}(X)$ *da norma do* sup*;*

ii) Suponhamos que X *é um espaço métrico,* $\phi \in \mathcal{C}^\alpha$ *e existe uma função* $x \mapsto L(x)$ *tal que, qualquer que seja* $x \in X$ *existe uma vizinhança aberta* U_x *de* x *com* $f_x := f_{|U_x} : U_x \to f(U_x)$ *invertível e* $d(f_x^{-1}(y), f_x^{-1}(z)) \leq L(x)d(y,z)$. *Desse modo* $\mathcal{L}_\phi(\mathcal{C}^\alpha(X)) \subset \mathcal{C}^\alpha(X)$*;*

Prova. i)] Devido ao teorema A.1, para mostrarmos que $\mathcal{L}_\phi$ está bem definido basta mostrarmos que $\mathcal{L}_\phi(\mathcal{C}(X)) \subset \mathcal{C}(X)$. Sendo assim; seja $g \in \mathcal{C}(X)$, $x \in X$ e $x_1, \ldots, x_k$ os elementos de $f^{-1}(x)$. Dado $\epsilon > 0$, como g e ϕ são contínuas existe V_i, vizinhança aberta de x_i, tal que qualquer que seja $z \in V_i$ teremos $|e^{\phi(z)}g(z) - e^{\phi(x_i)}g(x_i)| < \frac{\epsilon}{k}$ para $i = 1, \ldots, k$. Pelo corolário A.2 existe U, vizinhança aberta de x, tal que qualquer que seja $y \in U$ existem $\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_k \in f^{-1}(y)$ tais que $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$ teremos $\hat{x}_i \in V_i$. Desse modo, para $y \in U$ teremos:

$$|\mathcal{L}_\phi(g)(y) - \mathcal{L}_\phi(g)(x)| = |\sum_{i=1}^{k}(e^{\phi(\hat{x}_i)}g(\hat{x}_i) - e^{\phi(x_i)}g(x_i))| < k\frac{\epsilon}{k} = \epsilon$$

ou seja, $\mathcal{L}_\phi(g) \in \mathcal{C}(X)$.

A linearidade de $\mathcal{L}_\phi$ decorre da linearidade do somatório e a sua positividade decorre da positividade da exponencial. Notemos que:

$$|\mathcal{L}_\phi g(x)| = |\sum_{y \in f^{-1}(x)} e^{\phi(y)}g(y)| \leq \sum_{y \in f^{-1}(x)} |e^{\phi(y)}g(y)| \leq \big(\max_{x \in X} \#f^{-1}(x)\big) \cdot e^{\sup \phi}||g||_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ||\mathcal{L}_\phi||_0 \leq \big(\max_{x \in X} \#f^{-1}(x)\big) \cdot e^{\sup \phi}.$$

ii)] Seja g $\alpha-$Hólder. Mostremos inicialmente que $e^{\phi(\cdot)}g(\cdot)$ é $\alpha-$Holder; sejam $y, z \in X$, então:

$$|e^{\phi(y)}g(y) - e^{\phi(z)}g(z)| \leq |e^{\phi(y)}g(y) - e^{\phi(z)}g(y)| + |e^{\phi(z)}g(y) - e^{\phi(z)}g(z)| \leq$$

$$\leq ||g||_\infty e^{\sup\phi - \inf\phi}|\phi(y) - \phi(z)| \ + \ e^{\sup\phi}|g(y) - g(z)| \leq$$

$$\leq \{||g||_\infty ||e^{\sup\phi - \inf\phi}||\phi||_\alpha \ + \ e^{\sup\phi}||g||_\alpha\} d(x,y)^\alpha.$$

Agora mostremos que $\mathcal{L}_\phi(g)$ é localmente $\alpha-$Holder. Seja $X = \bigsqcup_{i=1}^{l} V_i$, onde V_i é uma componente conexa de X; já sabemos que $G : X \xrightarrow[x \mapsto \# f^{-1}(x)]{} \mathbb{N}$ é constante em V_i (veja Apêndice A), denotemos o valor atingido nessa componente por k. Sejam $x \in V_i$ e $x_1, \ldots, x_k \in f^{-1}(x)$. Pelo corolário A.2 podemos tomar uma vizinhança aberta $U \subset V_i$ de x tal que, qualquer que seja $y \in U$ e $x_i \in f^{-1}(x)$ existe um único $y_i \in f^{-1}(x) \cap U_{x_i}$ onde U_{x_i} é uma vizinhança aberta de x_i onde f é injetiva e a inversa é Lipschitz. Desse modo tomemos $u, v \in U$, então:

$$|\mathcal{L}_\phi(g)(u) - \mathcal{L}_\psi(g)(v)| = |\sum_{y \in T^{-1}(u)} e^{\phi(y)} g(y) - \sum_{y \in T^{-1}(v)} e^{\phi(y)} g(y)| =$$

$$|\sum_{j=1}^{k} e^{\phi(u_j)} g(u_j) - \sum_{j=1}^{k} e^{\phi(v_j)} g(v_j)| \leq \sum_{j=1}^{k} |e^{\phi(u_j)} g(u_j) - e^{\phi(v_j)} g(v_j)| \leq \sum_{j=1}^{k} c \cdot d(u_j, v_j)^\alpha \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k} cL(x_j)^\alpha d(u,v)^\alpha = (\sum_{j=1}^{k} cL(x_j)^\alpha) \cdot d(u,v)^\alpha.$$

Desse modo $\mathcal{L}_\phi(g)$ é localmente $\alpha-$Hölder. Como X é compacto, teremos que $\mathcal{L}_\phi(g)$ é $\alpha-$Holder. ■

Usamos no final da prova da proposição anterior que localmente Hölder implica Hölder em um espaço topológico compacto, veremos ao longo do texto que quando X é conexo a constante de Hölder global é acotada superiormente por um múltiplo da constante de Hölder local (veja lema 2.14).

Pelo teorema de Riesz-Markov (veja [Rud70], página 40) sabemos que o operador adjunto de $\mathcal{L}_\phi$ age sobre um espaço de medidas. As automedidas (autovetores) associadas ao adjunto do operador de Ruelle-Perron-Frobenius são chamadas de **medidas conformes**, a próxima proposição nos mostrará que tais medidas possuem Jacobiano de fácil computação.

Proposição 1.7. *Sejam X um espaço métrico compacto e $f : X \to X$ localmente injetiva. Se existe uma probabilidade boreliana ν tal que $\mathcal{L}_\phi^* \nu = \lambda \nu, \lambda > 0$, então existe o Jacobiano de ν em relação a f e $J_\nu f = \lambda e^{-\phi}$.*

Prova. Seja A um boreliano tal que $f_{|A}$ é injetiva.Tomemos uma sequência $(g_n)_{n \geq 1}$ de funções contínuas tais que: $g_n(x) \xrightarrow{\nu - q.t.p.\ x} \chi_A(x)$, $\sup g_n \leq 2$ e o suporte de cada g_n não intersecte $f^{-1}(f(A)) \cap A^c$. Então:

$$\mathcal{L}_\phi(e^{-\phi}g_n)(x) = \sum_{y \in f^{-1}(x)} e^{\phi(y)}e^{-\phi(y)}g_n(y) = \sum_{y \in f^{-1}(x)} g_n(y) \xrightarrow{\nu-q.t.p.\ x} \chi_{f(A)}(x).$$

Logo, pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue:

$$\int \lambda e^{-\phi}g_n d\nu = \int e^{-\phi}g_n d(\mathcal{L}_\phi^*\nu) = \int \mathcal{L}_\phi(e^{-\phi}g_n)d\nu \to \nu(f(A)),$$

e

$$\int \lambda e^{-\phi}g_n d\nu \to \int_A \lambda e^{-\phi}d\nu.$$

Sendo assim $\nu(f(A)) = \int_A \lambda e^{-\phi}d\nu$. ■

Definição 1.8 (Gap espectral)**.** *Seja V um espaço de Banach e $T : V \to V$ um operador linear e contínuo. Dizemos que T tem gap espectral se existe uma decomposição do espectro, spec(T), como a seguir: existem $r_3 > r_2 > r_1 > 0$ tais que spec$(T) = \Sigma_1 \sqcup \Sigma_2$; com $\Sigma_2 \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| < r_1\}$, $\Sigma_1 \subset \{z \in \mathbb{C}: r_2 < |z| < r_3\}$.*

No nosso contexto trabalharemos com o operador de Ruelle-Perron-Frobenius, nesse sentido trabalharemos com uma definição mais restritiva de gap espectral:

Seja $E \subset \mathcal{C}(X)$ um espaço de Banach tal que $\mathcal{L}_\phi(E) \subset E$. Dizemos que o operador de Ruelle-Perron-Frobenius $\mathcal{L}_\phi$ atuando sobre E tem gap espectral se existe uma decomposição do espectro, spec$(\mathcal{L}_{\phi|_E}) \subset \mathbb{C}$, como a seguir: spec$(\mathcal{L}_{\phi|_E}) = \{\lambda\} \cup \Sigma$; onde λ é o maior autovalor de $\mathcal{L}_{\phi|_E}$, λ tem um autoespaço unidimensional associado e $\Sigma \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| < \lambda_1\}$ para $\lambda_1 < \lambda$.

1.3 Entropia e Pressão

Discutiremos nesse seção acerca dos conceitos de entropia (que mede o grau de caoticidade do sistema) e pressão, bem como eles se relacionam através do Princípio Variacional.

Nos concentraremos agora na definição de entropia métrica seguindo a linha de Kolmogorov, ou seja, através de entropia de partições.

Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço de medida fixado.

Definição 1.9. *Dada uma partição finita $\mathcal{Q}$ de X, a entropia da partição $\mathcal{Q}$ com respeito à probabilidade μ é o número,*

$$H_\mu(\mathcal{Q}) := -\sum_{Q\in\mathcal{Q}} \mu(Q)\log\mu(Q),$$

onde se convenciona que $0\log 0 = 0$.

Fixada uma medida, para cada partição obteremos a sua entropia associada, desse modo é natural que refinemos o tipo de partição a qual iremos calcular a entropia para que tal valor expresse melhor alguma informação sobre o sistema. Dadas duas partições $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ de X podemos definir uma nova partição $\mathcal{P}\vee\mathcal{Q}$ de X do seguinte modo:

$$\mathcal{P}\vee\mathcal{Q} := \{A\cap B; A\in\mathcal{P}\, e\, B\in\mathcal{Q}\}.$$

Dada a partição $\mathcal{P}$ e $f : X \to X$ uma transformação mensurável, denotaremos por $\mathcal{P}^n$ a partição $\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\mathcal{P})$. Como $H(\mathcal{P}^n)$ é uma sequência subaditiva, podemos definir a entropia da partição $\mathcal{P}$ com respeito à transformação f e a probabilidade μ, $f-$invariante, como o seguinte número:

$$h_\mu(f,\mathcal{P}) := \lim_{n\to+\infty}\frac{H(\mathcal{P}^n)}{n}.$$

A partir dessa entropia podemos definir uma entropia que só dependa da medida e da dinâmica escolhidas.

Definição 1.10 (Entropia métrica)**.** *A entropia métrica de* $f : X \to X$ *com respeito à probabilidade* μ*,* $f-$*invariante, é:*

$$h_\mu(f) := \sup_{\mathcal{P}} h_\mu(f,\mathcal{P}),$$

onde o supremo é tomado sobre todas as partições finitas de X*.*

Se (f_1,μ_1) e (f_2,μ_2) são sistemas equivalentes então $h_{\mu_1}(f_1) = h_{\mu_2}(f_2)$, ou seja, a entropia é um invariante. A recíproca em geral não vale, no entanto temos o importante resultado:

Teorema 1.11 (Orstein)**.** *Dois shifts de Bernoulli com a mesma entropia métrica são necessariamente equivalentes*

Prova. Veja [Orn70] ■

Quando temos uma partição que através da dinâmica gera a σ-álgebra inicial veremos que é mais simples calcular a entropia de $f : X \to X$ com respeito à medida μ.

Definição 1.12 (Partição geradora)**.** *Seja $f : X \to X$ uma transformação invertível preservando uma probabilidade μ; uma partição $\mathcal{P}$ é dita geradora se $\bigvee_{i=-\infty}^{+\infty} f^{-i}(\mathcal{P})$ gera a $\sigma-$álgebra $\mathcal{A}$. No caso que f é não-invertível, então $\mathcal{P}$ é geradora se $\bigvee_{i=0}^{+\infty} f^{-i}(\mathcal{P})$ gera a $\sigma-$álgebra.*

Teorema 1.13 (Kolmogorov-Sinai)**.** *Seja $\mathcal{P}$ uma partição geradora para $f : X \to X$ preservando uma probabilidade μ. Então:*

$$h_\mu(f) = h_\mu(f, \mathcal{P}).$$

Prova. Veja [Wal82], página 95. ∎

A partir desse momento iremos supor que X é um espaço métrico compacto, $\mathcal{A}$ é a $\sigma-$álgebra dos borelianos, $f : X \to X$ é uma transformação contínua e μ é uma medida $f-$invariante. Nesse contexto apresentaremos outra forma de calcular a entropia métrica, devido a Brin-Katok, usando as bolas dinâmicas.

Definição 1.14 (Bola dinâmica)**.** *A bola dinâmica de tamanho n e raio ϵ em torno do ponto $x \in X$ é o conjunto:*

$$\mathcal{B}_\epsilon(n, x) := \{y \in X; d(f^i(x), f^i(y)) < \epsilon, i = 0, \ldots, n-1\},$$

ou equivalentemente,

$$\mathcal{B}_\epsilon(n, x) := \bigcap_{k=0}^{n-1} f^{-k}(B_\epsilon(f^k(x))).$$

A entropia métrica de μ é a média da taxa exponencial de decrescimento da medida μ das bolas dinâmicas. Ou seja, definindo

$$h^+(x, \epsilon) := -\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu(\mathcal{B}_\epsilon(n, x))$$

e

$$h(x) := \lim_{\epsilon\to 0} h^+(x, \epsilon)$$

teremos:

Teorema 1.15 (Brin-Katok)**.** *A função $h(x)$ definida acima é $\mu-$integrável e, além disso, vale:*

$$h_\mu(f) = \int h(x) d\mu.$$

Prova. Veja [BK81]. ■

Agora discutiremos acerca da pressão topológica. Nesse momento fixemos uma função contínua $\phi : X \to \mathbb{R}$ e denotaremos $\sum_{i=0}^{n-1} \phi(f^i(x))$ por $S_n(x)$ e $\sup\limits_{x\in U} S_n(x)$ por $S_n(U)$.

Definição 1.16. *Dada uma cobertura α de X definimos a pressão de ϕ com respeito a cobertura α como:*

$$P(f,\phi,\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \inf_{\mathcal{U}\subset\alpha^n} \{\sum_{U\in\mathcal{U}} e^{S_n(U)}\},$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas subcoberturas finitas $\mathcal{U}$ de α^n.

O limite acima existe pois a sequência $\log \inf_{\mathcal{U}\subset\alpha^n}\{\sum_{U\in\mathcal{U}} e^{S_n(U)}\}$ é subaditiva.

Definição 1.17 (Pressão topológica)**.** *A pressão topológica $P_{top}(f,\phi)$ de f com respeito a ϕ é o supremo dos valores de $P(f,\phi,\alpha)$ sobre todas as coberturas abertas α de X.*

Definição 1.18 (Pressão métrica)**.** *A pressão métrica da probabilidade μ é o número*

$$P_{f,\phi}(\mu) := h_\mu(f) + \int_X \phi d\mu.$$

O próximo teorema relaciona os dois conceitos anteriores de pressão.

Teorema 1.19 (Princípio Variacional)**.** *Seja $\mathcal{I}$ o espaço das probabilidades $f-$invariantes, então:*

$$P_{top}(f,\phi) = \sup_{\mu\in\mathcal{I}} P_{f,\phi}(\mu).$$

Prova. Veja [Wal82], página 218. ■

O sup do princípio variacional pode não ser atingido, ou seja, pode não existir um medida μ tal que $P(f,\phi) = P_{f,\phi}(\mu)$; um dos objetivos do Formalismo Termodinâmico é encontrar condições que garantam a existência de tais medidas maximizantes, chamadas **estados de equilíbrio**, e descrever propriedades destas, como por exemplo se satisfazem uma **propriedade Gibbs** ou possuem **decaimento de correlações**.

Capítulo 2

Formalismo Termodinâmico

Dada uma transformação $f : M \to M$ agindo sobre um espaço métrico compacto, f um homeomorfismo local, e uma função $\phi : M \to \mathbb{R}$, chamada potencial, estamos interessados em responder às seguintes questões:

1. Exigindo uma certa regularidade de f e do potencial, existem medidas borelianas ν (medida de referência ou conforme) tais que $J_\nu f = \beta e^{-\phi}$, $\beta > 0$?

2. Se existem medidas de referência, será que os pontos fixos do operador de Perron-Frobenius associados a ela dão origem a estados de equilíbrio ?

3. Caso 2 ocorra, quais são as propriedades desses estados de equilíbrio, será que só existem finitos ou até mesmo tal medida é única ?

4. Se para uma dada família de (f, ϕ) os estados de equilíbrio são únicos, como será que eles variam em função de (f, ϕ) ?

Em geral quando M é uma variedade (Hausdorff) Riemanniana de dimensão d, compacta e conexa, em termos de regularidade é exigido que f seja um difeomorfismo local $\mathcal{C}^1$ e que o potencial seja Hölder.

A proposição 1.7 nos indica uma forma de encontrar medidas de referência, para isso basta encontrarmos um autovetor do operador $\mathcal{L}_\phi^*$.

Apesar de a princípio $\mathcal{L}_\phi$ agir somente em $\mathcal{C}(M)$; se ν for uma medida boreliana finita teremos que $\mathcal{C}(M)$ será denso em $L^1(\nu)$ (veja [Rud70], página 68), assim aplicando o B.L.T. (veja [RS72], página 9, teorema I.7) podemos enxergar $\mathcal{L}_\phi$ agindo sobre $L^1(\nu)$. Veremos que, se a dinâmica possui uma hipótese de não singularidade, quando aplicamos o B.L.T. em automedidas do operador $\mathcal{L}_\phi^*$, o operador que obtemos (chamado representação integral do operador de Ruelle-Perron-Frobenius), a menos de normalização, é o adjunto do operador de Koopman (operador de composição) e seus pontos fixos positivos induzem medidas que são $f-$invariantes e absolutamente contínuas em relação à automedida.

Definição 2.1 (Representação integral). *Seja $(X, \mathcal{A}, \nu)$ um espaço de medida positiva σ-finita e $f : X \to X$ uma transformação $\mathcal{A}$-mensurável (não necessariamente preservando a medida ν) tal que $\nu(A) = 0 \Rightarrow \nu(f^{-1}(A)) = 0$ (f é não-singular). Definimos o operador de Ruelle-Perron-Frobenius (por Lasota e Yorke) como:*

$$\int_A \mathcal{P}(g)d\nu = \int_{f^{-1}(A)} gd\nu$$

para todo $g \in L^1(\nu)$ e $A \in \mathcal{A}$.

A definição de $\mathcal{P}$ entre outras coisas nos diz que ele é o adjunto do operador de Koopman (operador de composição) $U_f(g) := g \circ f$.

Notemos que se definirmos $\mu_g(A) := \int_{f^{-1}(A)} gd\nu, \forall A \in \mathcal{A}$; como f é não-singular, teremos que $\mu_g \ll \nu$, logo pelo teorema de Radon-Nikodym $\exists h_g \in L^1(\mu)$ tal que $\mu_g(A) = \int_A h_g d\nu, \forall A \in \mathcal{A}$; assim $\mathcal{P}(g) := h_g$, ou seja, o operador de Ruelle-Perron-Frobenius por Lasota e Yorke está bem definido. O operador de Ruelle-Perron-Frobenius por Lasota e Yorke tem grande importância para Teoria Ergódica, pois, como veremos na próxima proposição seus pontos fixos positivos são densidades de medidas, absolutamente contínuas em relação a ν, que são f-invariantes.

Proposição 2.2. *Se $\mathcal{P}(h) = h$, $h \geq 0$ e $\mu(A) := \int_A hd\nu, \forall A \in \mathcal{A}$ então $\mu \ll \nu$ e μ é f-invariante.*

Prova. Seja $A \in \mathcal{A}$ tal que $\nu(A) = 0$, então como $h \geq 0$ teremos que $\mu(A) \int_A hd\nu = 0$, ou seja, $\mu \ll \nu$. Seja $B \in \mathcal{A}$, então $\mu(B) := \int_B hd\nu = \int_B \mathcal{P}(h)d\nu = \int_{f^{-1}(B)} hd\nu =: \mu(f^{-1}(B))$, ou seja, μ é f-invariante. ■

Por outro lado, ao encontrarmos uma medida finita absolutamente contínua com respeito a ν e f-invariante, encontraremos um ponto fixo para o operador de Ruelle-Perron-Frobenius, vide a próxima proposição.

Proposição 2.3. *Se ν_0 é uma medida finita absolutamente contínua com respeito a ν e é f-invariante, então $\mathcal{P}(\frac{d\nu_0}{d\nu}) = \frac{d\nu_0}{d\nu}$.*

Prova. Como $\nu_0 \ll \nu$, pelo teorema de Radon-Nikodym, existe $\frac{d\nu_0}{d\nu} \in L^1$, definamos $\phi_0 := \frac{d\nu_0}{d\nu}$. Devido a unicidade do teorema de Radon-Nikodym basta mostrarmos que $\mu_{\phi_0}(A) = \int_A \phi_0 d\nu, \forall A \in \mathcal{A}$, assim $\mu_{\phi_0}(A) := \int_{f^{-1}(A)} \phi_0 d\nu =: \nu_0(f^{-1}(A)) = \nu_0(A) := \int_A \phi_0 d\nu$. ■

Proposição 2.4. *i) $\mathcal{P}$ é operador linear;*

ii) $\mathcal{P}$ é positivo;

iii) $\mathcal{P}$ é contração fraca em relação a $||\cdot||_1$.

Prova. i) Seja $A \in \mathcal{A}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ e $g_1, g_2 \in L^1(\nu)$. Devido a unicidade do teorema de Radon-Nikodym basta mostrarmos que $\mu_{\lambda \cdot g_1 + g_2}(A) = \int_A \lambda \cdot \mathcal{P}(f) + \mathcal{P}(g) d\nu$, sendo assim: $\mu_{\lambda \cdot g_1 + g_2}(A) := \int_{f^{-1}(A)} \lambda \cdot g_1 + g_2 d\nu = \lambda \int_{f^{-1}(A)} g_1 d\nu + \int_{f^{-1}(A)} g_2 d\nu = \lambda \int_A \mathcal{P}(g_1) d\nu + \int_A \mathcal{P}(g_2) d\nu = \int_A \lambda \cdot \mathcal{P}(g_1) + \mathcal{P}(g_2) d\nu$.

ii) Seja $A \in \mathcal{A}, g \geq 0$, logo $\int_A \mathcal{P}(g) d\nu = \int_{f^{-1}(A)} g d\nu \geq 0$. Suponha por absurdo que $\mathcal{P}(g)(x) < 0, \forall x \in B \in \mathcal{A}$, com $\nu(B) > 0$, logo $\int_B \mathcal{P}(g) d\nu < 0$, absurdo, assim $\mathcal{P}(g) \geq 0$ em ν-q.t.p..

iii) Seja $g \in L^1(\nu)$. Note inicialmente que $|\mathcal{P}(g)| = |\mathcal{P}(g^+ - g^-)| = |\mathcal{P}(g^+) - \mathcal{P}(g^-)| \leq |\mathcal{P}(g^+)| + |\mathcal{P}(g^-)| \leq \mathcal{P}(g^+) + \mathcal{P}(g^-) \leq \mathcal{P}(g^+ + g^-) = \mathcal{P}(|g|)$. Assim, $||\mathcal{P}(g)||_1 := \int_X |\mathcal{P}(g)| d\nu \leq \int_X \mathcal{P}(|g|) d\nu \leq \int_X |g| d\nu =: ||g||_1$. ■

Nosso próximo objetivo é mostrar a relação entre a definição clássica e a representação integral do operador de Ruelle-Perron-Frobenius.

Proposição 2.5. *Sejam X um espaço métrico compacto, $(X, \mathcal{A}, \nu)$ um espaço de medida positiva σ-finita; e $f : X \to X$ não-singular, localmente injetiva e admitindo um Jacobiano $J_\nu f > 0$. Se $\mathcal{P} : L^1(\nu) \to L^1(\nu)$ é o operador de Ruelle-Perron-Frobenius por Lasota e Yorke e $\mathcal{L}$ é o operador de Ruelle-Perron-Frobenius, de acordo com a definição clássica, então:*

$$\mathcal{P}(g)(x) = \mathcal{L}_{-\log J_\nu f}(g)(x)$$

para toda $g \in \mathcal{C}(X)$.

Prova. Veja [Mac05], página 42. ■

Pela unicidade do B.L.T. (veja [RS72], página 9, teorema I.7), vemos que $\mathcal{P}(g) = \mathcal{L}_{-\log J_\nu f}(g), \forall g \in L^1(\nu)$.

Assim; sendo $\mathcal{L}_\phi^* \nu = r\nu$, onde ν é uma probabilidade, pelas proposições 2.5 e 1.7, teremos que: $\mathcal{P} = \dfrac{\mathcal{L}_\phi}{r}$, onde $\mathcal{P}$ é o operador de Ruelle-Perron-Frobenius por Lasota e Yorke associado a ν.

A questão que se impõe nesse momento é se existem probabilidades conformes.

Proposição 2.6 (Teorema de Leray-Schauder-Tychonoff)**.** *Sejam X um espaço localmente compacto e C um subconjunto não-vazio de X, tal que C é convexo e compacto. Se $T : C \to C$ é uma aplicação contínua então T tem um ponto fixo.*

Prova. Veja [RS72], página 151. ■

Utilizando o Teorema de Leray-Schauder-Tychonoff podemos mostrar que $\mathcal{L}_\phi^*$ sempre tem uma medida boreliana de probabilidade ν como autovetor, ademais, essa medida tem como autovalor associado $\int \mathcal{L}_\phi 1 d\nu$. Com efeito, seja $G : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_1$ definida por:

$$G(\mu) := \frac{\mathcal{L}_\phi^*(\mu)}{\int \mathcal{L}_\phi(1) d\mu}$$

G está bem definida e é contínua, como o espaço das medidas de probabilidade é um convexo e compacto, G tem um ponto fixo, ou seja, existe uma probabilidade ν tal que $\mathcal{L}_\phi^*(\nu) = \big(\int \mathcal{L}_\phi(1) d\nu\big) \cdot \nu$; notemos que $\mathcal{L}_\phi(1) \geq \max_{x \in X}\{\# f^{-1}(x)\} e^{\inf \phi}$, logo $\max_{x \in X}\{\# f^{-1}(x)\} e^{\inf \phi}$ é acotado superiormente pelo raio espectral de $\mathcal{L}_\phi^*$ e como $||\mathcal{L}_\phi|| \leq \max_{x \in X}\{\# f^{-1}(x)\} e^{\sup \phi}$ teremos que raio espectral de $\mathcal{L}_\phi^*$ é acotado superiormente por $\max_{x \in X}\{\# f^{-1}(x)\} e^{\sup \phi}$. O resultado anterior nos mostra que existe uma medida de referência; no entanto refinaremos a busca por uma medida de referência, estaremos interessados em encontrar um autovetor de $\mathcal{L}_\phi^*$ associado ao maior autovalor. A próxima proposição nos indica onde procurar um autovetor de $\mathcal{L}_\phi^*$

Proposição 2.7. *Sejam E e F espaços normados e $T \in \mathcal{L}(E, F)$, então* $\ker(T^* - rI) = Ran(T - rI)^\perp$*; onde $Ran(T - rI)^\perp$ é o anulador de $Ran(T - rI)$, isto é, $\{y' \in F' : y'(x) = 0,\ \forall x \in Ran(T - rI)\}$.*

Prova. $y' \in \ker(T^* - rI) \Leftrightarrow (T^* - rI)(y') = 0 \Leftrightarrow < (T^* - rI)y', x > = 0,\ \forall x \in E \Leftrightarrow < y', (T - rI)x >= 0,\ \forall x \in E \Leftrightarrow y' \in Ran(T - rI)^\perp$. ■

Seja λ o raio espectral de $\mathcal{L}_\phi^*$; se encontrarmos um $\psi \in \mathcal{C}(M)'$ tal que $0 \neq \psi \in Ran(\mathcal{L}_\phi - \lambda I)^\perp$ e que seja positivo, pelo teorema de representação de Riesz-Markov (veja [Rud70], página 40) existirá uma medida boreliana $\nu \neq 0$ associada a ϕ tal que: ν será finita e regular. Pela proposição anterior descobrimos que λ é um autovalor (obviamente o maior) e ν será um autovetor associado a λ.

