



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA - IM  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



CADEIAS DE MARKOV EM TEMPO CONTÍNUO E O  
TEOREMA DE DYNKIN

LEANDRO CORREIA ARAÚJO

Salvador-Bahia

Julho de 2021

# CADEIAS DE MARKOV EM TEMPO CONTÍNUO E O TEOREMA DE DYNKIN

LEANDRO CORREIA ARÁUJO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientador:** Prof. Dr. Dirk Erhard.

Salvador-Bahia

Julho de 2021

Sistema de Bibliotecas da UFBA

Araujo, Leandro Correia.

Tópicos / Leandro Correia Araujo. – 2021.

52 f. : il

Orientador: Prof. Dr. Dirk Erhard.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Salvador, 2020.

1.

CDD - 519.72

CDU - 519.72



# CADEIAS DE MARKOV EM TEMPO CONTÍNUO E O TEOREMA DE DYNKIN

LEANDRO CORREIA ARAÚJO

Dissertação de Mestrado apresentada ao  
Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da  
Universidade Federal da Bahia como requisito  
parcial para obtenção do título de Mestre em  
Matemática,

## Banca examinadora:

---

Prof. Dr. Dirk Erhard - Orientador  
UFBA

---

Prof. Dr. Tertuliano Franco  
UFBA

---

Prof. Dr. Augusto Teixeira  
IMPA

*À Dudinha, que ela venha a ler e compreender este trabalho um dia, risos.*

# Agradecimentos

Agradeço à Deus e, em especial, à minha família. Gratidão que também se estende aos amigos, sem os quais não há dúvidas que tornaram essa jornada menos sinuosa. Por fim, agradeço aos professores que contribuíram para minha formação, em particular ao Tertuliano e ao Dirk.

*“É isso, é o que faz um herói, né?  
Parte da jornada é o fim!”*

(Tony Stark, Vingadores Ultimato)



# Resumo

Neste trabalho estudamos Cadeias de Markov em tempo contínuo e suas propriedades básicas, obtendo a Equação de Balanço (Global), a qual estabelece uma relação entre medidas estacionárias de uma cadeia e seu gerador infinitesimal. Ainda, analisamos duas cadeias contínuas em um grafo finito com pesos, as quais possuem a mesma cadeia discreta associada. Definimos o Campo Gaussiano Livre, cuja covariância é dada por uma Função de Green e finalizamos com os Teoremas de Isomorfismo de Dynkin e Eisenbaum.

**Palavras-chave:** Teorema de Dynkin; Cadeias de Markov; Teorema de Eisenbaum; Função de Green.



# Abstract

In this work we study continuous time Markov chains and their basic properties, obtaining the Balance Equation (Global), which establishes a relationship between stationary measurements of a chain and its infinitesimal generator. Furthermore, we analyze two continuous chains in a finite weighted graph, which have the same discrete chain associated with them. We define the Free Gaussian Field, whose covariance is given by a Green Function, and we finish with Dynkin and Eisenbaum Isomorphism Theorems.

**Keywords:** Dynkin's Theorem; Markov Chains; Eisenbaum's Isomorphism Theorem; Green Function.



# Sumário

1	Introdução	1
2	Cadeias de Markov em Tempo Contínuo	3
3	Terminologia e algumas propriedades	15
4	Campo Gaussiano Livre e os Teoremas de Dynkin e Eisenbaum	37
	Referências	50



# Capítulo 1

## Introdução

O *problema central do limite* consiste em estudar o comportamento da distribuição das somas parciais normalizadas de uma sequência de variáveis aleatórias independentes, a qual, sob certas condições, converge para a normal-padrão,  $N(0, 1)$ , conforme o Teorema Central do Limite. Dessa maneira, torna-se natural o estudo de propriedades da distribuição Normal e suas generalizações.

Nos anos de 1930 a área de Probabilidade ganha nova roupagem em especial pelos trabalhos de Andrey Kolmogorov, o qual contribuiu com diversos resultados direta ou indiretamente, através de seus alunos de doutorado como Eugene Dynkin, por exemplo. Dynkin, que nasceu na Rússia e doutorou-se na Universidade de Moscou em 1958, publicou em 1983 um teorema de isomorfismo (o qual leva seu nome), tendo-o feito primeiramente para Processos de Markov simétricos de curta duração que admitem tempos locais [5]. Este teorema relaciona a distribuição dos tempos locais de uma certa Cadeia de Markov com uma função que possui distribuição gaussiana. A partir disso, outros resultados semelhantes foram obtidos como o Teorema de Isomorfismo de Eisenbaum e os Teoremas Generalizados de Ray-Knight.

No segundo capítulo apresentamos alguns resultados principais do estudo de Cadeias de Markov em tempo contínuo. No terceiro capítulo veremos algumas definições e breves resultados gerais sobre Processos Gaussianos e faremos a construção das ferramentas necessárias para chegarmos aos nossos resultados principais. O último capítulo nos reserva os já citados Teoremas de isomorfismo de Dynkin e de Eisenbaum e o Primeiro Teorema Generalizado de Ray-Knight.





# Capítulo 2

## Cadeias de Markov em Tempo Contínuo

Neste capítulo apresentaremos a definição e exploraremos algumas das propriedades pertinentes às Cadeias de Markov em tempo contínuo (CTMC, na sigla em inglês). Nossas principais referências são [4], [6], [11], [13].

### Cadeias em Tempo Contínuo

**Exemplo 1.** *Imagine um sistema com  $n$  caixas (de banco, por exemplo), onde os clientes chegam de acordo com um Processo de Poisson com taxa  $\lambda$ , cujos tempos de serviço são variáveis aleatórias com distribuição exponencial de taxa  $\mu$ . Denotando por  $T_k$  o número esperado de caixas ocupados encontrado pelo próximo cliente em um sistema com  $k$  caixas quando  $k$  caixas estão ocupados.*

*Agora, definimos que  $T_0 = 0$ , pois sem caixas não é possível encontrar um caixa ocupado. Consideremos então  $T_1$ . Se existe exatamente 1 caixa, então o próximo cliente vai encontrar um caixa ocupado se o tempo de serviço for menor que o tempo até a chegada desse cliente. Então, a probabilidade de que o próximo cliente encontre esse caixa ocupado é*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{Exp}(\lambda) < \text{Exp}(\mu)) &= \int_0^\infty \int_0^y (\lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu y}) dx dy \\ &= 1 - \frac{\mu}{\mu + \lambda} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.\end{aligned}$$

*Daí, podemos concluir que  $T_1 = (1) \frac{\lambda}{\lambda + \mu} + (0) \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$ .*

*Para o caso geral, consideremos a situação onde temos  $k$  caixas ocupados, usando o mesmo argumento acima, podemos mostrar que*

$$T_k = T_{k-1} \frac{k\mu}{\lambda + k\mu} + k \frac{\lambda}{\lambda + k\mu}.$$

Calcular  $T_n$  torna-se então uma questão recursiva. Podemos a partir disso fazer algumas observações:

- 1) Se temos  $i$  caixas ocupados, com  $i < n$ , então temos  $n + 1$  relógios com distribuição exponencial, independentes, com  $i$  deles possuindo taxa  $\mu$  e um deles com taxa  $\lambda$ . Isso significa que cada caixa possui um relógio associado a seu tempo de serviço, o qual soaria um alarme quando um serviço é finalizado. Por sua vez, um outro relógio está associado à chegada dos clientes, quando o próximo cliente chega, esse relógio também soaria um alarme. Portanto, o tempo até o processo fazer o próximo salto possui distribuição exponencial com taxa  $i\mu + \lambda$ . Note que, como a quantidade de caixas ocupados é menor que a quantidade total de caixas, então a chegada de  $n - i$  clientes significa que eles serão atendidos de imediato. Obviamente não podemos ter  $i > n$ .

Quando temos  $n$  caixas ocupados, então apenas os relógios associados aos tempos de serviço dos caixas permitem um salto no processo, o tempo possui taxa  $n\mu$ .

- 2) O processo salta do estado  $i$  para o estado  $i + 1$  com probabilidade  $\frac{\lambda}{\lambda + \mu}$  e para  $i - 1$  com probabilidade  $\frac{i\mu}{\lambda + i\mu}$ . Se tivermos  $n$  caixas ocupados, então o processo passa para  $n - 1$  com probabilidade  $\frac{n\mu}{n\mu} = 1$ .
- 3) Quando o processo realiza um salto, então os relógios são reiniciados.

O leitor perguntar-se-á como chegamos a algumas dessas conclusões vistas acima, veremos mais detalhes no [Exemplo 5](#).

**Definição 2.1** (Propriedade de Markov). Seja  $X_t, t \geq 0$ , um processo estocástico em tempo contínuo, com espaço de estados  $S$ . Dizemos que ele possui a propriedade de Markov se

$$\mathbb{P}[X(t) = j | X(s) = i, X(t_{n-1}) = i_{n-1}, \dots, X(t_1) = i_1] = \mathbb{P}[X(t) = j | X(s) = i],$$

Onde  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq s \leq t$  são  $n+1$  tempos não decrescentes e  $i, j, i_1, \dots, i_{n-1} \in S$ .

Ou seja, dado o estado do processo em qualquer conjunto de tempos antes de  $t$ , a distribuição do processo no tempo  $t$  depende apenas do tempo mais recente antes de  $t$ .

**Definição 2.2** (Cadeias de Markov em tempo contínuo). *Um processo estocástico em tempo contínuo  $X_t$  é dito uma Cadeia de Markov em tempo contínuo (CTMC, na sigla em inglês) se este possui a propriedade de Markov.*

Observamos que a propriedade de Markov é uma propriedade de perda de memória, isso significa que a distribuição do futuro da nossa CTMC depende apenas do presente e não do passado.

**Exemplo 2** (O Processo de Poisson,  $S = \{0,1,\dots\}$ ). *O Processo de Poisson é o processo estocástico mais simples em tempo contínuo, o leitor interessado na construção desse processo pode consultar [6]. Consideremos então o Processo de Poisson com taxa  $\lambda > 0$ . O processo pode então pular apenas de  $i$  para  $i + 1$  com um relógio exponencial de taxa  $q_{i,i+1} = \lambda$ . O tempo para saltar do estado  $i$  é exponencial com taxa  $v_i = \lambda$  e o processo pula de  $i$  para  $i + 1$  com probabilidade  $\frac{q_{i,i+1}}{v_i} = \frac{\lambda}{\lambda} = 1$ .*

**Exemplo 3** (Processo de Nascimentos,  $S = \{0,1,\dots\}$ ). *Esse processo é uma variação do Processo de Poisson. Seja  $q_{i,i+1} = \lambda_i$  a taxa do relógio quando o processo está em  $i$  e salta para  $i + 1$ . A diferença aqui é que as taxas não precisam ser as mesmas. A taxa para fazer um salto a partir do estado  $i$  é dada por  $v_i = \sum_j q_{i,j}$ .*

**Exemplo 4** (Processo de Nascimento e Morte,  $S = \{0,1,\dots\}$ ). *Agora, vamos considerar a possibilidade de saltos de um estado  $i$  para  $i + 1$  ou para  $i - 1$ , com taxas  $q_{i,i+1} = \lambda_i$  e  $q_{i,i-1} = \mu_i$ , onde  $\lambda_i$  é a taxa de nascimento e  $\mu_i$  representa a taxa de mortes, por fim temos que  $v_i = \lambda_i + \mu_i$ .*

**Exemplo 5.** *Note que nosso exemplo inicial é um caso de Processo de Nascimento e Morte, com  $\lambda_i = \lambda$ ,  $\lambda_n = 0$  e  $\mu_i = i\mu$ . Veremos mais detalhes sobre ele agora, para  $T_2$  temos*

$$\begin{aligned} T_2 &= T_1 \frac{2\mu}{2\mu + \lambda} + \frac{2\lambda}{2\mu + \lambda} \\ &= \left( \frac{\lambda}{\mu + \lambda} \right) \left( \frac{2\mu}{2\mu + \lambda} \right) + \frac{2\lambda}{2\mu + \lambda}. \end{aligned}$$

*Agora, para  $T_3$ , obtemos*

$$\begin{aligned} T_3 &= T_2 \frac{3\mu}{3\mu + \lambda} + \frac{3\lambda}{3\mu + \lambda} \\ &= \left[ \left( \frac{\lambda}{\mu + \lambda} \right) \left( \frac{2\mu}{2\mu + \lambda} \right) + \frac{2\lambda}{2\mu + \lambda} \right] \frac{3\mu}{3\mu + \lambda} + \frac{3\lambda}{3\mu + \lambda} \\ &= \left( \frac{\lambda}{\mu + \lambda} \right) \left( \frac{2\mu}{2\mu + \lambda} \right) \left( \frac{3\mu}{3\mu + \lambda} \right) + \left( \frac{2\lambda}{2\mu + \lambda} \right) \left( \frac{3\mu}{3\mu + \lambda} \right) + \frac{3\lambda}{3\mu + \lambda}. \end{aligned}$$

*No caso geral, vamos observar que:*

1.  $T_n$  é a soma de  $n$  termos;
2. O  $i$ -ésimo termo é o produto de  $n + 1 - i$  termos;
3. O  $i$ -ésimo termo possui o fator  $\frac{i\lambda}{i\mu + \lambda}, i = 1, \dots, n$ ;
4. O  $i$ -ésimo termo tem  $n - i$  fatores dados por  $\frac{(i+1)\mu}{(i+1)\mu + \lambda}, \dots, \frac{n\mu}{n\mu + \lambda}, i = 1, \dots, n$ .

Finalmente, podemos escrever

$$T_n = \frac{n\lambda}{n\mu + \lambda} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i\lambda}{i\mu + \lambda} \prod_{j=i+1}^n \frac{j\mu}{j\mu + \lambda}.$$

**Definição 2.3.** Dizemos que uma CTMC é homogênea no tempo se para quaisquer  $s \leq t$  e  $i, j \in S$ ,  $\mathbb{P}(X(t) = j | X(s) = i) = \mathbb{P}(X(t-s) = j | X(0) = i)$ .

Uma cadeia de Markov não é necessariamente homogênea, porém nosso trabalho serão considerados apenas cadeis que possuam tal propriedade.

A homogeneidade no tempo implica que um processo iniciando em  $i$  e o processo  $\{X(s+t) : t \geq 0\}$  tem a mesma distribuição, que provém de  $X(s) = i$ . O tempo gasto no estado  $i$  é chamado de *tempo de espera* no estado  $i$ . Com homogeneidade podemos falar da distribuição do tempo de espera no estado  $i$ , o qual denotaremos por  $T_i$ , e temos então um importante resultado sobre a distribuição do tempo de espera.

**Proposição 2.4.**  $T_i$  possui distribuição exponencial.

*Demonstração.* Observe que podemos assumir que o processo se inicia em  $i$ , isso segue diretamente da homogeneidade. Daí, dado  $s \geq 0$ , o evento  $\{T_i > s\}$  é equivalente ao evento  $\{X(u) = i \text{ para } 0 \leq u \leq s\}$  e ainda que dados  $s, t \geq 0$  o evento  $\{T_i > s+t\}$  é equivalente ao evento  $\{X(u) = i \text{ para } 0 \leq u \leq s+t\}$ . Thus,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_i > s+t | T_i > s) &= \mathbb{P}(X(u) = i, 0 \leq u \leq s+t | X(u) = i, 0 \leq u \leq s) \\ &= \mathbb{P}(X(u) = i, s \leq u \leq s+t | X(u) = i, 0 \leq u \leq s) \\ &= \mathbb{P}(X(u) = i, s \leq u \leq s+t | X(s) = i) \\ &= \mathbb{P}(X(u) = i, 0 \leq u \leq t | X(0) = i) \\ &= \mathbb{P}(T_i > t). \end{aligned}$$

A terceira e quarta equações seguem da Propriedade de Markov e da homogeneidade no tempo, respectivamente. Já a segunda igualdade segue do fato que  $\mathbb{P}(A \cap B | A) = \mathbb{P}(B | A)$ , onde  $A = \{X(u) = i; m \leq u \leq s\}$  e  $B = \{X(u) = i; s \leq u \leq s+t\}$ .

Assim, como  $T_i$  é contínua no tempo e possui a propriedade de perda de memória, concluímos que a mesma possui distribuição exponencial. □

Pela propriedade no tempo, sempre que nossa CTMC deixa o estado  $i$ :

- 1 O número de estados para os quais é possível saltar é o mesmo, o qual será denotado por  $n_i$ .
- 2 O conjunto de estados para os quais é possível saltar é o mesmo e denotaremos por  $\{j_1, \dots, j_{n_i}\}$  este conjunto.
- 3 A probabilidade de salto de  $j_l$  permanece o mesmo, denotada por  $p_{i,j_l}$  para  $l = 1, \dots, n_i$ .

Munidos da homogeneidade e da Propriedade de Markov, vamos reconstruir nossa descrição inicial, a qual foi feita em termos de relógios com taxas exponenciais. Essas duas descrições, uma com a propriedade de Markov e a outra com relógios exponenciais, são equivalentes, com a seguinte correspondência:

$$p_{i,j_l} = \frac{q_{i,j_l}}{v_i}.$$

Agora, simplificando a notação, usaremos  $j$  ao invés de  $j_l$ , escrevendo  $p_{ij} = \frac{q_{ij}}{v_i}$ .

A matriz  $\mathbf{P}$  cuja  $(i, j)$ -ésimas entradas são  $p_{ij}$ , a probabilidade de saltar de  $i$  para  $j$ , é estocástica e, portanto, uma matriz de probabilidades de transição de uma cadeia de Markov em tempo discreto, chamada de *Cadeia de Markov Embutida*. Toda CTMC possui uma Cadeia de Markov Embutida associada, porém há a inconveniência de que  $\mathbf{P}$  não permite conhecer todo o comportamento da cadeia em tempo contínuo, pois a mesma não especifica as taxas com as quais as transições ocorrem.

Relembrando nossa exposição com os relógios exponenciais, as taxas  $q_{ij}$  juntas contêm mais informações do que as probabilidades  $p_{ij}$ . Isso ocorre porque se soubermos as taxas  $q_{ij}$ , podemos calcular tanto  $v_i$  quanto  $p_{ij}$ . Entretanto, não podemos calcular  $q_{ij}$  a partir de  $p_{ij}$ . Concluimos disso que  $q_{ij}$  estão para as cadeias contínuas da mesma forma que  $P_{ij}$  está para as cadeias discretas.

Mas existe uma diferença entre  $q_{ij}$  no caso contínuo e  $p_{ij}$  no caso discreto, haja visto que as taxas não são probabilidades, elas são não negativas, mas não necessariamente limitadas por 1.

## As Funções de Probabilidade de Transição

Sendo as taxas  $q_{i,j}$  a contrapartida para CTMC em relação as probabilidades de transição  $p_{i,j}$  para cadeias em tempo discreto, temos também uma contrapartida para a  $n$ -ésima função de probabilidade de transição,  $p_{i,j}(n)$ . As funções de probabilidade de transição,  $P_{ij}(t)$ , para uma Cadeia de Markov em tempo contínuo são definidas por

$$P_{ij}(t) = \mathbb{P}(X(t) = j | X(0) = i).$$

Observamos que não há “um passo” em tempo contínuo. Para cada par de estados  $i, j \in S$ , as funções de probabilidade de transição  $P_{ij}(t)$  são funções contínuas em  $t$ . Para o Processo de Poisson, por exemplo,  $i \leq j$ , temos

$$P_{ij}(t) = \mathbb{P}(j - i \text{ eventos em um intervalo com tamanho } t) = \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t}.$$

Infelizmente, na maioria dos casos não conseguimos escrever  $P_{ij}(t)$  de uma maneira simples, porém podemos obter resultados importantes, como as equações de Chapman-Kolmogorov, que são válidas para  $P_{ij}$ .

