



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA - IME  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



EQUAÇÕES DISPERSIVAS E BOA COLOCAÇÃO DE  
UMA EQUAÇÃO LINEAR DO TIPO AIRY

JOEDSON DE JESUS SANTANA

Salvador-Bahia  
Fevereiro de 2019

# EQUAÇÕES DISPERSIVAS E BOA COLOCAÇÃO DE UMA EQUAÇÃO LINEAR DO TIPO AIRY

JOEDSON DE JESUS SANTANA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 20 de Fevereiro de 2019.

**Orientadora:** Prof.<sup>a</sup> Dra. Vanessa Barros de Oliveira.

**Salvador-Bahia**  
Fevereiro de 2019

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Universitário de Bibliotecas (SIBI/UFBA),  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Santana, Joedson de Jesus

Equações dispersivas e boa colocação de uma equação  
linear do tipo Airy / Joedson de Jesus Santana,  
Joedson De Jesus. -- Salvador, 2019.  
65 f. : il

Orientadora: Vanessa Barros de Oliveira.  
Dissertação (Mestrado - Mestrado em Matemática) --  
Universidade Federal da Bahia, Universidade Federal  
da Bahia - UFBA, 2019.

1. Equações dispersivas. 2. Curvas características.  
3. Transformada de Fourier. 4. Espaços de Sobolev. II.  
De Jesus, Joedson. I. Oliveira, Vanessa Barros de.  
II. Título.

# Equações dispersivas e boa colocação de uma equação linear do tipo Airy

*Joedson de Jesus Santana*

Dissertação apresentada ao Colegiado do Curso de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

## Banca examinadora

*Vanessa B. de O*

---

Prof. Dr. Vanessa Barros De Oliveira  
UFBA

*Henrique Barbosa da Costa*

---

Prof. Dr. Henrique Barbosa Da Costa  
UFBA

*Márcio Cavalcante de Melo*

---

Prof. Dr. Marcio Cavalcante De Melo  
UFAL

*À minha orientadora que  
aceitou me orientar no es-  
curo e não me deixou conhe-  
cer o infinito.*

# Agradecimentos

À Deus, pelo dom da vida e por me permitir chegar até aqui.

À minha família, por todo seu apoio e amor.

À professora Vanessa pelos ensinamentos e paciência, e ao amigo Carlos por toda a ajuda.

Aos meus professores, em especial Eudson, Eduardo, Monteiro, Rosane, Elisângela, Liliane, Ricardo, Manuela, Jerome, Joílson, Jaime, Samuel, Henrique, Cristina e Dirk.

Aos amigos de sempre e aos novos.

À CAPES pelo apoio financeiro.

*“É preciso amar as pessoas  
Como se não houvesse amanhã  
Porque se você parar pra pensar  
Na verdade não há...”*

(Legião Urbana)

# Resumo

Neste trabalho faremos um estudo sobre as equações diferenciais parciais (EDP), em especial as do tipo dispersivas. Um exemplo importante de EDP dispersiva é a equação de Korteweg-de Vries (KdV). Provaremos a boa-colocação global (GWP) desta em espaços de Sobolev para  $s > \frac{7}{2}$ . Provaremos também GWP para uma equação linear do tipo Airy em espaços de Sobolev para  $\frac{1}{2} < s \leq \frac{3}{2}$ . As principais ferramentas serão o teorema de Plancherel e o método das características.

**Palavras-chave:** Equações dispersivas, curvas características, equação do tipo Airy, KdV, espaços de Sobolev.



# Abstract

In this work we will study partial differential equations (PDE), especially those of the dispersive type. An important example of dispersive PDE is the Korteweg-de Vries equation (KdV). We prove the global well-posedness (GWP) of this equation in Sobolev spaces for  $s > \frac{7}{2}$ . We also prove GWP for a linear equation of the Airy type in Sobolev spaces for  $\frac{1}{2} < s \leq \frac{3}{2}$ . The main tool will be Plancherel theorem and the method of characteristics.

**Keywords:** Dispersive equations, characteristics curves, equation of the Airy type, KdV, Sobolev Spaces.

# Sumário

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>  | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Preliminares</b>  | <b>5</b>  |
| 2.1      | Espaços $L^p$ . . . . .  | 5         |
| 2.2      | Espaço de Schwartz . . . . .   | 10        |
| 2.3      | Operação de convolução . . . . .   | 10        |
| 2.4      | Transformada de Fourier . . . . .  | 12        |
| 2.5      | Distribuições Temperadas . . . . .   | 18        |
| 2.6      | Operações com distribuições . . . . .  | 21        |
| 2.7      | Espaços de Sobolev . . . . .   | 22        |
| <b>3</b> | <b>Equações Dispersivas</b>  | <b>26</b> |
| 3.1      | Definições e classificações . . . . .  | 26        |
| 3.2      | Equações Dispersivas . . . . .   | 28        |
| 3.3      | Exemplos . . . . .   | 30        |
| 3.4      | Método das curvas características . . . . .                                    | 32        |
| <b>4</b> | <b>Boa Colocação</b>   | <b>38</b> |
| 4.1      | KdV linear . . . . .   | 38        |
| 4.2      | Equação linear do tipo Airy . . . . .  | 42        |
| 4.2.1    | Solução do problema de Cauchy . . . . .  | 44        |
| 4.2.2    | Boa colocação em espaços de Sobolev : $\frac{1}{2} < s \leq \frac{3}{2}$ . . . | 53        |
| 4.3      | Considerações finais . . . . .   | 55        |
|          | <b>Referências bibliográficas</b>  | <b>55</b> |

# Capítulo 1

## Introdução

Fenômenos de ondas são abundantes em física e matemática e podem ser abordados no início de cursos de graduação, sendo introduzidos inicialmente como ondas em uma corda, na superfície da água ou em uma membrana esticada. Com um pouco mais de conhecimento, estes conceitos podem ser estendidos para ondas sonoras e de choque. Em especial, para estudantes de física, o primeiro contato pode ser através de ondas eletromagnéticas. A utilização da prática, ao invés de apenas teoria, é comum para desenvolver os conceitos de propagação de ondas partindo do modelo mais simples, embora idealizado, para o movimento unidimensional representado por

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad (1.1)$$

onde  $u(x, t)$  é a amplitude da onda,  $c$  é uma constante positiva e  $x, t$  são as variáveis espacial e temporal respectivamente. Esta equação tem uma solução geral simples e bem conhecida, expressa como

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (1.2)$$

onde  $f$  e  $g$  são funções arbitrárias. Convencionalmente, consideraremos  $t$  como uma coordenada de tempo e  $x$  como uma coordenada espacial, embora na equação (1.1) estas sejam facilmente permutáveis, já que diferem apenas pelo fator “escalar”,  $c$ .