Para mostrar a existência de tal ν precisamos apresentar uma das versões geométricas do Teorema de Hahn-Banach.

Proposição 2.8 (Teorema de Mazur)**.** *Seja E espaço normado real, $A, B \subset E$ conjuntos convexos disjuntos e não vazios. Se A é aberto então existe $\psi \in E'$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que:*

$$\psi(x) < \alpha \leq \psi(y),\ \forall x \in A \text{ e } y \in B.$$

Prova. Veja [Rud91], página 59. ■

Teorema 2.9. *Seja $T : \mathcal{C}(M, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}(M, \mathbb{R})$ um operador linear, positivo e contínuo, dotando $\mathcal{C}(M, \mathbb{R})$ da norma do* sup*. Então o raio espectral de T é autovalor de T^*, ademais, existe um autovetor não-nulo positivo associado.*

Prova. Denotaremos λ pelo raio espectral de T.

Afirmação: $\mathcal{C}(M,\mathbb{R})^+ \cap Ran(T-\lambda I) = \emptyset$.

Com efeito; suponhamos por absurdo que exista $T(g)-\lambda g \in \mathcal{C}(M;\mathbb{R})^+ \cap Ran(T-\lambda I)$. Como M é compacto e g é contínua, existirá $\epsilon > 0$ tal que $T(g) \geq (\lambda+\epsilon)g$. Como T é positivo, teremos que $T^n(g) \geq (\lambda+\epsilon)^n g$, $\forall n \in \mathbb{N}$; como $\lambda = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{||T^n||_{op}}$, teremos que $\lambda \geq \lambda + \epsilon$, absurdo.

Decorre da afirmação anterior que $\mathcal{C}(M;\mathbb{R})^- \cap Ran(T-\lambda I) = \emptyset$.

Notemos que $Ran(T-\lambda I)$ e $\mathcal{C}(M;\mathbb{R})^-$ são convexos disjuntos, pela proposição anterior existe $\psi \in \mathcal{C}(M)'$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\psi(x) < \alpha \leq \psi(y)$, $\forall x \in \mathcal{C}(M;\mathbb{R})^-$ e $y \in Ran(T-\lambda I)$.

Afirmação: $\psi \in Ran(T-\lambda I)^{\perp}$.

Com efeito; para provar a proposição usaremos fortemente que $Ran(T-\lambda I)$ é fechado para o produto por escalar. Seja $y \in Ran(T-\lambda I)$, então: $\psi(-y) \geq \alpha \Rightarrow \psi(y) \leq -\alpha$, ou seja, $\alpha \leq \psi(y) \leq -\alpha$, para todo $y \in Ran(T-\lambda I)$. Desse modo, para $n \in \mathbb{N}$ teremos: $\alpha \leq \psi(ny) \leq -\alpha \Rightarrow \dfrac{\alpha}{n} \leq \psi(y) \leq -\dfrac{\alpha}{n}$, passando ao limite temos $\psi(y) = 0$.

Pela afirmação anterior $\alpha \leq 0$, logo pelo modo como foi criado ψ ele será positivo, não nulo e pela proposição 2.7 temos $T^*(\psi) = \lambda\psi$. ■

Aplicando o teorema anterior a $\mathcal{L}_\phi$, via Riesz-Markov, encontramos a medida procurada ν.

2.1 Formalismo Termodinâmico de aplicações não-uniformemente expansoras

Essa seção tem por objetivo responder as perguntas do início da seção anterior num contexto mais específico. Inicialmente suporemos que N é um espaço métrico de Besicovitch compacto conexo com dimensão topológica d, $M \subset N$ será um compacto, $f : M \to M$ será um homeomorfismo local e assumiremos que existe uma função limitada $x \mapsto L(x)$ tal que, qualquer que seja $x \in X$ existe uma vizinhança aberta U_x de x com $f_x : U_x \to f(U_x)$ invertível e $d(f_x^{-1}(y), f_x^{-1}(z)) \leq L(x)d(y,z)$. Pelo teorema A.1 já sabemos que $\#f^{-1}(x) < +\infty$, para $x \in M$, e que $G_f : M \xrightarrow[x \mapsto \#f^{-1}(x)]{} \mathbb{N}$ é continua, logo assume mínimo e máximo, k_1 e k_2 respectivamente. Sendo assim: seja $h_n(f) := \min G_{f^n}(M)$, para $n \geq 1$, e consideremos o limite

$$h(f) := \lim_{n\to\infty} \inf \frac{1}{n} \log h_n(f).$$

O limite anterior está bem definido, pois, $k_1^n \leq h_n(f) \leq k_2^n$. $h(f)$ nos dá uma informação sobre o comportamento assintótico do número de pré-imagens, se todo ponto de M tiver o mesmo número de pré-imagens (isso ocorre por exemplo se M for conexa) então $h(f) = \log deg(f)$. Assumiremos que todo ponto de M tem pelo menos $e^{h(f)}$ pré-imagens por f isso não é pedir muito pois para um iterado suficientemente grande de f isso ocorrerá.

Também assumiremos que existem constantes $\sigma > 1$ e $L \geq 1$, e uma região aberta $\mathcal{A} \subset M$ tal que:

(H1) $L(x) \leq L$ para todo $x \in \mathcal{A}$ e $L(x) \leq \sigma^{-1}$ para todo $x \in M \setminus \mathcal{A}$; além disso, L está próximo de 1.

(H2) Existe $k_0 \geq 1$ e uma cobertura $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_{k_0}\}$ de M por domínios de injetividade de f, tal que $\mathcal{A}$ pode ser coberto por $q < e^{h(f)}$ elementos de $\mathcal{P}$.

Sobre o potencial $\phi : M \to \mathbb{R}$ assumiremos que ϕ é $\alpha-$Hölder contínuo de baixa variação; mais precisamente:

(P) $\sup \phi - \inf \phi < h(f) - \log q$.

A condição (H1) nos diz que ocorre expansão e contração em M da seguinte forma: f é uniformemente expansora fora de $\mathcal{A}$ e não contrai muito dentro de $\mathcal{A}$. A condição (H2) nos garante que todo ponto tem ao menos uma pré-imagem na região uniformemente expansora. Notemos que a condição (P) é uma condição aberta sobre ϕ, em relação a norma Hölder, e é satisfeita por funções constantes.

Nesse contexto em [VV10] é provado que:

Teorema A: *Seja $f : M \to M$ um homeomorfismo local com inversa Lipschitz contínua e $\phi : M \to \mathbb{R}$ um potencial Hölder contínuo que satisfaz (H1), (H2) e (P). Então, há um número finito de estados de equilíbrio ergódicos $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ de f com respeito a ϕ e qualquer estado de equilíbrio é uma combinação linear convexa de $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$. Além disso, se a aplicação f for topologicamente exata então o estado de equilíbrio é único e é uma probabilidade exata.*

O L, limitante superior das constantes de Lipschitz, é precisado em [VV10] na página 562, a condição a qual ele está sujeito está relacionado à garantia da existência de infinitos tempos hiperbólicos. Nesse mesmo artigo é provado que a pressão topológica de f com respeito a ϕ é igual ao logaritmo do raio espectral de $\mathcal{L}_\phi$; também é provado que todos os estados de equilíbrio ergódicos μ_i são absolutamente contínuos em relação a uma medida conforme ν com propriedades "boas"(veja Teorema B de [VV10]); essa medida é uma auto-medida do adjunto do operador de Ruelle-Perron-Frobenius associado ao raio espectral, na seção anterior provamos que sempre existe uma probabilidade desse tipo. Quando f é topologicamente exata podemos tomar no Teorema A qualquer probabilidade que seja uma auto-medida do adjunto do operador de Ruelle-Perron-Frobenius associado ao raio espectral.

Nosso objetivo nesse capítulo é estudar um contexto similar a [VV10], de certo modo mais geral, demonstrando propriedades de uma certa medida: decaimento de correlações, teorema central do limite, estabilidade estatística e estabilidade espectral; tais medidas serão estados de equilíbrio se também estivermos no contexto de [VV10].

M será uma variedade riemanniana $d-$dimensional compacta conexa, $f : M \to M$ será um homeomorfismo local e assumiremos que existe uma função limitada $x \mapsto L(x)$ tal que, qualquer que seja $x \in X$ existe uma vizinhança aberta U_x de x com $f_x : U_x \to f(U_x)$ invertível e $d(f_x^{-1}(y), f_x^{-1}(z)) \leq L(x)d(y,z)$. Inicialmente definamos uma constante de Hölder local: se $g : M \to \mathbb{R}$ é $\alpha-$Hölder então

$$|g|_{\alpha,\beta} := \sup_{0<d(x,y)<\beta} \frac{|g(x)-g(y)|}{d(x,y)^\alpha},$$

ou seja, $|g|_{\alpha,\delta}$ é a menor constante $C \geq 0$ tal que $|g(x) - g(y)| \leq Cd(x,y)^\alpha$ para todos $x, y \in M$ com $d(x,y) < \beta$. A partir desse momento fixemos um $\delta > 0$ tal que se $d(x,y) < \delta$ então para cada $x_i \in f^{-1}(x)$ existe um único $y_i \in f^{-1}(y)$ com $x_i, y_i \in U_z$, vizinhança aberta de algum $z \in M$, tal que $f_z : U_z \to f(U_z)$ invertível e $d(f_z^{-1}(a), f_z^{-1}(b)) \leq L(z)d(a,b), \forall a, b \in U_z$; notemos que tal δ existe pelo corolário A.3. Também assumiremos que existem constantes $\sigma > 1$ e $L \geq 1$, e $\mathcal{A} \subset M$ (não exigiremos que $\mathcal{A}$ seja uma região aberta) tal que:

(H1) $L(x) \leq L$ para todo $x \in \mathcal{A}$ e $L(x) \leq \sigma^{-1}$ para todo $x \in M \setminus \mathcal{A}$, e L está próximo de 1 (à posteriori será precisado quanto)

(H2') Existe $q < deg(f)$ tal que: para todo $x \in M$, $\#\{f^{-1}(x) \cap \mathcal{A}\} \leq q$

Sobre o potencial $\phi : M \to \mathbb{R}$ assumiremos que ϕ é $\alpha-$Hölder contínuo com variação baixa e norma Hölder local controlada; mais precisamente, existe um $\varepsilon(f) > 0$ (a ser precisado a posteriori) tal que:

$$\text{(P')} \sup \phi - \inf \phi < \varepsilon(f) \quad e \quad |e^{\phi}|_{\alpha,\delta} < \varepsilon(f) e^{\inf \phi}$$

Notemos que para cada dinâmica, f, δ não é único, podemos diminuí-lo por exemplo, assim a exigência da condição (P') é que exista um $\delta > 0$ em que há um controle sobre as pré-imagens e que, em relação a tal δ, e^{ϕ} tem constante Hölder local limitada por $\varepsilon(f)e^{\inf \phi}$; se a norma Hölder global de e^{ϕ} já satisfaz essa limitação então, para qualquer δ, a constante Hölder local satisfaz (P'). A hipótese (H2') é equivalente a exigirmos que todo ponto $x \in M$ tenha pelo menos uma pré-imagem em $M \setminus \mathcal{A}$ (região expansora).

A diferença entre esse contexto e o de [VV10] é que estamos trabalhando com variedades compactas conexas (que é um espaço métrico de Besicovitch), a hipótese (H2') a princípio é mais fraca que a (H2) exigida em [VV10], porém estamos exigindo um controle maior sobre o potencial com a hipótese (P').

Exemplo 2.10. *Uma forma de se obter exemplos de dinâmicas não triviais que satisfazem as hipóteses (H1) e (H2) (chamamos de trivial o caso em que a dinâmica é expansora, pois satisfaz por excelência as hipóteses) é através da bifurcação de dinâmicas expansoras. Seja M uma variedade unidimensional, $f_0 : M \to M$ expansora, logo f é topologicamente transitiva e tem muitos pontos periódicos, a menos de tomar um iterado podemos supor sem perda que f tem um ponto fixo p, como tal ponto é hiperbólico podemos tomar uma vizinhança dele que não intersecte nenhum outro ponto fixo. Sendo assim, podemos fazer uma pertubação $\mathcal{C}^r$ nessa vizinhança de modo a obtermos uma aplicação $f_1 : M \to M$ topologicamente transitiva que em p tem derivada em módulo igual a 1 e fora de uma vizinhança é exatamente igual a f_0, ou seja, expansora. Se $Df_1(p) = 1$, usando uma bifurcação do tipo saddle-node obtemos um aberto de dinâmicas não-triviais $f : M \to M$ que satisfazem as hipóteses (H1) e (H2); se $Df_1(p) = -1$ usamos então uma bifurcação do tipo flip obtendo mais uma vez um aberto de dinâmicas não-triviais que satisfazem as hipóteses (H1) e (H2). Como $\phi \equiv 0$ satisfaz (P'), podemos tomar um aberto de potenciais próximos de ϕ tal que f e ϕ satisfazem (H1), (H2) e (P').*

Exemplo 2.11. *Um caso particular interessante do exemplo anterior é a aplicação de Maneville-Pomeau e a família de potenciais $\phi_t := -t \log |Df|$. Para cada $\alpha \in (0,1)$, seja $f_\alpha : [0,1] \to [0,1]$ dado por*

$$f := \begin{cases} x(1 + 2^{\alpha} x^{\alpha}), & \textit{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ 2x - 1, & \textit{se } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

f_α é um $\mathcal{C}^{1+\alpha}-$homeomorfismo local (desde que identifiquemos $[0,1]$ com a variedade S^1). $Df_\alpha(x) > 1$ para todo $x \in (0,1]$, logo f_α expande em $(0,1]$, já em 0 temos $f_\alpha(0) = 0$ e $Df_\alpha(0) = 1$ e assim f_α é um exemplo não-trivial de dinâmica que satisfaz (H1) e (H2'). A família $\phi_{\alpha,t} := -t\log|Df_\alpha|$ de potenciais $\mathcal{C}^\alpha$ satisfazem a hipótese (P') desde que tomemos t numa pequena vizinhança do 0. Aplicando uma bifurcação, como no exemplo anterior, teremos que existe um aberto de dinâmicas $f : [0,1] \to [0,1]$ que satisfazem as hipóteses (H1) e (H2) e para qual $\phi_{\alpha,t}$ satisfaz a hipótese (P') (desde que tomemos t próximo do 0).

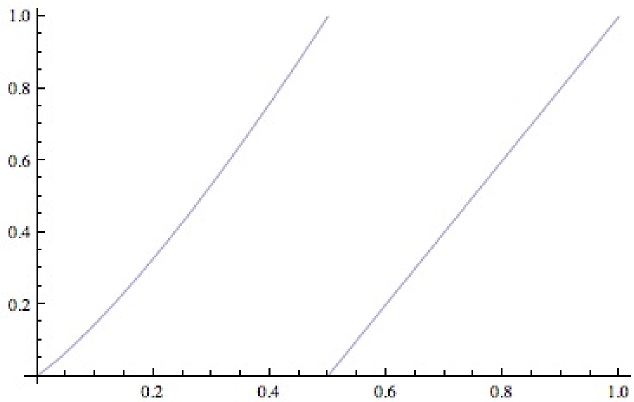

Figura 2.1: Maneville-Pomeau

2.1.1 Gap espectral em $\mathcal{C}^\alpha(M, \mathbb{R})$

Definição 2.12. *Dizemos que $\psi : M \to \mathbb{R}$ é $(C,\alpha)-$Hölder contínua em bolas de raio β se:*

$$|\psi(x) - \psi(y)| \leq Cd(x,y)^\alpha,$$

para todo $y \in B(x,\beta)$ e $x \in M$.

Antes de definirmos o cone que nos será útil para provar o gap espectral apresentaremos dois lemas sobre o controle da norma Hölder local; o primeiro lema nos diz o que ocorre com essa norma quando aumentamos as bolas que analisaremos a uma certa taxa, nesse lema veremos a necessidade de M ser uma variedade riemanniana, o segundo lema nos dá um controle sobre norma Hölder global quando lidamos com funções localmente Hölder, nesse lema veremos a necessidade de M ser conexa.

Lema 2.13. *Dado $\beta > 0$; se $g : M \to \mathbb{R}$ é $(C,\alpha)-$Hölder contínua em bolas de raio β então g é $(C(1+r^\alpha),\alpha)-$Hölder contínua em bolas de raio $(1+r)\beta$, para todo $0 \leq r \leq 1$.*

Prova. Seja $y, z \in M$ tal que $d(z,y) < (1+r)\beta$; se $d(z,y) < \beta$ então $|g(z) - g(y)| \leq Cd(z,y)^\alpha \leq C(1+r^\alpha)d(z,y)^\alpha$. Suponhamos então que $\beta \leq d(z,y) < (1+r)\beta$. Como a métrica de M é induzida pelas geodésicas, existe $w \in M$ tal que $d(z,w) = \beta$ e $d(w,y) < r\beta \leq \beta$. Sendo assim:

$$|g(z)-g(y)| \leq |g(z)-g(w)|+|g(w)-g(y)| \leq Cd(z,w)^\alpha + Cd(w,y)^\alpha \leq C(1+r^\alpha)d(z,y)^\alpha$$

o que prova o lema. ∎

Lema 2.14. *Dado $\beta > 0$; existe $m \geq 1$ (dependendo somente de β) tal que, se $g : M \to \mathbb{R}$ é $(C,\alpha)-$Hölder contínua em bolas de raio β, então g é $(Cm,\alpha)-$Hölder contínua.*

Prova. Seja $\mathcal{B} := \{B(x_i, \frac{\beta}{3})\}_{i=1,\ldots,n}$ uma cobertura finita de M. Como M é conexa, podemos supor sem perda de generalidade que $x_j \in B(x_{j+1}, \beta)$ para todo $j = 1, \ldots, n-1$. Se $d(x,w) \geq \beta$, então:

$$|g(x) - g(w)| \leq (n+1)C\beta^\alpha \leq C(n+1)d(x,w)^\alpha.$$

Sendo assim podemos tomar $m := n+1$. ∎

Passemos então à definição do cone:

$$\Lambda_{\kappa,\beta} := \{g \in \mathcal{C}^\alpha(M,\mathbb{R}) : g > 0 \text{ e } \frac{|g|_{\alpha,\beta}}{\inf g} \leq \kappa\}.$$

Notemos que $\Lambda_{\kappa,\beta}$ é fechado para o produto por um número estritamente positivo. Para provar que é fechado para somas basta observamos que dados a, b, c e d números reais estritamente positivos tais que $\frac{a}{b} \leq \kappa$ e $\frac{c}{d} \leq \kappa$ então $\frac{a+b}{c+d} \leq \kappa$, e também teremos que $\overline{\Lambda_{\kappa,\beta}} \cap -\overline{\Lambda_{\kappa,\beta}} = \{0\}$; sendo assim $\Lambda_{\kappa,\beta}$ é realmente um cone nos moldes tratados na seção sobre "Cones e métricas projetivas".

Nesse momento podemos precisar $\varepsilon(f)$ presente na condição (P'). Fixemos também m como inteiro positivo dado pelo lema 2.14 associada ao δ fixado. Sendo assim, assumiremos que $L \leq 2$ e:

$$e^{\varepsilon(f)} \cdot \Big(\frac{(deg(f)-q)\sigma^{-\alpha} + qL^\alpha[1+(L-1)^\alpha]}{deg(f)}\Big) +$$
$$+\,\varepsilon(f)\Big(\frac{(deg(f)-q)\sigma^{-\alpha} + qL^\alpha[1+(L-1)^\alpha]}{deg(f)}\Big)[1 + m\,\mathrm{diam}(M)^\alpha] < 1$$

Notemos que $\varepsilon(f) < \log deg(f) - \log q$, logo, a hipótese (P') implica a hipótese (P).

Teorema 2.15 (Invariância de cone). *Existe* $0 < \hat{\lambda} < 1$ *tal que* $\mathcal{L}_\phi(\Lambda_{\kappa,\delta}) \subset \Lambda_{\hat{\lambda}\kappa,\delta}$*, para todo* $\kappa \geq 1$.

Prova. Seja $g \in \Lambda_{\kappa,\delta}$ e $x, w \in X$ tal que $d(x,w) < \delta$. Então:

$$\begin{aligned} \frac{|\mathcal{L}_\phi g(x) - \mathcal{L}_\phi g(w)|}{\inf \mathcal{L}_\phi g \cdot d(x,w)^\alpha} &\leq \frac{\sum_{j=1}^{deg(f)} |g(x_j)e^{\phi(x_j)} - g(w_j)e^{\phi(w_j)}|}{deg(f) \cdot e^{\inf \phi} \inf g \cdot d(x,w)^\alpha} \\ &\leq \frac{\sum_{j=1}^{deg(f)} |e^{\phi(x_j)}\big(g(x_j) - g(w_j)\big)|}{deg(f) \cdot e^{\inf \phi} \inf g \cdot d(x,w)^\alpha} \qquad (2.1) \\ &+ \frac{\sum_{j=1}^{deg(f)} |g(w_j)\big(e^{\phi(x_j)} - e^{\phi(w_j)}\big)|}{deg(f) \cdot e^{\inf \phi} \inf g \cdot d(x,w)^\alpha} \qquad (2.2) \end{aligned}$$

Inicialmente iremos estimar (2.1). Sabemos que $|g|_{\alpha,\delta} \leq \kappa \inf g$, logo pelo lema 2.13 g é $(\kappa \inf g\big(1 + (L-1)^\alpha\big), \alpha)-$Hölder contínua em bolas de raio $L\delta$. Sendo assim (2.1) é limitado superiormente por:

$$\frac{e^{\sup \phi}}{e^{\inf \phi}} \cdot \frac{\sum_{j=q+1}^{deg(f)} \sigma^{-\alpha}\kappa \inf g d(x,w)^\alpha + \sum_{j=1}^{q} \kappa \inf g\big(1 + (L-1)^\alpha\big)L^\alpha d(x,w)^\alpha}{deg(f) \inf g \cdot d(x,w)^\alpha} \leq$$

$$\leq \frac{e^{\sup \phi}}{e^{\inf \phi}}\Big(\frac{(deg(f) - q)\sigma^{-\alpha} + qL^\alpha[1 + (L-1)^\alpha]}{deg(f)}\Big)\kappa <$$

$$< e^{\varepsilon(f)} \cdot \Big(\frac{(deg(f) - q)\sigma^{-\alpha} + qL^\alpha[1 + (L-1)^\alpha]}{deg(f)}\Big)\kappa.$$

Agora estimemos (2.2). Sabemos que e^ϕ é $(C, \alpha)-$Hölder contínua em bolas de raio δ, logo e^ϕ é $(||e^\phi||_{\alpha,\delta}\big(1 + (L-1)^\alpha\big), \alpha)-$Hölder contínua em bolas de raio $L\delta$; já pelo lema 2.14 temos que $\sup g - \inf g \leq m|g|_{\alpha,\delta} \operatorname{diam}(M)^\alpha$, não esqueçamos que m só depende de δ. Sendo assim (2.2) é limitado superiormente por:

$$\frac{\sup g}{\inf g} \cdot \frac{\sum_{j=q+1}^{deg(f)} \sigma^{-\alpha}|e^\phi|_{\alpha,\delta} d(x,w)^\alpha + \sum_{j=1}^{q} |e^\phi|_{\alpha,\delta}\big(1 + (L-1)^\alpha\big)L^\alpha d(x,w)^\alpha}{deg(f) e^{\inf \phi} d(x,w)^\alpha} \leq$$

$$\leq \frac{\inf g + m|g|_{\alpha,\delta} diam(M)^\alpha}{\inf g} \cdot \frac{|e^\phi|_{\alpha,\delta}}{e^{\inf \phi}} \cdot \Big(\frac{(deg(f) - q)\sigma^{-\alpha} + qL^\alpha[1 + (L-1)^\alpha]}{deg(f)}\Big) <$$

$$< \varepsilon(f)\Big(\frac{(deg(f) - q)\sigma^{-\alpha} + qL^\alpha[1 + (L-1)^\alpha]}{deg(f)}\Big)[1 + m\kappa \operatorname{diam}(M)^\alpha] \leq$$

$$\leq \varepsilon(f)\Big(\frac{(deg(f) - q)\sigma^{-\alpha} + qL^\alpha[1 + (L-1)^\alpha]}{deg(f)}\Big)[1 + m \operatorname{diam}(M)^\alpha]\kappa.$$

Juntando as duas estimativas teremos que:

$$|\mathcal{L}_\phi g|_{\alpha,\delta} < \Bigg[e^{\varepsilon(f)} \cdot \Big(\frac{(deg(f) - q)\sigma^{-\alpha} + qL^\alpha[1 + (L-1)^\alpha]}{deg(f)}\Big) +$$

$$+ \varepsilon(f)\Big(\frac{(deg(f) - q)\sigma^{-\alpha} + qL^\alpha[1 + (L-1)^\alpha]}{deg(f)}\Big)\Big(1 + m \operatorname{diam}(M)^\alpha\Big)\Bigg]\kappa \inf(\mathcal{L}_\phi g);$$

assim pelas nossas escolhas de L e $\varepsilon(f)$, basta tomarmos

$$\hat{\lambda} := e^{\varepsilon(f)} \cdot \Big(\frac{(deg(f)-q)\sigma^{-\alpha} + qL^{\alpha}[1+(L-1)^{\alpha}]}{deg(f)}\Big) +$$

$$+ \varepsilon(f)\Big(\frac{(deg(f)-q)\sigma^{-\alpha} + qL^{\alpha}[1+(L-1)^{\alpha}]}{deg(f)}\Big)[1 + m\,\mathrm{diam}(M)^{\alpha}].$$

■

Nosso próximo passo é mostrar que a imagem de $\Lambda_{\kappa,\beta}$ por $\mathcal{L}_{\phi}$ tem diâmetro finito. Para isso primeiro calculemos uma fórmula explícita para a métrica projetiva associada a $\Lambda_{\kappa,\beta}$.