**Lema 2.5** (Equações de Chapman-Kolmogorov). *Seja  $\{X(t); t \geq 0\}$  a CTMC com espaço de estados  $S$ , taxas  $(q_{ij})_{i,j \in S}$ . Para cada  $s, t \geq 0$ ,*

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{k \in S} P_{ik}(t) P_{kj}(s).$$

*Demonstração.* Condicionando em  $X(t)$ , e usando a definição de probabilidade condicional, temos

$$\begin{aligned} P_{ij}(t+s) &= \mathbb{P}(X(t+s) = j | X(0) = i) \\ &= \sum_{k \in S} \mathbb{P}(X(t+s) = j | X(t) = k, X(0) = i) \mathbb{P}(X(t) = k | X(0) = i) \\ &= \sum_{k \in S} \mathbb{P}(X(t+s) = j | X(t) = k) \mathbb{P}(X(t) = k | X(0) = i) \\ &= \sum_{k \in S} \mathbb{P}(X(s) = j | X(0) = k) \mathbb{P}(X(t) = k | X(0) = i) \\ &= \sum_{k \in S} P_{kj}(s) P_{ik}(t). \end{aligned}$$

□

Para cada  $t$ , com  $P_{ij}$  podemos obter uma matriz  $|S| \times |S|$ ,  $\mathbf{P}(t)$ , onde a  $(i, j)$ -ésima entrada são  $P_{ij}$  e as equações de Chapman-Kolmogorov,  $P_{ij}(t+s) = \sum_{k \in S} P_{ik}(t) P_{kj}(s)$ , nos dizem que  $(i, j)$ -ésima de  $\mathbf{P}(t+s)$  é a  $i$ -ésima linha de  $\mathbf{P}(t)$  vezes  $j$ -ésima coluna de  $\mathbf{P}(s)$ . Isso significa que  $\mathbf{P}(t+s) = \mathbf{P}(t)\mathbf{P}(s)$ .

Este resultado é análogo ao caso discreto, como não existe um  $n$ -ésimo passo (para a matriz de transição) no tempo contínuo, nós dizemos apenas que  $\mathbf{P}(t)$  é a matriz função de probabilidade de transição.

## Equações de Backward e Forward

Retornando às taxas  $q_{ij}$ , lembramos que o tempo até o primeiro alarme possui distribuição exponencial com taxa  $v_i = \sum_{j \in S} q_{ij}$ , onde  $q_{ij} = 0$  se não for possível ir do estado  $j$  para o estado  $i$ . Saindo de  $i$  para  $j$  com probabilidade  $\frac{q_{ij}}{v_i}$ , denotada por  $P_{ij}$ .

Agora, se  $v_i = \infty$ , o processo deixa o estado  $i$  imediatamente após entrar em  $i$ . Por outro lado, Se  $v_i = 0$ , então após entrar em  $i$ , o processo permanece nesse estado, o qual chamamos de estado absorvente. Iremos assumir que  $0 < v_i < \infty$ .

Se  $T_i$  denota o tempo de espera em  $i$ , segue que  $T_i \sim \text{Exp}(v_i)$  e  $\mathbb{P}(T_i > h) = e^{-v_i h}$ . Expandindo em série de Taylor,

$$\mathbb{P}(T_i > h) = e^{-v_i h} = 1 - v_i h + \frac{(v_i h)^2}{2!} - \frac{(v_i h)^3}{3!} + \dots = 1 - v_i h + o(h).$$

Observe que, pelo que vimos acima,  $\mathbb{P}(T_i \leq h) = v_i h + o(h)$ . Ainda, se  $T_j$  denota o tempo de espera em  $j$ , sendo  $j \neq i$ , então  $T_j$  é exponencial com taxa  $v_j$  e  $T_j$  é independente de  $T_i$ . Como  $\{T_i + T_j \leq h\} \subset \{T_i \leq h, T_j \leq h\}$ , temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_i + T_j) &\leq \mathbb{P}(T_i \leq h, T_j \leq h) \\ &= \mathbb{P}(T_i \leq h)\mathbb{P}(T_j \leq h) \\ &= (v_i h + o(h))(v_j h + o(h)) \\ &= v_i v_j h^2 + o(h) = o(h). \end{aligned}$$

Isso implica que  $\mathbb{P}(T_i + T_j) = v_i v_j h^2 + o(h) = o(h)$ . Logo, começando em  $i$ , se calcularmos a probabilidade de 2 ou mais transições no tempo  $h$  condicionando na primeira transição, obtemos

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(2 \text{ ou mais transições no tempo } h | X(0) = i); \\ &= \sum_{j \neq i} \mathbb{P}(2 \text{ ou mais transições no tempo } h | X(0) = i, \text{ primeira transição para } j) p_{ij}; \\ &= \sum_{j \neq i} \mathbb{P}(T_i + T_j \leq h) p_{ij} = \sum_{j \neq i} o(h) p_{ij} = o(h). \end{aligned}$$

Desde que  $\mathbb{P}(\text{não haver transição no tempo } h | X(0) = i) = \mathbb{P}(T_i > h) = 1 - v_i h + o(h)$ .

Temos também que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{exatamente uma transição no tempo } h | X(0) = i) &= 1 - (1 - v_i h + o(h)) - o(h) \\ &= v_i h + o(h). \end{aligned}$$

Resumindo, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{não haver transição no tempo } h | X(0) = i) &= \mathbb{P}(T_i > h) = 1 - v_i h + o(h); \\ \mathbb{P}(\text{exatamente 1 transição no tempo } h | X(0) = i) &= v_i h + o(h); \end{aligned}$$

$\mathbb{P}(2 \text{ ou mais transições no tempo } h | X(0) = i) = o(h)$ .

Agora, sejam  $i \neq j$  e considere a probabilidade condicional  $\mathbb{P}(X(h) = j | X(0) = i)$ . Dado  $X(0) = i$ , uma maneira do evento  $\{X(h) = j\}$  ocorrer é que haja exatamente uma transição no intervalo  $[0, h]$  e que essa transição seja para o estado  $j$ . A probabilidade disso é  $(v_i h + o(h))p_{ij} = v_i p_{ij} h + o(h)$ . Mais ainda, o evento consistindo na união de todas as outras formas de estar no estado  $j$  no tempo  $h$  começando no estado  $i$  implica o evento em que ocorrem 2 ou mais transições no intervalo  $[0, h]$ . Então a probabilidade do segundo evento é  $o(h)$ . Simplificando, vale que

$$\mathbb{P}(X(h) = j | X(0) = i) = v_i p_{ij} h + o(h) + o(h) = v_i p_{ij} h + o(h).$$

De forma similar, se considerarmos a probabilidade condicional  $\mathbb{P}(X(h) = i | X(0) = i)$  a única maneira do evento  $X(h) = i$  ocorrer dado que  $X(0) = i$  que não envolva ao menos duas transições no intervalo  $[0, h]$  é que não tenhamos transições no intervalo  $[0, h]$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X(h) = i | X(0) = i) &= P(\text{nenhuma transição em } [0, h] | X(0) = i) + o(h) \\ &= 1 - v_i h + o(h) + o(h) \\ &= 1 - v_i h + o(h). \end{aligned}$$

Estamos então em posição para obter um conjunto de equações diferenciais, chamadas *Equações de Kolmogorov*, para as probabilidades de transição  $p_{ij}(t)$ . Procedendo dessa forma, derivando um sistema de equações condicionando. Existem dois conjuntos de equações as quais podemos derivar de  $p_{ij}(t)$  - as *Equações Backward de Kolmogorov* e as *Equações Forward de Kolmogorov*. Iremos obter agora as Equações Backward.

Vamos calcular  $p_{ij}(t+h)$  condicionando em  $X(h)$ , com  $h > 0$ ,

$$\begin{aligned} p_{ij}(t+h) &= \mathbb{P}(X(t+h) = j | X(0) = i) \\ &= \sum_{k \in S} \mathbb{P}(X(t+h) = j | X(h) = k, X(0) = i) \mathbb{P}(X(h) = k | X(0) = i) \\ &= \sum_{k \in S} \mathbb{P}(X(t+h) = j | X(h) = k) \mathbb{P}(X(h) = k | X(0) = i) \\ &= \sum_{k \in S} \mathbb{P}(X(t) = j | X(0) = k) \mathbb{P}(X(h) = k | X(0) = i) \\ &= \sum_{k \in S} p_{kj}(t) \mathbb{P}(X(h) = k | X(0) = i). \end{aligned}$$

A terceira equação segue da propriedade de Markov, enquanto a quarta decorre da homogeneidade no tempo. Separando o termo  $k = i$  e usando nossos resultados anteriores,



obtemos

$$p_{ij}(t+h) = p_{ij}(t)(1 - v_i h + o(h)) + \sum_{k \neq i} p_{kj}(t)(v_i p_{ik} h + o(h))$$

$$p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t) = v_i p_{ij}(t) h + \sum_{k \neq i} p_{kj}(t) v_i p_{ik} h + o(h).$$

Dividindo por  $h$  e usando que  $v_i p_{ik} = q_{ik}$ , segue que

$$\frac{p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)}{h} = \sum_{k \neq i} q_{ik} p_{kj}(t) - v_i p_{ij}(t) + \frac{o(h)}{h}.$$

Tomando  $h \rightarrow 0$ , o lado esquerdo converge para  $p'_{ij}(t)$ , o que nos mostra que  $P_{ij}(t)$  é diferenciável e vale que

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} q_{ik} p_{kj}(t) - v_i p_{ij}(t).$$

As equações diferenciais acima, para  $i, j \in S$ , são chamadas Equações Backward de Kolmogorov.

Seja  $\mathbf{P}(t)$  a matriz de ordem  $|S| \times |S|$  com  $(i, j)$ -ésimas entradas dadas por  $p_{ij}(t)$  e  $\mathbf{P}'(t)$  a matriz de ordem  $|S| \times |S|$  com  $(i, j)$ -ésimas entradas dadas por  $p'_{ij}(t)$ . Chamamos  $\mathbf{P}(t)$  de matriz função de probabilidade de transição, a qual é diferenciável em  $t$ . Se formamos uma outra matriz  $\mathbf{G}$ , com  $g_{ii} = -v_i$  e  $g_{ik} = q_{ik}, i \neq k$ , podemos escrever  $[\mathbf{P}'(t)]_{ij} = [\mathbf{G}\mathbf{P}(t)]_{ij}$ . Sendo assim, podemos escrever as Equações Backward de Kolmogorov na forma

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{G}\mathbf{P}(t).$$

**Definição 2.6** (Gerador Infinitesimal). *A matriz  $\mathbf{G}$  acima é fundamental quando associada à uma CTMC  $\{X(t); t \geq 0\}$ . Ela é chamada de gerador infinitesimal, ou apenas de gerador da cadeia.*

A matriz geradora  $\mathbf{G}$  contém todas as taxas de informação da cadeia e, mesmo que suas entradas não sejam probabilidades, é a contrapartida para a matriz de transição  $\mathbf{P}$  para as cadeias em tempo discreto. Se condicionarmos em  $X(t)$  ao invés de  $X(h)$  vamos obter um novo conjunto de equações diferenciais chamado *Equações Forward de Kolmogorov*, a qual a matriz é dada por  $\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{G}$ , em particular,  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{G}$  são matrizes que comutam.

**Proposição 2.7.** *As Equações de Backward e Forward possuem a condição  $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$ , onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade de ordem  $|S| \times |S|$ .*

*Demonstração.* Note que,

$$p_{ii}(0) = \mathbb{P}(X(0) = i | X(0) = i) = 1 \text{ e,}$$

$$p_{ij}(0) = \mathbb{P}(X(0) = j | X(0) = i) = 0, \text{ com } i \neq j. \quad \square$$

Agora, as equações Backward e Forward são dois conjuntos de equações diferenciais, com mesma condição inicial, com solução dada por

$$\mathbf{P}(t) = e^{t\mathbf{G}} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\mathbf{G})^n}{n!} = \mathbf{I} + t\mathbf{G} + \frac{(t\mathbf{G})^2}{2!} + \frac{(t\mathbf{G})^3}{3!} + \dots$$

Com efeito, diferenciando em  $t$ , temos

$$\begin{aligned} \mathbf{P}'(t) &= \mathbf{G} + t\mathbf{G}^2 + \frac{t^2\mathbf{G}^3}{2!} + \frac{t^3\mathbf{G}^4}{3!} + \dots \\ &= \mathbf{G} \left[ \mathbf{I} + t\mathbf{G} + \frac{(t\mathbf{G})^2}{2!} + \frac{(t\mathbf{G})^3}{3!} + \dots \right] \\ &= \mathbf{G}\mathbf{P}(t). \end{aligned}$$

Assim,  $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$  também é satisfeito.

Mais ainda, podemos escrever  $\mathbf{P}'(t) = \left[ \mathbf{I} + t\mathbf{G} + \frac{(t\mathbf{G})^2}{2!} + \frac{(t\mathbf{G})^3}{3!} + \dots \right] \mathbf{G} = \mathbf{P}(t)\mathbf{G}$ , mostrando que  $\mathbf{P}(t) = e^{t\mathbf{G}}$  satisfaz as equações Forward também.

Portando, mesmo quando não podemos obter  $\mathbf{P}(t)$  numa forma simples e explícita, a representação  $e^{t\mathbf{G}}$  é geral e pode ser usada para obtermos aproximações numéricas de  $\mathbf{P}(t)$  se  $|S|$  é finito, por truncamento finito da série (veja [13]).

Além disso, o gerador  $\mathbf{G}$  também é determinante para encontrarmos distribuições estacionárias de CTMC, como veremos abaixo.

**Definição 2.8** (Distribuições Estacionárias). *Seja  $\{X(t); t \geq 0\}$  be a CTMC com espaço de estados  $S$ , gerador  $\mathbf{G}$ , e matriz função de probabilidade de transição  $\mathbf{P}(t)$ . Um vetor  $|S|$ -dimensional  $\boldsymbol{\pi} = (\pi_i)_{i \in S}$ ,  $\pi_i \geq 0, \forall i$  e  $\sum_{i \in S} \pi_i = 1$ , é dito uma distribuição estacionária se  $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}(t), \forall t \geq 0$*

Se  $\boldsymbol{\pi}$  é uma distribuição estacionária e definirmos uma distribuição inicial de  $X(0)$  como  $\boldsymbol{\pi}$ , então a distribuição de  $X(t)$  também será  $\boldsymbol{\pi}, \forall t > 0$ , i.e.,  $\mathbb{P}(X(t) = j) = \pi_j, \forall j \in S, t > 0$ . Para vermos isso, tomemos a distribuição inicial de  $X(0)$  sendo  $\boldsymbol{\pi}$  e calculamos  $\mathbb{P}(X(t) = j)$  condicionando em  $X(0)$ . O que nos dá

$$\mathbb{P}(X(t) = j) = \sum_{i \in S} \mathbb{P}(X(t) = j | X(0) = i) \mathbb{P}(X(0) = i) = \sum_{i \in S} p_{ij}(t) \pi = [\boldsymbol{\pi}\mathbf{P}(t)]_j = \pi_j.$$

Agora, para vermos a relação entre  $\mathbf{G}$  e a definição de distribuição estacionária, basta trocarmos  $\mathbf{P}(t)$  na definição de  $\boldsymbol{\pi}$  por  $e^{t\mathbf{G}}$ . Obtendo assim as equivalências:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi} \text{ é uma distribuição estacionária} &\Leftrightarrow \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}(t), \forall t \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\mathbf{G})^n}{n!}, \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \boldsymbol{\pi} \mathbf{G}^n, \forall t \geq 0 \\
&\Leftrightarrow 0 = \boldsymbol{\pi} \mathbf{G}^n, \forall n \geq 1 \\
&\Leftrightarrow 0 = \boldsymbol{\pi} \mathbf{G}.
\end{aligned}$$

Sendo assim, podemos ver que a condição  $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{P}(t), \forall t \geq 0$ , a qual normalmente é difícil de verificar, reduzir-se-á em uma condição mais simples  $0 = \boldsymbol{\pi} \mathbf{G}$  são o conjunto de  $|S|$  equações lineares as quais, tem conjunto com a condição  $\sum_{i \in S} \pi_i = 1$ , determina a distribuição estacionária  $\boldsymbol{\pi}$ , se uma existir.

A  $j$ -ésima equação em  $0 = \boldsymbol{\pi} \mathbf{G}$  é dada por  $0 = -v_j \pi_j + \sum_{i \neq j} q_{ij} \pi_i$ , a qual é equivalente a

$$v_j \pi_j = \sum_{i \neq j} q_{ij} \pi_i.$$

Por esse motivo a equação  $\boldsymbol{\pi} \mathbf{G} = 0$  são chamadas de *Equação de Balanço Global* (Global Balance Equations, em inglês) ou simplesmente *Equação de Balanço*, por expressar o fato de que se o processo é estacionário, então deve haver equilíbrio (balanço), nas taxas de entrada e saída de qualquer estado.

**Teorema 2.9.** *Em uma CTMC, se existe uma distribuição estacionária  $\boldsymbol{\pi}$ , então ela é única e  $p_{ij}(t) \rightarrow \pi_j$ , quando  $t \rightarrow \infty, \forall i$ .*

*Demonstração.* A demonstração deste teorema foge aos propósitos desse trabalho, o leitor interessado encontrará mais detalhes em [13].  $\square$



# Capítulo 3

## Terminologia e algumas propriedades

Iniciamos esse capítulo lembrando algumas definições e resultados sobre variáveis gaussianas, sendo nosso objetivo principal o de estabelecer a terminologia e propriedades fundamentais para enunciar nossos resultados principais. Vamos definir a função de Dirichlet e analisar duas cadeias de Markov em um grafo finito munido de pesos, uma das cadeias possui taxa de salto unitário e a outra possui taxa variável, nossa principal fonte para os estudos deste capítulo é [12].

**Definição 3.1** (Variável Aleatória Gaussiana). *Dizemos que uma variável aleatória contínua  $X$  tem distribuição Normal com parâmetros  $\mu$  e  $\sigma^2$ , se possui densidade dada por  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$ .*

**Definição 3.2** (Vetor Gaussiano). *Dizemos que  $X = (X_1, \dots, X_n)$  é um **Vetor Gaussiano** se, para cada  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ , temos que  $\langle \lambda, X \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i$  tem distribuição normal.*

**Definição 3.3** (Processo Gaussiano). *Dizemos que um processo estocástico  $X_t, t \geq I$ , é um **Processo Gaussiano** quando para cada  $n \in \mathbb{N}$ , tomando  $t_1, \dots, t_n \in I$ , o vetor  $X = (X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  é um Vetor Gaussiano.*

**Proposição 3.4.** *Sejam  $V$  um espaço vetorial de dimensão  $n$  e  $X$  um vetor gaussiano tomando valores em  $V$ , então existem  $m_X \in V$  e uma forma quadrática não negativa  $q_X$  tais que, dado  $u \in V$ ,*

i)  $\mathbb{E}[\langle u, X \rangle] = \langle u, m_X \rangle;$

ii)  $\text{var}\langle u, X \rangle = q_X(u).$

*Demonstração.* vide seção 1.2 de [7].