Uma importante equação de onda é a equação de KdV (Korteweg-de Vries), que é de interesse matemático e de importância prática. Para apresentar este aspecto veremos como a onda solitária apareceu pela primeira vez no cenário científico e mencionando algumas das propriedades analíticas destas ondas solitárias ou, como as conhecemos agora, *solitons*. Tais ondas foram observadas pela primeira vez por John Scott Russell em 1834, enquanto andava a cavalo ao lado do estreito Canal Union perto de Edimburgo na Escócia. Ele descreveu suas observações da seguinte maneira:

“-Eu estava observando o movimento de um barco que foi rapidamente puxado ao longo de um canal estreito por um par de cavalos, quando o barco parou de repente, mas não a massa de água no canal que ele colocou em movimento. Ela acumulou-se em volta da proa da embarcação em um estado de agitação violenta, depois deixando-o para trás, rolou para a frente com grande velocidade, assumindo a forma de uma grande elevação solitária, uma porção de água suave, lisa e bem definida, que continuou seu curso ao longo do canal aparentemente sem mudança de forma ou diminuição da velocidade. Segui-a a cavalo e a ultrapassei ainda a uma velocidade de cerca de oito ou nove milhas por hora, preservando a sua figura original com cerca de nove metros de comprimento e trinta centímetros de altura. Sua altura diminuiu gradualmente e, depois de uma ou duas milhas, perdi-a nos enrolamentos do canal. Tal, no mês de agosto de 1834, foi a minha primeira entrevista com esse raro e belo fenômeno que chamei de Onda da Translação.”

Posteriormente, Russell realizou experimentos em um tanque de ondas de laboratório para estudar este fenômeno com mais cuidado e seu trabalho foi o primeiro estudo detalhado sobre essas ondas. Ele foi capaz de deduzir empiricamente que o volume de água na onda não se altera com o movimento da onda e, além disso, que a velocidade,  $r$ , da onda solitária é obtida a partir da equação

$$r^2 = g(h + a) \quad (1.3)$$

onde  $a$  é a amplitude da onda,  $h$  é a profundidade da água sem perturbação e  $g$  é a aceleração da gravidade. A onda solitária é portanto, uma onda de gravidade. Notamos imediatamente como consequência importante desta equação que ondas maiores viajam mais rápido. Esses resultados provocaram considerável discussão e controvérsias. George B. Airy, um conhecido dinamista de fluidos da época, acreditava que a onda de translação de Russell era um fenômeno linear. Investigações posteriores de Joseph Boussinesq (1872, 1871) e Lord Rayleigh (1876) confirmaram as previsões de Russell, mostrando que para uma onda de amplitude finita, o aumento da velocidade da onda é contrabalanceado pelo efeito da dispersão sobre ela, levando a uma onda de perfil permanente.

A compreensão de Diederik Korteweg e Gustav de Vries (1895) foi mais avançada. Eles derivaram uma equação de evolução não-linear mantendo longas ondas de gravidade superficial, unidimensionais e de pequena amplitude, propagando-se em águas rasas, e obtiveram a equação que carrega seus nomes, a equação KdV, dada por:

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + 6u\partial_x u = 0 \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad (1.4)$$

que descreve a propagação de ondas como a que foi observada por Russel.

No centro dessas observações está a descoberta de que essas ondas solitárias podem interagir fortemente com outras ondas solitárias e continuar depois disso quase como se não houvesse interação alguma. Essa persistência da onda levou N. Zabusky e M. Kruskal a cunhar o nome “*soliton*” (depois de fóton, próton, etc.), para enfatizar o caráter parecido com uma partícula dessas ondas que parecem reter suas identidades em uma colisão.

Não é fácil fornecer uma definição abrangente e precisa de um *soliton*. No entanto, associaremos o termo a qualquer solução de uma equação não linear (ou sistema) que

- i) representa uma onda de forma permanente, ou seja, que se desloca sem mudança de forma nem diminuição da velocidade.
- ii) pode interagir fortemente com outras ondas e reter sua identidade.

No contexto da equação KdV e outras equações similares, é comum referir-se à solução de um único *soliton*, ou seja, de uma única crista de onda como a onda solitária. Mas quando mais de uma delas aparece em uma solução, elas são chamados *solitons*. Além disso, alguns sistemas não lineares têm ondas solitárias, mas não *solitons*, enquanto outros (como a equação KdV) têm ondas solitárias que são *solitons*.

A KdV é a equação mais simples que podemos imaginar, que incorpora não-linearidade e dispersão. Em resumo, esta é uma equação característica não linear que modela a propagação de ondas longas em águas rasas, cuja velocidade de fase atinge um máximo simples para ondas de comprimento infinito. Esta equação está presente na descrição de inúmeros fenômenos da mecânica dos fluidos e física de partículas entre outros. Com isso, foram realizadas algumas alterações em sua estrutura para que ela abrangesse cada vez mais fenômenos. De uma dessas alterações, obtemos a equação de Airy ou KdV linearizada. No capítulo 4 estudaremos uma equação deste tipo e mostraremos a boa colocação.

Informalmente, “dispersão” se referirá ao fato de que frequências diferentes nesta equação tenderão a se propagar em velocidades diferentes, dispersando a solução ao longo do tempo. Em modelos de dispersão, cuja definição formal e exemplos serão apresentados neste trabalho, são as equações de reação-difusão que modelam, por exemplo, reações químicas e a difusão por membranas biológicas, e as variáveis tanto temporais quanto espaciais devem ser consideradas.

Outro conceito que aparece em problemas físicos e que está presente neste trabalho é o de dissipação ou perda de energia. Em fluidos, por exemplo, os efeitos dissipativos são observados em decorrência de difusão ou fricção.

A equação diferencial parcial que modela tais fluxos reflete esse fenômeno através do decaimento da norma da solução.

No presente trabalho apresentamos definições e resultados de análise, abordamos algumas classificações das equações diferenciais parciais (EDP) com foco nas equações dispersivas, em especial na equação de KdV. Mostramos a boa colocação da KdV linear em espaços de Sobolev para  $s > \frac{7}{2}$  e de uma equação linear tipo Airy em espaços de Sobolev para  $\frac{1}{2} < s \leq \frac{3}{2}$  utilizando o método das características e a transformada de Fourier.

Para facilitar a compreensão, apresentamos algumas simulações que foram feitas no software MATLAB. Plotamos por exemplo um *sóliton* como condição inicial da KdV e assim foi possível constatar visualmente o comportamento de tal solução, que à medida que o tempo variava mantinha sua forma intacta, como foi dito anteriormente. Plotamos também a solução de uma equação tipo Airy, para constatar o comportamento da solução de uma equação dispersiva.