Lema 2.16. *Seja θ_{κ} a métrica projetiva associada a $\Lambda_{\kappa,\beta}$. Então: $\theta_{\kappa}(\varphi,\psi) = \log \frac{B_{\kappa}(\varphi,\psi)}{A_{\kappa}(\varphi,\psi)}$, onde*

$$A_{\kappa}(\varphi,\psi) = \inf_{0<d(x,y)<\delta,\, z\in M} \frac{\kappa d(x,y)^{\alpha}\psi(z) - \big(\psi(x)-\psi(y)\big)}{\kappa d(x,y)^{\alpha}\varphi(z) - \big(\varphi(x)-\varphi(y)\big)},$$

e

$$B_{\kappa}(\varphi,\psi) = \sup_{0<d(x,y)<\delta,\, z\in M} \frac{\kappa d(x,y)^{\alpha}\psi(z) - \big(\psi(x)-\psi(y)\big)}{\kappa d(x,y)^{\alpha}\varphi(z) - \big(\varphi(x)-\varphi(y)\big)}$$

Prova. Notemos inicialmente que $\inf \frac{\psi}{\varphi} \cdot \varphi \leq \psi$. Seja $A > 0$ tal que $A\varphi \preceq \psi$, por definição

$$\psi(x) - A\varphi(x) \geq 0, \forall x \in M$$

e

$$||\psi - A\varphi||_{\alpha,\delta} \leq \kappa \inf(\psi - A\varphi);$$

logo

$$A \leq \inf_{0<d(x,y)<\delta,\, z\in M} \frac{\kappa d(x,y)^{\alpha}\psi(z) - \big(\psi(x)-\psi(y)\big)}{\kappa d(x,y)^{\alpha}\varphi(z) - \big(\varphi(x)-\varphi(y)\big)}.$$

Seja $x_0 \in M$ tal que $\inf \frac{\psi}{\varphi} = \frac{\psi(x_0)}{\varphi(x_0)}$, como

$$\frac{\kappa d(x-x_0)^{\alpha}\psi(x_0) - \big(\psi(x)-\psi(x_0)\big)}{\kappa d(x-x_0)^{\alpha}\varphi(x_0) - \big(\varphi(x)-\varphi(x_0)\big)} \leq \frac{\psi(x_0)}{\varphi(x_0)}$$

teremos que

$$A_{\kappa}(\varphi,\psi) = \inf_{0<d(x,y)<\delta,\, z\in M} \frac{\kappa d(x-y)^{\alpha}\psi(z) - \big(\psi(x)-\psi(y)\big)}{\kappa d(x-y)^{\alpha}\varphi(z) - \big(\varphi(x)-\varphi(y)\big)}.$$

Passemos ao resultado sobre B_{κ}, a prova é análoga a anterior. Notemos inicialmente que $\psi \leq \sup \frac{\psi}{\varphi} \cdot \varphi$. Seja $B > 0$ tal que $\psi \preceq B\varphi$, por definição

$$B\varphi(x) - \psi(x) \geq 0, \forall x \in M$$

e

$$||B\varphi - \psi||_{\alpha,\delta} \le \kappa \inf(B\varphi - \psi);$$

logo

$$B \ge \sup_{0<d(x,y)<\delta,\, z\in M} \frac{\kappa d(x,y)^\alpha \psi(z) - \big(\psi(x)-\psi(y)\big)}{\kappa d(x,y)^\alpha \varphi(z) - \big(\varphi(x)-\varphi(y)\big)}.$$

Seja $y_0 \in M$ tal que $\sup \frac{\psi}{\varphi} = \frac{\psi(y_0)}{\varphi(y_0)}$, como

$$\frac{\kappa d(x,y_0)^\alpha \psi(y_0) - \big(\psi(x)-\psi(y_0)\big)}{\kappa d(x,y_0)^\alpha \varphi(y_0) - \big(\varphi(x)-\varphi(y_0)\big)} \ge \frac{\psi(y_0)}{\varphi(y_0)}$$

teremos que

$$B_\kappa(\varphi,\psi) = \sup_{0<d(x,y)<\delta, z\in M} \frac{\kappa d(x,y)^\alpha \psi(z) - \big(\psi(x)-\psi(y)\big)}{\kappa d(x,y)^\alpha \varphi(z) - \big(\varphi(x)-\varphi(y)\big)}.$$

■

Proposição 2.17. *Dado $0 < \hat\lambda < 1$, o cone $\Lambda_{\hat\lambda\kappa,\beta}$ tem diâmetro finito em relação a métrica projetiva associada a $\Lambda_{\kappa,\beta}$.*

Prova. Seja m o inteiro dado pelo lema 2.14 associado a β. Seja $\varphi \in \Lambda_{\hat\lambda\kappa,\beta}$, por definição $|\varphi|_{\alpha,\beta} \le \hat\lambda\kappa \inf\varphi$ e assim:

$$\sup\varphi \le \inf\varphi + m|\varphi|_{\alpha,\beta}\,\mathrm{diam}(M)^\alpha \le [1 + m\hat\lambda\kappa\,\mathrm{diam}(M)^\alpha]\inf\varphi.$$

Tomemos agora $\psi \in \Lambda_{\hat\lambda\kappa,\beta}$, pelo lema anterior

$$\begin{aligned}\theta_\kappa(\varphi,\psi) &\le \log\Big(\frac{\kappa\sup\varphi + \hat\lambda\kappa\inf\varphi}{\kappa\inf\varphi - \hat\lambda\kappa\inf\varphi}\cdot\frac{\kappa\sup\psi + \hat\lambda\kappa\inf\psi}{\kappa\inf\psi - \hat\lambda\kappa\inf\psi}\Big)\\ &\le 2\log\Big(\frac{1 + m\hat\lambda\kappa\,\mathrm{diam}(M)^\alpha + \hat\lambda}{1-\hat\lambda}\Big);\end{aligned}$$

de onde decorre a proposição. ■

Pelos resultados anteriores, para $\kappa \ge 1$, $\Lambda_{\kappa,\delta}$ é um cone invariante por $\mathcal{L}_\phi$ e sua imagem por $\mathcal{L}_\phi$ tem diâmetro finito em relação a métrica projetiva associada a $\Lambda_{\kappa,\delta}$; sendo assim podemos usar o teorema B.4. Passemos então as propriedades espectrais de $\mathcal{L}_\phi$. Seja ν uma probabilidade conforme associada ao raio espectral de $\mathcal{L}_\phi$ e $\tilde{\mathcal{L}}_\phi := \frac{\mathcal{L}_\phi}{\lambda}$, onde λ é o raio espectral de $\mathcal{L}_\phi$.

Proposição 2.18. *Em $\mathcal{C}^\alpha(M,\mathbb{R})$ existe um único h tal que $\mathcal{L}_\phi h = \lambda h$ e $\int h d\nu = 1$. Ademais; $h = \lim_{n\to+\infty} \tilde{\mathcal{L}}_\phi^n(1)$, $0 < h$ e $\frac{|h|_\alpha}{\inf h} \le m$.*

Prova. Seja $\kappa \geq 1$, $\varphi, \psi \in \Lambda_{\kappa,\delta}$ e θ_+ a métrica projetiva associada ao cone das funções positivas. Pelo teorema B.4, para $n, k \geq 1$ temos:

$$\theta_+\big(\tilde{\mathcal{L}}_\phi^{n+k}(\varphi), \tilde{\mathcal{L}}_\phi^n(\psi)\big) \leq \theta_\kappa\big(\tilde{\mathcal{L}}_\phi^{n+k}(\varphi), \tilde{\mathcal{L}}_\phi^n(\psi)\big) \leq \Delta\tau^{n-1}, \tag{2.3}$$

onde $0 < \tau < 1$ e Δ é o $\theta_\kappa-$diâmetro do cone $\Lambda_{\hat{\lambda}\kappa,\delta}$. Notemos que $\big(\tilde{\mathcal{L}}_\phi^n(\varphi)\big)_{n\geq 1}$ é Cauchy em relação a θ_+, já sabemos que θ_+ é completa (veja exemplo B.3), logo existe $h_\varphi \in C_+$ tal que $\tilde{\mathcal{L}}_\phi^n(\varphi) \xrightarrow{\theta_+} h_\varphi$ e $\int h_\varphi d\nu = \int \varphi d\nu$. Como $\int \tilde{\mathcal{L}}_\phi^n(\varphi) d\nu = \int \varphi d\nu$ podemos aplicar a proposição B.1 na norma do sup e na semi-norma da integral e assim $\tilde{\mathcal{L}}_\phi^n(\varphi) \xrightarrow{\mathcal{C}^0} h_\varphi$, desse modo $\mathcal{L}_\phi h_\varphi = \lambda h_\varphi$. Como $\mathcal{L}_\phi^n(\varphi) \in \Lambda_{\kappa,\delta}$ teremos que $h_\varphi \in \Lambda_{\kappa,\delta}$, pelo lema 2.14 então $\frac{|h_\varphi|_\alpha}{\inf h_\varphi} \leq \kappa m$.

Mostremos agora que $\ker(\mathcal{L}_\phi - \lambda I) \cap \mathcal{C}^\alpha(M, \mathbb{R})$ tem dimensão 1. Seja $h := \lim\limits_{n\to+\infty} \tilde{\mathcal{L}}_\phi^n(1)$ e $u \in \ker(\mathcal{L}_{\phi|\mathcal{C}^\alpha(M,\mathbb{R})} - \lambda I) \cap \Lambda_{\kappa,\delta}$. Por (2.3) existe $t_1 > 0$ tal que $t_1 u = h$; desse modo, pela discussão anterior, para toda $\varphi \in \Lambda_{\kappa,\delta}$ temos $\tilde{\mathcal{L}}_\phi^n(\varphi) \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \int \varphi d\nu \cdot h$. Dado $v \in \ker(\mathcal{L}_{\phi|\mathcal{C}^\alpha(M,\mathbb{R})} - \lambda I)$, seja $B := \max\{1 + |\inf v|, \big||v|_{\alpha,\delta} - \inf v\big|\}$, então $v = (v+B) - B$ com B e $v + B$ elementos de $\Lambda_{1,\delta}$; logo $v = \lim \tilde{\mathcal{L}}_\phi^n(v+B) - \lim \tilde{\mathcal{L}}_\phi^n(B) = \int v d\nu \cdot h$, vemos então que $\ker(\mathcal{L}_{\phi|\mathcal{C}^\alpha(M,\mathbb{R})} - \lambda I) = \{th : t \in \mathbb{R}\}$. Em particular existe um único $h \in \mathcal{C}^\alpha(M, \mathbb{R})$ tal que $\mathcal{L}_\phi h = \lambda h$ e $\int h d\nu = 1$, ademais, $h = \lim\limits_{n\to+\infty} \tilde{\mathcal{L}}_\phi^n(1)$ e $h \in \Lambda_{1,\delta}$. ■

O próximo resultado nos dá uma informação sobre a velocidade de convergência de $\tilde{\mathcal{L}}_\phi^n(\varphi)$ para h na norma Hölder.

Corolário 2.19. *Sejam $\kappa \geq 1$, $\varphi \in \Lambda_{\kappa,\delta}$ tal que $\int \varphi d\nu = 1$, e h o $\theta_\kappa-$limite de $\varphi_n := \tilde{\mathcal{L}}_\phi^n(\varphi)$. Então, φ_n converge exponencialmente rápido para h na norma $\alpha-$Hölder.*

Prova. Inicialmente estudemos a norma do sup. Assim como na proposição anterior, usemos a proposição B.1 e a estimativa (2.3) na norma do sup e na semi-norma da integral encontrando um $0 < \tau < 1$ e Δ tal que:

$$||\varphi_n - h||_0 \leq e^\Delta ||h||_0 \Delta\tau^{n-1}, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.4}$$

Passemos as estimativas da constante de Hölder local:

Afirmação 1: $B_\kappa(h, \varphi_n) \geq 1$.

Com efeito; se $\varphi_n \equiv h$ teremos que $B_\kappa(h, \varphi_n) = 1$, suponhamos então que existe um $z_n \in M$ tal que $\varphi_n(z_n) \neq h(z_n)$. Tomemos $x_0 \in M$ tal que $\varphi_n(x_0) - h(x_0) = \min\{\varphi_n(w) - h(w)\}$. Se $w \neq x_0$ nós teremos:

$$\frac{\varphi_n(w) - \varphi_n(x_0)}{d(w, x_0)^\alpha} \geq \frac{h(w) - h(x_0)}{d(w, x_0)^\alpha}.$$

Como consequência; se $\varphi_n(z_n) > h(z_n)$

$$B_\kappa(h,\varphi_n) \geq \frac{\varphi(z_n) - \big(h(w) - h(x_0)\big)/\kappa d(w,x_0)^\alpha}{h(z_n) - \big(\varphi_n(w) - \varphi_n(x_0)\big)/\kappa d(w,x_0)^\alpha} \geq 1,$$

se $\varphi_n(z_n) < h(z_n)$

$$B_\kappa(h,\varphi_n) \geq \frac{h(z_n) - \big(\varphi_n(w) - \varphi_n(x_0)\big)/\kappa d(w,x_0)^\alpha}{\varphi_n(z_n) - \big(h(w) - h(x_0)\big)/\kappa d(w,x_0)^\alpha} \geq 1.$$

Afirmação 2: $A_\kappa(h,\varphi_n) \leq 1$.

Com efeito; se $\varphi_n \equiv h$ teremos que $A_\kappa(h,\varphi_n) = 1$, suponhamos então que existe um $z_n \in M$ tal que $\varphi_n(z_n) \neq h(z_n)$. Tomemos $x_0 \in M$ tal que $\varphi_n(x_0) - h(x_0) = \min\{\varphi_n(w) - h(w)\}$. Se $w \neq x_0$ nós teremos:

$$\frac{\varphi_n(w) - \varphi_n(x_0)}{d(w,x_0)^\alpha} \geq \frac{h(w) - h(x_0)}{d(w,x_0)^\alpha}.$$

Como consequência; se $\varphi_n(z_n) > h(z_n)$

$$A_\kappa(h,\varphi_n) \leq \frac{h(z_n) - \big(\varphi_n(w) - \varphi_n(x_0)\big)/\kappa d(w,x_0)^\alpha}{\varphi_n(z_n) - \big(h(w) - h(x_0)\big)/\kappa d(w,x_0)^\alpha} \leq 1,$$

se $\varphi_n(z_n) < h(z_n)$

$$A_\kappa(h,\varphi_n) \leq \frac{\varphi(z_n) - \big(h(w) - h(x_0)\big)/\kappa d(w,x_0)^\alpha}{h(z_n) - \big(\varphi_n(w) - \varphi_n(x_0)\big)/\kappa d(w,x_0)^\alpha} \leq 1.$$

Assim; pelas afirmações 1 e 2, e a estimativa (2.3) teremos que

$$e^{-\Delta\tau^n} \leq A_\kappa(h,\varphi_n) \leq 1 \leq B_\kappa(h,\varphi_n) \leq e^{\Delta\tau^n}, \forall n \in \mathbb{N};$$

logo, para $0 < d(x,y) < \delta$

$$e^{\Delta\tau^n}\frac{\big(h(x) - h(y)\big)}{\kappa d(x,y)^\alpha} - \frac{\big(\varphi_n(x) - \varphi_n(y)\big)}{\kappa d(x,y)^\alpha} \leq e^{\Delta\tau^n}\varphi_n(z) - h(z).$$

Como $\int \varphi_n d\nu = 1$ e φ_n é uma função contínua, existe $x_n \in M$ tal que $\varphi_n(x_n) = 1$, logo $\inf \varphi_n \leq 1$, pelo mesmo motivo $\inf h \leq 1$. Pela proposição anterior sabemos que $h \in \Lambda_{1,\delta}$, logo aplicando o lema 2.14

$$|h|_\alpha \leq m \cdot \inf h \leq m,$$

e assim

$$|h(y) - 1| \leq m \cdot d(y,x)^\alpha \leq m \cdot diam(M)^\alpha \Rightarrow ||h||_0 \leq 1 + m \cdot diam(M)^\alpha.$$

Desse modo, usando a estimativa (2.4) teremos:

$$\frac{\big(h(x)-h(y)\big)}{\kappa d(x,y)^\alpha} - \frac{\big(\varphi_n(x)-\varphi_n(y)\big)}{\kappa d(x,y)^\alpha}$$

$$\leq \varphi_n(z)-h(z) + \frac{(e^{\Delta\tau^n}-1)\cdot(h(z)-\big(\varphi_n(x)-\varphi_n(y)\big)/\kappa d(x,y)^\alpha)}{e^{\Delta\tau^n}}$$

$$\leq e^{\Delta}||h||_0\Delta\tau^{n-1} + e^{\Delta}\{||h||_0+\inf\varphi_n+1\}\Delta\tau^n$$

$$\leq e^{\Delta}\{1+m\cdot diam(M)^\alpha\}\Delta\tau^{n-1} + e^{\Delta}\{3+m\cdot diam(M)^\alpha\}\Delta\tau^n.$$

Por outro lado; usando o mesmo tipo de cálculo anterior teremos:

$$\frac{\big(\varphi_n(x)-\varphi_n(y)\big)}{\kappa d(x,y)^\alpha} - \frac{\big(h(x)-h(y)\big)}{\kappa d(x,y)^\alpha} \leq$$

$$\leq e^{\Delta}\{1+m\cdot diam(M)^\alpha\}\Delta\tau^{n-1} + e^{\Delta}\{3+m\cdot diam(M)^\alpha\}\Delta\tau^n.$$

Sendo assim; $|h-\varphi_n|_{\alpha,\delta}\leq C\Delta\tau^n$, para

$$C := e^{\Delta}\cdot\{\frac{1+m\cdot diam(M)^\alpha}{\tau}+3+m\cdot diam(M)^\alpha\}.$$

Desse modo; sendo $||\cdot||_\alpha$ a norma $\alpha-$Hölder, aplicando o lema 2.14, teremos

$$||h-\varphi_n||_\alpha \leq mC\Delta\tau^n.$$

■

Na proposição anterior descobrimos que $\ker(\mathcal{L}_{\phi|\mathcal{C}^\alpha(M,\mathbb{R})}-\lambda I)$ tem dimensão 1, o próximo teorema nos dirá que $\mathcal{L}_{\phi|\mathcal{C}^\alpha}$ tem um gap espectral.

Teorema 2.20 (Gap espectral em $\mathcal{C}^\alpha(M,\mathbb{R})$)**.** *Existe um $0<\lambda_0<\lambda$ tal que $\mathcal{L}_{\phi|\mathcal{C}^\alpha(M,\mathbb{R})}$ admite uma decomposição de seu espectro dada por: $spec(\mathcal{L}_{\phi|\mathcal{C}^\alpha(M,\mathbb{R})})=\{\lambda\}\cup\Sigma_0$, onde $\Sigma_0\subset B(0,\lambda_0)$ e λ é autovalor com autoespaço unidimensional.*

Prova. Seja $E_1:=\ker(\mathcal{L}_{\phi|\mathcal{C}^\alpha(M,\mathbb{R})}-\lambda I)$ e $E_0:=\{\varphi\in\mathcal{C}^\alpha(M,\mathbb{R}):\int\varphi d\nu=0\}$; seja h dada pela proposição anterior, então $\int hd\nu=1$ e $E_1=\{t\cdot h: t\in\mathbb{R}\}$. Observemos que E_0,E_1 são subespaços $\mathcal{L}_{\phi|\mathcal{C}^\alpha(M,\mathbb{R})}-$invariantes e $E_0\cap E_1=\emptyset$. Dado $\varphi\in\mathcal{C}^\alpha(M,\mathbb{R})$, podemos reescrevê-lo como: $\varphi=h\cdot\int\varphi d\nu+(\varphi-h\cdot\int\varphi d\nu)$, e como $(\varphi-h\cdot\int\varphi d\nu)\in E_0$ teremos que $\mathcal{C}^\alpha(M,\mathbb{R})=E_1\oplus E_0$.

Para mostrarmos que o resto do espectro está contido em uma bola basta provarmos que o $spec(\tilde{\mathcal{L}}_{\phi|E_0})\subset B(0,\lambda_1)$, onde $0<\lambda_1<1$; bastaria então tomarmos $\lambda_0:=\lambda\cdot\lambda_1$. Sendo assim; dotemos E_0 da norma $\alpha-$Hölder, tomemos $\varphi\in E_0$ com $||\varphi||_\alpha=1$, teremos que $\varphi+2\in\Lambda_{1,\delta}$. Pela prova da proposição anterior, sabemos que $\tilde{\mathcal{L}}^n_\phi(\varphi+2)\xrightarrow{\mathcal{C}^\alpha}\int(\varphi+2)d\nu\cdot h=2h$; pelo corolário anterior:

$$||\tilde{\mathcal{L}}^n_\phi(\varphi)||_\alpha=||\tilde{\mathcal{L}}^n_\phi(\varphi+2)-\tilde{\mathcal{L}}^n_\phi(2)||_\alpha\leq||\tilde{\mathcal{L}}^n_\phi(\varphi+2)-2h||_\alpha+||\tilde{\mathcal{L}}^n_\phi(2)-2h||_\alpha\leq 2mC\Delta\tau^n.$$

Logo $\tilde{\mathcal{L}}^n_{\phi|E_0}$ é uma contração na norma $\alpha-$Hölder para n suficientemente grande e assim $spec(\tilde{\mathcal{L}}_{\phi|E_0}) \subset B(0,\lambda_1)$, onde $0<\lambda_1<1$. Sabemos que $spec(\mathcal{L}_{\phi|\mathcal{C}^\alpha}) = spec(\mathcal{L}_{\phi|E_0}) \cup spec(\mathcal{L}_{\phi|E_1})$, e assim obtemos o gap espectral. ■

Corolário 2.21. *Existe uma única probabilidade conforme de $\mathcal{L}^*_\phi$ associada ao seu raio espectral.*

Prova. Sejam ν_1,ν_2 probabilidades conformes de $\mathcal{L}^*_\phi$ associadas ao seu raio espectral. Pelo teorema anterior $E_1 \oplus E_{0,\nu_1} = E_1 \oplus E_{0,\nu_1}$, onde $E_{0,\nu_i} := \{\varphi \in \mathcal{C}^\alpha(M,\mathbb{R}) : \int \varphi d\nu_i = 0\}, i=1,2$, e $E_1 := \{th : t \in \mathbb{R} \text{ e } h := \lim\limits_{n\to+\infty} \tilde{\mathcal{L}}^n_\phi(1)\}$. Tomemos $\varphi \in \mathcal{C}^\alpha(M,\mathbb{R})$, logo $\varphi = h\cdot\int\varphi d\nu_1 + (\varphi - h\cdot\int\varphi d\nu_1) = h\cdot\int\varphi d\nu_2 + (\varphi - h\cdot\int\varphi d\nu_2)$, pelo teorema anterior sabemos que $\lim\limits_{n\to+\infty}\tilde{\mathcal{L}}^n_\phi(\varphi) = h\cdot\displaystyle\int\varphi d\nu_1$ e $\lim_{n\to+\infty}\tilde{\mathcal{L}}^n_\phi(\varphi) = h\cdot\int\varphi d\nu_2$; sendo assim $\int\varphi d\nu_1 = \int\varphi d\nu_2$, como $\mathcal{C}^\alpha(M,\mathbb{R})$ é denso em $\mathcal{C}^0(M,\mathbb{R})$ temos que $\nu_1=\nu_2$. ■

2.1.2 Decaimento exponencial de correlações e teorema central do limite

Nesse momento estamos interessados em saber se a memória do passado é perdida pelo sistema (f,μ), (onde $\mu := h\nu$, para ν a única probabilidade conforme associada ao raio espectral de $\mathcal{L}_\phi$ e h o único ponto fixo $\alpha-$Hölder de $\tilde{\mathcal{L}}_\phi$ com $\int h d\nu = 1$) ao longo do tempo e qual a velocidade dessa perda, ou seja, queremos saber, $\mu-$q.t.p., o quanto a observação $\varphi(f^n(x))$ para um instante $n \gg 1$ é afetada por condições inicias $\psi(x)$. Isso é expresso pelas **funções de correlação**

$$C_{\varphi,\psi}(n) := \int(\varphi\circ f^n)\psi d\mu - \int\varphi d\mu\int\psi d\mu.$$

$C_{\varphi,\psi}(n) = 0$ do ponto de vista probabilístico significa que $\varphi\circ f^n$ e ψ são independentes. Estudar o decaimento de correlações de uma medida significa escolher dois espaços onde moraram φ e ψ e assim estudar como as funções de correlação convergem a 0, quando n tende a infinito. De certo modo significa saber a velocidade com que tais tipos de funções assintoticamente se misturam em relação a medida.

Utilizando mais uma vez a técnica de cones, provaremos que (f,μ) tem decaimento exponencial de correlações se ψ morar em $\mathcal{C}^\alpha(M,\mathbb{R})$.

Teorema 2.22 (Decaimento exponencial de correlações)**.** *O estado de equilíbrio de f em relação a ϕ tem decaimento exponencial de correlações para observáveis Hölder, ou seja:*

existe $0 < \tau < 1$ *tal que para todo* $\varphi \in L^1(\mu), \psi \in \mathcal{C}^\alpha(M, \mathbb{R})$ *existe* $K(\varphi, \psi) > 0$ *tal que*

$$\Big| \int (\varphi \circ f^n)\psi d\mu - \int \varphi d\mu \int \psi d\mu \Big| \leq K(\varphi, \psi) \cdot \tau^n, \ \forall n \geq 1.$$

Prova. Notemos inicialmente que

$$C_{\varphi,\psi}(n) = \int (\varphi \circ f^n)\psi h d\nu - \int \varphi d\nu \int \psi h d\nu;$$

e pela linearidade da integral, se

$$\Big| \int (\varphi \circ f^n)\psi_1 d\nu - \int \varphi d\nu \int \psi_1 d\nu \Big| \leq K(\varphi, \psi_1) \cdot \tau^n, \ \forall n \geq 1;$$

e

$$\Big| \int (\varphi \circ f^n)\psi_2 d\nu - \int \varphi d\nu \int \psi_2 d\nu \Big| \leq K(\varphi, \psi_2) \cdot \tau^n, \ \forall n \geq 1;$$

então $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\Big| \int (\varphi \circ f^n)(\psi_1 + t\psi_2) d\nu - \int \varphi d\nu \int (\psi_1 + t\psi_2) d\nu \Big| \leq \big(K(\varphi, \psi_1) + |t| \cdot K(\varphi, \psi_2) \big) \cdot \tau^n, \ \forall n \geq 1.$$

Suponhamos inicialmente que $\psi h =: g \in \Lambda_{1,\delta}$; a menos de normalização, podemos supor sem perda de generalidade que $\int g d\nu = 1$. Como $0 < h < \infty$ temos que:

$$|C_{\varphi,\psi}(n)| = \Big| \int \varphi \Big(\frac{\tilde{\mathcal{L}}_\phi^n(g)}{h} - 1 \Big) d\mu \Big| \leq \Big|\Big| \frac{\tilde{\mathcal{L}}_\phi^n(g)}{h} - 1 \Big|\Big|_0 \cdot \int |\varphi| d\mu;$$

assim como na proposição 2.18, usemos a proposição B.1 e a estimativa (2.3) na norma do sup e na semi-norma da integral encontrando $0 < \tau < 1$ (τ não depende das funções envolvidas) e Δ (θ_1-diâmetro do cone $\Lambda_{\hat{\lambda},\beta}$) tal que:

$$\Big|\Big| \frac{\tilde{\mathcal{L}}_\phi^n(g)}{h} - 1 \Big|\Big|_0 \leq \Big|\Big| \frac{1}{h} \Big|\Big|_0 \cdot ||h||_0 e^\Delta \Delta \tau^{n-1};$$

assim

$$|C_{\varphi,\psi}(n)| \leq K(\varphi, \psi) \cdot \tau^n, \ \forall n \geq 1.$$

Pelo comentário inicial, para finalizarmos a prova basta mostrarmos que, para toda $\psi \in \mathcal{C}^\alpha(M, \mathbb{R})$, ψh pode ser escrita como a diferença de elementos de $\Lambda_{1,\delta}$. Seja $B := \max\{1 + |\inf \psi h|, \big| |\psi h|_{\alpha,\delta} - \inf \psi h \big| \}$, então $\psi h = (\psi h + B) - B$ com B e $\psi h + B$ elementos de $\Lambda_{1,\delta}$.

Assim $K(\varphi, \psi) = \int |\varphi| d\mu \cdot ||\frac{1}{h}||_0 \cdot ||h||_0 \cdot e^\Delta \Delta \cdot \frac{1}{\tau} \cdot \int (\psi h + 2B) d\nu.$ ■

Corolário 2.23. *Para toda* $\varphi \in L^1(\mu)$, $\int \varphi \circ f^n d\nu \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int \varphi d\mu$ *e a convergência é exponencial.*

Prova. Basta tomarmos $\psi = h^{-1}$. ∎

Como h é um ponto fixo para $\tilde{\mathcal{L}}_\phi$ teremos que μ é $f-$invariante, decorre de teorema anterior que μ é mixing, logo μ é ergódica.

O próximo corolário nos dirá que se f e ϕ estão no contexto de [VV10], então o ponto fixo h dá origem a único estado de equilíbrio de f com respeito a ϕ.

Corolário 2.24 (Existência e unicidade de estados de equilíbrio)**.** *Suponhamos que $\mathcal{A}$ é uma região aberta, L está suficientemente próximo de 1 de modo valer a hipótese (H1) de [VV10] e que vale a hipótese (H2) de [VV10]. Então, $\mu := h\nu$ é o único estado de equilíbrio para f com respeito a ϕ.*

Prova. A medida conforme ν presente no teorema B de [VV10] é um autovetor de $\mathcal{L}_\phi^*$ associado ao raio espectral. No nosso contexto já sabemos que existe uma única probabilidade conforme associada ao raio espectral de $\mathcal{L}_\phi^*$. Já sabemos que μ é ergódica, logo μ é uma probabilidade ergódica absolutamente contínua em relação a ν, decorre do lema 6.5 de [VV10] que μ é um estado de equilíbrio para f com respeito a ϕ. Como $\frac{d\mu}{d\nu} \in C_+$ temos que μ e ν são probabilidades equivalentes, logo todo estado de equilíbrio ergódico de f com respeito a ϕ é uma probabilidade absolutamente contínua em relação a μ (pelo lema 6.5 de [VV10]). Sendo assim, μ é o único estado de equilíbrio ergódico para f com respeito a ϕ, pelo Teorema A de [VV10], sabemos que todo estado de equilíbrio é uma combinação convexa de estados de equilíbrio ergódicos, e assim μ é o único estado de equilíbrio para f com respeito a ϕ. ∎

No contexto do corolário anterior, já sabíamos por [VV10] da existência dos estados de equilíbrio; pelo corolário anterior descobrimos que impondo um controle maior na variação do potencial e um controle na norma Hölder local de e^ϕ, existe um único estado de equilíbrio e sua densidade em relação à medida conforme é Hölder.