□

**Definição 3.5.** Um vetor gaussiano  $X$  é dito centrado quando  $m_X = 0$ .

**Teorema 3.6.** Sejam  $q$  um endomorfismo simétrico e não negativo de  $V$  e  $X$  um vetor gaussiano centrado. Então,

- a) Existe um único vetor gaussiano  $Y$  tal que  $q = q_Y$ .
- b) Seja  $\{e_1, \dots, e_n\}$  uma base de  $V$  na qual  $q_X$  é diagonal, implicando que  $q_X(e_j) = \lambda_j e_j$ , para todo  $1 \leq j \leq n$ , onde  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0 = \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n$ , de forma que o posto de  $q_X$  é  $r$ . Então  $X = \sum_{j=1}^r Y_j e_j$ , onde  $Y_j, 1 \leq j \leq r$ , são variáveis gaussianas (centradas) independentes e  $\text{var}(Y_j) = \lambda_j$ .
- c) Sendo  $P_X$  a distribuição de  $X$ , então o suporte topológico de  $P_X$  é o espaço gerado por  $e_1, \dots, e_r$ .
- d)  $P_X$  é absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue em  $V$  se, e somente se,  $r = n$ , neste caso a densidade de  $X$  é dada por

$$p_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^2 \sqrt{\det q_x}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \langle x, q_x^{-1}(x) \rangle \right].$$

*Demonstração.* Para os itens a), b) e c), vide o Teorema 1.3 em [7]

- d) Se  $r < n$ , então o espaço gerado por  $e_1, \dots, e_r$  tem medida de Lebesgue nula e a distribuição de  $X$  é singular. Supondo então que  $r = d$  e escrevendo  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$  como um vetor aleatório de  $\mathbb{R}^n$ , então a bijeção  $\varphi(Y_1, \dots, Y_n) = \sum_j Y_j e_j$  leva  $Y$  em  $X$ .

Então,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g(X)] &= \mathbb{E}[g(\varphi(Y))] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} g(\varphi(Y)) \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{y_j^2}{\lambda_j} \right) \frac{dy_1 \cdots dy_n}{\sqrt{\lambda_1 \cdots \lambda_n}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\lambda_1 \cdots \lambda_n}} \int_{\mathbb{R}^n} g(\varphi(Y)) \exp \left( -\frac{1}{2} \langle \varphi(y), q_X^{-1}(\varphi(y)) \rangle \right) dy_1 \cdots dy_n \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det q_X}} \int_V g(x) \exp \left( -\frac{1}{2} \langle x, q_X^{-1}(x) \rangle \right) dx. \end{aligned}$$

Notando que a medida de Lebesgue em  $V$  é a imagem da medida de Lebesgue em  $\mathbb{R}^n$  por  $\varphi$ . Na segunda igualdade usamos o fato de que  $Y_1, \dots, Y_n$  são independentes e possuem distribuição gaussiana, enquanto que a terceira igualdade decorre de  $\langle \varphi(y), q_X^{-1}(\varphi(y)) \rangle = \langle \sum_{j=1}^n y_j^2 e_j, \sum_{j=1}^n \frac{y_j^2}{\lambda_j} e_j \rangle = \sum_{j=1}^n \frac{y_j^2}{\lambda_j}$ .

□

**Lema 3.7.** Se  $(X, Y)$  é um vetor gaussiano centrado bidimensional, então, para  $s \neq 0$ ,

$$\frac{\mathbb{E}[X \exp\{sY\}]}{s \mathbb{E}[\exp\{sY\}]} = \mathbb{E}[XY].$$

*Demonstração.* Sejam  $t, s \in \mathbb{R}$ . Então

$$\mathbb{E}[\exp\{tX + sY\}] = \exp\left\{\frac{1}{2}\mathbb{E}[(tX + sY)^2]\right\} = \exp\left\{\frac{1}{2}(t^2\mathbb{E}[X^2] + 2ts\mathbb{E}[XY] + s^2\mathbb{E}[Y^2])\right\}.$$

Derivando em  $t$  e tomando  $t = 0$ , temos

$$\mathbb{E}[X \exp\{sY\}] = s\mathbb{E}[XY] \exp\left\{\frac{s^2}{2}\mathbb{E}[Y^2]\right\} = s\mathbb{E}[XY]\mathbb{E}[\exp\{sY\}].$$

□

## A Forma de Dirichlet

Seja  $\Omega$  um grafo conexo e não-vazio, tal que para todos os pares  $\{x, y\}$  temos pesos  $c_{x,y} = c_{y,x} \geq 0$ , com  $c_{x,x} = 0$  e  $c_{x,y} > 0$  se, e só se, o par  $\{x, y\}$  é um elo do nosso grafo. Nosso grafo é munido ainda de um estado cemitério  $\Delta \notin \Omega$  e uma medida de morte  $\kappa_x \geq 0$ , e para ao menos um  $x \in \Omega$ , temos que  $\kappa_x \neq 0$ , de forma que podemos pensar em  $\kappa_x$  como  $c_{x,\Delta}$ .

**Definição 3.8.** Podemos definir uma medida em  $\Omega$  com  $\lambda_x = \sum_{y \in E} c_{x,y} + \kappa_x$ ,  $x \in \Omega$ .

Observe que  $\lambda_x > 0$  pelas considerações acima.

**Definição 3.9.** A **Forma de Dirichlet** ou **Energia** de uma função  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é definida por

$$\mathcal{E}(f, f) = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in \Omega} c_{x,y} (f(y) - f(x))^2 + \sum_{x \in \Omega} \kappa_x f^2(x).$$

**Proposição 3.10.** A Forma de Dirichlet determina  $c_{x,y}$  e  $\kappa_x$ ,  $x, y \in \Omega$ .

*Demonstração.* De fato, observando que

$$\mathcal{E}(f + g, f + g) = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in \Omega} c_{x,y} [(f + g)(y) - (f + g)(x)]^2 + \sum_{x \in \Omega} \kappa_x (f + g)^2(x).$$

$$\mathcal{E}(f - g, f - g) = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in \Omega} c_{x,y} [(f - g)(y) - (f - g)(x)]^2 + \sum_{x \in \Omega} \kappa_x (f - g)^2(x).$$

Agora, usando a fórmula de polarização para  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(f, g) &= \frac{1}{4} [\mathcal{E}(f + g, f + g) - \mathcal{E}(f - g, f - g)] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x,y \in \Omega} c_{x,y} [(f(y) - f(x))(g(y) - g(x)) + \sum_{x \in \Omega} \kappa_x (f(x)g(x)), \end{aligned}$$

segue que,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{1}_x, \mathbf{1}_y) &= -c_{x,y}, \quad x \neq y \in \Omega, \\ \mathcal{E}(\mathbf{1}_x, \mathbf{1}_x) &= \sum_{y \in \Omega} c_{x,y} + \kappa_x = \lambda_x, \quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

□

Assim, a **Forma de Dirichlet** define uma forma quadrática no espaço  $\mathcal{F}$  de funções de  $\Omega$  em  $\mathbb{R}$ , a qual é positiva definida.

**Definição 3.11.** Definimos  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , um produto escalar em  $\mathcal{L}^2(d\lambda)$ , dado por

$$\langle f, g \rangle = \sum_{x \in \Omega} f(x)g(x)\lambda_x, \text{ onde } f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

**Definição 3.12.** Sejam  $x, y \in \Omega$ , as nossas **Probabilidades de transição** são dadas por:

$$p_{x,y} = \frac{c_{x,y}}{\lambda_x} \quad p_{x,\Delta} = \frac{\kappa_x}{\lambda_x} \quad e \quad p_{\Delta,\Delta} = 1.$$

Note que  $p_{x,y}$  é  $\lambda$ -reversível, isto é,  $\lambda_x p_{x,y} = \lambda_y p_{y,x}$ , para todo  $x, y \in \Omega$ . Observe que nossas probabilidades de transição para  $\Omega \cup \{\Delta\}$  são de forma que uma Cadeia em tempo discreto em  $\Omega \cup \{\Delta\}$  permanece no cemitério uma vez que entra em  $\Delta$ .

Denotando por  $Z_n, n \geq 0$  a cadeia de Markov discreta no espaço de trajetórias discretas de  $\Omega \cup \{\Delta\}$ , cuja matriz de transição é dada por  $p_{x,y}, x, y \in \Omega$ , a qual entra em  $\{\Delta\}$  em tempo finito e permanece lá após isso, isto é, ao entrar no cemitério, a cadeia acaba.  $P_x$  indicará a lei da cadeia iniciando no ponto  $x \in \Omega \cup \{\Delta\}$  e estudaremos duas **CTMC** em  $\Omega \cup \{\Delta\}$ , as quais são obtidas com um reescalonamento de tempo uma da outra, ambas obtidas através de  $Z_n, n \geq 0$ . A primeira cadeia,  $X$ , possui taxa de salto unitária e a segunda,  $\bar{X}$ , possuirá taxa variável dada por  $\lambda$ .

## A cadeia de Markov $X$ (com taxa de salto 1)

Introduziremos uma **CTMC** em  $\Omega \cup \{\Delta\}$ , com esqueleto  $Z_n$  e tempo de espera com distribuição exponencial de parâmetro 1.

**Definição 3.13.**  $D_\Omega$  é o conjunto de funções contínuas à direita com valores em  $\Omega \cup \{\Delta\}$ , com número finito de saltos e após entrar em  $\Delta$ , permanece lá.

$X_t, t \geq 0$ , é o processo canônico em  $D_\Omega$ ;

$\theta_t, t \geq 0$ , é a função Shift em  $D_\Omega : \theta_t(w)(\cdot) = w(\cdot + t)$ , com  $w \in D_\Omega$ ;

$P_x$  é a lei em  $D_\Omega$  da cadeia começando em  $x \in \Omega \cup \Delta$ .

Podemos aumentar, apropriadamente,  $D_\Omega$  e trabalhar com um espaço de probabilidade sob  $P_x$  para trabalhar simultaneamente com  $Z_n, n \geq 0$ , começando em  $x$  quase certamente, e com uma sequência de variáveis positivas  $T_n, n \geq 1$ , os “tempos de salto”, crescendo para infinito, com incrementos  $T_{n+1} - T_n, n \geq 0$ , i.i.d. exponenciais de parâmetro 1 (onde  $T_0 = 0$ ). Expressando  $X_t, t \geq 0$  como

$$X_t = Z_n, \text{ com } T_n \leq t < T_{n+1}, n \geq 0.$$



Observe que quando a cadeia atinge o cemitério os tempos de salto subsequentes são apenas fictícios para a cadeia contínua.

**Exemplo 6.** 1) Considere  $\Omega = \left(\frac{\mathbb{Z}}{N\mathbb{Z}}\right)^d$ , onde  $N > 1, d \geq 1$ , munido de uma estrutura de grafo onde  $x, y$  são vizinhos se uma de suas coordenadas diferem por  $\pm 1$  e as outras coordenadas são iguais. Tomemos

$$c_{x,y} = \mathbb{1}_{\{x,y \text{ são vizinhos}\}}, x, y \in \Omega.$$

$$\kappa_x = \kappa > 0, x \in \Omega.$$

Então  $X_t, t \geq 0$ , é o passeio aleatório simples em  $\left(\frac{\mathbb{Z}}{N\mathbb{Z}}\right)^d$  com tempo de espera possuindo distribuição exponencial de parâmetro 1, que acaba em cada passo com probabilidade  $\frac{\kappa}{2d + \kappa}$ , quando  $N > 2$  e probabilidade  $\frac{\kappa}{d + \kappa}$ , quando  $N = 2$ .

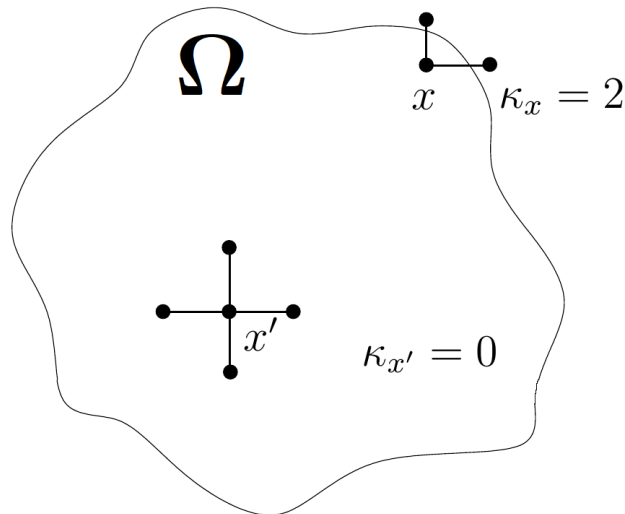
2) Consideremos em  $\mathbb{Z}^d, d \geq 1$  um subconjunto conexo  $\Omega$ , de forma que a cadeia acaba após sair de  $\Omega$  e definimos

$$c_{x,y} = \mathbb{1}_{\{|x - y| = 1\}}, \text{ onde } x, y \in \Omega.$$

$$\kappa_x = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d \setminus \Omega} \mathbb{1}_{\{|x - y| = 1\}}, \text{ com } x \in \Omega.$$

Sendo assim,  $X_t, t \geq 0$ , quando começando em  $x \in \Omega$ , corresponde ao passeio aleatório simples em  $\mathbb{Z}^d$  com taxa de espera exponencial de parâmetro 1 e que acaba quando sai do conjunto  $\Omega$ , vide Figura 3.1 abaixo.

Figura 3.1: Passeio Aleatório Simples em  $\mathbb{Z}^d$



Fonte: [12]

Introduziremos agora alguns conceitos importantes os quais irão nos auxiliar no estudo da cadeia  $X$ .

## Semigrupo de Transição e Densidade de Transição

Veremos as funções reais em  $\Omega$  como funções em  $\Omega \cup \{\Delta\}$ , as quais se anulam quando estão em  $\Delta$ .

**Definição 3.14** (Semigrupo de transição Sub-Markoviano). *Seja  $X_t, t \geq 0$ , e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , definimos*

$$R_t f(x) = E_x[f(X_t)], x \in \Omega.$$

*Desenvolvendo a expressão acima para  $x \in \Omega$ , temos que*

$$\begin{aligned} R_t f(x) &= E_x[f(X_t)] = \sum_{n \geq 0} e^{-t} \frac{t^n}{n!} E_x[f(Z_n)] \\ &= \sum_{n \geq 0} e^{-t} \frac{t^n}{n!} P^n f(x) = e^{t(P-I)} f(x), \end{aligned}$$

*Onde  $I$  é a identidade em  $\mathbb{R}^\Omega$  e  $Pf(x) = \sum_{y \in \Omega} p_{x,y} f(y) = E_x[f(Z_1)]$ , a segunda igualdade segue da definição de  $Z_n$  e da linearidade da esperança.*

Um resultado muito importante é a nossa próxima proposição, a saber:

**Proposição 3.15.**  *$P$  e  $R_t$  são operadores limitados e autoadjuntos em  $L^2(d\lambda)$  com relação a  $\mathcal{E}$  e  $R$  possui a propriedade de semigrupo, em outras palavras,  $R_{t+s} = R_t R_s$ ,  $t, s \geq 0$ .*

*Demonstração.* Sendo  $p_{x,y}$   $\lambda$ -reversível, então  $P$  é simétrica (logo, autoadjunta) com relação a  $\mathcal{E}$ . Para vermos que  $R_t$  é autoadjunta, note que, dadas  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , então

$$\langle R_t f, g \rangle = \sum_{x \in \Omega} e^{t(P-I)} f(x) g(x) \lambda_x = \sum_{x \in \Omega} e^{t(P-I)} g(x) f(x) \lambda_x = \langle f, R_t g \rangle.$$

Para verificarmos a propriedade de semigrupo, observe que como  $PI = IP$ , segue que

$$R_{t+s} = e^{(t+s)(P-I)} f(x) = e^{t(P-I)} e^{s(P-I)} f(x) = R_t R_s, \text{ com } s, t \geq 0.$$

□

**Definição 3.16.** *Seja  $t \geq 0, x, y \in \Omega$ , definimos a **Densidade de Transição** por*

$$r_t(x, y) = (R_t \mathbf{1}_y)(x) \frac{1}{\lambda_y}.$$

Como  $R_t$  é simétrica, segue diretamente que  $r_t(x, y)$  possui a propriedade de simetria, isto é,  $r_t(x, y) = r_t(y, x), t \geq 0, x, y \in \Omega$ .

**Teorema 3.17.** *Sejam  $x, y, z \in \Omega$ , então valem as **Equações de Chapman-Kolmogorov**:*

$$r_{t+s}(x, y) = \sum_{z \in \Omega} r_t(x, z)r_s(z, y)\lambda_z.$$

*Demonstração.* Lembremos que  $r_t(x, y) = (R_t \mathbf{1}_y)(x) \frac{1}{\lambda_y} = \mathbb{E}_x[\mathbf{1}_y(X_t)] \frac{1}{\lambda_y} = \mathbb{P}_x(X_t = y) \frac{1}{\lambda_y}$ .  
Daí,

$$\begin{aligned} r_{t+s}(x, y) &= (R_{t+s} \mathbf{1}_y)(x) \frac{1}{\lambda_y} = R_t(R_s \mathbf{1}_y)(x) \frac{1}{\lambda_y} \\ &= \mathbb{E}_x[R_s \mathbf{1}_y(X_t)] \frac{1}{\lambda_y} \\ &= \sum_{z \in \Omega} \mathbb{E}_x[R_s \mathbf{1}_y(z) \mathbf{1}_{\{X_t = z\}}] \frac{1}{\lambda_y} \\ &= \sum_{z \in \Omega} \mathbb{E}_x[\mathbf{1}_{\{X_t = z\}}] R_s \mathbf{1}_y(z) \frac{1}{\lambda_y} \\ &= \sum_{z \in \Omega} \mathbb{E}_x[\mathbf{1}_{\{X_t = z\}}] \frac{\lambda_z}{\lambda_z} r_s(z, y) \\ &= \sum_{z \in \Omega} r_t(x, z)r_s(z, y)\lambda_z. \end{aligned}$$

□

Mais ainda,  $r_t(x, y) > 0, t > 0, x, y \in \Omega$ , o que segue diretamente do fato de  $c_{x,y} > 0, x \neq y$  e da definição de  $R_t$ .

Em 1828, George Green obteve três identidades através do famoso Teorema do Divergente (o leitor poderá encontrar seu enunciado em [9]) e a partir disso construiu a função que leva seu nome. O objetivo de Green era obter uma representação integral da solução do problema de Dirichlet  $\begin{cases} \Delta u = 0, \text{ em } \Omega; \\ u = f, \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases}$  em termos apenas de  $f$ , [10]. Inspirados por ela, definiremos uma Função de Green para a nossa cadeia, a qual possui as características de simetria e não-negatividade como as obtidas nas soluções de equações diferenciais.

**Definição 3.18.** *Definimos a **Função de Green** ou **Densidade de Green** por*

$$g(x, y) = \int_0^\infty r_t(x, y) dt.$$

Desenvolvendo a Função de Green, temos

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \int_0^\infty r_t(x, y) dt = \int_0^\infty (R_t \mathbf{1}_y)(x) \frac{1}{\lambda_y} dt \\ &= \int_0^\infty (\mathbb{E}_x[\mathbf{1}_y(X_t)]) \frac{1}{\lambda_y} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E_x \left[ \int_0^\infty \mathbb{1}_y(X_t) dt \right] \frac{1}{\lambda_y}, \text{ por Fubini} \\
&= E_x \left[ \int_0^\infty \mathbb{1}_{\{X_t=y\}} dt \right] \frac{1}{\lambda_y}, \quad x, y \in \Omega.
\end{aligned}$$

Isso implica que a nossa Função de Green nos dá o valor esperado do tempo que o processo passa no ponto  $y$  quando o processo se inicia no ponto  $x$ .

**Lema 3.19.**  $g(x, y) \in (0, \infty)$  é uma função simétrica em  $E \times E$ .

*Demonstração.* Observe que temos duas coisas a provar, que  $g(x, y)$  toma valores em  $(0, \infty)$  e a simetria. Começando pela última, basta notarmos que  $r_t$  é simétrica e positiva, isso já implica que a nossa Função de Green é positiva e simétrica.