# Capítulo 2

## Preliminares

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados de análise e definições que serão utilizados no decorrer do trabalho.

### 2.1 Espaços $L^p$

**Definição 1.** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}$  e  $0 < p < \infty$ . Dada  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mensurável, definimos*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ é mensurável e } \|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty\}$$

que é chamado espaço de Lebesgue, onde

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Utilizaremos as notações  $L^p$  para abreviar  $L^p(\Omega)$  e  $\|\cdot\|_{L^p}$  ou  $\|\cdot\|_p$  para abreviar  $\|f\|_{L^p(\Omega)}$ .

**Observação 1.** *Funções que são iguais q.t.p., ou seja, exceto em um conjunto de medida nula, definem um mesmo elemento em  $L^p$ .*

Mostraremos mais adiante que para  $1 \leq p < \infty$ ,  $L^p$  é um espaço vetorial normado. Para isso, apresentaremos a seguir alguns resultados importantes que serão úteis, como a desigualdade de Hölder que é conhecido como a pedra angular da teoria dos espaços  $L^p$ .

**Definição 2.** *Dizemos que uma função mensurável  $f$  é essencialmente limitada se o conjunto  $\{x; |f(x)| > r\}$  tem medida zero para algum  $r > 0$ , ou seja, se  $|f(x)| \leq r$  q.t.p. . Definimos  $L^\infty(\Omega) = L^\infty$  como o espaço de todas as funções mensuráveis essencialmente limitadas.*

Para  $f \in L^\infty$ , definimos

$$\|f\|_\infty = \inf\{r \geq 0 ; |f| \leq r \text{ q.t.p.}\}.$$

**Definição 3.** Dizemos que a função  $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  é convexa se

$$\varphi((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)\varphi(x) + \lambda\varphi(y) \quad \forall x, y \in (a, b), x < y, 0 \leq \lambda \leq 1.$$

A função  $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  é dita côncava se  $-\varphi$  é convexa ou seja,  $\varphi$  é côncava quando

$$\varphi((1 - \lambda)x + \lambda y) \geq (1 - \lambda)\varphi(x) + \lambda\varphi(y) \quad \forall x, y \in (a, b), x < y, 0 \leq \lambda \leq 1.$$

**Proposição 1.** Sejam  $a, b \in [0, \infty)$  e  $s > 0$ . Existem constantes positivas  $m_s, M_s$  que dependem apenas de  $s$  tais que

$$m_s(a^s + b^s) \leq (a + b)^s \leq M_s(a^s + b^s). \quad (2.1)$$

*Demonstração.* Se  $a = 0$ , não há o que provar.

Suponhamos então que  $a > 0$ . Assim, (2.1) é equivalente a

$$m_s \left[ 1 + \left( \frac{a}{b} \right)^s \right] \leq \left( 1 + \frac{b}{a} \right)^s \leq M_s \left[ 1 + \left( \frac{a}{b} \right)^s \right].$$

Então, basta provar que existem  $m_s, M_s$  tais que

$$m_s(1 + r^s) \leq (1 + r)^s \leq M_s(1 + r^s) \quad \forall r \in [0, \infty).$$

Dos resultados clássicos do cálculo, temos que as funções

$$f(r) = \frac{1 + r^s}{(1 + r)^s} \quad \text{e} \quad f(r) = \frac{(1 + r)^s}{1 + r^s}$$

são limitadas para cada  $s \geq 0$ . Portanto existem constantes positivas  $m_s$  e  $M_s$ , que dependem apenas de  $s$ , tais que

$$\frac{1 + r^s}{(1 + r)^s} \leq \frac{1}{m_s} \Rightarrow m_s(1 + r^s) \leq (1 + r)^s$$

e

$$\frac{(1 + r)^s}{1 + r^s} \leq M_s \Rightarrow (1 + r)^s \leq M_s(1 + r^s),$$

como queríamos demonstrar. □



**Teorema 1. Desigualdade de Hölder:** *Sejam  $1 < p, q < \infty$  conjugados, isto é  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Se  $f \in L^p$  e  $g \in L^q$  então  $fg \in L^1$  e*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q. \quad (2.2)$$

*Demonstração.* Sejam  $A = \|f\|_p$ ,  $B = \|g\|_q$ . Note que se  $A = 0$  ou  $B = 0$  então (2.2) é válido trivialmente, pois neste caso  $f = 0$  q.t.p. ou  $g = 0$  q.t.p. respectivamente. Suponhamos então  $A \geq 0$  e  $B \geq 0$ . Denotemos

$$F(x) = \frac{|f(x)|}{A}, \quad G(x) = \frac{|g(x)|}{B}.$$

Então

$$\int F^p(x) dx = \int \frac{|f(x)|^p}{A^p} dx = \frac{\int |f(x)|^p dx}{A^p} = \frac{\int |f(x)|^p dx}{\|f\|_p^p} = \frac{\|f\|_p^p}{\|f\|_p^p} = 1.$$

Da mesma forma,

$$\int G^q(x) dx = 1.$$

Como  $0 < F(x) < \infty$  e  $0 < G(x) < \infty$ , existem  $s, t \in \mathbb{R}$  tais que  $F(x) = e^{\frac{s}{p}}$  e  $G(x) = e^{\frac{t}{q}}$ . Pelo fato de  $p$  e  $q$  serem conjugados e a função exponencial ser convexa, temos que

$$e^{\frac{s}{p} + \frac{t}{q}} \leq \frac{1}{p} e^s + \frac{1}{q} e^t \Rightarrow F(x)G(x) \leq \frac{1}{p} F(x)^p + \frac{1}{q} G(x)^q.$$

Integrando,

$$\int F(x)G(x) dx \leq \frac{1}{p} \int F(x)^p dx + \frac{1}{q} \int G(x)^q dx = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

E daí,

$$\int \frac{|f(x)|}{A} \frac{|g(x)|}{B} dx \leq 1 \Rightarrow \int |f(x)||g(x)| dx \leq AB = \|f\|_p \|g\|_q.$$

□

**Observação 2.** *A desigualdade de Hölder em  $L^2$  é conhecida como desigualdade de Cauchy-Schwarz*

$$\|fg\|_2 \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

A seguir, apresentamos mais um teorema também de grande importância na teoria dos espaços  $L^p$ .