Corolário 2.25. *A medida μ é exata.*

Prova. Seja $\mathcal{F}$ a $\sigma-$álgebra de Borel associada a M, $\varphi \in \mathcal{F}_\infty \cap L^1(\mu)$. Pela proposição C.5, temos que $\varphi = \varphi_n \circ f^n$ para alguma φ_n mensurável. Como μ é invariante, temos que $\int |\varphi_n| d\mu = \int |\varphi| d\mu < +\infty$. Pelo decaimento exponencial de correlações obtido no teorema anterior, dada $\psi \in \mathcal{C}^\alpha(M, \mathbb{R})$ temos

$$\Big| \int (\varphi - \int \varphi d\mu)\psi d\mu \Big| = \Big| \int \varphi_n \circ f^n \cdot \psi d\mu - \int \varphi d\mu \int \psi d\mu \Big| \leq K(\varphi_n, \psi) \cdot \tau^n, \ \forall n \geq 1;$$

e sabemos que $K(\varphi_n, \psi) = \int |\varphi_n| d\mu \cdot K$, onde K não depende de n. Como $\int |\varphi_n| d\mu = \int |\varphi| d\mu$ temos que $| \int (\varphi - \int \varphi d\mu)\psi d\mu| = 0$. Como $\mathcal{C}^\alpha(M, \mathbb{R})$ é denso em $\mathcal{C}^0(M, \mathbb{R})$ na norma do sup, temos $\varphi = \int \varphi d\mu$ em $\mu-$q.t.p.. Decorre então que μ é exata. ■

Sabemos pelo teorema de Birkhoff (veja [Wal82], página 34 e 35) que dada uma probabilidade ergódica η, se tomarmos $\varphi \in L^1(\eta)$ então

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) \xrightarrow{\eta-q.t.p.\ x} \int \varphi d\eta;$$

no entanto, não sabemos se há uma uniformidade na forma como os x realizam a convergência, ou seja, não sabemos por exemplo se dado um erro do valor esperado, $\int \varphi d\eta$, qual o tamanho do conjunto de pontos x tais que as médias de Birkhoff calculadas neles, para n grande, estão dentro desse erro ou como decresce o conjunto de pontos em que a média de Birkhoff não está dentro do erro fixado.

Um resultado nessa linha é o teorema central do limite.

Dizemos que um observável $\varphi : M \to \mathbb{R}$ **satisfaz o teorema central do limite** para (f, η) se existe um $\sigma > 0$ tal que, para todo intervalo $A \subset \mathbb{R}$

$$\eta\Big(\{x \in M : \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=0}^{n-1} \big(\varphi(f^j(x)) - \int \varphi d\eta\big) \in A\}\Big) \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_A e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} dt;$$

satisfazer o teorema central do limite significa que a probabilidade de um dado desvio do valor médio de um observável ao longo da órbita em relação a sua média assintótica é dada pela distribuição Gaussiana ou Normal.

Já sabemos que μ é ergódico, logo faz sentido saber se μ satisfaz o teorema central do limite.

Veremos agora que decaimento de correlações somável implica teorema central do limite.

Teorema 2.26 (Teorema central do limite)**.** *Se ψ é uma função $\alpha-$Hölder então $\sigma \geq 0$ dado por*

$$\sigma^2 = \int g^2 d\mu + 2\sum_{n=0}^{\infty} \int g(g \circ f^n) d\mu, \qquad onde\ \ g := \psi - \int \psi d\mu,$$

é finito e $\sigma = 0$ se, e somente se, $\psi = u \circ f - u$ para alguma $u \in L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$. Ademais; se $\sigma > 0$ então ψ satisfaz o teorema central do limite para (f, μ)

Prova. A prova segue a técnica bastante utilizada de usar o decaimento de correlações somável para provar que valem as hipóteses do teorema de Gordin (veja C.3) e assim decorre o teorema central do limite.

Tomemos $g := \psi - \int \psi d\mu$, pelo teorema sobre decaimento de correlações sabemos que

$$C_{\varphi,g}(n) \leq \int |\varphi| d\mu \cdot ||\frac{1}{h}||_0 \cdot ||h||_0 \cdot e^{\Delta}\Delta \cdot \frac{1}{\tau} \cdot 2B;$$

seja $\mathcal{F}$ a $\sigma-$álgebra de Borel, assim

$$\begin{aligned}
||\mathbb{E}(g|\mathcal{F}_n)||_2 &= \sup\Big\{\int \xi g d\mu : \xi \in L^2(M,\mathcal{F}_n,\mu), ||\xi||_2 = 1\Big\} \\
&= \sup\Big\{\int (\varphi \circ f^n) g d\mu : \varphi \in L^2(M,\mathcal{F},\mu), ||\varphi||_2 = 1\Big\} \\
&= \sup\Big\{C_{\varphi,g}(n) : \varphi \in L^2(M,\mathcal{F},\mu), ||\varphi||_2 = 1\Big\} \\
&\leq ||\frac{1}{h}||_0 \cdot ||h||_0 \cdot e^{\Delta}\Delta \cdot \frac{1}{\tau} \cdot 2B \cdot \tau^n;
\end{aligned}$$

logo

$$\sum_{n=0}^{\infty} ||\mathbb{E}(g|\mathcal{F}_n)||_2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} ||\frac{1}{h}||_0 \cdot ||h||_0 \cdot e^{\Delta}\Delta \cdot \frac{1}{\tau} \cdot 2B \cdot \tau^n < \infty.$$

Desse modo, basta aplicarmos o teorema de Gordin em g para findar a prova do teorema. ■

2.1.3 Estabilidade estatística

Nesse momento estamos interessados em responder a seguinte questão:

Suponhamos que $f : M \to M$ é uma dinâmica e $\phi : M \to \mathbb{R}$ é um potencial satisfazendo as hipóteses (H1) , (H2') e (P') expressas no início do capítulo; se tomarmos $(\tilde{f}, \tilde{\phi})$, satisfazendo as hipóteses já citadas, próximos de (f, ϕ) será que o estado de equilíbrio de $\tilde{f}$ com respeito a $\tilde{\phi}$, o ponto fixo $\alpha-$Hölder, a medida conforme de $\mathcal{L}_{\tilde{f},\tilde{\phi}}$ e a pressão topológica de $\tilde{f}$ com respeito a $\tilde{\phi}$ estão próximos dos respectivos objetos relacionados a (f, ϕ) ?

Responder esse tipo de pergunta significa saber se (f, ϕ) tem estabilidade estatística ou é estável por perturbações determinísticas. Em [VV10] é dada a seguinte resposta parcial:

Teorema D: *Suponhamos que (f_n, ϕ_n) e (f, ϕ) satisfazem as hipóteses (H1) , (H2) e (P) (com os mesmos σ e α) e ainda, $(f_n, \phi_n, L_n) \xrightarrow{C^0 \times C^0 \times C^0} (f, \phi, L)$ e $P_{top}(f_n, \phi_n) \to P_{top}(f, \phi)$. Se μ_n é uma escolha de um estado de equilíbrio de f_n com respeito a ϕ_n, então todo ponto de acumulação na topologia fraca* da sequência $(\mu_n)_{n\geq 1}$ é um estado de equilíbrio de f com respeito a ϕ.*

A prova desse teorema se baseia num argumento de semi-continuidade da entropia (presente também em [Ara07]) e no arremate final é fundamental a hipótese que

$P_{top}(f_n, \phi_n) \to P_{top}(f, \phi)$. Exigir essa hipótese significa exigir que o raio espectral de $\mathcal{L}_{f,\phi}$ varie continuamente com respeito a (f, ϕ). Descobriremos que nosso contexto, de fato o raio espectral de $\mathcal{L}_{f,\phi}$ varia continuamente com respeito a (f, ϕ).

Seja $\mathcal{G} := \{(f, \phi); f : M \to M$ e $\phi : M \to \mathbb{R}$ satisfazem as hipóteses (H1) , (H2') e (P'), com o mesmo α e q, e f é Lipschitz $\}$. Notemos que estamos exigindo algo que até o momento não necessitávamos, **a dinâmica precisa ser Lipschitz**, essa hipótese só se faz presente para termos o controle das distâncias de pré-imagens de dinâmicas próximas. O espaço das dinâmicas Lipschitz pode ser dotado de uma norma natural, $|| \cdot ||_{Lip} := \max\{Lip(\cdot), || \cdot ||_0\}$, assim uma topologia natural, e que será utilizada nessa seção, para $\mathcal{G}$ é a dada por $|| \cdot ||_{Lip} \times || \cdot ||_\alpha$.

Se tomarmos $(f, \phi) \in \mathcal{G}$, existe uma vizinhança de (f, ϕ) em $\mathcal{G}$ tal que: se $(\hat{f}, \hat{\phi})$ é um elemento dessa vizinhança, então $deg(f) = deg(\hat{f})$, o δ associado a f é o mesmo associado a $\hat{f}$ (como a constante m dada pelo 2.14 só depende de δ, então m será a mesma para todas as dinâmicas) e as outras constantes presentes nas hipóteses (H1) , (H2') e (P') estarão próximas, fazendo com que $\hat{\lambda}$ associado a (f, ϕ) esteja próximo da respectiva constante associada a $(\hat{f}, \hat{\phi})$; desse modo: $\mathcal{L}_{\hat{f},\hat{\phi}}(\Lambda_{\kappa,\delta}) \subset \Lambda_{\rho\kappa,\delta}$, para $\kappa \geq 1$ e $\hat{\lambda} \leq \rho < 1$.

Inicialmente precisaremos de lemas para obter esse controle das pré-imagens de dinâmicas próximas, para assim provarmos então que o operador de Ruelle-Perron-Frobenius varia continuamente na topologia forte.

Lema 2.27. *Seja M uma variedade Riemaniana de dimensão d, compacta e conexa, e $f : M \to M$ localmente bi-lipschtiz. Existem $\epsilon > 0$ e $\beta > 0$ tais que: se $\hat{f} : M \to M$ é Lipschitz e $||f - \hat{f}||_{Lip} < \epsilon$ então, para todo $x \in M$:*

i) $f_{|B(x,\beta)} : B(x, \beta) \to f(B(x, \beta))$ e $\hat{f}_{|B(x,\beta)} : B(x, \beta) \to \hat{f}(B(x, \beta))$ são bi-lipschitz;

ii) para cada $x_{1,i} \in f^{-1}(x)$ existe um único $x_{2,i} \in \hat{f}^{-1}(x)$ com $x_{2,i} \in B(x_{1,i}, \frac{\beta}{2})$.

Prova. i)] Dado $x \in M$ existe $\beta_x > 0$ tal que $f_{|B(x,\beta_x)} : B(x, \beta_x) \to f(B(x, \beta_x))$ é bi-lipschitz. A família formada por $B(x, \beta_x)$ cobre M. Como M é compacta podemos extrair uma subcobertura finita $\{B(x_1, \beta_1), \ldots, B(x_n, \beta_n)\}$ e tomarmos o número de Lebesgue q associada a tal subcobertura. Seja $\beta := \frac{q}{2}$, então $f_{|B(x,\beta)} : B(x, \beta) \to f(B(x, \beta))$ é bi-lipschitz para todo $x \in M$. Iremos provar agora que, para dinâmicas suficientemente próximas de f, esse mesmo β serve para satisfazer i). Seja $l := \max\{Lipf_{x_1}^{-1}, \ldots, Lipf_{x_n}^{-1}\}$,

Afirmação: Se $\hat{f} : M \to M$ é Lipschitz e $Lip(f - \hat{f}) < l^{-1}$ então $\hat{f}_{|B(x,\beta)} : B(x, \beta) \to \hat{f}(B(x, \beta))$ é bi-lipschitz.

Com efeito; seja $\hat{f}: M \to M$ Lipschitz e $Lip(f-\hat{f}) < l^{-1}$, e tomemos $a, b \in B[x,\beta]$, então:

$$\begin{aligned} ||\hat{f}(a)-\hat{f}(b)|| &= ||\hat{f}(a)-\hat{f}(b)+f(a)-f(a)+f(b)-f(b)|| \\ &\geq ||f(a)-f(b)|| - ||(\hat{f}-f)(a)-(\hat{f}-f)(b)|| \\ &\geq l^{-1}d(f_x^{-1}(a), f_x^{-1}(b)) - Lip(\hat{f}-f)d(f_x^{-1}(a), f_x^{-1}(b)) \\ &= \big(l^{-1}-Lip(\hat{f}-f)\big)d(f_x^{-1}(a), f_x^{-1}(b)). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Por 2.5 teremos que $\hat{f}_{|B(x,\beta)}$ é injetiva, tomemos então $z, w \in \hat{f}(B(x,\beta))$, por 2.5 temos

$$||z-w|| \geq \big(l^{-1}-Lip(\hat{f}-f)\big)d(\hat{f}^{-1}(z), \hat{f}^{-1}(w)) \Rightarrow$$
$$Lip(\hat{f}^{-1}_{|B(x,\beta_x)}) \leq \big(l^{-1}-Lip(\hat{f}-f)\big)^{-1}.$$

ii)] Tomemos $x \in M$ e $x_{1,i} \in f^{-1}(x)$. Seja $T_{x_{1,i}}(z) := x - f^{-1}\big(\hat{f}(z)-f(z)\big)$. Tomando $\hat{f}$ suficientemente $Lip-$próximo de f teremos que: T está bem definido, $T(B[x_{1,i}, \frac{\beta}{2}])$ $\subset B[x_{1,i}, \frac{\beta}{2}]$ e T é uma contração, logo, pelo teorema do ponto fixo de Banach existe um único $x_{2,i} \in B[x_{1,i}, \frac{\beta}{2}]$ tal que $T(x_{2,i}) = x_{2,i}$, ou seja, existe um único $x_{2,i} \in \hat{f}^{-1}(x)$ com $x_{2,i} \in B(x_{1,i}, \frac{\beta}{2})$. ■

Lema 2.28. *Sejam $f_1 : M \to M \in \mathcal{G}$ e L um limitante superior das constantes de Lipschitz das inversas locais de f_1. Existe $\varepsilon > 0$ tal que, se $f_2 : M \to M \in \mathcal{G}$ e $||f_1-f_2||_{Lip} < \epsilon$, então dado $x \in M$ teremos: $deg(f_1) = deg(f_2)$ e para cada $x_{1,i} \in f_1^{-1}(x)$ existe $x_{2,i} \in f_2^{-1}(x)$ com $d(x_{1,i}, x_{2,i}) \leq L||f_1-f_2||_0$.*

Prova. Pelo lema anterior, existe $\varepsilon > 0$ tal que, se $||f_1-f_2||_{Lip} < \varepsilon$ então $deg(f_1) = deg(f_2)$ e que para cada $x_{1,i} \in f_1^{-1}(x)$ existe $x_{2,i} \in f_2^{-1}(x)$ com $x_{1,i}, x_{2,i}$ pertencem a uma região onde f_1 é localmente invertível e tem inversa local Lipschitz. Logo:

$$d(x_{1,i}, x_{2,i}) \leq Ld(f_1(x_{1,i}), f_1(x_{2,i})) \leq d(f_2(x_{2,i}), f_1(x_{2,i})) \leq L||f_1-f_2||_0.$$

■

Proposição 2.29. *Seja $B(\mathcal{C}(M,\mathbb{R}), \mathcal{C}(M,\mathbb{R}))$ o espaço de operadores lineares contínuos sobre $\mathcal{C}(M,\mathbb{R})$, onde $\mathcal{C}(M,\mathbb{R})$ está dotado da norma do* sup*. Então a função $\mathcal{G} \ni (f,\phi) \mapsto \mathcal{L}_{f,\phi} \in B(\mathcal{C}(M,\mathbb{R}), \mathcal{C}(M,\mathbb{R}))$ é contínua, se dotarmos a imagem da topologia forte.*

Prova. Seja $(f_j, \phi_j) \xrightarrow{Lip\times\mathcal{C}^0} (f_0, \phi_0)$. Tomemos $g \in \mathcal{C}(M,\mathbb{R})$; então pelo lema anterior, para j suficientemente grande:

$$|\mathcal{L}_{f_j,\phi_j}(g)(x) - \mathcal{L}_{f_0,\phi_0}(g)(x)| \leq \sum_{i=1}^{deg(f)} |e^{\phi_j(x_{j,i})}g(x_{j,i}) - e^{\phi_0(x_{0,i})}g(x_{0,i})| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{deg(f)} \left\{|e^{\phi_j(x_{j,i})}g(x_{j,i}) \ - \ e^{\phi_0(x_{0,i})}g(x_{j,i})| \ + \ |e^{\phi_0(x_{0,i})}g(x_{j,i}) \ - \ e^{\phi_0(x_{0,i})}g(x_{0,i})|\right\} \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{deg(f)} \left\{ \sup g \cdot e^{\sup \phi_j - \inf \phi_0} \cdot \left(||\phi_j - \phi_0||_0 + |\phi_0(x_{j,i}) - \phi_0(x_{0,i})|\right) \ + \ e^{\sup \phi_0} \cdot |g(x_{j,i}) - g(x_{0,i})|\right\}$$

e cada parcela converge para 0 quando $j \to +\infty$, e essa convergência é uniforme em relação a $x \in M$, pois $d(x_{j,i}, x_{0,i}) \leq L||f_j - f_0||_0$. ■

Passemos então a prova do teorema de estabilidade. Veremos que os pontos chaves são o fato de todos os operadores preservarem o mesmo cone e assim, ao iterarmos a função constante igual a 1, ficaremos sempre dentro de uma margem de segurança e a convergência para o único ponto fixo se dá de maneira uniforme.

Teorema 2.30 (Estabilidade estatística $\mathcal{C}^0$)**.** *Tomando $\mathcal{G}$ como domínio e dotado da topologia Lip $\times \mathcal{C}^\alpha$, as seguintes funções variam continuamente:*

i) $(f, \phi) \longmapsto \lambda_{f,\phi}$.

ii) $(f, \phi) \longmapsto h_{f,\phi}$; onde $h_{f,\phi} = \lim_{n \to +\infty} \tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(1)$, e estamos dotando a imagem da topologia $\mathcal{C}^0$.

iii) $(f, \phi) \longmapsto \nu_{f,\phi}$; onde $\nu_{f,\phi}$ é a única probabilidade conforme de $\mathcal{L}_{f,\phi}$ associada ao raio espectral, e estamos dotando a imagem da topologia fraca*.

iv) $(f, \phi) \longmapsto \mu_{f,\phi}$; onde $\mu_{f,\phi} = h_{f,\phi}\nu_{f,\phi}$, e estamos dotando a imagem da topologia fraca*.

Prova. Seja $((f_j, \phi_j))_{j \geq 1}$ com $(f_j, \phi_j) \xrightarrow{Lip \times \mathcal{C}^\alpha} (f_0, \phi_0)$ e $(f_j, \phi_j) \in \mathcal{G}, \forall j \in \mathbb{N}$. Para facilitar a notação, ao longo da prova iremos supor que λ_j é o raio espectral de $\mathcal{L}_{f_j,\phi_j}$, $\mathcal{L}_j := \mathcal{L}_{f_j,\phi_j}$, $\tilde{\mathcal{L}}_j := \frac{\mathcal{L}_{f_j,\phi_j}}{\lambda_j}$, $h_j := h_{f_j,\phi_j}$, $\nu_j := \nu_{f_j,\phi_j}$ e $\mu_j := \mu_{f_j,\phi_j}$.

i)] Inicialmente provaremos que $(f, \phi) \longmapsto \log \lambda_{f,\phi}$ varia continuamente.

Sabemos que $\int \tilde{\mathcal{L}}^n_j(1) d\nu_j = 1, \forall n, j \in \mathbb{N}$, como $\tilde{\mathcal{L}}^n_j(1)$ é sempre função contínua, existirá $x \in M$ tal que $\tilde{\mathcal{L}}^n_j(1)(x) = 1$ (x depende de n e j), assim $||\tilde{\mathcal{L}}^n_j(1)||_0 \geq 1 \ \forall n, j \in \mathbb{N}$. Por outro lado: como $\tilde{\mathcal{L}}^n_j(1) \in \Lambda_{1,\delta}, \forall n, j \in \mathbb{N}$, teremos

$$|\tilde{\mathcal{L}}^n_j(1)|_\alpha \leq m \inf \tilde{\mathcal{L}}^n_j(1) \leq m \cdot \tilde{\mathcal{L}}^n_j(1)(x) \leq m, \forall n, j \in \mathbb{N};$$

em particular

$$|\tilde{\mathcal{L}}^n_j(1)(y) - 1| \leq m \cdot d(y, x)^\alpha \leq m \cdot diam(M)^\alpha \Rightarrow ||\tilde{\mathcal{L}}^n_j(1)||_0 \leq 1 + m \cdot diam(M)^\alpha,$$

m é dado pelo lema 2.14 e depende do δ associado a dinâmica. No entanto, a partir de j suficientemente grande ele será constante, desse modo

$$1 \leq ||\tilde{\mathcal{L}}_j^n(1)||_0 \leq 1 + m \cdot diam(M)^\alpha, \forall n, j \in \mathbb{N}.$$

Sendo assim; $\frac{1}{n} \log ||\tilde{\mathcal{L}}_j^n(1)||_0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ de forma uniforme em relação a j, ou seja, $\frac{1}{n} \log ||\mathcal{L}_j^n(1)||_0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \log \lambda_j$ de forma uniforme em relação a j.

Tomemos $\epsilon > 0$; pela discussão anterior, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\Big|\frac{1}{n_0} \log ||\mathcal{L}_j^{n_0}(1)||_0 - \log \lambda_j\Big| < \frac{\epsilon}{3}, \forall j \in \mathbb{N},$$

pela proposição anterior existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que: se $j \geq j_0$ então

$$\Big|\frac{1}{n_0} \log ||\mathcal{L}_j^{n_0}(1)||_0 - \frac{1}{n_0} \log ||\mathcal{L}_0^{n_0}(1)||_0\Big| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Desse modo, para $j \geq j_0$:

$$|\log \lambda_j - \log \lambda_0| \leq \Big|\frac{1}{n_0} \log ||\mathcal{L}_j^{n_0}(1)||_0 - \log \lambda_j\Big| + \Big|\frac{1}{n_0} \log ||\mathcal{L}_0^{n_0}(1)||_0 - \log \lambda_0\Big| +$$
$$+ \Big|\frac{1}{n_0} \log ||\mathcal{L}_j^{n_0}(1)||_0 - \frac{1}{n_0} \log ||\mathcal{L}_0^{n_0}(1)||_0\Big| < \epsilon.$$

Assim o logaritmo do raio espectral varia continuamente com (f, ϕ), desse modo $(f, \phi) \longmapsto \lambda_{f,\phi}$ varia continuamente.

ii)] No item anterior descobrimos que ao iterar a função constante igual a 1 pelo operador normalizado teremos uma limitação uniforme em relação a (f, ϕ), nesse momento veremos que também há uma uniformidade em relação a realização do limite $\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}^n(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} h_{f,\phi}$. No final da prova do corolário 2.19 descobrimos que

$$||\tilde{\mathcal{L}}_j^n(1) - h_j||_\alpha \leq me^\Delta \cdot \{\frac{1 + m \cdot diam(M)^\alpha}{\tau} + 3 + m \cdot diam(M)^\alpha\}\Delta\tau^n;$$

onde τ só depende de Δ (que é o $\theta_\kappa-$diâmetro do cone $\Lambda_{\hat{\lambda}\kappa,\delta}$) que, por sua vez, só depende do $\hat{\lambda}$, a partir de j suficientemente grande $\mathcal{L}_j(\Lambda_{\kappa,\delta}) \subset \Lambda_{\rho\kappa,\delta}$, para $\kappa \geq 1$ e $\hat{\lambda} \leq \rho < 1$. Desse modo

$$\tilde{\mathcal{L}}_j^n(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{C^\alpha} h_j, \forall j \in \mathbb{N},$$

uniformemente em relação a j. Tomemos $\epsilon > 0$; pela discussão anterior existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$||\tilde{\mathcal{L}}_j^{n_0}(1) - h_j||_\alpha < \frac{\epsilon}{3}, \forall j \in \mathbb{N};$$

como o raio espectral varia continuamente e pela proposição anterior, o operador de Ruelle-Perron-Frobenius normalizado pelo raio espectral varia continuamente, na topologia forte, em relação a (f, ϕ). Em particular existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que: se $j \geq j_0$ temos

$$||\tilde{\mathcal{L}}_j^{n_0}(1) - \tilde{\mathcal{L}}_0^{n_0}(1)||_0 < \frac{\epsilon}{3}.$$

Sendo assim, para $j \geq j_0$:

$$||h_j - h_0||_0 \leq ||h_j - \tilde{\mathcal{L}}_j^{n_0}(1)||_0 + ||\tilde{\mathcal{L}}_j^{n_0}(1) - \tilde{\mathcal{L}}_0^{n_0}(1)||_0 + ||\tilde{\mathcal{L}}_0^{n_0}(1) - h_0||_0 < \epsilon.$$

iii)] Seja $g \in \mathcal{C}^\alpha(M, \mathbb{R})$. Sabemos pelo gap espectral (veja teorema 2.20) que $g = u_j + t_j h_j, \forall j \in \mathbb{N}$, para $\int u_j d\nu_j = 0$ e $t_j \in \mathbb{R}$; logo

$$\int g d\nu_j \to \int g d\nu_0 \Leftrightarrow t_j \to t_0.$$

Notemos que $|t_j| = |\int g d\nu_j| \leq ||g||_0$ e $||u_j||_\alpha \leq ||g||_\alpha + ||g||_0(\max\{m, 1 + m \cdot diam(M)^\alpha\})$ (a partir de um certo j, m é constante). Se $u_j = 0$ então $||\tilde{\mathcal{L}}_j^n(g) - t_j h_j|| = 0$; se $u_j \neq 0$, aplicando as estimativas de convergência do teorema sobre o gap espectral (veja teorema 2.20) teremos:

$$||\tilde{\mathcal{L}}_j^n(g) - t_j h_j||_\alpha \leq \big(||g||_\alpha + ||g||_0(\max\{m, 1 + m \cdot diam(M)^\alpha\})\big) 2mC\Delta\tau^n.$$

Logo, a convergência é uniforme em relação a j (a partir de um certo j).