Como ela toma valores finitos, por nossas considerações sobre  $\Omega$  e  $\kappa_x$ , nossa cadeia é recorrente (pois é uma cadeia com espaço de estados finito), dessa forma, temos que para todo  $x \in \Omega$ , existe  $N_x \geq 0$  tal que  $\mathbb{P}_x(Z_n = \Delta, \text{ para algum } n \leq N_x) \geq \varepsilon > 0$  e tomamos  $N = \max_{x \in \Omega} N_x$ . Sendo assim,

$$\mathbb{P}_x(Z_n = \Delta, \text{ para algum } n \leq N) \geq \mathbb{P}_x(Z_n = \Delta, \text{ para algum } n \leq N_x) \geq \varepsilon, \forall x \in \Omega, \text{ daí,}$$

$$\inf_{x \in \Omega} \mathbb{P}_x[Z_n = \Delta, \text{ para algum } n \leq N] \geq \varepsilon.$$

Agora vamos aplicar a propriedade de Markov para tempos que são múltiplos de  $N$ ,

$$\begin{aligned}
(P^{kN} \mathbb{1}_\Omega)(x) &= \mathbb{P}_x[Z_n \neq \Delta, \text{ com } 0 \leq n \leq kN], k \geq 1 \\
&\leq (1 - \varepsilon)^k, k \geq 1, \text{ pela propriedade de Markov.} \\
&= \exp\{k \log(1 - \varepsilon)\} \\
&= \exp\left\{-k \log\left(\frac{1}{1 - \varepsilon}\right)\right\} \\
&= \exp\left\{-k \log\left(\frac{1}{1 - \varepsilon}\right) \frac{N}{N}\right\} \\
&= \exp\{-kNc'\}, \text{ onde } c' = \log\left(\frac{1}{1 - \varepsilon}\right) \frac{1}{N} \\
&\leq c \exp\{-nc'\}, \text{ pois } n \leq kN \text{ onde } c > 0.
\end{aligned}$$

Disso, segue que

$$\sup_{x \in \Omega} (P^n \mathbb{1}_\Omega)(x) \leq ce^{-c'n}, n \geq 0.$$

Adicionando essa limitação na definição de  $R_t$  obtemos

$$\sup_{x \in \Omega} (R_t \mathbb{1}_\Omega)(x) \leq ce^{-t} \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} e^{-c'n} = c \exp\{-t(1 - e^{-c'})\}.$$

Por fim,

$$g(x, y) \leq \frac{1}{\lambda_y} \int_0^\infty (R_t \mathbf{1}_\Omega)(x) dt \leq \frac{c}{\lambda_y} \frac{1}{1 - c^{-c'}} < \infty.$$

□

## Um pouco sobre Potenciais

Nós vamos introduzir alguns objetos como a medida de equilíbrio, potencial de equilíbrio e capacitância de um subconjunto de  $\Omega$ . Veremos ainda duas caracterizações variacionais da capacitância e descreveremos uma decomposição ortogonal no espaço de funções que se anulam em um subconjunto  $K$ , obtida através da Forma de Dirichlet, o que nos guia à Forma Traço.

**Definição 3.20** (Operadores Potenciais).

a) Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , o **potencial** de  $f$  é dado por  $Qf(x) = \sum_{y \in \Omega} g(x, y)f(y)\lambda_y$ .

b) Seja  $\nu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma medida, o **potencial (de medidas)** de  $\nu$  é dado por  $G\nu(x) = \sum_{y \in \Omega} g(x, y)\nu_y$ .

c) Sejam  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  e uma medida  $\nu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , definimos a dualidade  $\langle \nu, f \rangle = \sum_x \nu_x f(x)$ .

**Proposição 3.21.** Sejam  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  e medidas  $\mu, \nu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , segue que

3.21.1.  $E(\nu, \mu) := \langle \nu, G\mu \rangle = \sum_{x, y \in \Omega} \nu_x g(x, y)\mu_y$ , define uma forma bilinear simétrica e positiva definida;

3.21.2.  $Q = (I - P)^{-1}$ ;

3.21.3.  $G = (-L)^{-1}$ , onde  $Lf(x) = \sum_{y \in \Omega} c_{x,y}f(y) - \lambda_x f(x)$ ;

3.21.4.  $\mathcal{E}(G\nu, f) = \langle \nu, f \rangle$ ;

3.21.5.  $\exists \rho > 0$ , tal que  $\mathcal{E}(f, f) \geq \rho \|f\|_{L^2(d\lambda)}^2$ ;

3.21.6. Se  $G\kappa = 1$ , então a medida de morte é também chamada de medida de equilíbrio de  $\Omega$ ;

*Demonstração.*

3.21.2. Primeiro vamos usar a limitação que obtivemos na prova do lema acima,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \sum_{n \geq 0} e^{-t} \frac{t^n}{n!} |P^n f(x)| dt &\leq c \int_0^\infty \sum_{n \geq 0} e^{-t} \frac{t^n}{n!} e^{-c'n} dt \|f\|_\infty \\ &= c \|f\|_\infty \int_0^\infty e^{-t(1-e^{-c'})} dt < \infty. \end{aligned}$$

Pelo Teorema de dominação de Lebesgue. Daí,

$$\begin{aligned} Qf(x) &= \sum_y g(x, y) f(y) \lambda_y = \sum_y \int_0^\infty r_t(x, y) dt f(y) \lambda_y \\ &= \int_0^\infty \sum_y \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\{X_t=y\}}] f(y) dt = \int_0^\infty \mathbb{E}_x[f(X_t)] dt \\ &= \int_0^\infty R_t f(x) dt = \int_0^\infty \sum_{n \geq 0} e^{-t} \frac{t^n}{n!} P^n f(x) dt \\ &= \sum_{n \geq 0} \int_0^\infty e^{-t} \frac{t^n}{n!} dt P^n f(x) = \sum_{n \geq 0} P^n f(x) = (I - P)^{-1} f(x). \end{aligned}$$

Observe que pela limitação obtida no Lema 3.19, 1 não pertence ao espectro de  $P$  e isso prova o resultado.

3.21.3. Note que  $-L = \lambda(I - P)$ , composição de  $(I - P)$  e multiplicação por  $\lambda$ , em outros termos,  $(\lambda f)(x) = \lambda_x f(x)$ , com  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, x \in \Omega$ . Logo,  $-L$  é inversível e temos que  $(-L)^{-1} = (I - P)^{-1} \lambda^{-1} = Q \lambda^{-1} = G$ ;

3.21.4. Basta observarmos que

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(f, g) &= \sum_{x, y \in \Omega} f(x) g(y) \mathcal{E}(\mathbb{1}_x, \mathbb{1}_y) = \sum_{x \in \Omega} \lambda_x f(x) g(x) - \sum_{x, y \in \Omega} c_{x, y} f(x) g(y) \\ &= \langle f, -Lg \rangle = \langle -Lf, g \rangle. \end{aligned}$$

Sendo assim,  $\mathcal{E}(G\nu, f) = \langle -LG\nu, f \rangle = \langle \nu, f \rangle$ .

3.21.5. Sejam  $x \in \Omega, f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , então

$$f(x) = \langle \mathbb{1}_x, f \rangle = \mathcal{E}(G\mathbb{1}_x, f) \text{ pelo resultado acima.}$$

Como  $\mathcal{E}(\cdot, \cdot)$  é uma forma bilinear simétrica e não negativa, ao aplicarmos a desigualdade de Cauchy-Schwarz, vale que

$$f(x)^2 \leq \mathcal{E}(G\mathbb{1}_x, G\mathbb{1}_x) \mathcal{E}(f, f) = \langle \mathbb{1}_x, G\mathbb{1}_x \rangle \mathcal{E}(f, f) = g(x, x) \mathcal{E}(f, f).$$

$$\text{Deste modo, } \|f\|_{L^2(d\lambda)}^2 = \sum_{x \in \Omega} f(x)^2 \lambda_x \leq \sum_{x \in \Omega} g(x, x) \lambda_x \mathcal{E}(f, f).$$

O que nos guia ao resultado tomando  $\rho^{-1} = \sum_{x \in \Omega} g(x, x) \lambda_x$ .

3.21.6. Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , por 3.14.5 e Proposição 3.3

$$\mathcal{E}(1, f) = \sum_x \kappa_x f(x) = \langle \kappa, f \rangle = \mathcal{E}(G\kappa, f),$$

Segue então que  $1 = G\kappa$ .

Por último,

3.21.1. A simetria da nossa forma bilinear ocorre porque  $g(x, y)$  é simétrica. Mais ainda, seja  $\nu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$0 \leq \mathcal{E}(G\nu, G\nu) = \langle \nu, G\nu \rangle = E(\nu, \nu)$$

onde a primeira igualdade segue de 3.14.4. Agora, por 3.14.5, é válido que

$$0 = \mathcal{E}(G\nu, G\nu) \Rightarrow G\nu = 0, \text{ e por 3.14.3 segue que } \nu = (-L)G\nu = 0.$$

□

**Observação 1.** *Sejam  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , observe que acima mostramos que  $\mathcal{E}(f, g) = \langle -Lf, g \rangle = \langle f, -Lg \rangle$ . Pois  $-L = \lambda(I - P)$ , e ainda que  $\mathcal{E}(f, g) = ((I - P)f, g)_\lambda = (f, (I - P)g)_\lambda$ . Isso implica diretamente que  $L$  é o gerador da nossa cadeia, vide 2.6.*

**Definição 3.22** (Tempos Aleatórios). *Seja  $X_t, t \geq 0$  uma CTMC. Seja ainda  $K \subset \Omega$ , com a convenção de que  $\sup \emptyset = 0, \inf \emptyset = \infty$ , definimos os tempos aleatórios*

$H_K = \inf\{t \geq 0; X_t \in K\}$ , o **tempo de entrada** em  $K$ ;

$\tilde{H}_K = \inf\{t > 0; X_t \in K \text{ e } \exists s \in (0, t) \text{ tal que } X_s \neq X_0\}$ , o **tempo de acerto** em  $K$ ;

$T_K = \inf\{t \geq 0; X_t \notin K\}$ , o **tempo de saída** de  $K$ ;

$L_K = \sup\{t > 0; X_t \in K\}$ , o **tempo da última visita** a  $K$ .

$H_K, \tilde{H}_K, T_K$  são tempos de parada da filtração canônica  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  em  $D_\Omega$  (isto é, uma função  $N$  de  $D_\Omega$  em  $[0, \infty]$ , tal que  $\{N \leq t\} \in \mathcal{F}_t := \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$ , para cada  $t \geq 0$ ), o leitor interessado poderá ver mais sobre tempos de parada em [4].  $L_K$  normalmente não é um tempo de parada.

**Definição 3.23.** *Seja  $U \subset \Omega$ , definimos*

*A densidade de transição nula fora de  $U$  é dada por*

$$r_{t,U}(x, y) = \mathbb{P}_x[X_t = y, t < T_U] \frac{1}{\lambda_y} \leq r_t(x, y), t \geq 0, x, y \in \Omega.$$

*A Função de Green nula fora de  $U$  é dada por*

$$g_U(x, y) = \int_0^\infty r_{t,U}(x, y) dt \leq g(x, y), x, y \in \Omega.$$

**Observação 2.**

1) Quando  $U$  é um subgrafo conexo (e não vazio), para  $t \geq 0$  e  $x, y \in U$ , vemos que  $r_{t,U}(x, y)$  e  $g_U(x, y)$  correspondem, respectivamente, a densidade de transição e a função de Green, uma vez escolhido  $U$  temos

- O pesos  $c_{x,y}, x, y \in U$ , a restrição dos pesos a  $U \times U$ ;
- A medida de morte  $\tilde{\kappa}_x + \sum_{y \in \Omega \setminus U} c_{x,y}, x \in U$ .

2) Quando  $U$  não é conexo podemos aplicar a observação acima a cada componente conexa de  $U$ , e  $r_{t,U}(x, y)$  e  $g_U(x, y)$  se anulam quando  $x, y$  pertencem a componentes conexas diferentes de  $U$ .

**Proposição 3.24.** *Seja  $(U \subset \Omega, A = \Omega \setminus U)$ ,  $x, y \in \Omega$ , então*

3.24.1.  $g_U(x, y) = g_U(y, x)$ ;

3.24.2.  $g(x, y) = g_U(x, y) + E_x[H_A < \infty, g(X_{H_A}, y)]$ ;

3.24.3.  $E_x[H_A < \infty, g(X_{H_A}, y)] = E_y[H_A < \infty, g(X_{H_A}, x)]$ , a Identidade de Hunt.

*Demonstração.*

3.24.1 Segue da observação acima e da simetria de  $g(x, y)$ .

3.24.2.

$$\begin{aligned}
 g(x, y) &= E_x \left[ \int_0^\infty \mathbb{1}\{X_t = y\} dt \right] \frac{1}{\lambda_y} \\
 &= E_x \left[ \int_0^\infty \mathbb{1}\{X_t = y, t < T_U\} dt \right] \frac{1}{\lambda_y} + E_x \left[ \int_{T_U}^\infty \mathbb{1}\{X_t = y\} dt, T_U < \infty \right] \frac{1}{\lambda_y} \\
 &= g_U(x, y) + E_x \left[ T_U < \infty, \left( \int_0^\infty \mathbb{1}\{X_t = y\} dt \right) \circ \theta_{T_U} \right] \frac{1}{\lambda_y} \\
 &= g_U(x, y) + E_x \left[ T_U < \infty, E_{X_{T_U}} \left[ \int_0^\infty \mathbb{1}\{X_t = y\} dt \right] \right] \frac{1}{\lambda_y} \\
 &= g_U(x, y) + E_x[H_A < \infty, g(X_{H_A}, y)],
 \end{aligned}$$

onde a terceira igualdade é obtida usando Fubini, a quarta é obtida pela propriedade forte de Markov e a última é pelo fato que  $T_U = H_A$ .

3.24.3. Usando a simetria de  $g(\cdot, \cdot)$  e o item acima, obtemos o resultado. □

**Exemplo 7.** *Consideremos  $x_0 \in \Omega$ ,  $A = \{x_0\}, U = \Omega \setminus \{x_0\}$ . Escrevendo  $H_{x_0}$  para  $H_{\{x_0\}}$  e sendo  $x \in \Omega$ , encontramos que*

$$g(x, x_0) = 0 + \mathbb{P}_x[H_{x_0} < \infty]g(x_0, x_0),$$



$$\mathbb{P}_x[H_{x_0} < \infty] = \frac{g(x, x_0)}{g(x_0, x_0)}.$$

Uma segunda aplicação, em  $U$ , nos dá

$$g_U(x, y) = g(x, y) - \frac{g(x, x_0)g(x_0, y)}{g(x_0, x_0)}, x, y \in \Omega.$$

## Decomposição Ortogonal e Traço da Forma de Dirichlet

Agora, considere  $U \subset \Omega$  e o conjunto  $K = \Omega \setminus U$ . Nosso objetivo é descrever um complemento ortogonal através de  $\mathcal{E}(\cdot, \cdot)$  no espaço de funções cujo suporte é  $U$ ,  $\mathcal{F}_U = \{\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \phi(x) = 0, \forall x \in K\}$ .

**Definição 3.25.** *O espaço das funções harmônicas em  $U$ :*

$$\mathcal{H}_U = \{h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; Ph(x) = h(x), \forall x \in U\}.$$

*O espaço dos potenciais de medidas (com sinal) suportadas em  $K$ :*

$$\mathcal{G}_K = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f = G\nu, \text{ onde } \nu \text{ é medida com suporte em } K\}.$$

A terminologia para o potencial de medidas deriva da Física, em especial, na Mecânica Clássica, quando um sistema mecânico possui um potencial, então o mesmo é dito conservativo, geralmente valendo propriedades importantes como, por exemplo, a conservação da energia total do sistema.

**Proposição 3.26** (Decomposição Ortogonal). *Seja  $\mathcal{F}$  o espaço de funções de  $\Omega$  para  $\mathbb{R}$ .*

- a)  $\mathcal{H}_U = \mathcal{G}_K$ ;
- b)  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_U \oplus \mathcal{H}_U$ , onde  $\mathcal{F}_U$  and  $\mathcal{H}_U$  são ortogonais em relação a  $\mathcal{E}$ , isto é,  $\mathcal{E}(f, g) = 0$ , para quaisquer  $f \in \mathcal{F}_U$  e  $g \in \mathcal{H}_U$ .

*Demonstração.*

- a) Note que  $\mathcal{H}_U \subset \mathcal{G}_K$ , com efeito, quando  $h \in \mathcal{H}_U$ ,  $h = G(-L)h = G\nu$ , onde  $\nu = -Lh$  tem suporte em  $K$ , pela definição de  $\mathcal{H}_K$  e pela Proposição 3.21.

Por outro lado, considere  $\nu$  suportada em  $K$  e definimos  $h = G\nu$ . Pela Proposição 3.21, sabemos que  $Lh = LG\nu = -\nu$ . Então  $Lh$  se anula em  $U$ . De 3.21 obtemos que  $h \in \mathcal{H}_U$ , provando que  $\mathcal{H}_U = \mathcal{G}_K$ .

Mais ainda, tomando  $A = K$ , multiplicando dos dois lados do item 2 da Proposição 3.24 por  $\nu_y$  e somando em  $y$ , o primeiro termo do lado direito se anula e vemos que  $h = G\nu$  satisfaz

$$h(x) = E_x[H_K < \infty, h(X_{H_K})], x \in \Omega.$$

b) Seja  $\phi \in \mathcal{F}_U$  e  $\nu$  suportada em  $K$ , então  $\mathcal{E}(G\nu, \phi) = \langle \nu, \phi \rangle = 0$ , então  $\mathcal{F}_U$  e  $\mathcal{H}_U$  são ortogonais sob  $\mathcal{E}$ .

Agora, para  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  definimos  $h(x) = E_x[H_K < \infty, f(X_{H_K})]$ ,  $x \in \Omega$ , observando que  $h(x) = f(x)$ ,  $x \in K$ , e usando o mesmo argumento acima,  $h$  é harmônica em  $U$ . Finalmente, definindo  $\phi = f - h$ , vemos que  $\phi$  se anula em  $K$  e  $f = \phi + h$ , com  $\phi \in \mathcal{F}_U$  e  $h \in \mathcal{H}_U$  é a decomposição ortogonal procurada.  $\square$

A restrição da Forma de Dirichlet ao espaço  $\mathcal{H}_U = \mathcal{G}_K$  nos dá uma nova Forma de Dirichlet no espaço de funções de  $K$  para  $\mathbb{R}$ , a Forma Traço. Dado  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ , note que  $\tilde{f}(x) = E_x[H_K < \infty, f(X_{H_K})]$ ,  $x \in \Omega$ , é a única função em  $\Omega$ , harmônica em  $U$ , que coincide com  $f$  em  $K$ . De fato, a decomposição ortogonal aplicada ao caso de uma função igual a  $f$  em  $K$  e tomando valor nulo em  $U$  mostra a existência de uma função  $\mathcal{H}_U$  igual a  $f$  em  $K$ , necessariamente igual a  $\tilde{f}$ .

**Definição 3.27.** *Seja  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ , definimos a **Forma Traço** como  $\mathcal{E}^*(f, f) = \mathcal{E}(\tilde{f}, \tilde{f})$ .*

**Proposição 3.28.** *Seja  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ , então*

$$\mathcal{E}^*(f, f) = \mathcal{E}(\tilde{f}, \tilde{f}) = \inf\{\mathcal{E}(g, g); g : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ coincide com } f \text{ em } K\}.$$

*Demonstração.* Note que se  $g$  coincide com  $f$  em  $K$ , então  $g = \phi + \tilde{f}$ , com  $\phi \in \mathcal{F}_U$  e  $\mathcal{E}(g, g) \geq \mathcal{E}(\tilde{f}, \tilde{f})$  pela Proposição 3.26 obtemos o resultado desejado.  $\square$

Então, vamos agora estender a definição da **Forma Traço** a todas as funções  $f, g : K \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definição 3.29.** *Sejam  $f, g : K \rightarrow \mathbb{R}$ , então  $\mathcal{E}^*(f, g) = \mathcal{E}(\tilde{f}, \tilde{g})$ .*

$\mathcal{E}^*$  é uma forma bilinear e simétrica no espaço de funções de  $K$  para  $\mathbb{R}$ , esse fato segue diretamente do fato de que  $\mathcal{E}$  é uma forma bilinear simétrica.