**Teorema 2. Desigualdade de Minkowski:** *Sejam  $1 \leq p < \infty$  e  $f, g \in L^p$ . Então*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \quad (2.3)$$

*Demonstração.* Inicialmente, note que se  $p = 1$  ou  $f + g = 0$  a desigualdade é imediata. Supondo então  $1 < p < \infty$  e  $f + g \neq 0$ , podemos escrever

$$|f + g|^p \leq (|f| + |g|)|f + g|^{p-1}, \text{ pois } |f + g| \leq |f| + |g|.$$

Aplicando a desigualdade de Hölder e observando que se  $p$  e  $q$  são conjugados então  $(p-1)q = p$ , obtemos que

$$\int |f + g|^p dx \leq \|f\|_p \| |f + g|^{p-1} \|_q + \|g\|_p \| |f + g|^{p-1} \|_q,$$

donde segue a desigualdade.  $\square$

Agora, podemos provar o seguinte resultado:

**Teorema 3.** *Se  $1 \leq p < \infty$ , então  $L^p$  é um espaço vetorial normado.*

*Demonstração.* Sejam  $f, g \in L^p$ . Então

$$|f + g|^p \leq (2 \cdot \max\{|f|, |g|\})^p \leq 2^p(|f|^p + |g|^p).$$

Daí, segue que  $f + g \in L^p$  e conseqüentemente,  $L^p$  é um espaço vetorial.

Agora, da definição de  $\|f\|_p$  segue que:

- 1  $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$  q.t.p.
- 2 Dado  $c \in \mathbb{C}$ ,  $\|cf\|_p = |c|\|f\|_p$
- 3  $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$  (desigualdade triangular). É justamente o teorema que provamos acima, da desigualdade de Minkowski.

Portanto  $\|\cdot\|$  é uma norma em  $L^p$ , e este é um espaço vetorial normado.  $\square$

A seguir, apresentamos mais uma desigualdade importante, que é a **Desigualdade de Young**. Para auxiliar em sua demonstração, utilizaremos a seguinte proposição:

**Proposição 2.** *Sejam  $r_1, r_2 > 0$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $g = r_1^t r_2^{1-t}$  e  $m = tr_1 + (1-t)r_2$ . Então  $g \leq m$ . Em outras palavras, a média geométrica é sempre menor ou igual a média aritmética calculada com os mesmos pesos.*

*Demonstração.* Como  $g = r_1^t r_2^{1-t}$ , utilizando a função logarítmica na base  $e$   $\log_e$ , podemos escrever

$$\log_e g = \log_e(r_1^t r_2^{1-t}) = t \log_e r_1 + (1-t) \log_e r_2.$$

Além disso, como a função  $\log_e : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é côncava, temos que

$$t \log_e r_1 + (1-t) \log_e r_2 \leq \log_e(tr_1 + (1-t)r_2),$$

ou seja  $\log_e g \leq \log_e m$ , e consequentemente,  $t \leq m$ . □

**Teorema 4. Desigualdade de Young:** *Sejam  $p, q > 1$ , reais conjugados. Dados  $a, b \geq 0$  vale que*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

*valendo a igualdade se  $a^p = b^q$ .*

*Demonstração.* Se  $a = 0$  ou  $b = 0$  é imediato.

Suponhamos então  $a > 0$  e  $b > 0$ . Sejam  $m = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ . Pela proposição anterior, vale que

$$m \leq g = (a^p)^{\frac{1}{p}} (b^q)^{\frac{1}{q}} = ab.$$

Se  $a^p = b^q$ , então  $m = a^p = b^q = g$ . □

**Teorema 5.** *Sejam  $V$  e  $W$  subconjuntos abertos de  $\mathbb{R}^n$ , com  $W$  limitado, e  $g : V \rightarrow W$  uma função diferenciável, injetiva e com inversa contínua. Se  $f \in L^1(W)$  então*

$$\int_W f(x) dx = \int_V f(g(y)) g'(y) dy.$$

*Demonstração.* Ver [W]. □

**Teorema 6. Derivação sob o sinal da integral:**

Sejam  $U \subset \mathbb{R}^n$  aberto e  $f : U \times [a, b]$  contínua tal que a  $i$ -ésima derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial x_i} f(x, t)$  existe para todo  $(x, t) \in [a, b]$  e é contínua. Então a função  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$g(x) = \int_a^b f(x, t) dt$$

possui a  $i$ -ésima derivada parcial em cada ponto  $x \in U$  e

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = \int_a^b d \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t).$$

Em suma, pode-se derivar sob o sinal da integral desde que o integrando resultante seja uma função contínua.

*Demonstração.* Ver [LE]. □

## 2.2 Espaço de Schwartz

**Definição 4.** O espaço de Schwartz, denotado por  $S = S(\mathbb{R})$  é o espaço das funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  infinitamente diferenciáveis em  $\mathbb{R}$  tais que, para quaisquer  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$

$$\|f\|_{\alpha, \beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\alpha f^{(\beta)}(x)| < \infty \quad (2.4)$$

onde  $f^{(\beta)}$  é a  $\beta$ -ésima derivada de  $f$ .

Note que as funções de  $S$  tendem a zero rapidamente no infinito, pois dado  $n$  natural,

$$|x^n f(x)| \leq C \Rightarrow |f(x)| \leq \frac{C}{|x^n|}, \quad x \neq 0.$$

Portanto  $f(x)$  tende a zero quando  $|x|$  vai para infinito mais rápido que o inverso de qualquer polinômio. Essa propriedade implica que  $f$  pertence a  $L^1$ , pois sendo limitada sua integral também será.

O conjunto  $S$  é um espaço vetorial sobre os complexos e tem uma topologia natural induzida pela família de semi-normas (2.4). Mais precisamente,  $S$  é um espaço métrico completo, quando munido da métrica definida por

$$d(f, g) = \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}} 2^{-(\alpha+\beta)} \frac{\|f - g\|_{\alpha, \beta}}{1 + \|f - g\|_{\alpha, \beta}}. \quad (2.5)$$

Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  é infinitamente diferenciável e tem suporte compacto, isto é, existe  $M$  positivo tal que  $f$  se anula fora do intervalo  $[-M, M]$ , então  $f \in S$ , visto que funções contínuas definidas em um compacto são limitadas. No entanto, nem todas as funções de  $S$  tem suporte compacto, como podemos ver no exemplo a seguir.

**Exemplo 1.** Seja  $\gamma(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ . Note que  $\gamma$  não tem suporte compacto mas pertence a  $S$  pois é infinitamente diferenciável e se  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$  então  $x^\alpha \gamma^{(\beta)}(x) = p(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ , onde  $p(x)$  é um polinômio. Portanto  $x^\alpha \gamma^{(\beta)} \rightarrow 0$  quando  $|x|$  vai para infinito e é uma função limitada.