Assim:

$$|t_j - t_0| \leq \Big|\Big|\frac{\tilde{\mathcal{L}}_j^n(g)}{h_j} - t_j\Big|\Big|_0 + \Big|\Big|\frac{\tilde{\mathcal{L}}_0^n(g)}{h_0} - t_0\Big|\Big|_0 + \Big|\Big|\frac{\tilde{\mathcal{L}}_j^n(g)}{h_j} - \frac{\tilde{\mathcal{L}}_0^n(g)}{h_0}\Big|\Big|_0 \leq$$

$$\leq \Big|\Big|\tilde{\mathcal{L}}_j^n(g) - t_j h_j\Big|\Big|_0 \cdot \Big|\Big|\frac{1}{h_j}\Big|\Big|_0 + \Big|\Big|\tilde{\mathcal{L}}_0^n(g) - t_0 h_0\Big|\Big|_0 \cdot \Big|\Big|\frac{1}{h_0}\Big|\Big|_0 + \Big|\Big|\frac{\tilde{\mathcal{L}}_j^n(g)}{h_j} - \frac{\tilde{\mathcal{L}}_0^n(g)}{h_0}\Big|\Big|_0;$$

pela discussão anterior, o item ii) e a proposição anterior teremos que

$$t_j \xrightarrow[j \to +\infty]{} t_0.$$

Como $\mathcal{C}^\alpha(M, \mathbb{R})$ é denso em $\mathcal{C}^0(M, \mathbb{R})$ teremos que

$$\nu_j \xrightarrow{fraca^*} \nu_0.$$

iv)] Seja $g \in \mathcal{C}(M, \mathbb{R})$. Pelos item iii) e iv), existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que: se $j \geq j_0$ temos

$$\Big|\Big|gh_j - gh_0\Big|\Big|_0 < \frac{\epsilon}{2}$$

e

$$\Big|\int gh_0 d\nu_0 - \int gh_0 d\nu_j\Big| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Assim, se $j \geq j_0$:

$$\Big|\int g d\mu_j - \int g d\mu_0\Big| \leq \Big|\int gh_j d\nu_j - \int gh_0 d\nu_j\Big| + \Big|\int gh_0 d\nu_0 - \int gh_0 d\nu_j\Big| <$$

$$< \int \frac{\epsilon}{2} d\nu_j + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

■

Corolário 2.31. *Se estivermos também no contexto [VV10], tomando $\mathcal{G}$ como domínio e dotado da topologia Lip* $\times \mathcal{C}^\alpha$ *então* $(f,\phi) \longmapsto P_{top}(f,\phi)$ *varia continuamente.*

Prova. Basta observamos que no contexto [VV10] temos $P_{top}(f,\phi) = \log \lambda_{f,\phi}$. ■

2.1.4 Perturbações aleatórias - Estabilidade espectral

Quando modelamos um processo físico através da formulação matemática $f : M \to M$, na verdade estamos desprezando informações, influências externas e outros fatores que não podem ser detectados pela nossa aproximação $f : M \to M$, porém para termos uma boa aproximação do processo desejamos que os fatores descartados sejam pouco "relevantes". Quando muito fatores não são tão irrelevantes a ponto de serem descartados ou é extremamente complexo, do ponto de vista prático, expressar o processo através de uma dinâmica $f : M \to M$, podemos estudar uma dinâmica $f : M \to M$ juntamente com um "ruído"aleatório (pertubação aleatória). Ou seja, não sabemos exatamente o futuro de $x \in M$ em uma unidade de tempo e sim que existe uma probabilidade de que o futuro de x em uma unidade de tempo é dado pela sua iteração por uma dinâmica f_j escolhida aleatoriamente e independentemente numa ϵ vizinhança de f. Para que esse tipo de aproximação do processo seja eficaz, precisamos que esse "ruído"tenha um efeito pequeno sobre o comportamento assintótico de f.

Matematicamente, essa aproximação pode ser posta da seguinte maneira que descreveremos em seguida.

Sejam M e T espaços métricos, $f : M \to M$ uma dinâmica e $\phi : M \to \mathbb{R}$ um potencial, $(f_t,\phi_t)_{t\in T}$ um espaço de dinâmicas agindo sobre M e potenciais, dotado de uma topologia, indexadas por T e $(\theta_\epsilon)_{0<\epsilon\leq 1}$ uma família de probabilidades em T (pertubação aleatória) tal que: existe $t_0 \in T$ com

$$(f_{t_0},\phi_{t_0}) = (f,\phi), \qquad (f_t,\phi_t) \xrightarrow[t\to t_0]{} (f,\phi), \qquad \operatorname{supp}\theta_\epsilon \xrightarrow[\epsilon\to 0]{} \{t_0\}.$$

O próximo exemplo nos mostrará um caso particular importante:

Exemplo 2.32. *Seja* $f : M \to M$ *um homeomorfismo local agindo sobre um espaço métrico compacto e* $\phi : M \to \mathbb{R}$ *uma função contínua,* $T = \mathcal{F}$, *onde* $\mathcal{F}$ *é uma vizinhança de* (f,ϕ), $(f_t,\phi_t) = (t,t)$ *e* $(\theta_\epsilon)_{0<\epsilon\leq 1}$ *uma família de probabilidades em* $\mathcal{F}$ *tal que existe uma família* $(V_\epsilon(f,\phi))_{0<\epsilon\leq 1}$ *de vizinhanças de* (f,ϕ) *em* $\mathcal{F}$, *dependendo monototicamente de* ϵ, *e satisfazendo*

$$supp\,\theta_\epsilon \subset V_\epsilon((f,\phi)) \quad e \quad \bigcap_{0<\epsilon\leq 1} V_\epsilon((f,\phi)) = \{(f,\phi)\}.$$

Estabilidade espectral

Nesse momento estamos interessados em dar um primeiro resultado no sentido de que no nosso contexto de dinâmicas e potenciais a aproximação via perturbações aleatórias é eficaz.

Suporemos que $(f_t, \phi_t) \in \mathcal{G}, \ \forall t \in T$, para $\mathcal{G}$ definido na seção anterior (é o espaço de dinâmicas Lipschitz e potenciais $\alpha-$Hölder que satisfazem as hipóteses (H1), (H2') e (P')), e o muniremos da topologia $Lip \times \mathcal{C}^\alpha$. Tomemos uma família $(\mathcal{L}_\epsilon)_{0<\epsilon\leq 1}$ de operadores lineares agindo sobre $\mathcal{C}(M, \mathbb{R})$ definidos da seguinte forma:

$$\mathcal{L}_\epsilon(g)(x) := \int_T (\mathcal{L}_{f_t,\phi_t} g)(x) d\theta_\epsilon(t), \text{ para toda } g \in \mathcal{C}(M, \mathbb{R}) \text{ e } x \in M.$$

Como não temos informação de como estamos parametrizando (f_t, ϕ_t), podemos perder mensurabilidade e assim a princípio $\mathcal{L}_\epsilon$ pode não estar definido, porém se $(\mathcal{L}_\epsilon)_{0<\epsilon\leq 1}$ estiver bem definido, como

$$(f_t, \phi_t) \xrightarrow[t\to t_0]{} (f, \phi), \quad \text{e} \quad \operatorname{supp} \theta_\epsilon \xrightarrow[\epsilon\to 0]{} \{t_0\},$$

existirá ϵ' tal que: para todo $\epsilon \leq \epsilon'$ teremos que $\mathcal{L}_\epsilon$ esta bem definido, é um operador linear contínuo com domínio em $\mathcal{C}(M, \mathbb{R})$ e contradomínio no espaço das funções limitadas com domínio em M (estamos dotando o domínio e contra-domínio da norma do sup), e ele preserva o cone das funções estritamente positivas. Além disso, se $t \in \operatorname{supp} \theta_\epsilon$, então $deg(f_t) = deg(f_{t_0})$, o δ associado a f_{t_0} é o mesmo associado a f_t (como a constante m dada pelo 2.14 só depende de δ, então m será o mesmo para f_{t_0} e f_t) e as outras constantes presentes nas hipóteses (H1) , (H2') e (P') estarão próximas, fazendo com que $\hat{\lambda}$ associado a (f_{t_0}, ϕ_{t_0}) esteja próximo da respectiva constante associada a (f_t, ϕ_t); desse modo: $\mathcal{L}_{f_t,\phi_t}(\Lambda_{\kappa,\delta}) \subset \Lambda_{\rho\kappa,\delta}$, para $\kappa \geq 1$ e $\hat{\lambda} \leq \rho < 1$.

Sendo assim, a partir desse momento suporemos que a parametrização pelo espaço métrico T é suficientemente "boa"para que exista um ϵ' tal que para todo $\epsilon \leq \epsilon'$ temos $\mathcal{L}_\epsilon$ bem definido. Uma forma de pensar $\mathcal{L}_\epsilon$ é como a média dos operadores de Ruelle-Perron-Frobenius perturbados.

Para facilitar a notação denotaremos $\mathcal{L}_{f_t,\phi_t}$ por $\mathcal{L}_t$.

Proposição 2.33. *Existe* $0 < \rho < 1$ *tal que, para todo* $\epsilon \leq \epsilon'$ *teremos:*

i) Existe $0 < \rho < 1$ *tal que* $\mathcal{L}_\epsilon(\Lambda_{\kappa,\delta}) \subset \Lambda_{\rho\kappa,\delta}$, *para todo* $\kappa \geq 1$*;*

ii) $\mathcal{L}_\epsilon(\mathcal{C}^\alpha(M, \mathbb{R})) \subset \mathcal{C}^\alpha(M, \mathbb{R})$*;*

iii) $\mathcal{L}_{\epsilon|\mathcal{C}^\alpha} : \mathcal{C}^\alpha \to \mathcal{C}^\alpha$ *é contínuo se dotarmos o domínio e contra-domínio da norma* $\alpha-$*Hölder.*

iv) $\mathcal{L}_\epsilon(\mathcal{C}(M, \mathbb{R})) \subset \mathcal{C}(M, \mathbb{R})$.

Prova. i)] Seja $g \in \Lambda_{\kappa,\delta}$. Já sabemos que $\mathcal{L}_\epsilon(g)$ é uma função limitada estritamente positiva. Pelo teorema de invariância de cone sabemos que, para todo $t \in T$ temos $\mathcal{L}_t(\Lambda_{\kappa,\delta}) \subset \Lambda_{\hat{\lambda}_t\kappa,\delta}$. Já sabemos que para dinâmicas e potenciais próximos podemos uniformizar essa invariância, ou seja, para t próximo de t_0 teremos $\mathcal{L}_t(\Lambda_{\kappa,\delta}) \subset \Lambda_{\rho\kappa,\delta}$ para algum $0 < \rho < 1$. Tomemos $x, y \in M$ tais que $d(x, y) < \delta$, logo:

$$|\mathcal{L}_\epsilon g(x) - \mathcal{L}_\epsilon g(y)| \leq |\int \big(\mathcal{L}_t g(x) - \mathcal{L}_t g(y)\big) d\theta_\epsilon(t)| \leq \int |\rho\kappa \inf_{z\in M} (\mathcal{L}_t g(z)) \cdot d(x, y)^\alpha d\theta_\epsilon(t) \leq$$

$$\rho\kappa \inf_{z\in M} (\mathcal{L}_\epsilon g(z))| \cdot d(x, y)^\alpha,$$

assim, $\mathcal{L}_\epsilon g \in \Lambda_{\rho\kappa,\delta}$.

ii)] Tomemos agora $g \in \mathcal{C}^\alpha(M, \mathbb{R})$, g pode ser escrito como a diferença de elementos de $\Lambda_{\kappa,\delta}$, com efeito: seja $B := \max\{1 + |\inf g|, \big||g|_{\alpha,\delta} - \inf g\big|\}$, então $g = (g + B) - B$ com B e $g + B$ elementos de $\Lambda_{\kappa,\delta}$. Assim, aplicando o item i) teremos $\mathcal{L}_\epsilon g \in \mathcal{C}^\alpha(M, \mathbb{R})$.

iii)] Seja $g \in \mathcal{C}^\alpha(M, \mathbb{R})$ e $||g||_\alpha = 1$. Pela prova do teorema 2.20 temos que $||\mathcal{L}_t(g - \int g d\nu_t)||_\alpha \leq 4mC\Delta\tau$, $\forall t \in T$; pelo item i) temos que $||\mathcal{L}_t(\int g d\nu_t)||_\alpha \leq \rho m\lambda_t + deg(f_t) \exp^{\sup \phi_t}$, $\forall t \in T$; sendo assim

$$||\mathcal{L}_t(g)||_\alpha \leq 4mC\Delta\tau + \rho m\lambda_t + deg(f_t) \exp^{\sup \phi_t}.$$

Pela estabilidade estatística e como

$$(f_t, \phi_t) \xrightarrow[t\to t_0]{} (f, \phi), \quad \text{e} \quad \operatorname{supp} \theta_\epsilon \xrightarrow[\epsilon\to 0]{} \{t_0\},$$

podemos diminuir ϵ' se necessário de modo a $||\mathcal{L}_t(g)||_\alpha$ ser uniformemente limitado em relação a t e g; como

$$||\mathcal{L}_\epsilon(g)||_\alpha \leq \int ||\mathcal{L}_t(g)||_\alpha d\theta_\epsilon$$

teremos que $\mathcal{L}_{\epsilon|\mathcal{C}^\alpha}$ é contínuo.

iv)] Para provarmos esse item basta observarmos que $\mathcal{C}^\alpha(M, \mathbb{R})$ é denso em $\mathcal{C}(M, \mathbb{R})$ (na norma do sup), $\mathcal{L}_\epsilon$ é contínuo (na norma do sup), e aplicarmos o item ii). ■

Decorre do item iv) da proposição anterior que o raio espectral de $\mathcal{L}_\epsilon$ é um autovalor de $\mathcal{L}_\epsilon^*$ (veja teorema 2.9).

Ao longo do texto descobrimos que, para todo $t \in T$, $\mathcal{L}_{f_t,\phi_t}$ tem um gap espectral em $\mathcal{C}^\alpha(M,\mathbb{R})$ com o raio espectral como autovalor dominante; não necessariamente essa propriedade poderia ser herdada por $\mathcal{L}_\epsilon$. Iremos denotar o operador não-perturbado $\mathcal{L}_{f_{t_0},\phi_{t_0}}$ por $\mathcal{L}_0$ e seu raio espectral por λ_0; diremos que (f,ϕ) tem $\mathcal{C}^0-$**estabilidade espectral sob perturbações aleatórias** se existe $\epsilon' > 0$ tal que: para todo $\epsilon \leq \epsilon'$ temos

1. $\mathcal{L}_\epsilon$ tem o mesmo tipo de gap espectral de $\mathcal{L}_0$, ou seja, $\mathcal{L}_\epsilon(\mathcal{C}^\alpha(M,\mathbb{R})) \subset \mathcal{C}^\alpha(M,\mathbb{R})$ e $spec(\mathcal{L}_{\epsilon|_{\mathcal{C}^\alpha(M,\mathbb{R})}}) = \{\lambda_\epsilon\} \cup \Sigma_\epsilon$; onde λ_ϵ é o maior autovalor de $\mathcal{L}_{\phi|_{\mathcal{C}^\alpha(M,\mathbb{R})}}$, λ_ϵ tem um autoespaço unidimensional associado e $\Sigma_\epsilon \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| < \lambda_{1,\epsilon}\}$ para $\lambda_{1,\epsilon} < \lambda_\epsilon$;
2. $\lambda_\epsilon \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} \lambda_0$;
3. existe e pertence a $\mathcal{C}^0(M,\mathbb{R})$ o $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\mathcal{L}_\epsilon}{\lambda_\epsilon}\right)^n(1) := h_\epsilon$, e denotando $h_0 := \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\mathcal{L}_0}{\lambda_0}\right)^n(1)$ teremos que $\lim\limits_{\epsilon\to 0}||h_\epsilon - h_0||_0 = 0$;
4. Se P_ϵ é a projeção sobre $\ker(\lambda_\epsilon I - \mathcal{L}_{\epsilon|_{\mathcal{C}^\alpha(M,\mathbb{R})}})$ e P_0 é a projeção sobre $\ker(\lambda_0 I - \mathcal{L}_{0|_{\mathcal{C}^\alpha(M,\mathbb{R})}})$ então: dada $g \in \mathcal{C}^\alpha(M;\mathbb{R})$, temos $\lim\limits_{\epsilon\to 0}|P_\epsilon(g) - P_0(g)| = 0$.

Teorema 2.34 ($\mathcal{C}^0-$Estabilidade espectral)**.** *Seja $(f,\phi) \in \mathcal{G}$, então: (f,ϕ) tem $\mathcal{C}^0-$estabilidade espectral sob perturbações aleatórias.*

Prova. 1)] Seja ν_ϵ uma probabilidade conforme de $\mathcal{L}_\epsilon$ associada ao raio espectral, ou seja, $\mathcal{L}_\epsilon^*(\nu_\epsilon) = \lambda_\epsilon\nu_\epsilon$. Pela proposição anterior sabemos que $\mathcal{L}_\epsilon(\Lambda_{1,\delta}) \subset \Lambda_{\rho,\delta}$, assim podemos repetir as provas da proposição 2.18, corolário 2.19 e teorema 2.20; obtendo então que $spec(\mathcal{L}_{\epsilon|_{\mathcal{C}^\alpha(M,\mathbb{R})}}) = \{\lambda_\epsilon\} \cup \Sigma_\epsilon$, $\Sigma_\epsilon \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| < \lambda_{1,\epsilon}\}$ para $\lambda_{1,\epsilon} < \lambda_\epsilon$, $\mathcal{C}^\alpha(M,\mathbb{R}) = \ker(\mathcal{L}_{\epsilon|\mathcal{C}^\alpha} - \lambda_\epsilon I) \oplus E_0$ onde $\ker(\mathcal{L}_{\epsilon|\mathcal{C}^\alpha} - \lambda_\epsilon I) = \{ah_\epsilon : a \in \mathbb{R} \text{ e } h = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\mathcal{L}_\epsilon}{\lambda_\epsilon}\right)^n(1)\}$, $E_0 := \{\varphi \in \mathcal{C}^\alpha(M,\mathbb{R}) : \int \varphi d\nu_\epsilon = 0\}$. Ao longo da prova descobrimos que: se $\varphi \in E_0$, então

$$||(\frac{\mathcal{L}_\epsilon}{\lambda_\epsilon})^n(\varphi)||_\alpha \leq ||\varphi||_\alpha 2mC\Delta\tau^n;$$

desse modo, dado $\beta > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $||\left(\frac{\mathcal{L}_\epsilon}{\lambda_\epsilon}\right)^n(1) - h_\epsilon||_\alpha < \beta$ e $||\left(\frac{\mathcal{L}_0}{\lambda_0}\right)^n(1) - h_0||_\alpha < \beta$, para todo $\epsilon \leq \epsilon'$.

2)] A prova é uma repetição do argumento usado no item i) do teorema sobre estabilidade estatística $\mathcal{C}^0$ (teorema 2.30). Seja ν_ϵ uma probabilidade conforme associada ao raio espectral de $\mathcal{L}_\epsilon$ e $\hat{\mathcal{L}}_\epsilon := \frac{\mathcal{L}_\epsilon}{\lambda_\epsilon}$. Sabemos que $\int \tilde{\mathcal{L}}_\epsilon^n(1)d\nu_\epsilon = 1, \forall n \in \mathbb{N}$ e $\epsilon \leq \epsilon'$. Como

$\tilde{\mathcal{L}}_\epsilon^n(1)$ é sempre contínuo, existirá $x \in M$ tal que $\tilde{\mathcal{L}}_\epsilon^n(1)(x) = 1$ (x depende de n e ϵ), assim $||\tilde{\mathcal{L}}_\epsilon^n(1)||_0 \geq 1$. Por outro lado: como $\tilde{\mathcal{L}}_\epsilon^n(1) \in \Lambda_{1,\delta}, \forall n \in \mathbb{N}$ e $\epsilon \leq \epsilon'$, teremos

$$|\tilde{\mathcal{L}}_\epsilon^n(1)|_\alpha \leq m \inf \tilde{\mathcal{L}}_\epsilon^n(1) \leq m \cdot \tilde{\mathcal{L}}_\epsilon^n(1)(x) \leq m, \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } \epsilon \leq \epsilon';$$

em particular

$$|\tilde{\mathcal{L}}_\epsilon^n(1)(y) - 1| \leq m \cdot d(y,x)^\alpha \leq m \cdot diam(M)^\alpha \Rightarrow ||\tilde{\mathcal{L}}_\epsilon^n(1)||_0 \leq 1 + m \cdot diam(M)^\alpha,$$

desse modo

$$1 \leq ||\tilde{\mathcal{L}}_\epsilon^n(1)||_0 \leq 1 + m \cdot diam(M)^\alpha, \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } \epsilon \leq \epsilon'.$$

Sendo assim; $\frac{1}{n} \log ||\tilde{\mathcal{L}}_\epsilon^n(1)||_0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ de forma uniforme em relação a ϵ, ou seja, $\frac{1}{n} \log ||\mathcal{L}_\epsilon^n(1)||_0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lambda_\epsilon$ de forma uniforme em relação a ϵ.

Tomemos $\beta > 0$; pela discussão anterior, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \frac{1}{n_0} \log ||\mathcal{L}_\epsilon^{n_0}(1)||_0 - \lambda_\epsilon \right| < \frac{\beta}{3}, \epsilon \leq \epsilon'.$$

Pelo teorema sobre estabilidade estatística $\mathcal{C}^0$, como

$$(f_t, \phi_t) \xrightarrow[t \to t_0]{} (f, \phi), \quad \text{e} \quad \operatorname{supp} \theta_\epsilon \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} \{t_0\},$$

e pelo fato de

$$||\mathcal{L}_\epsilon(g) - \mathcal{L}_0(g)||_0 \leq \int ||\mathcal{L}_t(g) - \mathcal{L}_0(g)||_0 d\theta_\epsilon,$$

teremos que: para todo $g \in \mathcal{C}^\alpha(M, \mathbb{R})$, $\lim\limits_{\epsilon \to 0} ||\mathcal{L}_\epsilon(g) - \mathcal{L}_0(g)||_0 = 0$; logo existe $\epsilon_\beta > 0$ tal que: se $\epsilon \leq \epsilon_\beta$ então

$$\left| \frac{1}{n_0} \log ||\mathcal{L}_\epsilon^{n_0}(1)||_0 - \frac{1}{n_0} \log ||\mathcal{L}_0^{n_0}(1)||_0 \right| < \frac{\beta}{3}.$$

Desse modo, para $\epsilon \leq \epsilon_\beta$:

$$|\lambda_\epsilon - \lambda_0| \leq \left| \frac{1}{n_0} \log ||\mathcal{L}_\epsilon^{n_0}(1)||_0 - \lambda_\epsilon \right| + \left| \frac{1}{n_0} \log ||\mathcal{L}_0^{n_0}(1)||_0 - \lambda_0 \right| +$$

$$+ \left| \frac{1}{n_0} \log ||\mathcal{L}_\epsilon^{n_0}(1)||_0 - \frac{1}{n_0} \log ||\mathcal{L}_0^{n_0}(1)||_0 \right| < \beta.$$

Assim $\lambda_\epsilon \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} \lambda_0$.

3)] *Afirmação:* Dado $n_0 \in \mathbb{N}$, $\beta > 0$ e $g \in \mathcal{C}^\alpha(M; \mathbb{R})$, existe $\epsilon_{\beta,n_0} > 0$ tal que: se $\epsilon \leq \epsilon_{\beta,n_0}$ então $||\mathcal{L}_\epsilon^{n_0}(g) - \mathcal{L}_0^{n_0}(g)||_0 < \beta$.

Com efeito; a prova será feita por indução, o caso $n_0 = 1$ é válido pela discussão anterior. Suponhamos que a afirmação é válida para $n_0 = k - 1$. Notemos que

$$||\mathcal{L}_\epsilon^k(g) - \mathcal{L}_0^k(g)||_0 \leq ||\mathcal{L}_\epsilon(\mathcal{L}_\epsilon^{k-1}(g)) - \mathcal{L}_\epsilon(\mathcal{L}_0^{k-1}(g))||_0 + ||\mathcal{L}_\epsilon(\mathcal{L}_0^{k-1}(g)) - \mathcal{L}_0(\mathcal{L}_0^{k-1}(g))||_0 \leq$$

$$[4mC\Delta\tau + \int deg(f_t)\exp^{\sup\phi_t} d\theta_\epsilon(t)]||\mathcal{L}_\epsilon^{k-1}(g) - \mathcal{L}_0^{k-1}(g)||_0 + ||\mathcal{L}_\epsilon(\mathcal{L}_0^{k-1}(g)) - \mathcal{L}_0(\mathcal{L}_0^{k-1}(g))||_0;$$

logo, usando a hipótese de indução e a estabilidade estatística e que para todo $g \in \mathcal{C}^\alpha(M, \mathbb{R})$, $\lim\limits_{\epsilon\to 0}||\mathcal{L}_\epsilon(g) - \mathcal{L}_0(g)||_0 = 0$; teremos que a afirmação é valida para $n_0 = k$.

Seja $\beta > 0$, no tem 1) já vimos que existe $n_0 \in N$ tal que $||\left(\frac{\mathcal{L}_\epsilon}{\lambda_\epsilon}\right)^n(1) - h_\epsilon||_\alpha < \frac{\beta}{3}$ e $||\left(\frac{\mathcal{L}_0}{\lambda_0}\right)^n(1) - h_0||_\alpha < \frac{\beta}{3}$, para todo $\epsilon \leq \epsilon'$. Pela discussão anterior e pelo item i) do teorema sobre estabilidade estatística, existe $\epsilon_\beta > 0$ tal que: se $\epsilon \leq \epsilon_\beta$ então $||\mathcal{L}_\epsilon^{n_0}(1) - \mathcal{L}_0^{n_0}(1)||_0 < \frac{\beta}{3}$. Sendo assim, se $\epsilon \leq \min\{\epsilon', \epsilon_\beta\}$:

$$||h_\epsilon - h_0||_0 \leq ||\left(\frac{\mathcal{L}_\epsilon}{\lambda_\epsilon}\right)^n(1) - h_\epsilon||_0 + ||\left(\frac{\mathcal{L}_0}{\lambda_0}\right)^n(1) - h_0||_0 + ||\left(\frac{\mathcal{L}_\epsilon}{\lambda_\epsilon}\right)^{n_0}(1) - \left(\frac{\mathcal{L}_0}{\lambda_0}\right)^{n_0}(1)||_0 < \beta.$$

Decorre então que $\lim\limits_{\epsilon\to 0}||h_\epsilon - h_0||_0 = 0$.

4)] A prova é uma repetição do argumento usado no item iii) do teorema sobre estabilidade estatística $\mathcal{C}^0$.

Notemos inicialmente que $P_\epsilon(g) = \int g d\nu_\epsilon$ e $P_0(g) = \int g d\nu_0$. Seja $g \in \mathcal{C}^\alpha(M, \mathbb{R})$. Sabemos pelo gap espectral (item 1)) que $g = u_\epsilon + t_\epsilon h_\epsilon$, para $\int u_\epsilon d\nu_\epsilon = 0$ e $t_\epsilon \in \mathbb{R}$; logo

$$\int g d\nu_\epsilon \to \int g d\nu_0 \Leftrightarrow t_\epsilon \xrightarrow[\epsilon\to 0]{t} 0 \ .$$

Notemos que $|t_\epsilon| = |\int g d\nu_\epsilon| \leq ||g||_0$ e $||u_\epsilon||_\alpha \leq ||g||_\alpha + ||g||_0(\max\{m, 1 + m \cdot diam(M)^\alpha\})$. Se $u_\epsilon = 0$ então $||\tilde{\mathcal{L}}_\epsilon^n(g) - t_\epsilon h_\epsilon|| = 0$; se $u_\epsilon \neq 0$, aplicando as estimativas de convergência do gap espectral teremos:

$$||\tilde{\mathcal{L}}_\epsilon^n(g) - t_\epsilon h_\epsilon||_\alpha \leq \big(||g||_\alpha + ||g||_0(\max\{m, 1 + m \cdot diam(M)^\alpha\})\big)2mC\Delta\tau^n.$$

Assim:

$$|t_\epsilon - t_0| \leq \left|\left|\frac{\tilde{\mathcal{L}}_\epsilon^n(g)}{h_\epsilon} - t_\epsilon\right|\right|_0 + \left|\left|\frac{\tilde{\mathcal{L}}_0^n(g)}{h_0} - t_0\right|\right|_0 + \left|\left|\frac{\tilde{\mathcal{L}}_\epsilon^n(g)}{h_\epsilon} - \frac{\tilde{\mathcal{L}}_0^n(g)}{h_0}\right|\right|_0 \leq$$

$$\leq \left|\left|\tilde{\mathcal{L}}_\epsilon^n(g) - t_\epsilon h_\epsilon\right|\right|_0 \cdot \left|\left|\frac{1}{h_\epsilon}\right|\right|_0 + \left|\left|\tilde{\mathcal{L}}_0^n(g) - t_0 h_0\right|\right|_0 \cdot \left|\left|\frac{1}{h_0}\right|\right|_0 + \left|\left|\frac{\tilde{\mathcal{L}}_\epsilon^n(g)}{h_\epsilon} - \frac{\tilde{\mathcal{L}}_0^n(g)}{h_0}\right|\right|_0;$$

pela discussão anterior, o item 3) e a *Afirmação* presente no item 3) teremos que

$$t_\epsilon \xrightarrow[\epsilon\to 0]{} t_0.$$

■

2.1.5 Caso $\mathcal{C}^r$: Gap espectral, estabilidade estatística e espectral.

Até o momento o máximo que exigimos sobre a dinâmica é que ela fosse Lipschitz, e sobre o potencial apenas que fosse Hölder. A partir desse momento exigiremos diferenciabilidade de ambos e, reformulando a hipótese (P') em termos de diferenciabilidade, obteremos versões mais fortes dos resultados de estabilidade.