Agora, veremos que  $\mathcal{E}^*$  corresponde de fato a uma Forma de Dirichlet em  $K$  para pesos não negativos e uma medida de morte adequados.

**Proposição 3.30.** *Seja  $K \neq \emptyset$ . Definimos os pesos e a medida de morte para  $K$ :*

$$3.30.1 \quad c_{x,y}^* = \begin{cases} \lambda_x P_x[\tilde{H}_K < \infty, X_{\bar{H}_K} = y] & , x \neq y, x, y \in K \\ 0 & , x = y, x, y \in K \end{cases}$$

$$\kappa_x^* = \lambda_x P_x[\tilde{H}_K = \infty], x \in K.$$

$$\lambda_x^* = \lambda_x(1 - P_x[\tilde{H}_K < \infty, X_{\bar{H}_K} = x]), x \in K.$$

*Os quais satisfazem as propriedades de  $c_{x,y}$  e  $\kappa_x$  conforme a Definição 3.8, onde  $\Omega$  é substituído por  $K$ , com  $c_{x,y}^* = c_{y,x}^*$ .*

3.30.2 A forma de Dirichlet correspondente coincide com  $\mathcal{E}^*$ , ou seja,

$$\mathcal{E}^*(f, f) = \frac{1}{2} \sum_{x, y \in K} c_{x, y}^* (f(x) - f(y))^2 + \sum_{x \in K} \kappa_x^* f^2(x), f : K \rightarrow \mathbb{R}.$$

3.30.3 A função de Green correspondente,  $g^*(x, y)$ ,  $x, y \in K$ , satisfaz

$$g^*(x, y) = g(x, y), x, y \in K.$$

*Demonstração.* Provaremos primeiro que  $c_{x, y}$  e  $\kappa_x$  satisfazem as propriedades e a relação vista na Definição 3.8 é válida, substituindo  $\Omega$  por  $K$ .

Para isso, note que para  $x \neq y \in K$ ,

$$\begin{aligned} -\mathcal{E}^*(\mathbb{1}_x, \mathbb{1}_y) &= -\mathcal{E}(\tilde{\mathbb{1}}_x, \tilde{\mathbb{1}}_y) = -\mathcal{E}(\mathbb{1}_x, \tilde{\mathbb{1}}_y) = -L\tilde{\mathbb{1}}_y(x) \\ &= \lambda_x \sum_{z \in \Omega} p_{x, z} \tilde{\mathbb{1}}_y(z) = \lambda_x P_x[\tilde{H}_K < \infty, X_{\bar{H}_K} = y] \\ &= c_{x, y}^*. \end{aligned}$$

Onde a primeira igualdade decorre da definição de  $\mathcal{E}^*$ , a segunda é consequência da decomposição ortogonal, a terceira da Observação 1, a quarta do fato que  $\tilde{\mathbb{1}}_y(x) = 0$  e a última igualdade na segunda linha decorre da propriedade de Markov.

De modo similar, para  $x \in K$ , vale que

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^*(\mathbb{1}_x, \mathbb{1}_x) &= -L\tilde{\mathbb{1}}_y(x) = \lambda_x \left( 1 - \sum_{z \in \Omega} p_{x, z} \tilde{\mathbb{1}}_y(z) \right) \\ &= \lambda_x (1 - P_x[\tilde{H}_K < \infty, X_{\bar{H}_K} = x]). \\ &= \lambda_x^*. \end{aligned}$$

Assim, pelo cálculo acima concluímos que  $c_{x, y}^*$  possui a propriedade de simetria, e estes serão os pesos não negativos de  $K$ . Mais ainda, quando  $x_0, y_0 \in K$ , podemos achar um caminho mais próximo em  $\Omega$  de  $x_0$  para  $y_0$  e olhando as visitas sucessivas desse caminho a  $K$ , tomando a definição de  $c_{x, y}^*$  em conta, vemos que  $K$  munido com os pares  $\{x, y\}$  tais que  $c_{x, y}^* > 0$  é um grafo conexo.

Ainda, sabemos que para todo  $x \in \Omega$ ,  $P_x$ -quase certamente, as cadeias contínuas em  $\Omega$  atingem o cemitério em tempo finito, pela recorrência da cadeia. Como resultado,  $P_y[\bar{H}_L = \infty] > 0$ , para ao menos um  $y \in K$ , desde que de outra forma uma cadeia iniciando em  $x \in K$  quase certamente nunca entrará em  $\Delta$ . Portanto, vemos que  $\kappa^*$  não se anula em todos os pontos de  $K$ , por sua própria definição. Agora, 3.8 é válido pois

$$\sum_{y \in K} c_{x, y}^* + \kappa_x^* = \lambda_x (1 - P_x[\tilde{H}_K < \infty, X_{\bar{H}_K} = x]) = \lambda_x^*.$$

3.30.2 Expandindo o quadrado na primeira soma do lado direito de 3.30, pela simetria de  $c_{x,y}^*$  e pela Proposição 3.25, teremos

$$\sum_{x \in K} \lambda_x^* f^2(x) - \sum_{x \neq y \in K} c_{x,y}^* f(x)f(y) = \sum_{x \in K} \mathcal{E}^*(\mathbf{1}_x, \mathbf{1}_x) f^2(x) + \sum_{x \neq y \in K} \mathcal{E}^*(\mathbf{1}_x, \mathbf{1}_y) f(x)f(y) = \mathcal{E}^*(f, f).$$

3.30.3 Para concluirmos, considere  $x \in K$  e  $\phi_x$  a restrição a  $K$  de  $g(x, \cdot)$ . Pela **decomposição ortogonal** vemos que  $g(x, \cdot) = G\mathbf{1}_x(\cdot) = \tilde{\phi}_x(\cdot)$ , e conseqüentemente, para todo  $y \in K$ , se  $\phi_x^* = g^*(x, \cdot)$  vale que

$$\mathcal{E}^*(\phi_x, \mathbf{1}_y) = \mathcal{E}^*(G\mathbf{1}_x, \tilde{\mathbf{1}}_y) = \mathcal{E}^*(G\mathbf{1}_x, \mathbf{1}_y) = \mathbf{1}_{\{x=y\}} = \mathcal{E}^*(\phi_x^*, \mathbf{1}_y).$$

Então, segue que  $\phi_x = \phi_x^*$  para todo  $x \in K$ , provando o resultado desejado.  $\square$

Quando  $K \subseteq K' \subset \Omega$  são não vazios, a Forma Traço de  $K$ , da Forma Traço de  $K'$  em  $\mathcal{E}$ , é igual a Forma traço de  $K$  em  $\mathcal{E}$ . De fato, isso é válido pelo item 3 da Proposição 3.25 e pelo fato da função de Green determinar a forma de Dirichlet. Essa propriedade é chamada como “**propriedade das torres para traços**”, em alusão à propriedade vista para esperança condicional.

## A Fórmula de Feynman-Kac

Estabeleceremos agora uma ligação entre EDPs e processos estocásticos. No verão de 1947, Richard Feynman conheceu Mark Kac no departamento de Física da Universidade de Cornell e dias após isso, nasceu a Fórmula de Feynman-Kac [3].

Dada uma função  $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , podemos pensar em  $V$  como o produto de operadores:

$$(Vf)(x) = V(x)f(x), \text{ para } f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

**Teorema 3.31.** *Seja  $V, f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, t \geq 0$  e  $x \in \Omega$ , então*

$$E_x \left[ f(X_t) \exp \left\{ \int_0^t V(X_s) ds \right\} \right] = (e^{t(P-I+V)} f)(x).$$

Observe que o caso  $V = 0$  corresponde exatamente ao nosso **semigrupo de transição**.

*Demonstração.* Para a nossa demonstração, chamaremos o lado esquerdo da equação acima de  $S_t f(x)$ . Aplicando a propriedade de Markov, para  $t, s \geq 0$

$$\begin{aligned} S_{t+s} f(x) &= E_x \left[ f(X_{t+s}) \exp \left\{ \int_0^{t+s} V(X_u) du \right\} \right] \\ &= E_x \left[ \exp \left\{ \int_0^t V(X_u) du \right\} \exp \left\{ \int_0^s V(X_u) du \right\} \circ \theta_t f(X_s) \circ \theta_t \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E_x \left[ \exp \left\{ \int_0^t V(X_u) du \right\} E_{X_t} \left[ \exp \left\{ \int_0^s V(X_u) du \right\} f(X_s) \right] \right] \\
&= E_x \left[ \exp \left\{ \int_0^t V(X_u) du \right\} S_s f(X_t) \right] = S_t(S_s f)(x) = (S_t S_s) f(x).
\end{aligned}$$

Onde  $\theta_t$  é a função Shift, vista na Definição 3.13. Concluindo que  $S_t$  possui propriedade de semigrupo. Além disso,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}(S_t f - f)(x) &= \frac{1}{t} E_x \left[ f(X_t) \exp \left\{ \int_0^t V(X_s) ds \right\} - f(X_0) \right] \\
&= \frac{1}{t} E_x [f(X_t) - f(X_0)] + E_x \left[ f(X_t) \frac{1}{t} \int_0^t V(X_s) \exp \left\{ \int_0^s V(X_u) du \right\} ds \right]
\end{aligned}$$

Agora, quando  $t \rightarrow 0$ , segue que  $\frac{1}{t} E_x [f(X_t) - f(X_0)] \rightarrow (P_I) f(x)$ .

$E_x \left[ f(X_t) \frac{1}{t} \int_0^t V(X_s) \exp \left\{ \int_0^s V(X_u) du \right\} ds \right] \rightarrow E_x [f(X_0) V(X_0)] = V f(x)$ , pelo Teorema da Convergência Dominada. A partir disso é válido que  $\frac{1}{t}(S_t f - f)(x) \rightarrow (P - I + V) f(x)$ , com  $t \rightarrow 0$ .

Considere  $h > 0$  tal que  $0 < h < t$ ,

$$S_{t+h} f(x) - S_t f(x) = (S_h - I) S_t f(x) \text{ e } S_{t-h} f(x) - S_t f(x) = -(S_h - I) S_{t-h} f(x).$$

Concluir-se-á que  $0 \leq t \rightarrow S_t f(x)$  é uma função contínua (notando para o segundo caso que  $\sup_{u \leq t} |S_u f(x)| \leq e^{t\|V\|_\infty} \|f\|_\infty$ ). Mais ainda, é continuamente diferenciável em  $[0, t]$ , o que vemos dividindo por  $h$  e fazendo  $h \rightarrow 0$  para obter  $(P - I + V) S_t f(x)$  como derivada.

Finalmente, considere a função  $[0, t] \ni s \rightarrow F(s) = e^{(t-s)(P-I+V)} S_s f(x)$ , a qual é continuamente diferenciável em  $[0, t]$ , com derivada

$$F'(s) = -e^{(t-s)(P-I+V)} (P - I + V) S_s f(x) + e^{(t-s)(P-I+V)} (P - I + V) S_s f(x) = 0.$$

Como  $F(0) = F(t)$ , concluímos que  $e^{t(P-I+V)} f(x) = S_t f(x)$ , provando o nosso teorema.  $\square$

## Tempos Locais

O estudo de tempos locais teve início na década de 1940, em especial com os trabalhos de Paul Lévy, cujo objetivo era o de estudar os tempos de visita ao ponto 0 de um Movimento Browniano. Considerando o conjunto  $V_t = [0, t] \cap V = \{s \geq 0; B_s(\omega) = 0\}$ , onde  $B_s$  é um movimento browniano começando em 0,  $\omega \in \Omega$  e  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  é um espaço de probabilidade completo. Lévy percebeu que, com  $\mathbb{P}$ -probabilidade 1,  $V_t$  é fechado, sem pontos isolados, não enumerável e com medida de Lebesgue nula, dessa forma, era necessário buscar outra forma de medir o tempo gasto em 0, [14].

**Definição 3.32.** O tempo local de  $X$  em  $x \in \Omega$  e tempo  $t \geq 0$  é definido por

$$L_t^x = \int_0^t \mathbb{1}\{X_s = x\} ds \frac{1}{\lambda_x}$$

Note que para o caso  $x = \Delta$  convencionaremos que  $\lambda_\Delta = 1$ , então temos  $L_t^\Delta = \int_0^t \mathbb{1}\{X_s = \Delta\} ds$ , onde  $t \geq 0$ .

Como consequência direta da nossa definição para cada  $x \in \Omega$  a função  $L_t^x \in [0, \infty)$  é contínua e não decrescente (mais detalhes podem ser encontrados em [1], [8]) com limite finito  $L_\infty^x$ , pois pela recorrência, temos  $X_t = \Delta$  para  $t$  suficientemente grande. Veremos algumas propriedades dos tempos locais nos resultados abaixo.

**Lema 3.33.** Sejam  $V : \Omega \cup \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\theta_t$  a função Shift, vista na Definição 3.13. Então,

$$\int_0^{t+s} V(X_u) du = \left( \int_0^t V(X_u) du \right) \circ \theta_s + \int_0^s V(X_u) du.$$

*Demonstração.* Pela Propriedade de Markov,

$$\int_0^{t+s} V(X_u) du = \int_s^{t+s} V(X_u) du + \int_0^s V(X_u) du = \int_0^t V(X_u) du \circ \theta_s + \int_0^s V(X_u) du. \quad \square$$

**Proposição 3.34.** Sejam  $x, y \in \Omega$ ,  $U \subset \Omega$  e  $t \geq 0$ :

- $E_x[L_\infty^y] = g(x, y)$ ;
- $E_x[L_{T_U}^y] = g_U(x, y)$ ;
- $\sum_{x \in \Omega \cup \Delta} V(x) L_t^x = \int_0^t \frac{V}{\lambda}(X_s) ds$ , com  $V : \Omega \cup \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ ;
- Se  $s \geq 0$ , então  $L_t^x \circ \theta_s + L_t^x = L_{t+s}^x$ .

*Demonstração.*

a) Observemos que  $E_x[L_\infty^x] = E_x \left[ \int_0^\infty \mathbb{1}\{X_s = x\} ds \frac{1}{\lambda_x} \right] = g(x, y)$ .

b)  $E_x[L_\infty^x] = E_x \left[ \int_0^{T_U} \mathbb{1}\{X_s = x\} ds \frac{1}{\lambda_x} \right] = g_U(x, y)$ , pela Observação 2.

c) Para este item, temos 
$$\begin{aligned} \sum_{x \in \Omega \cup \Delta} V(x) L_t^x &= \sum_{x \in \Omega \cup \Delta} V(x) \int_0^t \mathbb{1}\{X_s = x\} ds \frac{1}{\lambda_x} \\ &= \int_0^t \sum_{x \in \Omega \cup \Delta} \frac{V}{\lambda}(x) \mathbb{1}\{X_s = x\} ds = \int_0^t \frac{V}{\lambda}(X_s) ds. \end{aligned}$$

d) Seja  $V(\cdot) = \frac{1}{\lambda_x} \mathbb{1}_x(\cdot)$ , então, pelo lema 3.33,

$$L_{t+s}^x = \int_0^{t+s} \mathbb{1}\{X_u = x\} du = \int_0^t V(X_u) du \circ \theta_s + \int_0^s V(X_u) du = L_t^x \circ \theta_s + L_t^x. \quad \square$$

## A Cadeia de Markov $\bar{X}$

Para construir a cadeia  $\bar{X}$ , usaremos os tempos locais para introduzir um reescalamento do tempo e obter uma nova Cadeia de Markov com o mesmo esqueleto discreto  $Z_n, n \geq 0$ , assim como  $X$ , porém nossa nova cadeia possuirá taxa de salto variável  $\lambda_x, x \in \Omega \cup \Delta$ . Assim como fizemos para  $X$ , veremos propriedades de  $\bar{X}$  como o semigrupo de transição, tempos locais e outros.

**Definição 3.35.** Seja  $t \geq 0$ ,  $L_t = \sum_{x \in \Omega \cup \Delta} L_t^x = \int_0^t \lambda_{X_s}^{-1} ds$ .

$L_t$  é uma bijeção contínua de  $\mathbb{R}_+$ , estritamente crescente, diferenciável por partes e tendendo a  $\infty$  (para ver isso, basta notar que  $L_t^\Delta \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow \infty$ ).

**Proposição 3.36.** A inversa de  $L_t$  é  $\tau_u = \inf\{t \geq 0; L_t \geq u\} = \int_0^u \lambda_{X_{\tau_v}} dv$ .

*Demonstração.* Note que, pelo Teorema da Função Inversa,

$$\frac{d}{dt} L_t = \lambda_{X_t}^{-1} \neq 0 \Rightarrow \lambda_{X_t} = \left( \frac{d}{dt} L_t^{-1} \right) \Rightarrow \int_0^u \lambda_{X_{\tau_v}} dv = \tau_u.$$

□

**Definição 3.37.** Seja  $u \geq 0$ , definimos a cadeia  $\bar{X}$  como  $\bar{X}_u = X_{\tau_u}$ .

**Definição 3.38.** Os tempos locais para  $\bar{X}$  são dados por  $\bar{L}_u^x = \int_0^u \mathbf{1}_{\{\bar{X}_v = x\}} dv$ , onde  $u \geq 0$  e  $x \in \Omega \cup \Delta$ .

**Proposição 3.39.** Para  $t \geq 0, x \in \Omega, f : E \rightarrow \mathbb{R}$ .

i) Seja  $u \geq 0$ , então  $\bar{X}_u$  é uma cadeia de Markov com cemitério  $\Delta$ , taxa de salto  $\lambda_x$  em  $x$ , saltando de acordo com  $p_{x,y}$  em nossas condições iniciais e semigrupo de transição em  $\Omega$ , dado por  $\bar{R}_f(x) = E_x[f(\bar{X}_t)] = e^{tL} f(x)$ ;

ii)  $X_t = \bar{X}_{L_t}$ ;

iii)  $L_t^x = \bar{L}_{L_t}^x$ , para  $x \in \Omega \cup \{\Delta\}$ ;

iv)  $L_\infty^x = \bar{L}_\infty^x$ .

*Demonstração.*

i) a) Propriedade de Markov:

Observe que  $\tau_u, u \geq 0$ , são  $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$ -tempos de parada e usando o fato de que  $L_t, t \geq 0$ , satisfaz a propriedade adicional  $L_{t+s} = L_s + L_t \circ \theta_s$ , onde  $t, s \geq 0$ . O que implica que  $L_{\tau_u} \circ \theta_{\tau_v} + \tau_v = u + v$ , e usando inversas, segue que  $\tau_{u+v} = \tau_u \circ \theta_{\tau_v} + \tau_v$ . Então,

$$\bar{X}_{u+v} = X_{\tau_u \circ \theta_{\tau_v}} = X_{\tau_u} \circ \theta_u = \bar{X}_u \circ \theta_{\tau_v}.$$

Agora, segue que para  $u, v \geq 0, B \in \mathcal{F}_{\tau_v}$ , temos que para  $f : \Omega \cup \{\Delta\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} E_x[f(\bar{X}_{u+v})\mathbf{1}_B] &= E_x[f(X_{\tau_u} \circ \theta_{\tau_v})\mathbf{1}_B] \\ &= E_x[E_{X_{\tau_v}}[f(X_{\tau_u})]\mathbf{1}_B], \text{ pela propriedade forte de Markov de } X \\ &= E_x[E_{\bar{X}_v}[f(\bar{X}_u)]\mathbf{1}_B]. \end{aligned}$$

Desde que  $v' \leq v, \bar{X}_{v'} = X_{\tau_{v'}}$  são  $\mathcal{F}_{\tau_v}$ -mensuráveis, isso prova a propriedade de Markov.

b) Pela Propriedade de Markov deduzimos que  $\bar{R}_t, t \geq 0$ , é um semigrupo sub-Markoviano.