## 2.3 Operação de convolução

**Definição 5.** Sejam  $f \in L^1$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  limitada e contínua em qualquer intervalo fechado. O produto de convolução de  $f$  por  $g$  é a função  $f * g$  definida por

$$(f * g)(x) = \int f(x - y)g(y)dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Proposição 3.** *Sejam  $f, g, h \in S$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Então*

i)  $f * g = g * f$

ii)  $(f * g) * h = f * (g * h)$

iii)  $(\lambda f) * g = \lambda(f * g) = f * (\lambda g)$

iv) definindo  $T_y f(x) = f(x - y)$  (translação de ordem  $y$  de  $f$ ) temos que  
 $T_z(f * g) = (T_z f) * g = f * (T_z g)$

v)  $(f + g) * h = f * h + g * h.$

*Demonstração.* i) Basta considerar a mudança de variáveis  $z = x - y$ .

ii) Usando o teorema de Fubini e o item i), obtemos

$$\begin{aligned} (f * g) * h &= \int (f * g)(x - z)h(z)dz \\ &= \iint f(y)g(x - y - z)h(z)dzdy \\ &= \int f(y) \left( \int g(x - y - z)dz \right) dy \\ &= \int f(y)(g * h)(x - y)dy \\ &= f * (g * h)(x). \end{aligned}$$

iv) Da definição de  $T_z$ , temos

$$\begin{aligned} T_z(f * g)(x) &= (f * g)(x - z) \\ &= \int f(x - y - z)g(y)dy \\ &= \int T_y f(x - y)g(y)dy \\ &= (T_z f) * g(x). \end{aligned}$$

Combinando com o item i), obtemos

$$T_z(f * g) = T_z(g * f) = (T_z g) * f = f * T_z g.$$

v) Temos que

$$\begin{aligned}
 (f + g) * h(x) &= \int (f + g)(x - y)h(y)dy \\
 &= \int ([f(x - y)g(x - y) + g(x - y)]h(y))dy \\
 &= \int (f(x - y)h(y) + g(x - y)h(y))dy \\
 &= \int f(x - y)h(y)dy + \int g(x - y)h(y)dy \\
 &= f * h + g * h.
 \end{aligned}$$

□

## 2.4 Transformada de Fourier

**Definição 6.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  integrável em qualquer intervalo  $[a, b]$ , tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b |f(x)|dx = \|f\|_{L^1} < \infty.$$

Então, a função  $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , dada por

$$\hat{f}(\xi) = (\mathcal{F}f)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}dx \quad (2.6)$$

está bem definida para qualquer  $\xi \in \mathbb{R}$  é chamada **transformada de Fourier** de  $f$ .

Apresentaremos a seguir alguns resultados e propriedades de  $\hat{f}$ .

**Proposição 4.** Sejam  $f, g \in L^1$ . Então

- i)  $(af + bg)^\wedge(\xi) = a\hat{f}(\xi) + b\hat{g}(\xi), \quad \forall a, b \in \mathbb{C}, \forall \xi \in \mathbb{R}$
- ii)  $\hat{\hat{f}}(\xi) = \bar{\hat{f}}(-\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$ , onde  $\bar{f}$  é a função complexa conjugada de  $f$
- iii) Se  $x, y \in \mathbb{R}$  e  $f_y(x) = f(x - y)$ , então  $f_y \in L^1$  e  $(f_y)^\wedge(\xi) = e^{-iy\xi}\hat{f}(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$
- iv)  $|\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$

*Demonstração.* i) Segue da linearidade da integral.

ii)

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(x)e^{-ix\xi} dx = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix\xi} dx} = \overline{\hat{f}(-\xi)}.$$

iii) Note que o gráfico de  $f_y$  é o gráfico de  $f$  trasladado  $|y|$  unidades para a direita, se  $y > 0$  ou para a esquerda se  $y < 0$ . Portanto, como  $f \in L^1, f_y \in L^1$ .

Agora, para mostrar que

$$\hat{f}_y(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)e^{-ix\xi} dx = e^{-iy\xi} \hat{f}(\xi)$$

basta considerar a mudança  $z = x - y$ .

iv)

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\xi)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi} dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| |e^{-ix\xi}| dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \|f\|_1. \end{aligned}$$

□

**Observação 3.** Note que, pelo fato de  $S \subset L^1$ , as propriedades válidas em  $L^1$  também valem em  $S$ .

**Proposição 5.** Se  $f \in S$  então  $f^{(n)} \in S$  e  $(f^{(n)})^\wedge(\xi) = (i\xi)^n \hat{f}(\xi), \forall \xi \in \mathbb{R}$ .

*Demonstração.* Queremos mostrar que  $|x^\alpha (f^{(n)})^{(\beta)}(x)| \leq C_{\alpha,\beta} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$ .

De fato, se  $f \in S$ , então

$$|x^\alpha (f^{(n)})^{(\beta)}(x)| = |x^\alpha f^{(n+\beta)}| \leq C_{\alpha, n+\beta}.$$

Logo,  $f^{(n)} \in S$ .

Agora, para a segunda parte, procederemos por indução.

Para  $n = 1$ , temos

$$(f')^\wedge(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f'(x) dx$$

que por integração por partes é igual a

$$e^{-ix\xi} f(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} (-i\xi) e^{-ix\xi} f(x) dx.$$

Como  $f \in S(\mathbb{R})$ ,  $e^{-ix\xi} f(x)$  vai pra zero para  $x$  suficientemente grande. Daí, obtemos

$$i\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x) dx = i\xi \hat{f}(\xi).$$

Portanto, vale para  $n = 1$ .

Supondo válido para  $n$ , mostraremos que vale para  $n + 1$ .

Temos que

$$(f^{(n+1)})^\wedge(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n+1)}(x) e^{-ix\xi} dx$$

Integrando por partes e usando a hipótese de indução obtemos que

$$\begin{aligned} (f^{(n+1)})^\wedge(\xi) &= f^{(n)}(x) e^{-ix\xi} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)} e^{-ix\xi} (-i\xi) dx \\ &= i\xi \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)} e^{-i\xi} dx \\ &= i\xi (i\xi)^n \hat{f}(\xi) \\ &= (i\xi)^{n+1} \hat{f}(\xi). \end{aligned}$$

Logo, o resultado é válido.  $\square$

**Observação 4.** A proposição anterior nos diz que a transformada de Fourier associa o operador diferencial  $\frac{d}{dx}$  agindo em  $S$  no operador de multiplicação por  $i\xi$  no espaço  $\{\hat{f} : f \in S\}$ , ou seja na imagem de  $S$  pela transformada. Isso nos permite transformar equações diferenciais ordinárias em equações algébricas e permitirão reduzir EDPs a EDOs.

Apresentaremos agora um resultado que permite recuperar nossa função original em  $S(\mathbb{R})$ , ou seja uma maneira de obter a inversa da transformada de Fourier. Para tal, precisamos de alguns resultados auxiliares.