Iremos continuar supondo que M é uma variedade riemanniana $d-$dimensional compacta conexa e que $f : M \to M$ satisfaz as hipóteses (H1) e (H2'), o que pediremos a mais é que f seja um difeomorfismo local $\mathcal{C}^r(r \geq 1)$. Sobre o potencial $\phi : M \to \mathbb{R}$, assumiremos que $\phi \in \mathcal{C}^r(M, \mathbb{R})$ e satisfaz a seguinte versão diferenciável da hipótese (P'):

$$\text{(P")} \sup \phi - \inf \phi < \varepsilon_\phi \quad e \quad \max_{1 \leq s \leq r} ||D^s \phi||_0 < \varepsilon'_\phi,$$

para algum ε'_ϕ, pequeno, dependendo somente de f e r. As constantes que envolvem (H1) e (H2') e (P") devem cumprir a seguinte relação:

$$\Xi_r := e^{\varepsilon_\phi} \cdot \frac{qL^r + (deg(f) - q)\sigma^{-r}}{deg(f)} < 1.$$

Notemos que se tomarmos ε'_ϕ suficientemente pequeno, teremos que (P") implica (P'), desse modo o contexto atual é um caso particular do contexto já estudado.

Inicialmente provemos que $\mathcal{L}_\phi$ tem um gap espectral em $\mathcal{C}^r(M, \mathbb{R})$. A estratégia da prova é a mesma já utilizada, ou seja, encontrar um cone invariante cuja imagem tem diâmetro finito. Passemos então a definição do cone:

$$\Lambda^r_\kappa := \left\{ \varphi \in \mathcal{C}^r(M, \mathbb{R}) : \varphi > 0 \quad \text{e} \quad \frac{||D^s \varphi||_0}{\inf \varphi} \leq \kappa c^{r-s}_{r,s}, \quad \text{para} \quad s = 1, \ldots, r \right\},$$

onde $c_{r,r} = 1$, desprezando o caso quando $r = s$ temos que $c_{r,s}$ só depende de s; $c_{r,s}$ são constantes suficientemente pequenas para que ocorra a invariância dos cones. Quando $r = 1$ temos

$$\Lambda^1_\kappa = \left\{ \varphi \in \mathcal{C}^1(M, \mathbb{R}) : \varphi > 0 \quad \text{e} \quad \frac{||D^1 \varphi||_0}{\inf \varphi} \leq \kappa \right\}.$$

O próximo lema é extremamente útil na prova da invariância do cone quando $r > 1$.

Lema 2.35. *Suponha que para todo $\kappa \geq \kappa_1$ e $i < r > 1$ temos $\mathcal{L}_\phi(\Lambda^i_\kappa) \subset \Lambda^i_{\hat{\lambda}\kappa}$. Se para $\kappa_2 > 0$ e para todo $\varphi \in \Lambda^r_\kappa$, com $\kappa \geq \kappa_2$, temos $||D^r(\mathcal{L}_\phi \varphi)||_0 \leq \kappa$, então $\mathcal{L}_\phi(\Lambda^r_\kappa) \subset \Lambda^r_{\hat{\lambda}\kappa}$ para todo $\kappa \geq \kappa_0$.*

Prova. Seja $\kappa_0 := \max\{\kappa_2, \kappa_1 \cdot c(r, r-1)^{1-r}\}$. Tomemos $\varphi \in \Lambda^r_\kappa$, para $\kappa \geq \kappa_0$, em particular $||D^i(\varphi)||_0 \leq \kappa c^{r-i}_{r,i}$, para $i = 1, \ldots r-1$. Como $c_{r,s}$ só depende de s (retirando a diagonal) temos que $\varphi \in \Lambda^i_{\kappa c^{r-i}_{r,i}}$, para $i = 1, \ldots r-1$. Usando a hipótese temos que $\mathcal{L}_\phi \in \Lambda^i_{\hat{\lambda}\kappa c^{r-i}_{r,i}}$, em particular $||D^i(\mathcal{L}_\phi\varphi)||_0 \leq \hat{\lambda}\kappa c^{r-i}_{r,i}$, para $i = 1, \dots r-1$. Como $||D^r(\mathcal{L}_\phi\varphi)||_0 \leq \kappa$, para $\kappa \geq \kappa_0$, temos $\mathcal{L}_\phi\varphi \in \Lambda^r_{\hat{\lambda}\kappa}$. ■

Teorema 2.36. *Se tomarmos ε'_ϕ suficientemente pequeno (ε'_ϕ só depende de f e r), existe uma constante positiva κ_0 e $0 < \hat{\lambda} < 1$ tal que $\mathcal{L}_\phi(\Lambda^r_\kappa) \subset \Lambda^r_{\hat{\lambda}\kappa}$, para todo $\kappa \geq \kappa_0$.*

Prova. Suponhamos $r = 1$. Tomemos $\kappa > 0$ e $\varphi \in \Lambda^1_\kappa$. Para cada $x \in M$ temos

$$D(\mathcal{L}_\phi\varphi)(x) = \sum_{j=1}^{deg(f)} e^{\phi(x_j)} D\varphi(x_j) Df_j^{-1}(x) + \sum_{j=1}^{deg(f)} \varphi(x_j) e^{\phi(x_j)} D\phi(x_j) Df_j^{-1}(x),$$

logo

$$||D(\mathcal{L}_\phi\varphi)(x)|| \leq \sum_{j=1}^{deg(f)} |e^{\phi(x_j)}| ||D\varphi(x_j) Df_j^{-1}(x)|| + |\varphi(x_j) e^{\phi(x_j)}| ||D\phi(x_j) Df_j^{-1}(x)||.$$

Pelas hipóteses (H1) e (H2'), $||Df_j^{-1}(x)|| \leq L$ para $j = 1, \dots, q$ e $||Df_j^{-1}(x)|| \leq \sigma^{-1}$ para $j = q+1, \dots, deg(f)$; desse modo

$$\begin{aligned}
\frac{||D(\mathcal{L}_\phi\varphi)(x)||}{\inf_{z \in M} |\mathcal{L}_\phi\varphi(z)|} &\leq \frac{\sum_{j=1}^q L|e^{\phi(x_j)}| \, ||D\varphi||_0 + \sum_{j=q+1}^{deg(f)} \sigma^{-1}|e^{\phi(x_j)}| \, ||D\varphi||_0}{deg(f) e^{\inf \phi} \inf \varphi} \\
&+ \frac{\sum_{j=1}^q L|\varphi(x_j) e^{\phi(x_j)}| \, ||D\phi||_0 + \sum_{j=q+1}^{deg(f)} \sigma^{-1}|\varphi(x_j) e^{\phi(x_j)}| \, ||D\phi||_0}{deg(f) e^{\inf \phi} \inf \varphi} \\
&\leq \Xi_1 \cdot \kappa + \frac{\sup \varphi}{\inf \varphi} \cdot ||D\phi||_0 \cdot \Xi_1 \\
&\leq \Xi_1 \cdot \{\kappa + \frac{\inf \varphi + ||D\varphi||_0 diam(M)}{\inf \varphi} \cdot ||D\phi||_0\} \\
&\leq \Xi_1 \cdot \{\kappa + (1 + \kappa \cdot diam(M)) \varepsilon' \phi\}
\end{aligned}$$

Desse modo, tomando ε'_ϕ suficientemente pequeno teremos que $\mathcal{L}_\phi(\Lambda^r_\kappa) \subset \Lambda^r_{\hat{\lambda}\kappa}$, para todo $\kappa \geq 1$.

Consideremos agora o caso $r = 2$. Tomemos $\kappa > 0$ e $\varphi \in \Lambda^2_\kappa$. Usando a regra da cadeia temos que $D^2(\mathcal{L}_\phi)(x)$ é uma soma dos seguintes sete termos:

$$\begin{gathered}
D^2\phi(x_j)[Df_j^{-1}(x)]^2 e^{\phi(x_j)} \varphi(x_j) \\
D\phi(x_j) D^2 f_j^{-1}(x) e^{\phi(x_j)} \varphi(x_j) \\
D\phi(x_j) Df_j^{-1}(x) e^{\phi(x_j)} \varphi(x_j) \\
D\varphi(x_j) Df_j^{-1}(x) e^{\phi(x_j)} D\phi(x_j) Df_j^{-1}(x) \\
\varphi(x_j) D\phi(x_j) Df_j^{-1}(x) e^{\phi(x_j)} D\phi(x_j) Df_j^{-1}(x) \\
e^{\phi(x_j)} D^2\varphi(x_j)[Df_j^{-1}(x)]^2 \\
e^{\phi(x_j)} D\varphi(x_j) D^2 f_j^{-1}(x).
\end{gathered}$$

Como $\max_{1\leq s\leq r} ||D^s\phi||_0 < \varepsilon'_\phi$, desde que tomemos ε'_ϕ pequeno, os cinco primeiros termos estão controlados. Desse modo existe uma constante uniforme $C > 0$ dependendo somente de f tal que

$$\begin{aligned}
\frac{||D^2(\mathcal{L}_\phi\varphi)(x)||}{\inf|\mathcal{L}_\phi\varphi|} &\leq C\varepsilon'_\phi + e^{\varepsilon_\phi}\frac{||D^2\varphi||_0}{\inf\varphi}\cdot\frac{qL^2+(deg(f)-q)\sigma^{-2}}{deg(f)}\\
&+ e^{\varepsilon_\phi}\frac{||D\varphi||_0}{\inf\varphi}\max_{x\in M}||D^2f^{-1}(x)||\\
&\leq C\varepsilon'_\phi + \Xi_2\kappa + e^{\varepsilon_\phi}\max_{x\in M}||D^2f^{-1}(x)||\cdot c_{2,0}\kappa;
\end{aligned}$$

assim, desde que tomemos ε'_ϕ e ε_ϕ pequenos, existe uma constante positiva κ_0 tal que $\frac{||D^2(\mathcal{L}_\phi\varphi)||_0}{\inf\mathcal{L}_\phi\varphi} \leq \kappa$, para todo $\kappa \geq \kappa_0$. Aplicando o lema anterior temos que, existe $0 < \hat{\lambda} < 1$ satisfazendo $\mathcal{L}_\phi(\Lambda^2_\kappa) \subset \Lambda^2_{\hat{\lambda}\kappa}$, para todo $\kappa \geq \kappa_0$.

O caso geral é uma computação análoga das derivadas de ordem superior de $\mathcal{L}_\phi\varphi$ através da regra da cadeia e o uso do lema anterior. ■

A partir desse momento fixemos ε'_ϕ e ε_ϕ suficientemente pequenos para que ocorra a invariância do cone.

Proposição 2.37. *Dado $0 < \hat{\lambda} < 1$, o cone $\Lambda^r_{\hat{\lambda}\kappa}$ tem diâmetro finito em relação à métrica projetiva induzida em Λ^r_κ.*

Prova. Basta provarmos que $\theta(\varphi, 1)$ é uniformemente limitado para toda $\varphi \in \Lambda^r_{\hat{\lambda}\kappa}$ com $\inf\varphi = 1$. Seja então $\varphi \in \Lambda^r_{\hat{\lambda}\kappa}$ com $\inf\varphi = 1$,

Afirmação 1: $\beta(\varphi, 1) \leq \frac{1}{1-\hat{\lambda}}$.

Com efeito; provaremos que para $t_0 := \frac{1}{1-\hat{\lambda}}$ ocorrerá que $t_0\varphi - 1 \in \Lambda^r_\kappa$. Como $\hat{\varphi} < 1$ e $\inf\varphi = 1$ temos $t\varphi - 1 > 0$, e

$$\frac{||D^s(t_0\varphi-1)||_0}{\inf(t_0\varphi-1)} = \frac{t_0||D^s\varphi||_0}{t_0\inf\varphi - 1} \leq \frac{t_0}{t_0-1}\cdot\hat{\lambda}\kappa c^{r-s}_{r,s} \leq \kappa.$$

Afirmação 2: $\alpha(\varphi, 1) \geq \frac{1}{\hat{\lambda}+1+\kappa c^{r-1}_{r,1} diam(M)}$.

Com efeito; provaremos que para $t_1 := \frac{1}{\hat{\lambda}+1+\kappa c^{r-1}_{r,1}\mathrm{diam}(M)}$ ocorrerá que $1 - t_1\varphi \in \Lambda^r_\kappa$. Temos que $1 - t_1\varphi \in \Lambda^r_\kappa$ e

$$\frac{||D^s(1-t_1\varphi)||_0}{\inf(1-t_1\varphi)} \leq \frac{t_1||D^s\varphi||_0}{1-t_1\sup\varphi} \leq \frac{t_1}{1-\kappa c^{r-1}_{r,1}\mathrm{diam}(M)t_1 - t_1}\cdot\hat{\lambda}\kappa c^{r-s}_{r,s} \leq \kappa.$$

Decorre das *Afirmações 1 e 2* que $\theta(\varphi, 1) \leq \log\frac{\hat{\lambda}+1+\kappa c^{r-1}_{r,1}\mathrm{diam}(M)}{1-\hat{\lambda}}$. ■

Teorema 2.38 (Gap espectral em $\mathcal{C}^r$)**.** *Existe um $0 < \lambda_0 < \lambda$ tal que $\mathcal{L}_{\phi|\mathcal{C}^r}$ admite uma decomposição de seu espectro dada por: spec$(\mathcal{L}_{\phi|\mathcal{C}^r}) = \{\lambda\} \cup \Sigma_0$, onde $\Sigma_0 \subset B(0, \lambda_0)$ e λ é autovalor com autoespaço unidimensional.*

Prova. Seja $\varphi, \psi \in \Lambda^r_{\kappa_0}$ e θ_+ a métrica projetiva associada ao cone das funções positivas. Pelo teorema B.4, para $n, k \geq 1$ temos:

$$\theta_+\big(\tilde{\mathcal{L}}_\phi^{n+k}(\varphi), \tilde{\mathcal{L}}_\phi^{n}(\psi)\big) \leq \theta_{\kappa_0}\big(\tilde{\mathcal{L}}_\phi^{n+k}(\varphi), \tilde{\mathcal{L}}_\phi^{n}(\psi)\big) \leq \Delta\tau^{n-1}, \tag{2.6}$$

onde $0 < \tau < 1$ e Δ é o $\theta_{\kappa_0}-$diâmetro do cone $\Lambda^r_{\lambda\kappa_0}$. Notemos que $\big(\varphi_n := \tilde{\mathcal{L}}_\phi^n(\varphi)\big)_{n\geq 1}$ é Cauchy em relação a θ_+, já sabemos que θ_+ é completa (veja exemplo B.3), logo existe $h_\varphi \in C_+$ tal que $\tilde{\mathcal{L}}_\phi^n(\varphi) \xrightarrow{\theta_+} h_\varphi$ e $\int h_\varphi d\nu = \int \varphi d\nu$. Como $\int \tilde{\mathcal{L}}_\phi^n(\varphi) d\nu = \int \varphi d\nu$ podemos aplicar a proposição B.1 na norma do sup e na semi-norma da integral e assim $\tilde{\mathcal{L}}_\phi^n(\varphi) \xrightarrow{\mathcal{C}^0} h_\varphi$, desse modo $\mathcal{L}_\phi h_\varphi = \lambda h_\varphi$.

Como $\int \varphi_n d\nu = \int \varphi_m d\nu$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$ e φ_n são funções contínuas estritamente positivas então

$$\beta_{\kappa_0}(\varphi_n, \varphi_m) \geq 1 \geq \alpha_{\kappa_0}(\varphi_n, \varphi_m), \forall n, m \in \mathbb{N};$$

usando que φ_n é uma sequência de Cauchy em θ_{κ_0} temos que $\beta(\varphi_n, \varphi_m) \xrightarrow[n,m\to+\infty]{} 1$ numa velocidade da ordem de τ^n. Seja $s \in \{1, 2, \ldots, r\}$; então:

$$||D^s(\varphi_n - \varphi_m)||_0 \leq ||D^s(\varphi_n - \beta_{\kappa_0}(\varphi_n, \varphi_m)\cdot\varphi_m)||_0 + |\beta_{\kappa_0}(\varphi_n, \varphi_m) - 1| \cdot ||D^s\varphi_m||_0 \leq$$

$$c_{r,s}^{r-s}\kappa_0 \inf(\varphi_n - \beta_{\kappa_0}(\varphi_n, \varphi_m)\cdot\varphi_m) + |\beta_{\kappa_0}(\varphi_n, \varphi_m) - 1| \cdot ||D^s\varphi_m||_0 \leq$$

$$c_{r,s}^{r-s}\kappa_0 ||\varphi_n - \beta_{\kappa_0}(\varphi_n, \varphi_m)\cdot\varphi_m)||_0 + |\beta_{\kappa_0}(\varphi_n, \varphi_m) - 1| \cdot ||D^s\varphi_m||_0,$$

desse modo

$$||\varphi_n - h_\varphi||_r \leq C||\varphi||_r\tau^n, \forall n \in \mathbb{N},$$

e podemos tomar C uniforme para dinâmicas e potenciais próximos. Em particular $h_\varphi \in \Lambda^r_{\kappa_0}$.

Afirmação 1: $\ker(\mathcal{L}_\phi - \lambda I) \cap \mathcal{C}^r(M, \mathbb{R})$ *tem dimensão 1.*

Com efeito; seja $h := \lim\limits_{n\to+\infty} \tilde{\mathcal{L}}_\phi^n(1)$ e $u \in \ker(\mathcal{L}_{\phi|\mathcal{C}^r(M,\mathbb{R})} - \lambda I) \cap \Lambda^r_{\kappa_0}$, por (2.6) existe $t_1 > 0$ tal que $t_1 u = h$; desse modo, pela discussão anterior, para toda $\varphi \in \Lambda^r_{\kappa_0}$ temos $\tilde{\mathcal{L}}_\phi^n(\varphi) \xrightarrow{\mathcal{C}^r} \int \varphi d\nu \cdot h$. Dado $v \in \ker(\mathcal{L}_{\phi|\mathcal{C}^r(M,\mathbb{R})} - \lambda I)$, existe um número $B > 0$ tal que $v + B$ é um elemento de $\Lambda^r_{\kappa_0}$; logo $v = \lim \tilde{\mathcal{L}}_\phi^n(v + B) - \lim \tilde{\mathcal{L}}_\phi^n(B) = \int v d\nu \cdot h$, vemos então que $\ker(\mathcal{L}_{\phi|\mathcal{C}^r(M,\mathbb{R})} - \lambda I) = \{th : t \in \mathbb{R}\}$.

Seja $E_1 := \ker(\mathcal{L}_{\phi|\mathcal{C}^r(M,\mathbb{R})} - \lambda I)$ e $E_0 := \{\varphi \in \mathcal{C}^r(M, \mathbb{R}) : \int \varphi d\nu = 0\}$; seja h definido na afirmação anterior, então $\int h d\nu = 1$ e $E_1 = \{t \cdot h : t \in \mathbb{R}\}$. Observemos que E_0, E_1 são $\mathcal{L}_{\phi|\mathcal{C}^r(M,\mathbb{R})}-$invariantes e $\mathcal{C}^r(M, \mathbb{R}) = E_1 \oplus E_0$.

Afirmação 2: $spec(\tilde{\mathcal{L}}_{\phi|E_0}) \subset B(0,\lambda_1)$, *onde* $0 < \lambda_1 < 1$.

Com efeito; dotemos E_0 da norma $\mathcal{C}^r$ e tomemos $\varphi \in E_0$ com $||\varphi||_r = 1$. Existe um número $B > 0$ tal que $\varphi + B \in \Lambda^r_{\kappa_0}$ e tal B é o mesmo para qualquer função de norma $\mathcal{C}^r$ igual a 1. Pelas discussões anteriores, sabemos que $\tilde{\mathcal{L}}^n_\phi(\varphi+B) \xrightarrow{\mathcal{C}^r} \int(\varphi+B)d\nu\cdot h = B\cdot h$; assim:

$$||\tilde{\mathcal{L}}^n_\phi(\varphi)||_r = ||\tilde{\mathcal{L}}^n_\phi(\varphi + B) - \tilde{\mathcal{L}}^n_\phi(B)||_r \leq ||\tilde{\mathcal{L}}^n_\phi(\varphi + B) - B \cdot h||_r +$$
$$||\tilde{\mathcal{L}}^n_\phi(B) - B \cdot h||_r \leq (1 + 2B)C\tau^n.$$

Logo $\tilde{\mathcal{L}}^n_{\phi|E_0}$ é uma contração na norma $\mathcal{C}^r$ para n suficientemente grande e assim $spec(\tilde{\mathcal{L}}_{\phi|E_0}) \subset B(0,\lambda_1)$, onde $0 < \lambda_1 < 1$.

Decorre então das afirmações o gap espetral. ■

Nesse momento estamos interessados em provar uma versão forte da estabilidade estatística. Seja $\mathcal{G}^r := \{(f,\phi); f : M \to M$ e $\phi : M \to \mathbb{R}$ satisfazem as hipóteses (H1), (H2') e (P"), para o mesmo r e $q\}$, dotaremos $\mathcal{G}^r$ da topologia $\mathcal{C}^r \times \mathcal{C}^r$. Assim como no caso $\mathcal{C}^0$ precisaremos de um resultado sobre variação do operador de Ruelle-Perron-Frobenius em relação a (f,ϕ).

Proposição 2.39. *Seja* $B(\mathcal{C}^r(M,\mathbb{R}),\mathcal{C}^r(M,\mathbb{R}))$ *o espaço de operadores lineares e contínuos sobre* $\mathcal{C}^r(M,\mathbb{R})$*, onde* $\mathcal{C}^r(M,\mathbb{R})$ *está dotado da topologia* $\mathcal{C}^r$*. Então a função* $\mathcal{G}^r \ni (f,\phi) \mapsto \mathcal{L}_{f,\phi} \in B(\mathcal{C}^r(M,\mathbb{R}),\mathcal{C}^r(M,\mathbb{R}))$ *é contínua, se dotarmos a imagem da topologia forte.*

Prova. Sejam (f,ϕ), $(\tilde{f},\tilde{\phi}) \in \mathcal{G}^r$ com $deg(f) = deg(\tilde{f})$. Fixemos $g \in \mathcal{C}^r(M,\mathbb{R})$ e $x \in M$, então:

$$||D(\mathcal{L}_{\tilde{f},\tilde{\phi}}g)(x) - D(\mathcal{L}_{f,\phi}g)(x)|| \leq$$
$$\sum_{j=1}^{deg(f)} ||e^{\tilde{\phi}(x_j)}Dg(x_j)D\tilde{f}_j^{-1}(x) + g(x_j)e^{\tilde{\phi}(x_j)}D\tilde{\phi}(x_j)D\tilde{f}_j^{-1}(x)$$
$$-e^{\phi(x_j)}Dg(x_j)Df_j^{-1}(x) - g(x_j)e^{\phi(x_j)}D\phi(x_j)Df_j^{-1}(x)||;$$

usando a desigualdade triangular teremos que $D(\mathcal{L}_{\tilde{f},\tilde{\phi}}g)$ converge na topologia $\mathcal{C}^0$ para $D(\mathcal{L}_{f,\phi}g)$ quando $(\tilde{f},\tilde{\phi})$ converge para (f,ϕ). O caso geral segue de maneira natural, desde que computemos as derivadas de ordem superior de $\mathcal{L}_{f,\phi}g$. ■

Teorema 2.40 (Estabilidade estatística $\mathcal{C}^r$)**.** *Tomando* $\mathcal{G}^r$ *como domínio e dotando ele da topologia* $\mathcal{C}^r \times \mathcal{C}^r$*, as seguintes funções variam continuamente:*

i) $(f,\phi) \longmapsto P_{top}(f,\phi)$

ii) $(f,\phi) \longmapsto h_{f,\phi}$*; onde* $h_{f,\phi} = \lim_{n\to+\infty} \tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(1)$*, e estamos dotando a imagem da topologia* $\mathcal{C}^r$*.*

iii) $(f,\phi) \longmapsto \nu_{f,\phi}$*; onde* $\nu_{f,\phi}$ *é a única probabilidade conforme de* $\mathcal{L}_{f,\phi}$ *associada ao raio espectral, e estamos dotando a imagem da topologia fraca***.*

iv) $(f,\phi) \longmapsto \mu_{f,\phi}$*; onde* $\mu_{f,\phi} = h_{f,\phi}\nu_{f,\phi}$*, e estamos dotando a imagem da topologia fraca***.*

Prova. Os itens i) , iii) e iv) decorrem da estabilidade estatística $\mathcal{C}^0$ (veja teorema 2.30), falta provarmos uma versão mais forte do item ii) presente na estabilidade estatística $\mathcal{C}^0$, como veremos a prova é análoga.

ii)] Seja $((f_j,\phi_j))_{j\geq 1}$ com $(f_j,\phi_j) \xrightarrow{\mathcal{C}^r\times\mathcal{C}^r} (f_0,\phi_0)$ e $(f_j,\phi_j) \in \mathcal{G}, \forall j \in \mathbb{N}$; para facilitar a notação, ao longo da prova iremos supor que λ_j o raio espectral de $\mathcal{L}_{f_j,\phi_j}$, $\mathcal{L}_j := \mathcal{L}_{f_j,\phi_j}$, $\tilde{\mathcal{L}}_j := \frac{\mathcal{L}_{f_j,\phi_j}}{\lambda_j}$, $h_j := h_{f_j,\phi_j}$. No teorema anterior descobrimos que

$$||\tilde{\mathcal{L}}^n_j(1) - h_j||_r \leq C\tau^n;$$

onde τ só depende do $\hat{\lambda}$ e C depende continuamente de f e ϕ (na topologia $\mathcal{C}^r \times \mathcal{C}^r$), a partir de j suficientemente grande $\mathcal{L}_j(\Lambda^r_{\kappa_0}) \subset \Lambda^r_{\rho\kappa_0}$, para $\hat{\lambda} \leq \rho < 1$. Desse modo

$$\tilde{\mathcal{L}}^n_j(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{C^r} h_j, \forall j \in \mathbb{N},$$

uniformemente em relação a j. Tomemos $\epsilon > 0$; pela discussão anterior existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$||\tilde{\mathcal{L}}^{n_0}_j(1) - h_j||_r < \frac{\epsilon}{3}, \forall j \in \mathbb{N};$$

como o raio espectral varia continuamente e pela proposição anterior, o operador de Ruelle-Perron-Frobenius normalizado pelo raio espectral varia continuamente, na topologia forte, em relação a (f,ϕ), em particular existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que: se $j \geq j_0$ temos

$$||\tilde{\mathcal{L}}^{n_0}_j(1) - \tilde{\mathcal{L}}^{n_0}_0(1)||_r < \frac{\epsilon}{3}.$$

Sendo assim, para $j \geq j_0$:

$$||h_j - h_0||_0 \leq ||h_j - \tilde{\mathcal{L}}^{n_0}_j(1)||_r + ||\tilde{\mathcal{L}}^{n_0}_j(1) - \tilde{\mathcal{L}}^{n_0}_0(1)||_r + ||\tilde{\mathcal{L}}^{n_0}_0(1) - h_0||_r < \epsilon.$$

$\blacksquare$

O próximo objetivo é obter uma versão mais forte do que a estabilidade espectral $\mathcal{C}^0$. Suporemos que $(f_t, \phi_t) \in \mathcal{G}^r$, $\forall t \in T$, para $\mathcal{G}^r$ definido anteriormente e o muniremos mais uma vez da topologia $\mathcal{C}^r \times \mathcal{C}^r$. Como a topologia $Lip \times \mathcal{C}^\alpha$ é mais fina que a topologia $\mathcal{C}^r \times \mathcal{C}^r$, se a parametrização pelo espaço métrico T é suficientemente "boa"para que exista um ϵ' tal que para todo $\epsilon \leq \epsilon'$ temos $\mathcal{L}_\epsilon$ bem definido (para isso basta por exemplo que a parametrização seja mensurável), então $\mathcal{L}_\epsilon$ tem as mesmas propriedades já expressas na seção sobre $\mathcal{C}^0-$estabilidade espectral. Além destas, se $t \in \operatorname{supp} \theta_\epsilon$, então as constantes presentes nas hipóteses (H1) , (H2') e (P") estarão próximas, fazendo com que $\hat{\lambda}$ associado a (f_{t_0}, ϕ_{t_0}) esteja próximo da respectiva constante associada a (f_t, ϕ_t); desse modo: $\mathcal{L}_{f_t,\phi_t}(\Lambda_{\kappa,\delta}) \subset \Lambda_{\rho_r\kappa,\delta}$, para $\kappa \geq 1$ e $\hat{\lambda} \leq \rho_r < 1$.