Agora, seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, x \in \Omega, u > 0$ , então

$$\frac{1}{u}(\bar{R}_u f - f)(x) = \frac{1}{u}E_x[f(\bar{X}_u - f(\bar{X}_0))] = \frac{1}{u}E_x[f(X_{\tau_u} - f(X_0))].$$

Por definição, vemos que  $u \geq 0, \tau_u \leq ku$ . Acima vimos que a probabilidade de que  $X$  salte ao menos duas vezes em  $[0, t]$  é  $o(t)$  quando  $t \rightarrow 0$ . Sendo assim, quando  $u \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{u}E_x[f(X_{\tau_u} - f(X_0))] &= \frac{1}{u}E_x[f(X_{\tau_u} - f(X_0), X \text{ salta exatamente uma vez em } [0, \tau_u])] + o(1) \\ &= E_x[f(Z_1) - f(X_0)]\frac{1}{u}\mathbb{P}_x[L_{T_1} \leq u] + o(1), T_1 \text{ é o primeiro salto de } X \\ &= (Pf - f)(x)\frac{1}{u}\mathbb{P}_x\left[\frac{L_{T_1}}{\lambda_x} \leq u\right] + o(1) \rightarrow \lambda_x(Pf - f)(x) = Lf(x). \end{aligned}$$

Então concluímos que  $\frac{1}{u}(\bar{R}_u f - f)(x) \rightarrow Lf(x)$ , com  $u \rightarrow 0$ .

Daí,  $0 \leq u \mapsto \bar{R}_u f(x)$  é continuamente diferenciável e sua derivada é dada por  $L\bar{R}_u f(x)$ , donde concluímos que  $e^{uL}f(x) = \bar{R}_u f(x)$ , provando o resultado.

ii) Por definição,  $\bar{X}_{L_t} = X_{\tau_{L_t}}$ .

$$\text{iii) } \frac{d}{dt}\bar{L}_{L_t}^x = \frac{d\bar{L}_u^x}{du}\Big|_{u=L_t} \times \frac{dL_t}{dt} = \mathbf{1}\{\bar{X}_{L_t} = x\}\frac{1}{\lambda_{X_t}} = \mathbf{1}\{X_t = x\}\frac{1}{\lambda_x} = \frac{dL_t^x}{dt}.$$

Exceto quando  $t$  é um tempo de salto de  $X$ . Então, integrando obteremos o desejado.

iv) Fazendo  $t \rightarrow \infty$  acima, obtemos  $\bar{L}_\infty^x = L_\infty^x$ . □

**Teorema 3.40** (A Fórmula de Feynman-Kac para  $\bar{X}$ ). *Sejam  $V, f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, u \geq 0, x \in \Omega$ , então*

$$E_x \left[ f(\bar{X}_u) \exp \left\{ \int_0^u V(\bar{X}_v) dv \right\} \right] = e^{u(L+V)} f(x).$$

*Demonstração.* A demonstração é análoga ao caso da cadeia  $X$ . □

Para finalizar este capítulo veremos uma ligação entre o Traço  $\bar{X}$  em um subconjunto não vazio  $K \subset \Omega$  e a forma traço  $\mathcal{E}^*$ .



**Definição 3.41.** *Sejam  $u \geq 0$  e  $K \subset \Omega$ , definimos:*

$$a) \bar{L}_u^K = \sum_{x \in K \cup \{\Delta\}} \bar{L}_u^x = \int_0^u \mathbb{1}\{\bar{X}_v \in K \cup \{\Delta\}\} dv.$$

b) *A inversa contínua à direita de  $\bar{L}_u^K$  é dada por  $\bar{\tau}_v^K = \inf\{u \geq 0; \bar{L}_u^K > v\}$ ,  $v \geq 0$ .*

c) *O traço do processo  $\bar{X}$  em  $K$  é definido como  $\bar{X}_v^K = \bar{X}_{\bar{\tau}_v^K}$ ,  $v \geq 0$ .*

$\bar{L}_u^K$  é uma função contínua e não decrescente de  $u$  tendendo ao infinito. Intuitivamente no tempo  $v$ ,  $\bar{X}^K$  é o local onde  $\bar{X}$  fica uma vez que  $\bar{L}^K$  acumula  $v + \varepsilon$  unidades de tempo, com  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Para ver isso, note que  $\bar{X}^K$  é uma cadeia de Markov sob  $\mathbb{P}_x, x \in K \cup \{\Delta\}$ , podemos usar um argumento análogo para o caso de  $\bar{X}$  e usando que  $\bar{X}_{u+v}^K = \bar{X}_u^K \circ \bar{\theta}_{\bar{\tau}_v^K}$ .

Mais ainda, o correspondente semigrupo de transição sub-Markoviano em  $K$  é

$$\bar{R}_t^K f(x) = E_x[f(\bar{X}_t^K)] = e^{tL^*} f(x), \text{ onde } L^* f(x) = \sum_{y \in K} c_{x,y}^* f(y) - \lambda_x^* f(x), x \in K, f : K \rightarrow \mathbb{R}.$$

Para ver a expressão acima, note que  $\mathcal{L}$  se mantém para o gerador de  $\bar{X}^K$ , a inversa de  $-\mathcal{L}$  possui a matriz  $K \times K$ :

$$E_x \left[ \int_0^\infty \mathbb{1}\{\bar{X}_v^K = y\} dv \right] = E_x \left[ \int_0^\infty \mathbb{1}\{\bar{X}_u = y\} du \right] = g(x, y) = g^*(x, y), x, y \in K.$$

Uma identidade similar é válida para cadeias em tempo contínuo em  $K$  com taxa de salto variável  $\lambda^*$  atrelada aos pesos  $c_{x,y}^*$  e medida de morte  $\kappa^*$ . Seu gerador é  $L^*$ , pela proposição 3.39, e isso nos permite concluir que  $\mathcal{L} = L$ .



# Capítulo 4

## Campo Gaussiano Livre e os Teoremas de Dynkin e Eisenbaum

O objetivo desse capítulo é dar vida aos objetos estudados anteriormente, faremos isso usando a Função de Green como a função de covariância de um campo gaussiano centrado e indexado em  $\Omega$ .

Consideremos o espaço  $\mathbb{R}^\Omega$ , das funções de  $\Omega$  em  $\mathbb{R}$ , munido da  $\sigma$ -álgebra produto e com as coordenadas canônicas  $\varphi_x$ , onde  $\varphi_x(f) = f(x)$ ,  $x \in \Omega$  e  $f \in \mathbb{R}^\Omega$ , escrevendo ainda  $\varphi$  para representar  $(\varphi_x)_{x \in \Omega}$ .

**Proposição 4.1.** *Existe uma única probabilidade  $\mathbb{P}^G$  em  $\mathbb{R}^\Omega$  sob a qual  $\varphi_x$  é um campo gaussiano centrado com covariância  $\mathbb{E}^G[\varphi_x \varphi_y] = g(x, y)$ ,  $x, y \in \Omega$ , isto é, a nossa *Função de Green*.*

*Demonstração.* Primeiro vamos mostrar que vale a unicidade:

Seja  $\nu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , então, sob  $\mathbb{P}^G$ ,  $\langle \nu, \varphi \rangle = \sum_{x \in \Omega} \nu_x \varphi_x$  é uma gaussiana centrada cuja variância é dada por  $\sum_{x, y \in \Omega} \nu_x \nu_y \mathbb{E}^G[\varphi_x \varphi_y] = \sum_{x, y \in \Omega} \nu_x \nu_y g(x, y) = E(\nu, \nu)$ , vide a Proposição 3.21. A partir disso, obtemos que  $\mathbb{E}^G[e^{i\langle \nu, \varphi_x \rangle}] = e^{-\frac{1}{2}E(\nu, \nu)}$ ,  $\forall \nu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . E isso especifica a função característica de  $\mathbb{P}^G$ .

Existência:

Com efeito, a matriz  $G$  de  $g(x, y)$ ,  $x, y \in \Omega$ , possui inversa dada por  $\langle -L\mathbf{1}_x, \mathbf{1}_y \rangle$ , conforme 3.14.3, então, pelo Teorema 3.6, sob a probabilidade

$$\mathbb{P}^G = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{|\Omega|}{2}} \sqrt{\det G}} \exp \left\{ \frac{-1}{2} \mathcal{E}(\varphi, \varphi) \right\} \prod_{x \in \Omega} d\varphi_x$$

temos que  $\varphi_x$  é um vetor gaussiano centrado e cuja covariância é dada por  $g(x, y)$ ,  $\forall x \in \Omega$ . Acima usamos que  $\sum \varphi_x \varphi_y \langle -L\mathbf{1}_x, \mathbf{1}_y \rangle = \langle -L\varphi_x, \varphi_y \rangle = \mathcal{E}(\varphi, \varphi)$ , pela *Observação 1*.

□

Consideremos  $K \subset \Omega$  e  $U = E \setminus K$ . Queremos descrever a lei condicional de  $\varphi_y$  dado  $\varphi_x$  sob  $\mathbb{P}^G$ . Para este propósito, vamos usar a forma traço e a decomposição ortogonal. Usaremos a notação  $\mathbb{P}^{G,U}$  para a lei de  $\mathbb{R}^\Omega$  do campo gaussiano centrado com covariância dada por  $\mathbb{E}^{G,U}[\varphi_x \varphi_y] = g_U(x, y)$ . Donde observamos que  $\varphi_x = 0$   $\mathbb{P}^{G,U}$ -quase certamente quando  $x \in K$ .

**Definição 4.2.** *Sejam  $K \subset \Omega$ , não vazio, e  $x \in \Omega$ , definimos em  $\mathbb{R}^\Omega$  a função  $\sigma(\varphi_y, \in K)$ -mensurável*

$$h_x = \mathbb{E}_x[H_K < \infty, \varphi_{X_{H_K}}] = \sum_{y \in K} \mathbb{P}_x[H_K < \infty, X_{H_K} = y] \varphi_y.$$

Note que  $h_x = \varphi_x$ , se  $x \in K$ , e pela decomposição ortogonal, podemos escrever  $\varphi_x = \psi_x + h_x$ , com  $\psi_x = 0$  quando  $x \in K$ .

**Proposição 4.3.**

- a) Sob  $\mathbb{P}^G$ , temos que  $(\psi_x)$  é independente de  $\sigma(\varphi_y, \in K)$ ;  
b)  $(\psi_x)$  possui a mesma distribuição de  $\varphi_x$  sob  $\mathbb{P}^{G,U}$ ;  
c) Se  $x \in K$ , então  $\varphi_x$  tem lei dada por  $\frac{1}{(2\pi)^{\frac{|K|}{2}} \sqrt{\det_{K \times K} G}} \exp\left\{\frac{-1}{2} \mathcal{E}^*(\varphi, \varphi)\right\} \prod_{x \in K} d\varphi_x$ , onde  $\det_{K \times K} G$  denota o determinante da matriz de  $g(x, y)$  restrita a  $K \times K$ .

*Demonstração.*

- a) Seja  $x \in \Omega$ , então  $\psi_x$  pertence ao espaço gerado pela coleção gaussiana conjunta  $\varphi_z, z \in \Omega$ . Quando  $x \in \Omega$  e  $y \in K$ , pela Proposição 3.24, usando que  $\psi_x = \varphi_x - h_x$  temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^G[\psi_x \varphi_y] &= \mathbb{E}^G[\varphi_x \varphi_y] - \mathbb{E}^G[h_x \varphi_y] \\ &= g(x, y) - \sum_{z \in K} \mathbb{P}_x[H_K < \infty, X_{H_K} = z] g(x, y) \\ &= g(x, y) - \mathbb{E}_x[H_K < \infty, g(X_{H_K}, y)] = 0. \end{aligned}$$

Portanto, como  $\mathbb{E}^G[\psi_x] = \mathbb{E}^G[\varphi_y] = 0$  temos que  $\mathbb{E}^G[\psi_x \varphi_y] = \mathbb{E}^G[\psi_x] \mathbb{E}^G[\varphi_y] = 0$ , provando a independência.

- b) Quando  $x \in K$  temos que  $\psi_x = 0 = \varphi_x$   $\mathbb{P}^{G,U}$ -quase certamente, vamos olhar apenas para a lei de  $\psi_x, x \in U$ . Seja  $F$  uma função mensurável e limitada em  $\mathbb{R}^U$ , tomando  $c = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{|\Omega|}{2}} \sqrt{\det G}}$  e pela definição de  $\mathbb{P}^G$ , temos

$$\mathbb{E}^G[F(\psi_x)_{x \in U}] = c \int_{\mathbb{R}^\Omega} F((\varphi_x - h_x)_{x \in U}) \exp\left\{\frac{-1}{2} \mathcal{E}(\varphi, \varphi)\right\} \prod_{x \in \Omega} d\varphi_x.$$

Agora, notamos que pela decomposição ortogonal e pela definição da Forma traço, vale que  $\mathcal{E}(\varphi, \varphi) = \mathcal{E}(\varphi - h, \varphi - h) + \mathcal{E}^*(\varphi|_K, \varphi|_K)$ , onde  $\varphi|_K$  representa a restrição de  $\varphi$  a  $K$ .

Introduzindo na integral acima uma mudança de variáveis tomando  $\varphi'_x = \varphi_x - h_x$ , cujo determinante do Jacobiano da mudança de variáveis é 1, e sendo que quando  $x \in K$  temos que  $\varphi'_x = \varphi_x$ , nos guiando para  $\prod_{x \in \Omega} d\varphi'_x = \prod_{x \in \Omega} d\varphi_x$ . Assim, com  $\varphi_U = \mathbb{1}_U(x)\varphi_x$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^G[F(\psi_x)_{x \in U}] &= c \int_{\mathbb{R}^\Omega} F((\varphi_x)_{x \in U}) \exp \left\{ \frac{-1}{2} \mathcal{E}(\varphi_U, \varphi_U) - \frac{-1}{2} \mathcal{E}^*(\varphi|_K, \varphi|_K) \right\} \prod_{x \in \Omega} d\varphi_x \\ &= c \int_{\mathbb{R}^\Omega} F((\varphi_x)_{x \in U}) \exp \left\{ \frac{-1}{2} \mathcal{E}(\varphi_U, \varphi_U) \right\} \exp \left\{ \frac{-1}{2} \mathcal{E}^*(\varphi|_K, \varphi|_K) \right\} \prod_{x \in \Omega} d\varphi_x \\ &= c \int_{\mathbb{R}^K} \exp \left\{ \frac{-1}{2} \mathcal{E}^*(\varphi|_K, \varphi|_K) \right\} \prod_{x \in K} d\varphi_x \times \int_{\mathbb{R}^U} F((\varphi_x)_{x \in U}) \exp \left\{ \frac{-1}{2} \mathcal{E}(\varphi_U, \varphi_U) \right\} \prod_{x \in U} d\varphi_x. \end{aligned}$$

Tomando  $c' = c \int_{\mathbb{R}^K} \exp \left\{ \frac{-1}{2} \mathcal{E}^*(\varphi|_K, \varphi|_K) \right\} \prod_{x \in K} d\varphi_x$ , como F é limitada e mensurável, podemos escrever

$$\mathbb{E}^G[F(\psi_x)_{x \in U}] = c' \int_{\mathbb{R}^U} F((\varphi_x)_{x \in U}) \exp \left\{ \frac{-1}{2} \mathcal{E}(\varphi_U, \varphi_U) \right\} \prod_{x \in U} d\varphi_x.$$

Pela Observação 2 e pela probabilidade definida na Proposição 4.1, obtemos que a expressão acima é igual a  $\mathbb{E}^{G,U}[F(\phi_x)_{x \in U}]$ .

c) Segue de forma análoga ao cálculo acima, trocando  $F((\psi_x)_{x \in U})$  por  $H((\varphi_x)_{x \in K})$ , onde  $H$  é uma função mensurável e limitada em  $\mathbb{R}^K$ .

□

**Observação 3.** Como resultado da Proposição 4.3 (acima), quando  $x$  é um ponto de  $U$ , sob  $\mathbb{P}^G$  e condicionando em  $\varphi_y, y \in K$ , temos que  $\varphi_x$  possui distribuição gaussiana com média  $\mathbb{E}[H_K < \infty, \varphi_{X_{H_K}}]$  e variância  $g_U(x, x)$ .

### As medidas $P_{x,y}$

Visando estabelecer o Teorema de Isomorfismo de Dynkin, introduziremos um tipo de medida cuja essência reside em caminhos em  $\Omega$  com duração finita e que vão de  $x$  a  $y$ , onde  $x, y \in \Omega$ . Além da descrição dessas medidas, derivaremos uma identidade para a Transformada de Laplace do tempo local do caminho, o que nos dará a base para provar o Teorema de Dynkin na próxima seção.

#### Definição 4.4.

a) Definimos o espaço de trajetórias em  $\Omega$  com duração  $t \geq 0$  por

$$\Gamma_t = \{f : [0, t] \rightarrow \Omega; f \text{ é contínua a direita e, em } t, \text{ à esquerda e possui finitos saltos}\}$$

b) O espaço das trajetórias finitas,  $\Gamma = \bigcup_t \Gamma_t$ .

**Definição 4.5.** Seja  $\gamma \in \Gamma$ , a duração de  $\gamma$  é dada por  $\xi(\gamma) = t > 0$  tal que  $\gamma \in \Gamma_t$ .

Ainda, queremos munir  $\Gamma$  de uma  $\sigma$ -álgebra. Para isso, usaremos a bijeção  $\Phi : \Gamma_1 \times (0, \infty) \rightarrow \Gamma$ , dada por  $\Phi(w, t) = w(\cdot) = \gamma(\cdot) \in \Gamma$ . Onde  $\Gamma_1 \times (0, \infty)$  possui a  $\sigma$ -álgebra produto e  $\Gamma_1$  é munido da  $\sigma$ -álgebra gerada pelas funções  $X_s, 0 \leq s \leq 1$ , de  $\Gamma_1$  para  $\Omega$ . Então, tomamos a imagem de  $\Phi$  pela  $\sigma$ -álgebra de  $\Gamma_1 \times (0, \infty)$ , obtendo assim uma  $\sigma$ -álgebra para  $\Gamma$ .

**Definição 4.6.** Sejam  $x, y \in \Omega$  e  $t > 0$ , definimos

a)  $P_{x,y}^t$  como a imagem em  $\Gamma_t$  de  $\mathbb{1}_{\{X_t=y\}} \frac{P_x}{\lambda_y}$ , isto é, a função  $(X_s)_{0 \leq s \leq t}$  de  $D_\Omega \cap \{X_t = y\}$  em  $\Gamma_t \subset \Gamma$ .

b) Seja  $B$  um conjunto mensurável de  $\Gamma$ , então  $P_{x,y}(B) = \int_0^\infty P_{x,y}^t(B) dt$ .

**Proposição 4.7.** A massa total de  $P_{x,y}$  é dada pela Função de Green.

*Demonstração.* De fato, primeiro observamos que  $P_{x,y}^t(\Gamma_t) = \frac{\mathbb{P}_x[X_t = y]}{\lambda_y} = r_t(x, y)$ .

Em posse deste fato, temos então que

$$P_{x,y}(\Gamma) = \int_0^\infty P_{x,y}^t(\Gamma) dt = \int_0^\infty r_t(x, y) dt = g(x, y).$$

□

O próximo resultado nos dá relações entre  $P_x$  e  $P_{x,y}$ , em particular, podemos interpretar  $P_{x,y}$  como uma  $h$ -transformada<sup>1</sup> de  $P_x$ , sem normalização, com  $h(\cdot) = g(\cdot, y)$ .