**Lema 1.** Se  $f \in S$  então  $\hat{f} \in S$ .

*Demonstração.* Como  $f \in S$ , podemos derivar sob o sinal da integral em relação a  $\xi$  quantas vezes quisermos, obtendo

$$\hat{f}^{(\beta)}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} (-ix)^\beta f(x) e^{-ix\xi} dx, \quad (2.7)$$



qualquer que seja  $\beta \in \mathbb{N}$ . Isso prova que  $\hat{f} \in C^\infty$ .

A equação (2.7) pode ser reescrita, de maneira informal porém mais clara, como  $\hat{f}^{(\beta)} = (-i)^\beta (x^\beta f)^\wedge(\xi)$ .

Dados  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ , usando a proposição 5 e a equação (2.7), obtemos

$$\begin{aligned} \xi^\alpha \hat{f}^{(\beta)}(\xi) &= \xi^\alpha (-i)^\beta (x^\beta f)^\wedge(\xi) \\ &= (-i)^{\beta+\alpha} (i\xi)^\alpha (x^\beta f)^\wedge(\xi) \\ &= (-i)^{\beta+\alpha} ((x^\beta f)^{(n)})^\wedge(\xi) \\ &= \hat{g}(\xi). \end{aligned}$$

Note que, como  $f \in S$ ,  $g \in S \subset L^1$  e pela definição da transformada de Fourier, (2.6),  $\hat{g}$  é limitada, ou seja,  $\xi^\alpha \hat{f}(\xi)$  é limitada. Portanto,  $\hat{f} \in S$ .  $\square$

**Lema 2.** *Se  $f \in S$ , então*

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

*Demonstração.* Suponhamos inicialmente que  $f(0) = 0$ .

Mostraremos que existe  $g \in S$  tal que

$$f(x) = xg(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Pelo teorema fundamental do cálculo,

$$f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt}(f(tx)) dt = \int_0^1 x f'(tx) dt = xg(x)$$

onde

$$g(x) = \int_0^1 f'(tx) dt.$$

Como  $f$  é infinitamente diferenciável, podemos derivar sob o sinal da integral, obtendo sempre uma função contínua. Portanto,  $g \in C^\infty$ .

Sejam  $a, b \in \mathbb{N}$ . Como  $x^a g^{(b)}$  é contínua, também será limitada em  $[-1, 1]$  e para  $|x| \geq 1$ ,  $g(x) = x^{-1} f(x)$ .

Por indução, segue

$$g^{(b)}(x) = \frac{1}{x^{b+1}} \sum_{k=0}^b (-1)^k \frac{b!}{(b-k)!} x^{b-k} f^{(b-k)}(x)$$

e portanto, para  $|x| \geq 1$

$$|x^a g^{(b)}(x)| \leq \sum_{k=0}^b (-1)^k \frac{b!}{(b-k)!} |x|^{a+b-k} |f^{(b-k)}(x)| \leq C_{a,b}.$$

o que implica que  $x^a g^{(b)}(x)$  é limitada. Isso prova que  $g \in S$ . Do lema 1, obtemos que  $\hat{g} \in S$  e que

$$\hat{f} = (xg)^\wedge(\xi) = i\hat{g}'(\xi).$$

Logo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) d\xi = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\hat{g}}{d\xi} d\xi = i\hat{g}(\xi) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0,$$

pois, como  $g \in S$ ,  $\hat{g} \in S$  e por definição, vai a zero no infinito.

Agora, para o caso geral, vamos definir uma função auxiliar  $g$ ,

$$g(x) = f(x) - f(0)\gamma(x), \text{ onde } \gamma(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Usaremos essa função  $\gamma$  em especial pelo fato de  $\gamma \in S$  e  $\hat{\gamma} = \gamma$ . Assim, como  $f, \gamma \in S$ , temos que  $g \in S$  e  $g(0) = 0$ . Então, pelo primeiro caso ( $f(0) = 0$ ), temos que

$$g(0) = 0 = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\xi) d\xi.$$

Por outro lado, pela linearidade da transformada de Fourier,

$$\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi) - f(0)\hat{\gamma}(\xi) = \hat{f}(\xi) - f(0)\gamma(\xi).$$

Portanto

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) d\xi - f(0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) d\xi - f(0). \end{aligned}$$

□

Provaremos agora o resultado que nos permite recuperar a função original em  $S$ , ou seja, a fórmula de inversão em  $S$ . Na matemática, o Teorema da fórmula de inversão de Fourier diz que, para muitos tipos de funções, é possível recuperar uma função a partir de sua transformada de Fourier. Intuitivamente pode ser visto como a prova de que se sabemos frequência e fase de uma onda, podemos reconstruir sua onda original com precisão.

**Teorema 7. Fórmula da inversão:** *Seja  $f \in S$ . Então*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

*Demonstração.* Sejam  $x, \xi \in \mathbb{R}$ . Pela proposição 4, temos  $\hat{f}(\xi) e^{ix\xi} = (f_{(-x)})^\wedge(\xi)$ , onde  $f_{(-x)}(t) = t + x$ . Como o gráfico de  $f_{-x}$  é o gráfico de  $f$  transladado  $|x|$  unidades pra direita se  $x < 0$  ou pra esquerda se  $x > 0$ , temos que  $f_{-x} \in S$ .

Então, pelo lema 2

$$f(x) = f_{-x}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} (f_{-x})^\wedge(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

□

A seguir, apresentaremos um dos resultados mais importantes dos estudos da transformada de Fourier.

**Teorema 8.** *A transformada de Fourier  $\mathcal{F}$  define uma bijeção linear de  $S$  em  $S$  e sua inversa é dada por*

$$(\mathcal{F}^{-1} f)(x) = \check{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{ix\xi} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}, \quad f \in S. \quad (2.8)$$

**Observação 5.** *Se soubermos que  $\mathcal{F} : S \rightarrow S$  é uma bijeção, então as equações (2.6) e (2.8) são equivalentes. De fato, se (2.6) vale,  $\mathcal{F}$  sendo uma bijeção, então toda  $f \in S$  é da forma  $f = \hat{g}$ ,  $g \in S$ , e portanto*

$$(\mathcal{F}^{-1} f)(x) = (\mathcal{F}^{-1} \mathcal{F} g)(x) = g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\xi) e^{ix\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

*Reciprocamente*

$$f(x) = (\mathcal{F}^{-1} \mathcal{F} f)(x) = (\mathcal{F}^{-1} \hat{f})(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

*Demonstração.* Da proposição 4 e do lema 1,  $\mathcal{F} : S \rightarrow S$  é linear. Pelo teorema da fórmula da inversão,  $\mathcal{F}$  é injetora, pois

$$\mathcal{F} f = 0 \Rightarrow \hat{f} \equiv 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Mostremos então a sobrejetividade. Seja  $f \in S$ . Temos que

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{ix\xi} d\xi = \hat{f}(-x)$$

está em  $S$ , pois  $\hat{f} \in S$ .