Proposição 2.41. *Para todo $\epsilon \leq \epsilon'$ teremos:*

i) $\mathcal{L}_\epsilon(\mathcal{C}^r(M, \mathbb{R})) \subset \mathcal{C}^r(M, \mathbb{R})$;

ii) Existe $0 < \rho_r < 1$ tal que $\mathcal{L}_\epsilon(\Lambda^r_{\kappa_0}) \subset \Lambda^r_{\rho_r\kappa_0}$;

iii) $\mathcal{L}_{\epsilon|\mathcal{C}^r} : \mathcal{C}^r \to \mathcal{C}^r$ é contínuo de dotarmos o domínio e contra-domínio da topologia $\mathcal{C}^r$.

Prova.

i)] Basta usarmos o fato de $\mathcal{L}_t$ preserva $\mathcal{C}^r(M, \mathbb{R})$ e o teorema da convergência dominada.

ii)] Seja $g \in \Lambda^r_{\kappa_0}$, pelo teorema de invariância de cone sabemos que, para todo $t \in T$ temos $\mathcal{L}_t(\Lambda^r_{\kappa_0}) \subset \Lambda^r_{\hat{\lambda}_t\kappa_0}$, já sabemos que para dinâmicas e potenciais próximos podemos uniformizar essa invariância, ou seja, para t próximo de t_0 teremos $\mathcal{L}_t(\Lambda^r_{\kappa_0}) \subset \Lambda^r_{\rho\kappa_0}$. Diminuindo ϵ' se necessário, podemos supor $c_{r,s}$ podem ser tomadas uniformes para $t \in \operatorname{supp}\theta_\epsilon$, logo:

$$||D^s(\mathcal{L}_\epsilon g)||_0 \leq || \int D^s(\mathcal{L}_t g) d\theta_\epsilon(t)||_0 \leq \int \inf_{x \in M} \mathcal{L}_t g d\theta_\epsilon(t) \cdot \rho_r\kappa_0 c^{r-s}_{r,s} \leq \inf \mathcal{L}_\epsilon g \cdot \rho_r\kappa_0 c^{r-s}_{r,s};$$

assim, $\mathcal{L}_\epsilon g \in \Lambda^r_{\rho_r\kappa_0}$.

iii)] Seja $g \in \mathcal{C}^r(M, \mathbb{R})$ e $||g||_r = 1$. Pela prova do teorema sobre o gap espectral em $\mathcal{C}^r$ temos que $||\mathcal{L}_t(g - \int g d\nu_t)||_r \leq \lambda_t C_t \tau$, $\forall t \in T$, pelo item ii) temos que $||\mathcal{L}_t(\int g d\nu_t)||_r \leq [\rho_r\kappa_0 + deg(f_t)e^{\sup \phi_t}]\lambda_t$, para todo t próximo de t_0; sendo assim

$$||\mathcal{L}_t(g)||_r \leq [C_t\tau + \rho_r\kappa_0 + deg(f_t)e^{\sup \phi_t}]\lambda_t,$$

para todo t próximo de t_0.

Pela estabilidade estatística e como

$$(f_t, \phi_t) \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} (f, \phi), \quad \text{e} \quad \operatorname{supp}\theta_\epsilon \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} \{t_0\},$$

podemos diminuir ϵ' se necessário de modo a $||\mathcal{L}_t(g)||_r$ ser uniformemente limitado em relação t e g; como

$$||\mathcal{L}_\epsilon(g)||_r \leq \int ||\mathcal{L}_t(g)||_r d\theta_\epsilon$$

teremos que $\mathcal{L}_{\epsilon|\mathcal{C}^r}$ é contínuo. ■

Diremos que (f, ϕ) tem $\mathcal{C}^r-$**estabilidade espectral sob perturbações aleatórias** se existe $\epsilon' > 0$ tal que: para todo $\epsilon \leq \epsilon'$ temos

1. $\mathcal{L}_\epsilon$ tem o mesmo tipo de gap espectral de $\mathcal{L}_0$, ou seja, $\mathcal{L}_\epsilon(\mathcal{C}^r(M, \mathbb{R})) \subset \mathcal{C}^r(M, \mathbb{R})$ e $spec(\mathcal{L}_{\epsilon|_{\mathcal{C}^r(M,\mathbb{R})}}) = \{\lambda_\epsilon\} \cup \Sigma_\epsilon$; onde λ_ϵ é o maior autovalor de $\mathcal{L}_{\phi|_{\mathcal{C}^\alpha(M,\mathbb{R})}}$, λ_ϵ tem um autoespaço unidimensional associado e $\Sigma_\epsilon \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| < \lambda_{1,\epsilon}\}$ para $\lambda_{1,\epsilon} < \lambda_\epsilon$;

2. $\lambda_\epsilon \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} \lambda_0$;

3. existe e pertence a $\mathcal{C}^r(M, \mathbb{R})$ o $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{\mathcal{L}_\epsilon}{\lambda_\epsilon}\right)^n(1)$, e denotando $h_\epsilon := \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{\mathcal{L}_\epsilon}{\lambda_\epsilon}\right)^n(1)$, $h_0 := \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{\mathcal{L}_0}{\lambda_0}\right)^n(1)$ teremos que $\lim\limits_{\epsilon\to 0} ||h_\epsilon - h_0||_r = 0$;

4. Se P_ϵ é a projeção sobre $\ker(\lambda_\epsilon I - \mathcal{L}_{\epsilon|_{\mathcal{C}^r(M,\mathbb{R})}})$ e P_0 é a projeção sobre $\ker(\lambda_0 I - \mathcal{L}_{0|_{\mathcal{C}^r(M,\mathbb{R})}})$ então: dada $g \in \mathcal{C}^r(M; \mathbb{R})$, temos $\lim\limits_{\epsilon\to 0} |P_\epsilon(g) - P_0(g)| = 0$.

Teorema 2.42 ($\mathcal{C}^r-$Estabilidade espectral)**.** *Seja $(f, \phi) \in \mathcal{G}^r$, para $r \geq 1$, então: (f, ϕ) tem $\mathcal{C}^r-$estabilidade espectral sob perturbações aleatórias.*

Prova. Os itens 1) e 3) seguem o mesmo argumento de versão $\mathcal{C}^0$ e os itens 2) e 4) já estão provados pela $\mathcal{C}^0-$Estabilidade espectral.

1)] Seja ν_ϵ uma probabilidade conforme de $\mathcal{L}_\epsilon$ associada ao raio espectral, ou seja, $\mathcal{L}_\epsilon^*(\nu_\epsilon) = \lambda_\epsilon \nu_\epsilon$. Pela proposição anterior sabemos que $\mathcal{L}_\epsilon(\Lambda^r_{\kappa_0}) \subset \Lambda^r_{\rho\kappa_0}$, assim podemos repetir a prova do teorema sobre o gap espectral em $\mathcal{C}^r(M, \mathbb{R})$; obtendo então que $spec(\mathcal{L}_{\epsilon|_{\mathcal{C}^r(M,\mathbb{R})}}) = \{\lambda_\epsilon\} \cup \Sigma_\epsilon$, $\Sigma_\epsilon \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| < \lambda_{1,\epsilon}\}$ para $\lambda_{1,\epsilon} < \lambda_\epsilon$, $\mathcal{C}^r(M, \mathbb{R}) = \ker(\mathcal{L}_{\epsilon|\mathcal{C}^r} - \lambda_\epsilon I) \oplus E_0$ onde $\ker(\mathcal{L}_{\epsilon|\mathcal{C}^r} - \lambda_\epsilon I) = \{a h_\epsilon : a \in \mathbb{R} \text{ e } h = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{\mathcal{L}_\epsilon}{\lambda_\epsilon}\right)^n(1)\}$, $E_0 := \{\varphi \in \mathcal{C}^r(M, \mathbb{R}) : \int \varphi d\nu_\epsilon = 0\}$. Ao longo da prova descobrimos que: se $\varphi \in E_0$, então

$$||(\frac{\mathcal{L}_\epsilon}{\lambda_\epsilon})^n(\varphi)||_r \leq C\tau^n;$$

com C e τ independentes de ϵ. Em particular, dado $\beta > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $||\Big(\frac{\mathcal{L}_\epsilon}{\lambda_\epsilon}\Big)^n(1) - h_\epsilon||_r < \beta$ e $||\Big(\frac{\mathcal{L}_0}{\lambda_0}\Big)^n(1) - h_0||_r < \beta$, para todo $\epsilon \leq \epsilon'$.

3)] Pelo teorema sobre estabilidade estatística $\mathcal{C}^r$, como

$$(f_t, \phi_t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} (f, \phi), \quad \text{e} \quad \operatorname{supp} \theta_\epsilon \underset{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} \{t_0\},$$

e pelo fato de

$$||\mathcal{L}_\epsilon(g) - \mathcal{L}_0(g)||_r \leq \int ||\mathcal{L}_t(g) - \mathcal{L}_0(g)||_r d\theta_\epsilon,$$

teremos que: para todo $g \in \mathcal{C}^r(M, \mathbb{R})$, $\lim_{\epsilon \to 0} ||\mathcal{L}_\epsilon(g) - \mathcal{L}_0(g)||_r = 0$; logo existe $\epsilon_\beta > 0$ tal que: se $\epsilon \leq \epsilon_\beta$ então

$$\Big|\frac{1}{n_0} \log ||\mathcal{L}_\epsilon^{n_0}(1)||_r - \frac{1}{n_0} \log ||\mathcal{L}_0^{n_0}(1)||_r\Big| < \frac{\beta}{3}.$$

Afirmação: Dado $n_0 \in \mathbb{N}$ e $\beta > 0$, existe $\epsilon_{\beta, n_0} > 0$ tal que: se $\epsilon \leq \epsilon_{\beta, n_0}$ então $||\mathcal{L}_\epsilon^{n_0}(1) - \mathcal{L}_0^{n_0}(1)||_r < \beta$.

Com efeito; a prova será feita por indução, o caso $n_0 = 1$ é válido pela discussão anterior. Suponhamos que a afirmação é válida para $n_0 = k - 1$. Notemos que

$$||\mathcal{L}_\epsilon^k(1) - \mathcal{L}_0^k(1)||_r \leq ||\mathcal{L}_\epsilon(\mathcal{L}_\epsilon^{k-1}(1)) - \mathcal{L}_\epsilon(\mathcal{L}_0^{k-1}(1))||_r + ||\mathcal{L}_\epsilon(\mathcal{L}_0^{k-1}(1)) - \mathcal{L}_0(\mathcal{L}_0^{k-1}(1))||_r \leq$$

$$[C_t\tau + \rho_r\kappa_0 + deg(f_t)e^{\sup \phi_t}]\lambda_t||\mathcal{L}_\epsilon^{k-1}(1) - \mathcal{L}_0^{k-1}(1)||_r + ||\mathcal{L}_\epsilon(\mathcal{L}_0^{k-1}(1)) - \mathcal{L}_0(\mathcal{L}_0^{k-1}(1))||_r;$$

logo, usando a hipótese de indução e a estabilidade estatística e que para todo $g \in \mathcal{C}^r(M, \mathbb{R})$, $\lim_{\epsilon \to 0} ||\mathcal{L}_\epsilon(g) - \mathcal{L}_0(g)||_r = 0$; teremos que a afirmação é valida para $n_0 = k$.

Seja $\beta > 0$, no tem 1) já vimos que existe $n_0 \in N$ tal que $||\Big(\frac{\mathcal{L}_\epsilon}{\lambda_\epsilon}\Big)^n(1) - h_\epsilon||_r < \frac{\beta}{3}$ e $||\Big(\frac{\mathcal{L}_0}{\lambda_0}\Big)^n(1) - h_0||_r < \frac{\beta}{3}$, para todo $\epsilon \leq \epsilon'$. Pela discussão anterior e pelo item i) do teorema sobre estabilidade estatística $\mathcal{C}^r$, existe $\epsilon_\beta > 0$ tal que: se $\epsilon \leq \epsilon_{\frac{\beta}{3}, n_0}$ então $||\mathcal{L}_\epsilon^{n_0}(1) - \mathcal{L}_0^{n_0}(1)||_r < \frac{\beta}{3}$. Sendo assim, se $\epsilon \leq \epsilon_\beta$:

$$||h_\epsilon - h_0||_r \leq ||\Big(\frac{\mathcal{L}_\epsilon}{\lambda_\epsilon}\Big)^n(1) - h_\epsilon||_r + ||\Big(\frac{\mathcal{L}_0}{\lambda_0}\Big)^n(1) - h_0||_r + ||\Big(\frac{\mathcal{L}_\epsilon}{\lambda_\epsilon}\Big)^{n_0}(1) - \Big(\frac{\mathcal{L}_0}{\lambda_0}\Big)^{n_0}(1)||_r < \beta.$$

Decorre então que $\lim_{\epsilon \to 0} ||h_\epsilon - h_0||_r = 0$. ■

Capítulo 3

Questões, resultados paralelos e perspectivas

3.1 Estados de equilíbrio

Já sabemos que se também estivermos no contexto de [VV10] a probabilidade $\mu := h\nu$ é um estado de equilíbrio, uma pergunta natural é se essa probabilidade μ continua sendo um estado de equilíbrio no contexto da dissertação. O cerne da questão é que enquanto em [VV10] é exigido que

(H2) Existe $k_0 \geq 1$ e uma cobertura $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_{k_0}\}$ de M por domínios de injetividade de f, tal que $\mathcal{A}$ pode ser coberto por $q < e^{h(f)}$ elementos de $\mathcal{P}$,

ou seja, uma condição combinatória sobre a região boa e a região má, ao longo da dissertação utilizamos uma hipótese mais fraca

(H2') Existe $q < deg(f)$ tal que: para todo $x \in M$, $\#\{f^{-1}(x) \cap \mathcal{A}\} \leq q$,

sobre a existência de pré-imagens boas; lembremos que em [VV10] essa combinatória de região boa e região má é de fundamental importância no estudo dos estados de equilíbrio.

3.2 Transitividade do sistema

Se estivermos ao mesmo tempo no contexto da dissertação e no [VV10] já sabemos que a probabilidade $\mu := h\nu$ é o único estado de equilíbrio, lembremos que em [VV10] para que fosse garantida a unicidade dos estados de equilíbrio foi necessária uma hipótese de transitividade do sistema, f precisava ser topologicamente exata. Desse modo, uma pergunta natural é se as hipóteses usadas na dissertação já não implicariam em algum tipo de transitividade sobre o sistema; em geral isso não é verdade, basta que a dinâmica tenha por exemplo dois pontos fixos atratores. Porém; será que, retirando as dinâmicas que possuem atratores, genericamente as dinâmicas estudadas ao longo da dissertação tem algum tipo de transitividade ?

3.3 Linear response formula

Essa seção tem como objetivo a apresentação, sem provas, de resultados inéditos paralelos à dissertação na linha de Linear response formula, no contexto do trabalho de Castro e Varandas [CV10], decorrentes de um trabalho em progresso realizado conjuntamente entre Thiago Bomfim, Armando Castro e Paulo Varandas [BCV11].

Suponha que para cada par (f, ϕ) podemos associar uma certa medida (SRB, estados de equilíbrio, a.c.i.m. e etc) e que a função que associa (f, ϕ) a essa medida é contínua se dotarmos o espaço das medidas da topologia fraca*. Uma pergunta natural é se essa função é diferenciável, mesmo que seja num sentido fraco, nesse caso gostaríamos de poder encontrar uma fórmula que expresse para pequenas pertubações de um certo tipo como essa função varia. Esse tipo de questão é chamada de **Linear response e Linear response formula**.

No contexto hiperbólico temos o seguinte resultado estabelecido por Ruelle [Rue97]:

Teorema: *Seja K_0 um atrator hiperbólico (i.e. axioma A) para um $\mathcal{C}^3$ difeomorfismo f_0, e suponha que $f_{0|K_0}$ é mixing. Se f é um elemento de uma pequena vizinhança de f_0, existe um atrator hiperbólico K para f, dependendo continuamente de f e uma única medida SRB ρ para f com suporte em K. Além disso,*

(a) existe uma $\mathcal{C}^3$ vizinhança $\mathcal{N}$ de f_0 tal que se $A : M \to \mathbb{R}$ é $\mathcal{C}^2$, então $f \mapsto \rho(A)$ é diferenciável em $\mathcal{N}$,

(b) a variação de 1ª-ordem $\delta\rho(A)$ quando f é trocado por $f + X \circ f$ é dada por $\delta\rho(A) = \Psi(1)$, onde a série de potências

$$\Psi(\lambda) := \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \int \rho(dx) X(x) \cdot \nabla_x (A \circ f^n)$$

tem raio de convergência > 1.

Na prova desse resultado é utilizado fortemente a rígida estabilidade estrutural existente no contexto hiperbólico, isso nos indica a dificuldade de se obter resultados de Linear response formula no contexto não-uniforme. No contexto unidimensional existem trabalhos recentes de V. Baladi e D. Smania (veja [BaS08] e [BaS10]).

No nosso contexto já sabemos que dada uma função $g \in \mathcal{C}(M;\mathbb{R})$ temos $\mathcal{G} \ni (f,\phi) \mapsto \int g d\mu$ contínua, desse modo faz sentido nos perguntarmos a cerca do Linear response formula nesse contexto.

Seja $\mathcal{D}^{1+\alpha} := \{f : M \to M \in \mathcal{C}^{1+\alpha}; (f,0) \in \mathcal{G}^1\}$ e dotemos $\mathcal{D}^{1+\alpha}$ da topologia $\mathcal{C}^{1+\alpha}$; então em [BCV11] é provado que:

Teorema: *Seja $g \in \mathcal{C}^{1+\alpha}(M;\mathbb{R})$, e $\phi_0 \equiv c \in \mathbb{R}$, então: a aplicação $\mathcal{D}^{1+\alpha} \ni f \mapsto \int g d\mu_{f,\phi_0}$ é diferenciável e sua derivada agindo em $H \in \mathcal{C}^{1+\alpha}(M;M)$ é dada por*

$$D_f \mu_{f,\phi_0}(g)_{|f_0} \cdot H = \sum_{i=0}^{\infty} \int D_f \tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}^i_{f_0}(P_0(g))) \cdot H d\mu_{f_0}.$$

Em particular a medida de máxima entropia varia diferenciavelmente com respeito à dinâmica. Uma questão que se impõe é obter um resultado de variação diferenciável em relação à dinâmica para potenciais mais gerais que os constantes, porém um resultado desse tipo ainda não foi alcançado, o que sabemos por [BCV11] é que em geral a pressão topológica varia diferenciavelmente, rigorosamente: seja $\mathcal{G}^{1+\alpha} := \mathcal{G}^1 \cap (\mathcal{C}^{1+\alpha}(M;M) \times \mathcal{C}^{1+\alpha}(M;\mathbb{R}))$ e dotado da topologia $\mathcal{C}^{1+\alpha}(M;M) \times \mathcal{C}^{1+\alpha}(M;\mathbb{R})$, nesses termos

Teorema: *Se estivermos também no contexto [VV10]. A aplicação $\mathcal{G}^{1+\alpha} \ni (f,\phi) \mapsto P_{top}(f,\phi)$ é diferenciável. Ademais, dado $(f_0,\phi_0) \in \mathcal{G}^{1+\alpha}$ e $(H_1,H_2) \in \mathcal{C}^{1+\alpha}(M;M) \times \mathcal{C}^{1+\alpha}(M;\mathbb{R})$ temos:*

$$D_{f,\phi} P_{top}(f,\phi)_{\,|f_0,\phi_0} \cdot (H_1,H_2) = \int h_{f_0,\phi_0} \cdot H_2 \, d\nu_{f_0,\phi_0} +$$

$$\frac{\sum_{j=1}^{deg(f_0)} \int e^{\phi_0(f_{0,j}(\cdot))} \cdot Dh_{f_0,\phi_0|f_{0,j}(\cdot)} \cdot [(T_{j|f_0} \cdot H_1)(\cdot)] \, d\nu_{f_0,\phi_0}}{\lambda_{f_0,\phi_0}} +$$

$$\frac{\sum_{j=1}^{deg(f_0)} \int e^{\phi_0(f_{0,j}(\cdot))} \cdot h_{f_0,\phi_0}(f_{0,j}(\cdot)) \cdot D\phi_{0|f_{0,j}(\cdot)} \cdot [(T_{j|f_0} \cdot H_1)(f_{0,j}(\cdot))] \, d\nu_{f_0,\phi_0}}{\lambda_{f_0,\phi_0}}.$$

Fixando uma dinâmica e perturbando os potenciais conseguimos provar em [BCV11] a diferenciabilidade do estado de equilíbrio, rigorosamente: fixemos $f : M \to M$ satisfazendo as hipóteses (H1) e (H2'), seja $\mathcal{G}_f := \{\phi : M \to \mathbb{R}; (f,\phi) \in \mathcal{G}\}$ e dotemos $\mathcal{G}_f$ da topologia $\mathcal{C}^\alpha$, nesses termos

Teorema: *Dada $g \in \mathcal{C}^\alpha(M;\mathbb{R})$, a aplicação $\mathcal{G}_f \ni \phi \mapsto \int g d\mu_\phi$ é diferenciável. Ademais, dado $\phi_0 \in \mathcal{G}_f$ e $H \in \mathcal{C}^\alpha(M;\mathbb{R})$ temos:*

$$D_\phi \int g d\mu_{\phi \,|\phi_0} \cdot H = \int \left[(I - \tilde{\mathcal{L}}_{\phi_0 \,|E_0})^{-1}(g \cdot h_{\phi_0} - \int g d\mu_{\phi_0} \cdot h_{\phi_0})\right] \cdot H d\nu_{\phi_0} +$$

$$\int g d\mu_{\phi_0} \cdot \int \left[(I - \tilde{\mathcal{L}}_{\phi_0 \,|E_0})^{-1}(1 - h_{\phi_0})\right] \cdot H d\nu_{\phi_0}.$$

Uma generalização desses resultados foi feita no sentido das perturbações aleatórias. Já sabemos que ao fazer uma pertubação aleatória o operador $\mathcal{L}_\epsilon$ tem estabilidade espectral, desse modo, $h_\epsilon \underset{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} h_0$ e dada uma função $g \in \mathcal{C}(M;\mathbb{R})$ temos $\int g d\nu_\epsilon \underset{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} \int g d\nu_0$, logo para $\mu_\epsilon := h_\epsilon \nu_\epsilon$ teremos $\int g d\mu_\epsilon \underset{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} \int g d\mu_0$ para toda $g \in \mathcal{C}(M;\mathbb{R})$. Desse modo; faz sentido estudarmos a diferenciabilidade da aplicação $\epsilon \mapsto \int g d\mu_\epsilon$ no ponto $\epsilon = 0$ (estamos considerando que $\theta_0 := \delta_{t_0}$).

Impondo condições sobre a aplicação $\epsilon \mapsto \mathcal{L}_\epsilon(g)$, em [BCV11] é provado que:

Teorema: *i) Suponhamos que $f_t = f_{t_0}$ para todo $t \in T$ e $(f_0, \phi_0) \in \mathcal{G}_{f_0}$, então: a aplicação $\epsilon \mapsto \lambda_\epsilon$ é diferenciável em uma vizinhança do 0 e sua derivada em $\hat{\epsilon}$ é dada por*

$$\int D_\epsilon \mathcal{L}_\epsilon (h_{\hat{\epsilon}})_{|\hat{\epsilon}} d\nu_{\hat{\epsilon}}.$$

ii) Suponhamos que $(f_0, \phi_0) \in \mathcal{G}^{1+\alpha}$, então: a aplicação $\epsilon \mapsto \lambda_\epsilon$ é diferenciável em uma vizinhança do 0 e sua derivada em $\hat{\epsilon}$ é dada por

$$\int D_\epsilon \mathcal{L}_\epsilon (h_{\hat{\epsilon}})_{|\hat{\epsilon}} d\nu_{\hat{\epsilon}}.$$

Teorema: *Suponhamos que $(f_0, \phi_0) \in \mathcal{G}^{1+\alpha}$, $(f_t, \phi_t) = (f_t, \phi_0) = (f_t, a)$ para $a \in \mathbb{R}$, então: dada $g \in \mathcal{C}^{1+\alpha}(M;\mathbb{R})$, a aplicação $\epsilon \mapsto \int g d\mu_\epsilon$ é diferenciável em uma vizinhança do 0 e sua derivada em $\hat{\epsilon}$ é dada por*

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \int D_\epsilon \tilde{\mathcal{L}}_\epsilon \big(\tilde{\mathcal{L}}^i_{\hat{\epsilon}}(g - \int g d\nu_{\hat{\epsilon}})\big)_{|\hat{\epsilon}} \, d\mu_{\hat{\epsilon}}.$$

As condições impostas sobre a aplicação $\epsilon \mapsto \mathcal{L}_\epsilon(g)$ estão diretamente associadas às probabilidades θ_ϵ (pertubação aleatória), essas condições são satisfeitas no contexto de pertubações determinísticas (já discutido ao longo do capítulo) e também em contextos mais gerais que o determinístico, vide os próximos exemplos:

Exemplo 3.1. *O espaço parametrizante será* $T := [0, 1]$, *a família de probabilidades será* $\theta_\epsilon := \epsilon\chi_{[0,\epsilon]}Leb + (1 - \epsilon^2)\delta_0$ *onde Leb é a medida de volume na reta.*

Exemplo 3.2. *O espaço parametrizante será* $T := [0, 1]$, *a família de probabilidades será* $\theta_\epsilon := e^\epsilon\chi_{[0,e^\epsilon-1]}Leb + (1 - e^{2\epsilon} + e^\epsilon)\delta_0$ *onde Leb é a medida de volume na reta.*

Apêndice A

Topologia

Essa seção tem por objetivo discutir e apresentar conceitos e resultados topológicos que são importantes ao longo do texto.

O próximo teorema, bem como seu corolário, desempenha um papel importante no estudo do operador de Ruelle-Perron-Frobenius.

Teorema A.1. *Seja K um espaço topológico compacto Hausdorff, Y espaço topológico Hausdorff e $f : K \to Y$ contínua e localmente injetiva então: qualquer que seja $x \in Y$ temos $\# f^{-1}(x) < +\infty$. Ademais, $G : Y \xrightarrow[x \mapsto \# f^{-1}(x)]{} \mathbb{N}$ é contínua.*

Prova. Seja $x \in Y$, como f é contínua e K é compacto $f^{-1}(x)$ será compacto, como f é localmente injetiva teremos que $f^{-1}(x)$ é discreto; porém conjunto compactos discretos são sempre finitos.

Mostremos agora que $G : Y \xrightarrow[x \mapsto \# f^{-1}(x)]{} \mathbb{N}$ é contínua. Seja $k \in \mathbb{N}$. Se $G^{-1}(k) = \emptyset$ não há nada a provar. Suponhamos então que exista $x \in G^{-1}(k)$; se $f^{-1}(x) = \emptyset$ (significa que $k = 0$), como $f(K)$ é compacto e Y é Hausdorff existe uma vizinhança V de x que não intersecta $f(K)$ e assim $G(V) = k = 0$. Suponhamos agora que $k \neq 0$ e que exista $x \in G^{-1}(k)$, já sabemos que $f^{-1}(x) = \{x_1, \ldots, x_k\}$, sejam U_i vizinhanças abertas de x_i tais que f é um homeomorfismo em U_i para $i = 1, \ldots k$. Como K é compacto Hausdorff; para cada $y \in K \setminus f^{-1}(x)$ podemos tomar uma vizinhança aberta U_y de y tal que f é um homeomorfismo em $\overline{U_y}$ e $\overline{U_y} \cap f^{-1}(x) = \emptyset$, podemos então extrair uma subcobertura $U_1, \ldots, U_k, U_{k+1}, U_{k+l}$ de K. Nesses termos: seja $U := \bigcap_{i=1}^{k} f(U_i) \setminus \bigcap_{j=k+1}^{k+l} f(\overline{U_j})$, então U será uma vizinhança aberta de x e $G(U) = k$, logo G será contínua. ■

No contexto do teorema anterior; como $\mathbb{N}$ é espaço topológico discreto então G será constante nas componentes conexas de Y, mas Y é compacto pois f é contínua, logo Y só tem um número finito de componentes conexas. Desse modo G só atinge um número finito de valores. Quando G é constante (isso ocorre por exemplo se K for conexo) podemos definir o **grau topológico** de f como sendo o valor que G atinge e denotá-lo por $deg(f)$.