**Proposição 4.8.** Sejam  $x, y, x_1, \dots, x_n \in \Omega$ ,  $0 < t_1 < \dots < t_n$ .

a) Então,

$$\begin{aligned} P_{x,y}[X_{t_1} = x_1, \dots, X_{t_n} = x_n] &= P_x[X_{t_1} = x_1, \dots, X_{t_n} = x_n] g(x_n, y) \\ &= r_{t_1}(x, x_1) r_{t_2-t_1}(x_1, x_2) r_{t_3-t_2}(x_2, x_3) \dots r_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1}, x_n) g(x_n, y) \lambda_{x_1} \dots \lambda_{x_n}. \end{aligned}$$

b) Se  $K \subset \Omega$  e considerando  $H_K$ , para  $B \in \sigma(H_{H_K} \wedge s), s \geq 0$  e  $\xi$  representando a duração da trajetória, segue que

$$P_{x,y}[B, H_K < \xi] = \mathbb{E}_x[B \cap \{H_K < \infty\}, g(H_{H_K}, y)].$$

<sup>1</sup>O leitor interessado pode consultar o livro: Markov chains and mixing times - David A. Levin, Yuval Peres, Elizabeth L. Wilmer, página 242.

*Demonstração.*

a) De fato, temos que

$$\begin{aligned}
 P_{x,y}[X_{t_1} = x_1, \dots, X_{t_n} = x_n] &= \int_0^\infty P_{x,y}^t[X_{t_1} = x_1, \dots, X_{t_n} = x_n] dt \\
 &= \int_{t_n}^\infty P_{x,y}^t[X_{t_1} = x_1, \dots, X_{t_n} = x_n, X_t = y] \frac{dt}{\lambda_y} \\
 &= \int_{t_n}^\infty \mathbb{E}_x[X_{t_1} = x_1, \dots, X_{t_n} = x_n, r_{t-t_n}(x_n, y)] dt \\
 &= P_x[X_{t_1} = x_1, \dots, X_{t_n} = x_n] g(x_n, y).
 \end{aligned}$$

Onde a primeira igualdade acima decorre da definição, a segunda da Propriedade de Markov em  $t_n$ , enquanto que na última usamos a definição da Função de Green.

b) Agora observe que, usando novamente a propriedade de Markov,

$$\begin{aligned}
 P_{x,y}[B, H_K < \xi] &= \int_0^\infty P_{x,y}^t[B, H_K < \xi] dt \\
 &= \int_0^\infty \mathbb{E}_x[B, H_K < t, X_t = y] \frac{dt}{\lambda_y} \\
 &= \int_0^\infty \mathbb{E}_x[B, H_K < t, r_{t-H_K}(X_{H_K}, y)] dt \\
 &= \mathbb{E}_x[B, H_K < \infty, g(X_{H_K}, y)] \\
 &= \mathbb{E}_x[B \cap \{H_K < \infty\}, g(X_{H_K}, y)].
 \end{aligned}$$

Onde a segunda igualdade segue das definições de  $\xi$  e de  $P_{x,y}^t$ , a terceira da Propriedade Forte de Markov e a última de Fubini e da definição da Função de Green.

□

Veremos na proposição abaixo algumas fórmulas para os momentos de  $L_\infty^x$  e  $\int_0^\infty V(X_s) ds$  sob  $P_{x,y}$ , para isso lembremos que  $Q = (I - P)^{-1}$ .

**Proposição 4.9.** *Sejam  $x_1, \dots, x_n, x, y \in \Omega$ ,  $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  e  $n \geq 0$ . Então,*

- a)  $\mathbb{E}_{x,y} \left[ \left( \int_0^\infty V(X_s) ds \right)^n \right] = n! ((QV)^n g^y)(x)$ , com  $g^y = (G\mathbb{1}_y)(\cdot) = g(\cdot, y)$ ;
- b)  $\mathbb{E}_{x,y} \left[ \prod_{i=1}^n L_\infty^{x_i} \right] = \sum_{\sigma \in S_n} g(x, x_{\sigma(1)}) g(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}) \cdots g(x_{\sigma(n)}, y)$ , onde  $S_n$  representa o grupo de  $n$ -permutações;
- c) Se  $\|G|V|\|_\infty < 1$ , então temos que  $\mathbb{E}_{x,y} \left[ \exp \left\{ \sum_{z \in \Omega} V(z) L_\infty^z \right\} \right] = ((I - GV)^{-1} g^y)(x) = ((I - GV)^{-1} G\mathbb{1}_y)(x)$ .

*Demonstração.* Usaremos um resultado mais geral para fazer essa demonstração, sejam  $V_1, \dots, V_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , então

$$\mathbb{E}_{x,y} \left[ \prod_{i=1}^n \int_0^\infty V(X_s) ds \right] = \mathbb{E}_{x,y} \left[ \int_{\mathbb{R}_+^n} V_1(X_{s_1}) V_2(X_{s_2}) \cdots V_n(X_{s_n}) ds_1 ds_2 \cdots ds_n \right].$$

Decompondo sobre as várias ortantes de  $\mathbb{R}_+^n$ , temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{x,y} \left[ \prod_{i=1}^n \int_0^\infty V(X_s) ds \right] &= \sum_{\sigma \in S_n} \int_{0 < s_{\sigma(1)} < \cdots < s_{\sigma(n)} < \infty} \mathbb{E}_{x,y} [V_1(X_1) \cdots V_n(X_n)] ds_1 \cdots ds_n \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \int_{0 < s_{\sigma(1)} < \cdots < s_{\sigma(n)}} \sum_{x_1, \dots, x_n} r_{s_{\sigma(1)}}(x, x_1) V_{\sigma(1)}(x_1) \lambda_{x_1} r_{s_{\sigma(2)} - s_{\sigma(1)}}(x_1, x_2) V_{\sigma(2)}(x_2) \lambda_{x_2} \cdots \\ &\quad \cdots r_{s_{\sigma(n)} - s_{\sigma(n-1)}}(x_{n-1}, x_n) V_{\sigma(n)}(x_n) \lambda_{x_n} ds_{\sigma(1)} \cdots ds_{\sigma(n)}. \end{aligned}$$

Agora, integrando em  $ds_{\sigma(n)}$  e somando em  $x_n$ , pela definição de  $Q$ , chegamos a

$$\sum_{\sigma \in S_n} \int_{0 < s_{\sigma(1)} < \cdots < s_{\sigma(n-1)}} \sum_{x_1, \dots, x_{n-1}} r_{s_{\sigma(1)}}(x, x_1) V_{\sigma(1)}(x_1) \lambda_{x_1} \cdots \lambda_{x_{n-1}} (QV_{\sigma(n)} g^y)(x_{n-1}) ds_{\sigma(1)} \cdots ds_{\sigma(n)}$$

Fazendo indução, chegamos a  $\sum_{\sigma \in S_n} (QV_{\sigma(1)} QV_{\sigma(2)} \cdots QV_{\sigma(n)} g^y)(x)$ .

Isto é,  $\mathbb{E}_{x,y} \left[ \prod_{i=1}^n \int_0^\infty V(X_s) ds \right] = \sum_{\sigma \in S_n} (QV_{\sigma(1)} QV_{\sigma(2)} \cdots QV_{\sigma(n)} g^y)(x)$ .

Agora, voltamo-nos para a demonstração da proposição:

- a) Tomando  $V_i = V, 1 \leq i \leq n$ , e o resultado do cálculo acima, obtemos o resultado desejado;
- b) Tomando  $V_i = \frac{1}{\lambda_{x_i}} \mathbb{1}_{x_i}, 1 \leq i \leq n$  e observando que  $QV_i = g^{x_i}$ , então o caso geral nos dá

$$\mathbb{E}_{x,y} \left[ \prod_{i=1}^n \int_0^\infty V(X_s) ds \right] = \mathbb{E}_{x,y} \left[ \prod_{i=1}^n \int_0^\infty \frac{1}{\lambda_{x_i}} \mathbb{1}_{x_i}(X_s) ds \right] = \mathbb{E}_{x,y} \left[ \prod_{i=1}^n L_\infty^{x_i} \right].$$

Por outro lado, procedendo por indução,

$$(QV_{\sigma(n)} g^y)(x) = \sum_{z \in \Omega} g(x, z) V_{\sigma(n)} g^y(z) \lambda_z = \sum_{z \in \Omega} g(x, z) \frac{\mathbb{1}_{x_{\sigma(n)}}(z)}{\lambda_{x_{\sigma(n)}}} g^y(z) \lambda_z = g(x, x_{\sigma(n)}) g(x_{\sigma(n)}, y).$$

Agora, suponhamos válido que  $(QV_{\sigma(2)} \cdots QV_{\sigma(n)} g^y)(x) = g(x, x_{\sigma(2)}) \cdots g(x_{\sigma(n)}, y)$ .

Sendo assim, então

$$\begin{aligned} (QV_{\sigma(1)} QV_{\sigma(2)} \cdots QV_{\sigma(n)} g^y)(x) &= \sum_{z \in \Omega} g(x, z) V_{\sigma(1)} (QV_{\sigma(2)} \cdots QV_{\sigma(n)} g^y(z)) \lambda_z \\ &= \sum_{z \in \Omega} g(x, z) \frac{\mathbb{1}_{x_{\sigma(1)}}(z)}{\lambda_{x_{\sigma(1)}}} (g(z, x_{\sigma(2)}) \cdots g(x_{\sigma(n)}, y)) \lambda_z \end{aligned}$$



$$= g(x, x_{\sigma(1)})g(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}) \cdots g(x_{\sigma(n)}, y).$$

$$\text{Logo, } \sum_{\sigma \in S_n} (QV_{\sigma(2)} \cdots QV_{\sigma(n)}g^y) = \sum_{\sigma \in S_n} g(x, x_{\sigma(1)}) \cdots g(x_{\sigma(n)}, y).$$

$$\text{Concluimos então que } \mathbb{E}_{x,y} \left[ \prod_{i=1}^n L_{\infty}^{x_i} \right] = \sum_{\sigma \in S_n} g(x, x_{\sigma(1)}) \cdots g(x_{\sigma(n)}, y);$$

c) Pelo item c) da Proposição 3.34, e usando o item anterior vale que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{x,y} \left[ \exp \left\{ \sum_{z \in \Omega} V(z) L_{\infty}^z \right\} \right] &= \mathbb{E}_{x,y} \left[ \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left( \int_0^{\infty} \frac{V}{\lambda}(X_s) ds \right)^n \right] \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \mathbb{E}_{x,y} \left[ \left( \int_0^{\infty} \frac{V}{\lambda}(X_s) ds \right)^n \right] \\ &= \sum_{n \geq 0} \left( \left( Q \frac{V}{\lambda} \right)^n g^y \right) (x) \\ &= \sum_{n \geq 0} ((G|V|)^n g^y) (x) < \infty. \end{aligned}$$

Pela definição do Potencial de medidas, vide 3.20, e por nossa hipótese de que  $\|G|V|\|_{\infty} < 1$ . Isso nos permite usar o Teorema da Convergência Dominada. Agora, usando o item anterior e novamente 3.20,

$$\mathbb{E}_{x,y} \left[ \exp \left\{ \sum_{z \in \Omega} V(z) L_{\infty}^z \right\} \right] = \sum_{n \geq 0} ((GV)^n g^y) (x).$$

Agora, como  $\|GV\|_{\infty} < 1$ , pela Série de Neumann temos  $\sum_{n \geq 0} (GV)^n = (I - GV)^{-1}$ , donde

$$\mathbb{E}_{x,y} \left[ \exp \left\{ \sum_{z \in \Omega} V(z) L_{\infty}^z \right\} \right] = ((I - GV)^{-1} g^y) (x).$$

□

Antes de seguirmos para os teoremas de isomorfismo, temos o seguinte lema, o qual será usado na demonstração do Teorema de Dynkin.

**Lema 4.10.** *Sejam  $x \in \mathbb{R}$  e  $u \in (-a, a)$ , então  $e^{ux} \leq e^{ax} + e^{-ax}$ .*

*Demonstração.*

Se  $x \geq 0$ , então  $e^{ux} \leq e^{ax}$ , implicando que  $e^{ux} \leq e^{ax} + e^{-ax}$ . O caso onde  $x < 0$  segue de forma análoga trocando  $ax$  por  $-ax$ .

□

## Teoremas de Isomorfismo

Os teoremas de Dynkin e Eisenbaum exploram relações entre tempos de ocupação e campos gaussianos livres.

**Teorema 4.11** (Teorema de Isomorfismo de Dynkin). *Sejam  $x, y \in \Omega$  e  $F \in \mathbb{R}^\Omega$ , mensurável e limitada. Então*

$$\mathbb{E}_{x,y} \otimes \mathbb{E}^G \left[ F \left( \left( L_\infty^z + \frac{1}{2} \varphi_z^2 \right)_{z \in \Omega} \right) \right] = \mathbb{E}^G \left[ \varphi_x \varphi_y F \left( \left( \frac{1}{2} \varphi_z^2 \right)_{z \in \Omega} \right) \right].$$

O Teorema de Isomorfismo de Dynkin nos diz que, sob  $\mathbb{P}_{x,y} \otimes \mathbb{P}^G$ ,  $L_\infty^z + \frac{1}{2} \varphi_z^2$  possui a mesma lei que  $\frac{1}{2} \varphi_z^2$ , esta última sob  $\varphi_x \varphi_y \mathbb{P}^G$  (uma medida com sinal).

*Demonstração.* Vamos começar provando para  $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , sob condições da Proposição 4.9, que

$$\mathbb{E}_{x,y} \otimes \mathbb{E}^G \left[ \exp \left\{ \sum_{z \in \Omega} V(z) \left( L_\infty^z + \frac{1}{2} \varphi_z^2 \right) \right\} \right] = \mathbb{E}^G \left[ \varphi_x \varphi_y \exp \left\{ \sum_{z \in \Omega} V(z) \left( \frac{1}{2} \varphi_z^2 \right) \right\} \right]. \quad (4.1)$$

Isso significa que as esperanças acima existem e são iguais, além disso,  $V$  pequeno para nós indica que sua norma pode ser tomada tão pequena quanto seja necessário.

De fato, já sabemos da Proposição 4.9 que

$$\mathbb{E}_{x,y} \left[ \exp \left\{ \sum_{z \in \Omega} V(z) L_\infty^z \right\} \right] = ((I - GV)^{-1} G \mathbf{1}_y)(x). \quad (4.2)$$

Ainda, pela definição de  $\mathbb{P}^G$ , vemos que para  $V$  pequeno, a variável aleatória  $\exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{z \in \Omega} V(z) \varphi_z^2 \right\}$  é integrável sob  $\mathbb{P}^G$ . Para isso, consideremos  $\mathcal{E}_v(\varphi, \varphi) := \mathcal{E}(\varphi, \varphi) - \sum_{z \in \Omega} V(z) \varphi_z^2$  a qual é uma forma quadrática positiva.

De fato, a função  $\mathcal{E}_v(\alpha, \beta) := \mathcal{E}(\alpha, \beta) - \sum_{z \in \Omega} V(z) \alpha(z) \beta(z)$ , é bilinear e com auxílio do item 5 da Proposição 3.21, levando em conta nossas considerações sobre  $V$ , essa função é simétrica e positiva. Note ainda que dada  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , pela Observação 1 vale que

$$\mathcal{E}_v(\varphi, \varphi) = \langle -L\varphi, \varphi \rangle - \langle V\varphi, \varphi \rangle = \langle (-L - V)\varphi, \varphi \rangle.$$

Portanto, em vista do Teorema 3.6, podemos definir uma probabilidade em  $\mathbb{R}^\Omega$  dada por

$$\mathbb{P}^{G,V} := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{|\Omega|}{2}} \sqrt{\det G} \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{z \in \Omega} V(z) \varphi_z^2 \right\} \right]} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathcal{E}_v(\varphi, \varphi) \right\} \prod_{x \in \Omega} d\varphi_x.$$

A qual torna o campo  $\varphi_z, z \in \Omega$ , um campo gaussiano centrado com matriz de covariância dada por  $\langle (-L - V)^{-1} \mathbf{1}_x, \mathbf{1}_y \rangle, x, y \in \Omega$ , com o detalhe que, pelo item 3.14.3,  $(-L - V)^{-1} = (-L(I - GV))^{-1} = (I - GV)^{-1}(-L)^{-1} = (I - GV)^{-1}G$ .

A partir disso, como consequência da equação 4.2

$$\mathbb{E}^{G,V}[\varphi_x \varphi_y] = ((I - GV)^{-1}G \mathbf{1}_y)(x) = \mathbb{E}_{x,y} \left[ \exp \left\{ \sum_{z \in \Omega} V(z) L_\infty^z \right\} \right].$$

Por fim, multiplicando as igualdades acima pela esperança em  $P^G$  no denominador da normalização de  $P^{G,V}$ , obtemos

$$\mathbb{E}_{x,y} \otimes \mathbb{E}^G \left[ \exp \left\{ \sum_{z \in \Omega} V(z) \left( L_\infty^z + \frac{1}{2} \varphi_z^2 \right) \right\} \right] = \mathbb{E}^G \left[ \varphi_x \varphi_y \exp \left\{ \sum_{z \in \Omega} V(z) \left( \frac{1}{2} \varphi_z^2 \right) \right\} \right].$$

Voltemo-nos então ao nosso teorema, que segue como aplicação do resultado acima em  $u_0 V$  e  $-u_0 V$ , com  $u_0 > 0$  pequeno, de sorte que  $\cosh \left( 2u_0 \sum_{z \in \Omega} V(z) \left( L_\infty^z + \frac{1}{2} \varphi_z^2 \right) \right)$  é integrável em  $\mathbb{P}_{x,y} \otimes \mathbb{P}^G$  e que  $\cosh \left( 2u_0 \sum_{z \in \Omega} V(z) \frac{1}{2} \varphi_z^2 \right)$  é integrável sob  $|\varphi_x \varphi_y| \mathbb{P}^G$ . Daí, são analíticas as funções

$$(-u_0, u_0) + i\mathbb{R} \ni u \mapsto \mathbb{E}_{x,y} \otimes \mathbb{E}^G \left[ \exp \left\{ u \sum_{z \in \Omega} V(z) \left( L_\infty^z + \frac{1}{2} \varphi_z^2 \right) \right\} \right]$$

e

$$(-u_0, u_0) + i\mathbb{R} \ni u \mapsto \mathbb{E}_{x,y} \otimes \mathbb{E}^G \left[ \varphi_x \varphi_y \exp \left\{ u \sum_{z \in \Omega} V(z) \left( \frac{1}{2} \varphi_z^2 \right) \right\} \right].$$

Com efeito, escrevendo  $\mathbb{E}^{x,y,G} = \mathbb{E}_{x,y} \otimes \mathbb{E}^G$ , pela derivação sob o sinal de integração,

$$\frac{\partial}{\partial u} \mathbb{E}^{x,y,G} \left[ \exp \left\{ u \sum_{z \in \Omega} V(z) \left( L_\infty^z + \frac{1}{2} \varphi_z^2 \right) \right\} \right] = \mathbb{E}^{x,y,G} \left[ \frac{\partial}{\partial u} \exp \left\{ u \sum_{z \in \Omega} V(z) \left( L_\infty^z + \frac{1}{2} \varphi_z^2 \right) \right\} \right]$$

Daí, temos que

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial u} \exp \left\{ u \sum_{z \in \Omega} V(z) \left( L_\infty^z + \frac{1}{2} \varphi_z^2 \right) \right\} \\ &= \left( \sum_{z \in \Omega} V(z) \left( L_\infty^z + \frac{1}{2} \varphi_z^2 \right) \right) \exp \left\{ u \sum_{z \in \Omega} V(z) \left( L_\infty^z + \frac{1}{2} \varphi_z^2 \right) \right\} \\ &\leq \left| \sum_{z \in \Omega} V(z) \left( L_\infty^z + \frac{1}{2} \varphi_z^2 \right) \right| 2 \cosh \left( u_0 \sum_{z \in \Omega} V(z) \left( L_\infty^z + \frac{1}{2} \varphi_z^2 \right) \right). \end{aligned}$$

Onde a desigualdade acima decorre do Lema 4.10, daí, aplicando a desigualdade de Hölder, temos

$$\mathbb{E}^{x,y,G} \left[ \left| \sum_{z \in \Omega} V(z) \left( L_\infty^z + \frac{1}{2} \varphi_z^2 \right) \right| \cosh \left( u_0 \sum_{z \in \Omega} V(z) \left( L_\infty^z + \frac{1}{2} \varphi_z^2 \right) \right) \right]$$

$$\begin{aligned} &\leq 2 \left( \mathbb{E}^{x,y,G} \left[ \left| \sum_{z \in \Omega} V(z) \left( L_\infty^z + \frac{1}{2} \varphi_z^2 \right) \right|^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}} \left( \mathbb{E}^{x,y,G} \left[ \cosh \left( u_0 \sum_{z \in \Omega} V(z) \left( L_\infty^z + \frac{1}{2} \varphi_z^2 \right) \right)^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left( \mathbb{E}^{x,y,G} \left[ \left| \sum_{z \in \Omega} V(z) \left( L_\infty^z + \frac{1}{2} \varphi_z^2 \right) \right|^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{2} \mathbb{E}^{x,y,G} \left[ \cosh \left( 2u_0 \sum_{z \in \Omega} V(z) \left( L_\infty^z + \frac{1}{2} \varphi_z^2 \right) \right) + 1 \right] \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

E sendo  $\cosh \left( 2u_0 \sum_{z \in \Omega} V(z) \left( L_\infty^z + \frac{1}{2} \varphi_z^2 \right) \right)$  e  $\left| \sum_{z \in \Omega} V(z) \left( L_\infty^z + \frac{1}{2} \varphi_z^2 \right) \right|^2$  integráveis, esta última em consequência da Equação 4.2 e do fato que  $x^2 \leq e^x$  em conjunto com o Teorema da Convergência Dominada. Disso, obtemos que  $\frac{\partial}{\partial u} \exp \left\{ u \sum_{z \in \Omega} V(z) \left( L_\infty^z + \frac{1}{2} \varphi_z^2 \right) \right\}$  é integrável. Sendo assim, a função  $\mathbb{E}_{x,y} \otimes \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ u \sum_{z \in \Omega} V(z) \left( L_\infty^z + \frac{1}{2} \varphi_z^2 \right) \right\} \right]$  é holomorfa (analítica).