Pela fórmula de inversão,

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) e^{ix\xi} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(-x) e^{ix\xi} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-iy\xi} dy \\ &= \hat{g}(\xi). \end{aligned}$$

Portanto,  $f = \hat{g}$ . □

**Teorema 9. Plancherel Parseval:** *Sejam  $f, g \in S$ . Então*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

*Demonstração.* Temos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(x)} e^{-ix\xi} dx d\xi$$

que pelo teorema de Fubini, é igual a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(x)} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{-ix\xi} d\xi dx$$

e que pelo teorema da inversão é igual a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(x)} f(x) dx.$$

A segunda igualdade é um caso particular do que mostramos acima, considerando  $\overline{g(x)} = f(x)$ . □

## 2.5 Distribuições Temperadas

Nesta seção estudaremos o espaço das funções generalizadas associadas ao espaço de Schwartz  $S$ , que é um espaço métrico completo quando munido

da métrica (2.5), a qual não provém de uma norma, mas da família de seminormas definida em (2.4). Antes de definirmos o espaço das *distribuições temperadas*, apresentaremos o conceito de convergências em  $S$ .

**Definição 7.** Uma sequência  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $S$  converge para  $\varphi \in S$  se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n - \varphi\|_{\alpha, \beta} = 0, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N},$$

onde a família de seminormas  $\|\cdot\|_{\alpha, \beta}$  é a definida em (2.4).

Podemos agora definir o espaço das *distribuições temperadas*.

**Definição 8.** O espaço das *distribuições temperadas* em  $\mathbb{R}$ , denotado por  $S'(\mathbb{R})$  é o espaço dual de  $S(\mathbb{R})$ , ou seja, o conjunto de todas as funções  $f : S(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ , que são lineares e contínuas.

Usualmente, denotamos por  $\langle f, \varphi \rangle$  o valor em  $\mathbb{C}$  que a distribuição  $f \in S'(\mathbb{R})$  atribui a  $\varphi \in S(\mathbb{R})$ . Com essa notação:

- $f$  ser linear significa que  $\langle f, a\varphi + b\psi \rangle = a\langle f, \varphi \rangle + b\langle f, \psi \rangle$
- $f$  ser contínua significa que se  $\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n$  em  $S(\mathbb{R})$  então  $\langle f, \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f, \varphi_n \rangle$ .

### Exemplo 2. Motivação

Vejamos agora o exemplo que motiva a definição acima.

Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função arbitrária polinomialmente limitada, ou seja, existe um polinômio  $P(x)$  tal que  $|f(x)| \leq P(x) \forall x \in \mathbb{R}$  e que é integrável a Riemann em  $[-M, M]$  para cada  $M > 0$ . Então

$$f : \varphi \in S(\mathbb{R}) \mapsto \langle f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx$$

é uma distribuição temperada. A integral converge, pois cada  $\varphi \in S(\mathbb{R})$  decai mais rápido no infinito do que 1 sobre qualquer polinômio. A linearidade em  $\varphi$  de  $\langle f, \varphi \rangle$  decorre imediatamente da linearidade da integral. A continuidade em  $\varphi$  de  $\langle f, \varphi \rangle$  segue do teorema 10, que apresentaremos a seguir.

**Teorema 10. (Teste de continuidade)** Um funcional linear  $f : \varphi \in S(\mathbb{R}) \mapsto \langle f, \varphi \rangle \in \mathbb{C}$  é contínuo se e somente se existem constantes  $C > 0$  e  $N \in \mathbb{N}$  tais que

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq C \sum_{0 \leq n, m \leq N} \|\varphi\|_{n, m}.$$

*Demonstração.* Suponhamos que

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq C \sum_{0 \leq n, m \leq N} \|\varphi\|_{n, m}$$

e que a sequência  $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge para  $\varphi$  em  $S(\mathbb{R})$ , temos que

$$|\langle f, \varphi \rangle - \langle f, \varphi_k \rangle| = |\langle f, \varphi - \varphi_k \rangle| \leq C \sum_{0 < n, m < N} \|\varphi - \varphi_k\|_{n, m}$$

converge para zero quando  $k$  vai para o infinito.

Portanto,  $f$  é contínua.

Agora, seja  $f \in S'(\mathbb{R})$ . Em particular,  $f$  é contínua em  $\varphi = 0$ , então existe  $\delta > 0$  tal que

$$d(\psi, 0) < \delta \Rightarrow |\langle f, \psi \rangle| < 1.$$

Tomando  $N$  de modo que  $\sum_{n \text{ ou } m > N} 2^{-n-m} < \frac{\delta}{2}$ , temos que

$$\sum_{0 \leq n, m \leq N} \|\psi\|_{n, m} < \frac{\delta}{2}$$

e daí

$$\begin{aligned} d(\psi, 0) &= \sum_{n, m \leq 0} 2^{-n, -m} \frac{\|\psi\|_{n, m}}{1 + \|\psi\|_{n, m}} \\ &\leq \sum_{n, m \leq N} \|\psi\|_{n, m} + \sum_{n \text{ ou } m > N} 2^{-n-m} \end{aligned}$$

ou seja,  $d(\psi, 0) < \delta$ , e portanto  $|\langle f, \psi \rangle| < 1$ .

Consequentemente, para qualquer  $\varphi \in S(\mathbb{R})$  não nula, escrevendo

$$\psi = \frac{\delta}{2} \left[ \sum_{n, m \leq N} \|\varphi\|_{n, m} \right]^{-1} \varphi,$$

temos

$$\sum_{0 \leq n, m \leq N} \|\psi\|_{n, m} = \sum_{0 \leq n, m \leq N} \frac{\delta}{2} \left[ \sum_{n, m \leq N} \|\varphi\|_{n, m} \right]^{-1} \|\varphi\|_{n, m} = \frac{\delta}{2}.$$

Assim

$$|\langle f, \varphi \rangle| = \frac{2}{\delta} \left[ \sum_{n, m \leq N} \|\varphi\|_{n, m} \right] |\langle f, \psi \rangle| < \frac{2}{\delta} \sum_{n, m < N} \|\varphi\|_{n, m}$$

como desejado. □

## 2.6 Operações com distribuições

### Adição e multiplicação por escalar

**Definição 9.** *Sejam  $f, g \in S'(\mathbb{R})$  e  $a, b \in \mathbb{C}$ . A soma  $af + bg \in S'(\mathbb{R})$  é expressa por*

$$\langle af + bg, \varphi \rangle = a\langle f, \varphi \rangle + b\langle g, \varphi \rangle.$$