Corolário A.2. *Seja K um espaço topológico compacto Hausdorff, Y espaço topológico Hausdorff, $f : K \to Y$ contínua e localmente injetiva, e $x \in Im(f)$. Se $U_1, \ldots, U_l$ são vizinhanças abertas de $x_1, \ldots, x_l \in f^{-1}(x)$, respectivamente, então existe uma vizinhança aberta U de x tal que qualquer que seja $y \in U$ teremos $\#f^{-1}(x) = \#f^{-1}(y)$ e cada vizinhança U_i contém um único elemento $y_i \in f^{-1}(y)$.*

Prova. A prova desse fato é uma repetição de um argumento usado no teorema anterior. Já sabemos que $f^{-1}(x) = \{x_1, \ldots, x_k\}$, sejam $V_i \subset U_i$ vizinhanças abertas de x_i tais que f é um homeomorfismo em V_i, para $i = 1, \ldots l$. Nesses termos: seja $V := \bigcap_{i=1}^{l} f(V_i)$, então tomando $U := V \cap G^{-1}(k)$, pelo teorema anterior, teremos que U será uma vizinhança aberta de x tal que para $y \in U$ teremos $\#f^{-1}(x) = \#f^{-1}(y)$ e cada vizinhança V_i contém um único elemento $y_i \in f^{-1}(y)$. Para findar a prova basta observamos que por construção $V_i \subset U_i$. ■

Corolário A.3. *Seja K um espaço topológico compacto Hausdorff, X espaço métrico compacto, $f : K \to X$ contínua e localmente injetiva. Para cada $x \in K$ tomemos U_x, vizinhanças abertas de x; então existe um $\delta > 0$ tal que qualquer que seja $y, z \in X$, com $d(y, z) < \delta$, $\#f^{-1}(y) = \#f^{-1}(z)$ e se tomarmos $y_i \in f^{-1}(y)$ existe um único $z_i \in f^{-1}(z)$ com $z_i, y_i \in U_x$, para algum $x \in K$.*

Prova. Para cada $w \in X$, pelo corolário anterior, existe uma vizinhança aberta V_w de w tal que qualquer que seja $a \in V_w$ teremos $\#f^{-1}(w) = \#f^{-1}(a)$ e cada vizinhança U_{w_i}, onde $w_i \in f^{-1}(w)$, contém um único elemento $a_i \in f^{-1}(a)$. Desse modo $\{V_w : w \in X\}$ é uma cobertura de X, seja $\beta > 0$ o número de Lebesgue associado a tal cobertura; tomemos então $\delta := \frac{\beta}{2}$. Sendo assim, para $y, z \in X$ com $d(y, z) < \delta$ então existe $w \in X$ tal que $x, z \in V_w$, logo por construção $\#f^{-1}(y) = f^{-1}(w) = \#f^{-1}(z)$ e se tomarmos $w_i \in f^{-1}(w)$ existe um único $y_i \in f^{-1}(y)$ e $z_i \in f^{-1}(z)$ tal que $z_i, y_i \in U_{w_i}$. Logo para cada $y_i \in f^{-1}(y)$ existe um único $z_i \in f^{-1}(z)$ com $z_i, y_i \in U_{w_i}$. ■

Apêndice B

Cones e métricas projetivas

Seja E um espaço vetorial, $\emptyset \neq C \subset E \setminus \{0\}$ é dito ser um cone (convexo) se $\forall v_1, v_2 \in C$ e $t > 0$ tivermos $tv_1 + v_2 \in C$. Exigindo $C \cap (-C) = \emptyset$ podemos induzir uma ordem sobre E que preserva a sua estrutura de espaço vetorial; com efeito:

$$u \preceq v \Leftrightarrow v - u \in C \cup \{0\}$$

$\preceq$ será uma ordem parcial sobre E com as seguintes propriedades: $(u, v, w \in E$ e $\lambda \geq 0)$

- $u \preceq v \Rightarrow u + w \preceq v + w$;
- $u \preceq v \Rightarrow \lambda u \preceq \lambda v$.

Se E for um espaço vetorial topológico e se $C \cup \{0\}$ for fechado topologicamente então $\preceq$ é "contínua", ou seja, $u_n \to u$ e $u_n \preceq v \Rightarrow u \preceq v$. Ademais; se E for metrizável vale a recíproca, basta observamos que em espaços topológicos em que vale o 1º axioma de enumerabilidade (todo elemento de E tem uma base local enumerável de abertos) fechado e sequencialmente fechado são conceitos equivalentes e que para espaços vetoriais topológicos satisfazerem o 1º axioma de enumerabilidade é equivalente a ser metrizável (veja [Rud91], página 18).

Reciprocamente, se temos um espaço vetorial E munido de uma ordem parcial $\preceq$ que preserva sua estrutura de espaço vetorial então naturalmente obtemos um cone (convexo) tal que $C \cap (-C) = \emptyset$. Com efeito; seja $C := \{v \in E \setminus \{0\} : v \succeq 0\}$, da hipótese de $\preceq$ preservar a estrutura de espaço vetorial e transitividade decorre que C é um cone e da anti-simetria decorre que $C \cap (-C) = \emptyset$.

O fecho $\overline{C}$ de C será definido por:

$$w \in \overline{C} \Leftrightarrow \textit{existe } v \in C \textit{ e } t_n \searrow 0 \textit{ tal que } (w + t_n v) \in C, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Notemos que se E é um espaço vetorial topológico então fecho do cone C está contido no fecho topológico de C, no entanto é uma noção mais adaptada a convexidade.

Trabalharemos a partir daqui com cones que $\overline{C} \cap (-\overline{C}) = \{0\}$, isso nos permitirá definir uma pseudo-métrica sobre os elementos do cone. Dados v_1 e $v_2 \in C$, definamos:

- $\alpha(v_1, v_2) := \sup\{t > 0; v_2 - tv_1 \in C\}$
- $\beta(v_1, v_2) := \inf\{t > 0; tv_1 - v_2 \in C\}$.

Por convenção, $\sup \emptyset = 0$ e $\inf \emptyset = +\infty$. α e β tem as seguintes propriedades:

- $\alpha(v_1, v_2) \leq \beta(v_1, v_2); \forall v_1, v_2 \in C$
- $\alpha(v_1, v_2) < +\infty; \forall v_1, v_2 \in C$
- $\beta(v_1, v_2) > 0; \forall v_1, v_2 \in C$

(As provas desses resultado podem se encontradas em [Vi97], página 17).

Seja $\theta : C \times C \to [0, +\infty]$ definida por:

$$\theta(v_1, v_2) := \log \frac{\beta(v_1, v_2)}{\alpha(v_1, v_2)}$$

(Por convenção $\theta(u, v) = +\infty$ se $\alpha(u, v) = 0$ ou $\beta(u, v) = +\infty$) θ é conhecida como métrica de Hilbert e tem as seguintes propriedades:

- $\theta(v_1, v_2) = \theta(v_2, v_1); \forall v_1, v_2 \in C$
- $\theta(v_1, v_3) \leq \theta(v_1, v_2) + \theta(v_2, v_3); \forall v_1, v_2, v_3 \in C$
- $\theta(v_1, v_2) = 0 \Leftrightarrow \exists t > 0$ tal que $v_1 = tv_2$
- $\theta(v_1, v_2) = \theta(t_1 v_1, t_2 v_2); \forall v_1, v_2 \in C$ e $t_1, t_2 > 0$.

(As provas desses resultados podem ser encontradas em [Vi97], página 17).

Desse modo θ é uma pseudo-métrica. Denotando $\mathcal{R}$ pelo $\{(u, v) \in C \times C : u = tv,$ para algum $t > 0\}$, $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência, se existir um $x_0 \in C$ tal que $A_{x_0} := \{v \in C : \theta(v, x_0) < +\infty\} \neq \emptyset$, teremos que $\tilde{\theta} : A_{x_0}/\mathcal{R} \times A_{x_0}/\mathcal{R} \to [0, +\infty)$ definida por $\tilde{\theta}([v_1], [v_2]) := \theta(v_1, v_2)$ é uma métrica sobre $A_{x_0}/\mathcal{R}$, por esse motivo θ também é chamada métrica projetiva.

Observação: Notemos que

$$\theta(v_1, v_2) := \log \frac{\inf\{t > 0; tv_1 - v_2 \in C\}}{\sup\{t > 0; v_2 - tv_1 \in C\}} = \log \frac{\inf\{t > 0; tv_1 - v_2 \in C \cup \{0\}\}}{\sup\{t > 0; v_2 - tv_1 \in C \cup \{0\}\}} =$$
$$\log \frac{\inf\{t > 0; tv_1 \succeq v_2\}}{\sup\{t > 0; v_2 \succeq tv_1\}}.$$

É natural se perguntar sobre a relação entre a métrica projetiva e a métrica pré-existente em um espaço vetorial topológico metrizável; em geral depende do cone (ordem) a qual se está perguntando, a próxima proposição nos dá um resultado nesse sentido sob uma certa uma hipótese.

Proposição B.1. *Seja E um espaço normado, $||\cdot||_i$ semi-normas sobre E para $i = 1, 2$ e $\preceq$ uma ordem parcial que preserva sua estrutura de espaço vetorial e suponha que para todo $v, u \in C$ temos:*

$$-v \preceq u \preceq v \Rightarrow ||u||_i \leq ||v||_i, i = 1, 2.$$

Então; dados $f, g \in C$, com $||f||_1 = ||g||_1$ teremos:

$$||f - g||_2 \leq (e^{\theta(f,g)} - 1)||f||_2.$$

Prova. Sejam $f, g \in C$, com $||f||_1 = ||g||_1$. Se $\theta(f, g) = +\infty$ teremos a desigualdade requerida, suponhamos então que $\theta(f, g) < +\infty$. Seja $A := \sup\{t > 0; g - tf \in C\}$ e $B := \inf\{t > 0; tf - g \in C\}$; logo $Af \preceq g \preceq Bf$, e assim $-g \preceq 0 \preceq Af \preceq g$ e $-Bf \preceq g \preceq Bf$, desse modo $A||f||_1 \leq ||g||_1$ e $||g||_1 \leq B||f||_1$. Como $||f||_1 = ||g||_1$, por hipótese, teremos $A \leq 1$ e $B \geq 1$ e assim:

$$-(B - A)f \preceq (A - 1)f \preceq g - f \preceq (B - 1)f \preceq (B - A)f,$$

usando mais uma vez nossa hipótese teremos:

$$||g - f||_2 \leq (B - A)||f||_2 \leq \frac{B - A}{A}||f||_2 = (e^{\theta(f,g)} - 1)||f||_2.$$

■

Corolário B.2. *Seja E um espaço normado, $||\cdot||_i$ semi-normas sobre E para $i = 1, 2$ e $\preceq$ uma ordem parcial que preserva sua estrutura de espaço vetorial e suponha que para todo $v, u \in C$ temos:*

$$-v \preceq u \preceq v \Rightarrow ||u||_i \leq ||v||_i, i = 1, 2.$$

Se $w_n \xrightarrow{\theta} w$ *e* $||w||_1 = ||w_n||_1$, *então* $w_n \xrightarrow{||\cdot||_2} w$.

Prova. Pela proposição anterior $||w_n - w||_2 \leq (e^{\theta(w_n,w)} - 1)||w||_2$, como $w_n \xrightarrow{\theta} w$ teremos que $w_n \xrightarrow{||\cdot||_2} w$. ■

Exemplo B.3. *Seja* X *um espaço métrico compacto e* $C_+ := \{\varphi \in \mathcal{C}^0(X, \mathbb{R}) : \varphi(x) > 0, \forall x \in X\}$, C_+ *será um cone nos termos apresentados anteriormente; e para* $\varphi_1, \varphi_2 \in C_+$ *teremos:*

$$\alpha(\varphi_1, \varphi_2) := \sup\{t > 0 : (\varphi_2 - t\varphi_1)(x) > 0, \forall x \in X\} = \inf \frac{\varphi_2}{\varphi_1}$$

e

$$\beta(\varphi_1, \varphi_2) = \sup \frac{\varphi_2}{\varphi_1}.$$

Desse modo

$$\theta_+(\varphi_1, \varphi_2) = \log \frac{\sup(\varphi_2/\varphi_1)}{\inf \varphi_2/\varphi_1}.$$

Esse cone tem a importante propriedade de completude, ou seja, se $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ *é uma sequência em* C_+ *que é Cauchy em relação a* θ_+ *então* $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ *é* θ_+ *convergente em* C_+ *(para prova veja [Vi97], página 24). Seja* $\varphi \in C_+$ *tal limite então aplicando o corolário anterior teremos que* $(\frac{\sup \varphi}{\sup \varphi_n} \cdot \varphi_n)_{n\geq 1}$ *é uma sequência em* C_+ *que converge uniformemente a* φ.

Sejam E_1, E_2 espaços vetoriais, $C_i \subset E_i, i = 1, 2$, cones e $L : E_1 \to E_2$ um operador linear tal que $L(C_1) \subset C_2$; então:

- $\alpha_1(u, v) \leq \alpha_2(L(u), L(v))$
- $\beta_1(u, v) \geq \beta_2(L(u), L(v))$.

Desse modo, $\theta_2(L(u), L(v)) \leq \theta_1(u, v), \forall\, u, v \in C_1$. Assim $L_{|_{C_1}}$ é Lipschitz, a princípio, não necessariamente uma contração; a próxima teorema nos mostrará que sob uma hipótese muito razoável (diâmetro de $L(C_1)$ finito) $L_{|_{C_1}}$ é uma contração, sua constante de Lipschitz é diretamente proporcional ao diâmetro e converge exponencialmente rápido para 0 quando o diâmetro diminui.

Teorema B.4. *Seja* $D := \{\theta_2(L(u), L(v)) : u, v \in C_1\}$. *Se* $D < +\infty$ *então:*

$$\theta_2(L(u), L(v)) \leq (1 - e^{-D})\theta_1(u, v), \forall\, u, v \in C_1.$$

Prova. Veja [Vi97], página 18. ■

Proposição B.5. *Seja E um espaço vetorial, $L : E \to E$ um operador linear, $C \subset E$ um cone tal que $L(C) \subset C$ e $D := \{\theta(L(u), L(v)) : u, v \in C\} < +\infty$. Se existe $x_0 \in C$ tal que $A_{x_0} := \{v \in C : \theta(v, x_0) < +\infty\} \neq \emptyset$, $x_0 \in L(A_{x_0})$ e $(A_{x_0}/\mathcal{R}, \tilde{\theta})$ é um espaço métrico completo então:*

i) Existe um único autovalor positivo de L em C;

ii) Seja $v \in C$ é um autovetor associado ao autovalor positivo. Se $u \in C$ então $L^n(u) \xrightarrow[n\to+\infty]{\theta} v$, ademais, $\exists k \geq 0$; $\theta(L^n(u), v) \leq k(1 - e^{-D})^n$;

iii) Se $v_1, v_2 \in C$ são dois autovetores associados ao autovalor positivo então $\exists t > 0$; $v_1 = tv_2$.

Prova. A demonstração é uma aplicação do teorema do ponto fixo de Banach.

Afirmação 1: $L(A_{x_0}) \subset A_{x_0}$.

Com efeito; seja $v \in L(A_{x_0})$ e $u, u_0 \in A_{x_0}$ tal que $v = L(u)$ e $x_0 = L(u_0)$. Assim:

$$\theta(v, x_0) = \theta(L(u), L(u_0)) \leq (1 - e^{-D})\theta(u, v) < +\infty$$

Seja $\tilde{C} := A_{x_0}/\mathcal{R}$ e $\tilde{L}([v]) := [L(v)], \forall v \in A_{x_0}$, pela *Afirmação 1* $\tilde{L}([v]) \in \tilde{C}$ e como L é linear $\tilde{L}([v]) \in \tilde{C}$ não depende da escolha do representante.

Pelo teorema anterior $\theta(L(u), L(v)) \leq (1-e^{-D})\theta(u, v), \forall u, v \in C \Rightarrow \tilde{\theta}(\tilde{L}([u]), \tilde{L}([v])) \leq (1 - e^{-D})\tilde{\theta}([u], [v])$; ou seja, $\tilde{L}$ é uma contração, como $\tilde{C}$ por hipótese é completo, pelo teorema do ponto fixo de Banach:

i)] $\exists!\, [v_0] \in \tilde{C}$ tal que $\tilde{L}([v_0]) = [v_0]$. Notemos que:

$$\exists!\, [v] \text{ ponto fixo de } \tilde{L} \Leftrightarrow \exists! \text{ autovalor positivo de } L \text{ em } A_{x_0}.$$

ii)] Seja $v \in C$ é um autovetor associado ao autovalor positivo então $\tilde{L}([v]) = [v]$, pela prova do teorema do ponto fixo de Banach sabemos que o ponto fixo é um atrator e sabemos estimar a convergência.

iii)] Notemos que:

$$[v] \text{ é ponto fixo de } \tilde{L} \Leftrightarrow v \text{ é um autovetor de } L \text{ associado a um autovalor positivo.}$$

Logo se $v_1, v_2 \in C$ são dois autovetores associados ao autovalor positivo então $\tilde{L}([v_i]) = [v_i], i = 1, 2$; como $\tilde{L}$ tem um único ponto fixo decorre iii). ■

Essa teoria de cones e métricas projetivas é frequentemente utilizada no estudo de decaimento de correlações; o método é encontrar um cone invariante pelo operador de Ruelle-Perron-Frobenius que tenho diâmetro finito e que tenha uma certa propriedade de completude, através desse cone encontramos propriedades sobre o espectro do operador e daí pode derivar o decaimento de correlações.

A primeira sistematização desta técnica foi feita por Birkhoff em [Bir57], onde foi aplicada no estudo de cadeias de Markov e de certos operadores integrais.

Apêndice C

Esperança condicional e Teorema de Gordin

Essa seção tem por objetivo apresentar o teorema de Gordin que é extremamente útil na prova de teoremas centrais do limite.

Ao longo dessa seção $(X, \mathcal{A}, \mu)$ será um espaço de medida fixado.

Definição C.1 (Esperança condicional)**.** *Seja $\varphi : X \to \mathbb{R} \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ uma $\sigma-$álgebra de X. A esperança condicional $\mathbb{E}(\varphi|\mathcal{B})$ de φ com respeito a $\mathcal{B}$ é a derivada de Radon-Nikodym da medida μ_φ, definida por*

$$\mu_\varphi(B) := \int_B \varphi d\mu, \ \forall B \in \mathcal{B},$$

em relação a restrição de μ para $\mathcal{B}$. Em outras palavras: $\mathbb{E}(\varphi|\mathcal{B})$ é a única, a menos de um conjunto de medida nula pertencente a $\mathcal{B}$, função $\mathcal{B}-$mensurável satisfazendo

$$\int_B \varphi d\mu = \int_B \mathbb{E}(\varphi|\mathcal{B}) d\mu, \ \forall B \in \mathcal{B}.$$

Como tomamos φ integrável em relação a μ, então sempre existe $\mathbb{E}(\varphi|\mathcal{B})$. A esperança condicional de φ com respeito a $\mathcal{B}$ pode ser interpretada como o representante de φ nos $\mathcal{B}-$mensuráveis.

A definição de $\mathbb{E}(\varphi|\mathcal{B})$ foi feita via teoria da medida, porém, veremos que quando φ é quadrado integrável em relação a μ podemos enxergar $\mathbb{E}(\varphi|\mathcal{B})$ sob um prisma de análise funcional.

Proposição C.2. *Seja $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ uma $\sigma-$álgebra de X. Então; $L^2(X, \mathcal{A}, \mu) = L^2(X, \mathcal{B}, \mu) \oplus L^2(X, \mathcal{B}, \mu)^\perp$ e*

$$\mathbb{E} : L^2(X, \mathcal{A}, \mu) \xrightarrow[\varphi \to \mathbb{E}(\varphi|\mathcal{B})]{} L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$$

é a projeção ortogonal em relação a $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$.

Prova. Seja $\varphi \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$; sabemos que $\varphi = \mathbb{E}(\varphi|\mathcal{B}) + (X - \mathbb{E}(\varphi|\mathcal{B}))$, pela definição de esperança condicional $X - \mathbb{E}(\varphi|\mathcal{B})$ é ortogonal a todas as funções $\mathcal{B}-$mensuráveis (em particular $\mathbb{E}(\varphi|\mathcal{B})$), assim

$$\int \varphi^2 d\mu = \int \big(\mathbb{E}(\varphi|\mathcal{B}) + (X - \mathbb{E}(\varphi|\mathcal{B}))\big)^2 d\mu = \int \big(\mathbb{E}(\varphi|\mathcal{B})^2 + (X - \mathbb{E}(\varphi|\mathcal{B})^2\big) d\mu.$$

Desse modo $\mathbb{E}(\varphi|\mathcal{B})$ e $(X - \mathbb{E}(\varphi|\mathcal{B})) \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$; ademais, $\mathbb{E}(\varphi|\mathcal{B}) \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ e $(X - \mathbb{E}(\varphi|\mathcal{B})) \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)^{\perp}$, o que implica em $L^2(X, \mathcal{A}, \mu) = L^2(X, \mathcal{B}, \mu) \oplus L^2(X, \mathcal{B}, \mu)^{\perp}$ e por conseguinte $\mathbb{E}(\varphi|\mathcal{B})$ é a projeção ortogonal de φ em relação a $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$. ■

Teorema C.3 (Gordin). *Seja $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de probabilidade, $f : X \to X$ mensurável, μ $f-$ergódica e $\varphi \in L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$ tal que $\int \varphi dm = 0$. Seja $\mathcal{F}_n$ a sequência não-decrescente de $\sigma-$álgebras $\mathcal{F}_n = f^{-n}(\mathcal{F}), n \geq 0$. Se*

$$\sum_{n=0}^{\infty} ||E(\varphi|\mathcal{F}_n)||_2 < \infty,$$

então $\sigma \geq 0$ dado por

$$\sigma^2 = \int \varphi^2 d\mu + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \int \varphi(\varphi \circ f^n) d\mu$$

é finito e $\sigma = 0$ se, e somente se, $\varphi = u \circ f - u$ para alguma $u \in L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$. Ademais; se $\sigma > 0$ então, dado uma intervalo $A \subset \mathbb{R}$:

$$\mu(\{x \in X : \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) \in A\}) \xrightarrow{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_A e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Prova. Veja [Vi97], página 29. ■

Definição C.4 (Medida exata). *Seja $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço mensurável, $f : X \to X$ mensurável. Uma medida μ $f-$invariante é dita exata se a $\sigma-$álgebra*

$$\mathcal{F}_{\infty} := \bigcap_{n \geq 0} \mathcal{F}_n$$

é $\mu-$trivial, ou seja, todas as funções $\mathcal{F}_{\infty}-$mensuráveis são constantes $\mu-$q.t.p..

A próxima proposição nos dirá como funções $\mathcal{F}_{\infty}-$mensuráveis podem ser vistas através de funções mensuráveis.

Proposição C.5. *Seja $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço mensurável, $f : X \to X$ mensurável. Uma função $\xi : M \to \mathbb{R}$ é $\mathcal{F}_n-$mensurável se, e somente se, $\xi = \xi_n \circ f^n$ para alguma ξ_n mensurável.*

Prova. Seja $y \in \mathbb{R}$, então $\xi^{-1}(y) = f^{-n}(A_y)$ para algum $A_y \in \mathcal{F}$. Definamos $\xi_{n|A_y} \equiv y$. Como $A_y \cap A_z = \emptyset$ se $y \neq z$, teremos que ξ_n está bem definida. Por construção ξ_n é mensurável e $\xi = \xi_n \circ f^n$. ■

Referências

[AM06] A. Arbieto, C. Matheus, *Fast decay of correlations of equilibrium states of open classes of non-uniformly expanding maps and potentials*, preprint http://www.preprint.impa.br, 2006.

[Ara07] V. Araújo, *Semicontinuity of entropy, existence of equilibrium states and continuity of physical measures*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 17 (2007) 371-386.

[BaS08] V. Baladi e D. Smania. *Linear response formula for piecewise expanding unimodal maps*, Nonlinearity, 2008, 21 677-711.

[BaS10] V. Baladi e D. Smania. *Linear response for smooth deformations of generic nonuniformly hyperbolic unimodal maps*, preprint, 2010.

[Bir57] G. Birkhoff. *Extension of Jentzsch's theorem*, Trans. A.M.S. 85 (1957), 219-227.

[BCV11] T. Bomfim, A. Castro e P. Varandas. *On linear response formula for non-uniformly expanding maps*, prepint 2011.

[BDV05] C. Bonatti, L. J. Díaz and M. Viana. *Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity*, volume 102 of Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Springer Verlag, 2005.

[BK81] M. Brin and A. Katok. *On local entropy.* Lectures Notes in Mathematics, 1007-Proceedings, 1981.

[Cas08] A. A. Castro. *Curso de Teoria da Medida.* 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008. 193 p. (Projeto Euclides)

[CV10] A. Castro and P. Varandas, *Equilibrium states for non-uniformly expanding maps: decay of correlations and strong stability*, preprint 2010.

[dG75] M. de Guzman. *Differentiation of integrals in Rn*, volume 481 of Lect. Notes in Math. Springer Verlag, 1975.

[KK96] K. Khanin and Yu. Kifer. *Thermodynamic formalism for random transformations and statistical mechanics*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 171 (1996) 107-140.

[Li95] C. Liverani. *Decay of correlations*, Annals of Math., 142 (1995), 239-301

[Mac05] A. L. Maciel. *Operador de Ruelle-Perron-Frobenius e Transformações Expansoras*. Dissertação de Mestrado. Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, março de 2005. 124 p.

[Mañ87] R. Mañé. *Ergodic theory and differentiable dynamics*. Springer Verlag, 1987.

[Oli03] K. Oliveira, Equilibrium states for certain non-uniformly hyperbolic systems, Ergodic Theory Dynam. Systems 23 (2003) 1891-1906.

[OV08] K. Oliveira, M. Viana, Thermodynamical formalism for an open classes of potentials and non-uniformly hyperbolic maps, Ergodic Theory Dynam. Systems 28 (2008).

[Orn70] D. Ornstein. *Bernoulli shifts with the same entropy are isomorphic*. Advances in Math., 4:337-352 (1970), 1970.

[Ose68] V. I. Oseledec, *A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems*, Trans. Moscow Math. Soc. 19 (1968), 197- 231.

[Pes76] Ya. B. Pesin. *Families of invariant manifolds corresponding to non-zero characteristic exponents*. Math. USSR. Izv., 10 : 1261-1302, 1976.

[RS72] M. Reed and B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics: Functional Analysis*, vol. 1. rev. and enlarged ed. New York: Academic Press, 1972. 400 p.

[Rud70] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. New York: McGraw-Hill, 1970. 412 p. (McGraw-Hill Series in Higher Mathematics)

[Rud91] W. Rudin. *Functional Analysis*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1991. 424 p. (McGraw-Hill Series in Higher Mathematics)

[Rue97] D. Ruelle. *Differentiation of SRB states*. Commun. Math. Phys. 187 227-41, 1997.

[Rue03] D. Ruelle. *Correction and complements*. Commun. Math. Phys. 234 185-90, 2003.

[Rue09] D. Ruelle. *A review of linear response theory for general differentiable dynamical systems*, Nonlinearity 22 : 855-870, 2009.

[Sma67] S. Smale. Diffeomorphisms with many periodic points. Bull. Am. Math. Soc, 73 : 747-817, 1967.

[Va07] P. Varandas. *Existence, uniqueness and stability of equilibrium states for non-uniformly expanding maps.* Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Matemática, Instituto de matemática Pura e Aplicada - IMPA. Rio de Janeiro, novembro de 2007. 51 p., preprint http://www.preprint.impa.br

[VV10] P. Varandas and M. Viana. *Existence, uniqueness and stability of equilibrium states for non-uniformly expanding maps.* Annales de l'Institut Henri Poincaré- Analyse Non-Linéaire, 27:555-593, 2010.

[Vi97] M. Viana. *Stochastic Dynamics of Deterministic Systems.* Rio de Janeiro: IMPA, 1997. (Publicações dos Colóquios de Matemática, 21º CBM)

[Wal82] P. Walters. *An introduction to ergodic theory.* Springer Verlag, 1982.

Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática / Colegiado da Pós-Graduação em Matemática

Av. Adhemar de Barros, s/n, Campus Universitário de Ondina, Salvador - BA
CEP: 40170 -110
<http://www.pgmat.ufba.br>