Outrossim, pela Equação 4.1, essas funções consideradas acima são iguais e reais, quando  $u$  é real e suficientemente pequeno. Logo, elas coincidem em  $(-u_0, u_0) + i\mathbb{R}$  e tomando  $u = i$ , para qualquer  $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , temos

$$\mathbb{E}_{x,y} \otimes \mathbb{E}^G \left[ \exp \left\{ i \sum_{z \in \Omega} V(z) \left( L_\infty^z + \frac{1}{2} \varphi_z^2 \right) \right\} \right] = \mathbb{E}^G \left[ \varphi_x \varphi_y \exp \left\{ i \sum_{z \in \Omega} \left( \frac{1}{2} \varphi_z^2 \right) \right\} \right].$$

Isso nos diz que a função característica de  $L_\infty^z + \frac{1}{2} \varphi^2$ , sob  $\mathbb{P}_{x,y} \otimes \mathbb{P}^G$ , é igual a de  $\frac{1}{2} \varphi^2$ , sob  $\varphi_x \varphi_y \mathbb{P}^G$ . Portanto, essas distribuições são iguais e, em particular,  $\frac{1}{2} \varphi^2$ , sob  $\varphi_x \varphi_y \mathbb{P}^G$  é uma medida positiva, provando o nosso teorema.  $\square$

O fato do Teorema de Isomorfismo de Dynkin lançar mão de  $\mathbb{P}_x$  e de  $\mathbb{P}_{x,y}$  é um inconveniente para diversas aplicações. Assim, o Teorema de Eisenbaum torna-se mais atrativo pois não envolve  $\mathbb{P}_{x,y}$ . Antes de enunciá-lo, a próxima proposição nos dá resultados em vista da Proposição 4.9, mas com  $\mathbb{P}_x$  ao invés de  $p_{x,y}$ .

**Proposição 4.12.** *Sejam  $x_1, \dots, x_n, x, y \in \Omega$ ,  $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  e  $n \geq 0$ . Então vale que*

- $\mathbb{E}_x \left[ \left( \int_0^\infty V(X_s) ds \right)^n \right] = n! ((QV)^n \mathbf{1}_\Omega)(x);$
- $\mathbb{E}_x \left[ \prod_{i=1}^n L_\infty^{x_i} \right] = \sum_{\sigma \in S_n} g(x, x_{\sigma(1)}) g(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}) \cdots g(x_{\sigma(n-1)}, x_{\sigma(n)}),$  onde  $S_n$  representa o grupo de  $n$ -permutações;
- Se  $\|G|V|\|_\infty < 1$ , então temos que  $\mathbb{E}_x \left[ \exp \left\{ \sum_{z \in \Omega} V(z) L_\infty^z \right\} \right] = ((I - GV)^{-1} \mathbf{1}_\Omega)(x).$

*Demonstração.* Análoga à Proposição 4.9 trocando a igualdade da Proposição 4.8 por  $\mathbb{P}_x[X_{t_1} = x_1, \dots, X_{t_n} = x_n] = r_{t_1}(x, x_1) r_{t_2 - t_1}(x_1, x_2) r \cdots r_{t_n - t_{n-1}}(x_n, x_{n-1}) \lambda_{x_1} \cdots \lambda_{x_n}$ , onde  $0 < t_1 < \dots < t_n$  e  $x, x_1, \dots, x_n \in \Omega$ .  $\square$

**Lema 4.13.** *Sejam  $\varphi_x, x \in \Omega, V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  e  $s \neq 0$*

$$\mathbb{E}^G \left[ \varphi_x \exp \left\{ \sum_{z \in \Omega} V(z) \left( \frac{(\varphi_z + s)^2}{2} \right) \right\} \right] = \mathbb{E}^{G,V} \left[ \exp \left\{ s \sum_{z \in \Omega} V(z) \varphi_z \right\} \right] \exp \left\{ \sum_{z \in \Omega} V(z) \frac{s^2}{2} \right\}.$$

*Demonstração.* Com efeito,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^G \left[ \varphi_x \exp \left\{ \sum_{z \in \Omega} V(z) \left( \frac{(\varphi_z^2 + 2s\varphi_z + s^2)}{2} \right) \right\} \right] \\ &= \mathbb{E}^G \left[ \varphi_x \exp \left\{ \sum_{z \in \Omega} V(z) \left( \frac{(\varphi_z^2 + 2s\varphi_z)}{2} \right) \right\} \exp \left\{ \sum_{z \in \Omega} V(z) \frac{s^2}{2} \right\} \right] \\ &= \mathbb{E}^G \left[ \varphi_x \exp \left\{ \sum_{z \in \Omega} V(z) \left( \frac{(\varphi_z^2 + 2s\varphi_z)}{2} \right) \right\} \right] \exp \left\{ \sum_{z \in \Omega} V(z) \frac{s^2}{2} \right\} \\ &= \mathbb{E}^G \left[ \varphi_x \exp \left\{ \sum_{z \in \Omega} V(z) \left( \frac{\varphi_z^2}{2} \right) \right\} \exp \left\{ s \sum_{z \in \Omega} V(z) \varphi_z \right\} \right] \exp \left\{ \sum_{z \in \Omega} V(z) \frac{s^2}{2} \right\} \\ &= \mathbb{E}^{G,V} \left[ \exp \left\{ s \sum_{z \in \Omega} V(z) \varphi_z \right\} \right] \exp \left\{ \sum_{z \in \Omega} V(z) \frac{s^2}{2} \right\}. \end{aligned}$$

□

**Teorema 4.14** (Teorema de Isomorfismo de Eisenbaum). *Sejam  $x \in \Omega, s \neq 0$  e  $F \in \mathbb{R}^\Omega$  mensurável e limitada, então*

$$\mathbb{E}_x \otimes \mathbb{E}^G \left[ F \left( \left( L_\infty^z + \frac{(\varphi_z + s)^2}{2} \right)_{z \in \Omega} \right) \right] = \mathbb{E}^G \left[ \left( \frac{1 + \varphi_x}{s} \right) F \left( \left( \frac{(\varphi_z + s)^2}{2} \right)_{z \in \Omega} \right) \right].$$

Em outras palavras, a distribuição de  $\left( L_\infty^z + \frac{(\varphi_z + s)^2}{2} \right)$ , sob  $\mathbb{P}_x \otimes \mathbb{P}^G$  é igual a distribuição de  $\left( \frac{(\varphi_z + s)^2}{2} \right)$  sob  $\left( \frac{1 + \varphi_x}{s} \right) \mathbb{P}^G$  (que é uma medida de sinal).

*Demonstração.* Sob os mesmos argumentos que usamos para provar o Teorema de Isomorfismo de Dynkin, é suficiente mostrar que para  $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , nas condições da Proposição 4.12, vale que

$$\mathbb{E}_x \otimes \mathbb{E}^G \left[ \sum_{z \in \Omega} V(z) \left( L_\infty^z + \frac{(\varphi_z + s)^2}{2} \right) \right] = \mathbb{E}^G \left[ \left( \frac{1 + \varphi_x}{s} \right) \sum_{z \in \Omega} V(z) \left( \frac{(\varphi_z + s)^2}{2} \right) \right].$$

Pela proposição anterior, vale que  $\mathbb{E}_x \left[ \exp \left\{ \sum_{z \in \Omega} V(z) L_\infty^z \right\} \right] = ((I - GV)^{-1} \mathbf{1}_\Omega)(x)$ .

De sorte que, para  $V$  na condições da Proposição 4.12, observamos a  $\mathbb{P}^G$ -integrabilidade de  $\exp \left\{ \sum_{z \in \Omega} V(z) (\varphi_z + s)^2 \right\}$  e pela definição de  $\mathbb{P}^{G,V}$  segue que

$$\frac{\mathbb{E}^G \left[ \left( 1 + \frac{\varphi_x}{s} \right) \exp \left\{ \sum_{z \in \Omega} V(z) \left( \frac{(\varphi_z + s)^2}{2} \right) \right\} \right]}{\mathbb{E}^G \left[ \exp \left\{ \sum_{z \in \Omega} V(z) \left( \frac{(\varphi_z + s)^2}{2} \right) \right\} \right]} = 1 + \frac{\mathbb{E}^G \left[ \varphi_x \exp \left\{ \sum_{z \in \Omega} V(z) \left( \frac{(\varphi_z + s)^2}{2} \right) \right\} \right]}{s \mathbb{E}^G \left[ \exp \left\{ \sum_{z \in \Omega} V(z) \left( \frac{(\varphi_z + s)^2}{2} \right) \right\} \right]}$$

$$= 1 + \frac{\mathbb{E}^{G,V} \left[ \varphi_x \exp \left\{ s \sum_{z \in \Omega} V(z) \varphi_z \right\} \right]}{s \mathbb{E}^{G,V} \left[ \exp \left\{ s \sum_{z \in \Omega} V(z) \varphi_z \right\} \right]}.$$

Onde o desenvolvimento da expressão acima é consequência do Lema 4.13. Agora, pelo Lema 3.7, tomando  $X = \varphi_x$  e  $Y = \sum_{z \in \Omega} V(z) \varphi_z$ , podemos reescrever a última expressão acima como

$$\begin{aligned} 1 + \mathbb{E}^{G,V} \left[ \varphi_x \sum_{z \in \Omega} V(z) \varphi_z \right] &= 1 + \sum_{z \in \Omega} \mathbb{E}^{G,V} [\varphi_x \varphi_z] V(z) \\ &= 1 + ((I - GV)^{-1} GV)(x). \end{aligned}$$

Por fim, note que  $(I - GV)^{-1} = (I - GV)^{-1}((I - GV) + GV) = I + (I - GV)^{-1}GV$ , implicando que a última expressão acima é igual à obtida com a proposição anterior, provando o nosso teorema.  $\square$

**Teorema 4.15** (Primeiro Teorema Generalizado de Ray-Knight). *Sejam  $x \in \Omega$  e  $s \neq 0$ , então  $\left( L_{H_{x_0}}^z + \frac{(\varphi_z + s)^2}{2} \right)$  sob  $\mathbb{P}_x \otimes \mathbb{P}^{G,U}$  tem a mesma distribuição que  $\frac{(\varphi_z + s)^2}{2}$  sob  $\left( 1 + \frac{\varphi_x}{s} \right) \mathbb{P}^{G,U}$  (uma medida de sinal).*

*Demonstração.* Decorre como consequência direta do Teorema de Eisenbaum tomando  $U$  ao invés de  $\Omega$ ,  $g_U$  ao invés de  $g$  e com  $L_{H_{x_0}}^z$  na função de  $L_\infty^z$ , levando em consideração a Observação 2.  $\square$

**Exemplo 8.** *O Passeio Aleatório Simples em tempo contínuo em  $\mathbb{Z}$ ,  $(S_t)_{t \geq 0}$  também satisfaz a um Teorema de Ray-Knight correspondente. É possível mostrar que a função de Green do Passeio Aleatório,  $g_U(\cdot, \cdot)$ , corresponde à restrição de uma função de Green para um movimento browniano,  $g_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}(z, z') = 2(z \wedge z')$ , a  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .*

*De fato, seja  $0 < x$ , um inteiro, e tomemos  $c_{z, z+1} = \frac{1}{2}, \forall z \in \mathbb{Z}$ . Tomando  $U = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , então*

$$g_U(z, z') = 2(z \wedge z'), \forall z, z' \in \mathbb{N}.$$

Com efeito, quando  $z \geq z' \geq 1$ , pela propriedade forte de Markov, sendo  $H_0$  o tempo de entrada de  $Z_n, n \geq 0$ , em  $\{0\}$ , então

$$g_U(z, z') = g_U(z', z') = \mathbb{E}_{z'} \left[ \sum_{k=0}^{H_0} \mathbf{1}_{\{Z_k = z'\}} \right].$$

E o número de visitas a  $z'$  antes de atingir 0 sob  $P_{z'}$  é geométrico com parâmetro de sucesso  $\frac{1}{2z'}$  e esperança  $2z'$ . Para ver isso, note que, pela propriedade de Markov,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{z'} \left[ \mathbb{1}_{\{H_0 < \tilde{H}_{z'}\}} \right] &= \mathbb{E}_{z'} \left[ \mathbb{E}_{z'} \left[ \mathbb{1}_{\{H_0 < \tilde{H}_{z'}\}} \mid \mathcal{F}_{T_1} \right] \right], \text{ onde } T_1 = \inf\{t \geq 0, S_k \neq z'\} \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{E}_{z'} \left[ \mathbb{E}_{z'-1} \left[ \mathbb{1}_{\{H_0 < H_{z'}\}} \right] \right] \\ &= \mathbb{P}_{z'-1}(H_0 < H_{z'-1}).\end{aligned}$$

Onde  $H_K$  e  $\tilde{H}_K$  estão no sentido da Definição 3.22. Agora, pelo Teorema de Parada Opcional <sup>1</sup>,

$$\begin{aligned}z' - 1 = S_0 &= \mathbb{E}_{z'-1} \left[ S_{H_0 \wedge H_{z'}} \right] \\ &= \mathbb{P}_{z'-1}(H_0 < H_{z'}) \cdot 0 + \mathbb{P}_{z'-1}(H_0 > H_{z'}) \cdot z' \\ &= \mathbb{P}_{z'-1}(H_0 > H_{z'}) \cdot z'.\end{aligned}$$

Daí,  $\frac{z' - 1}{z'} = \mathbb{P}_{z'-1}(H_0 > H_{z'-1})$ , logo,  $\mathbb{P}_{z'-1}(H_0 < H_{z'-1}) = 1 - \frac{z' - 1}{z'} = 1 - \frac{1}{z'}$ .

Portanto, concluímos que  $\mathbb{P}_{z'}(H_0 < H_{z'-1}) = \frac{1}{2z'}$ , (o leitor interessado encontrará mais detalhes em Remark 2.13 de [12]).

E do Primeiro Teorema Generalizado de Ray-Knight segue que  $(L_{H_0}^z)_{z \in \mathbb{N}}$  sob  $\mathbb{P}_x, x \geq 1$ , um inteiro, tem a mesma distribuição que a restrição para  $z \in \mathbb{N}$  do tempo local Browniano  $L_{H_0}^z, z \geq 0$ , sob a medida de Wiener começando em  $x$ .

---

<sup>1</sup>Teorema da Parada Opcional: Se  $L \leq M$  são tempos de parada e  $Y_{M \wedge n}$  é uma martingal uniformemente integrável, então  $Y_L = \mathbb{E}[Y_M \mid \mathcal{F}_L]$





# Referências

- [1] AVILA, Geraldo Severo de Souza. *Introdução à análise matemática*. São Paulo: Blucher, 1999.
- [2] CECCONELLO, Moiseis dos Santos; OLIVEIRA, Greison Araújo de. *O Futebol Como Uma Cadeia de Markov*. In: CNMAC, 39., 2019, São Carlos. Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics. Uberlândia: Sbmec, 2020. p. 1-7. Disponível em: <https://proceedings.sbmec.org.br/sbmec/article/view/3001/3033>. Acesso em: 07 nov. 2020
- [3] COHEN, Joel E. *A life of the immeasurable mind*. The Annals of Probability, 1986, vol 14, No. 4, 1139-1148.
- [4] DURRETT, Rick. *Probability : theory and examples - 4th edition*. New York: Cambridge University Press, 2010.
- [5] EISENBAUM, Nathalie. *What is the meaning of Dynkin's isomorphism Theorem ?*. Disponível em: <https://www.cimat.mx/Eventos/workshopIDP/eisenbaum.pdf>. Acesso em: 28 jan. 2021
- [6] JAMES, Barry R. *Probabilidade: Um curso em nível intermediário*. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.
- [7] LE GALL, Jean-François. *Brownian Motion, Martingales, and Stochastic Calculus*. Cham: Springer, 2016.
- [8] LIMA, Elon Lages. *Análise Real - Volume 1*. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.
- [9] LIMA, Elon Lages. *Análise Real - Volume 2*. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
- [10] PONCE, Augusto C. *Métodos Clássicos em Teoria do Potencial*. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.
- [11] PORTAL ACTION. *O Processo de Poisson*. Disponível em: <http://www.portalaction.com.br/processo-estocastico/processo-de-poisson>. Acesso em: 13 out. 2020.

- [12] SZNITMAN, Alain-Sol. *Topics in Occupation Times and Gaussian Free Fields*. Zurich: Amer Mathematical Society, 2012.
- [13] TAKAHARA, Glen. *Continuous time Markov Chains - Introduction*. Lecture notes. Kingston: Fall 2017. Disponível em: <https://mast.queensu.ca/~stat455/lecturenotes/set5.pdf>.
- [14] VARES, Maria Eulália. *Tempos Locais*. In: ARAUJO, Aloísio. Tópicos em probabilidade. Rio de Janeiro: Impa, 1981. p. 109-151. Disponível em: [https://impa.br/wp-content/uploads/2017/04/13\\_CBM\\_81\\_09.pdf](https://impa.br/wp-content/uploads/2017/04/13_CBM_81_09.pdf). Acesso em: 18 jan. 2021.
- [15] ZIBETTI, André Wust. *Cadeias de Markov - Introdução*. Disponível em: <https://www.inf.ufsc.br/~andre.zibetti/probabilidade/cadeias-de-markov.html>. Acesso em: 07 nov. 2020.

Universidade Federal da Bahia - UFBA  
Instituto de Matemática / Programa de pós-graduação em Matemática

---

Av. Adhemar de Barros, s/n, Campus Universitário de Ondina, Salvador - BA

CEP: 40170-110

<<http://www.pgmat.ufba.br>>