**Teorema 11.** *Se  $f, g \in S'(\mathbb{R})$  e  $a, b \in \mathbb{C}$ , então  $af + bg$  está bem definida e pertence a  $S'(\mathbb{R})$ . As operações de adição e multiplicação por escalar então definidas satisfazem os axiomas de espaço vetorial.*

### Diferenciação

**Definição 10.** *Definimos a primeira derivada de  $f \in S'(\mathbb{R})$  por*

$$\langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle.$$

*Mais geralmente, definimos a  $p$ -ésima derivada de  $f \in S'(\mathbb{R})$  por*

$$\langle f^{(p)}, \varphi \rangle = (-1)^p \langle f, \varphi^{(p)} \rangle.$$

*Visto que  $\|\varphi^{(p)}\|_{n,m} = \|\varphi\|_{n,m+p}$ , temos um elemento bem definido de  $S'(\mathbb{R})$ .*

**Observação 6.** • *A derivada de uma distribuição sempre existe.*

- *As operações definidas acima são coerentes com a motivação do exemplo 2, isto é, se  $f, g \in S(\mathbb{R})$  e  $a, b \in \mathbb{C}$ , então:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} [af(x) + bg(x)]\varphi(x)dx = a \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx + b \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\varphi(x)dx$$

*e por integração por partes*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx.$$

Usando a definição do exemplo 2, calcularemos a derivada da função Heaviside :

**Exemplo 3.** *A função de unidade Heaviside definida por*

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

também pode ser vista como uma distribuição temperada:

$$\langle H, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\varphi(x)dx = \int_0^{\infty} \varphi(x)dx, \varphi \in S.$$

A derivada desta distribuição é:

$$\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_0^{\infty} \varphi'(x)dx = -\left[\varphi(x)\right]_0^{\infty} = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle.$$

Portanto,  $\delta \in S$  dada por  $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$ ,  $\varphi \in S$  é a função conhecida como delta de Dirac (ver [Ca]).

**Definição 11.** Definimos a transformada de Fourier da distribuição temperada  $f \in S'(\mathbb{R})$  como sendo a distribuição temperada

$$\langle \hat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \hat{\varphi} \rangle.$$

Observe que se  $f$  e  $\varphi$  estão ambas em  $S(\mathbb{R})$ , (e portanto  $f$  define uma distribuição) então escrevendo  $\varphi(\xi) = \overline{\psi(\xi)}$

$$\begin{aligned} \langle \hat{f}, \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\varphi(\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\overline{\psi(\xi)}d\xi \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{\psi(x)}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\hat{\varphi}(x)dx, \end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned} \overline{\hat{\psi}(x)} &= \frac{1}{2\pi} \overline{\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\psi(k)dk} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}\overline{\psi(k)}dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}\varphi(k)dk \\ &= \frac{1}{2\pi}\hat{\varphi}(x), \end{aligned}$$

e mais uma vez a definição é coerente com o exemplo 2.

## 2.7 Espaços de Sobolev

Agora, apresentaremos uma introdução aos espaços de Sobolev  $H^s(\mathbb{R})$ , os quais medem a diferenciabilidade de funções  $L^2$  e são espaços naturais para as soluções de EDPs.



**Definição 12.** *Seja  $s \in \mathbb{R}$ . Definimos o espaço de Sobolev de ordem  $s$ , denotado por  $H^s = H^s(\mathbb{R})$ , como*

$$H^s = \{f \in S' : \Lambda^s f(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{f}(\xi) \in L^2\} \quad (2.9)$$

com a norma  $\|\cdot\|_{H^s}$  definida por

$$\|f\|_{H^s} = \|\Lambda^s f\|_{L^2}. \quad (2.10)$$

Da definição de  $H^s$ , temos as seguintes propriedades:

- 1)  $f \in H^s \Leftrightarrow (1 + |\xi|^2)^s \hat{f} \in L^2$
- 2) Se  $0 \leq s < s'$  então  $H^{s'} \subsetneq H^s$
- 3)  $S$  é denso em  $H^s \forall s \in \mathbb{R}$
- 4)  $H^0 = L^2$  e  $\|\cdot\|_{H^0} = \|\cdot\|_{L^2}$
- 5)  $H^s$  é um espaço de Hilbert com o produto de interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$  definido por

$$\langle f, g \rangle_s = \int_{\mathbb{R}} \Lambda^s f(\xi) \overline{\Lambda^s g(\xi)} d\xi$$

para  $f, g \in H^s$ .

A seguir, apresentamos alguns resultados importantes dos espaços de Sobolev que serão úteis no decorrer do trabalho .

**Teorema 12. Imersão de Sobolev:** *Seja  $s > k + \frac{n}{2}, k \in \mathbb{N}$ .*

- 1) *Se  $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ , então  $(\widehat{\partial^\alpha f}) \in L^1$  e  $\|\widehat{\partial^\alpha f}\|_{L^1} \leq C\|f\|_{H^s}, \forall |\alpha| \leq k, \alpha \in \mathbb{N}$  onde  $C = C(k - s)$*
- 2)  *$H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_\infty^k(\mathbb{R}^n)$ , ou seja,  $H^s$  é continuamente imerso no espaço das funções com  $k$  derivadas contínuas que se anulam no infinito. Em outras palavras, se  $f \in H^s, s > k + \frac{n}{2}$ , então, após uma possível modificação de  $f$  em um conjunto de medida nula, temos que  $f \in C_\infty^k$  e  $\|f\|_{C^k} \leq C\|f\|_{H^s}$ .*

*Demonstração.* 1) Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que

$$\|\hat{f}(\xi)\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)| d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)| (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \frac{d\xi}{(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}}}$$

$$\leq \|f\|_{H^s} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^s} \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_s \|f\|_{H^s}$$

$$\begin{aligned} \int |(\partial^\alpha f)^\wedge(\xi)| d\xi &= \int |\xi^\alpha \hat{f}(\xi)| d\xi \\ &\leq \int (1+|\xi|)^{\frac{k}{2}} |\hat{f}(\xi)| d\xi \\ &\leq \int (1+|\xi|)^{\frac{s}{2}} (1+|\xi|)^{\frac{k-s}{2}} |\hat{f}(\xi)| d\xi \\ &\leq \left( \int (1+|\xi|^2)^s |\hat{f}(\xi)| d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= c(k-s) \|f\|_{H^s}. \end{aligned}$$

2) Considerando o  $k = 0$ , e usando a fórmula da inversão, o teorema(2.8) e o item 1, temos

$$\|f\|_{L^\infty} = \|\check{f}\|_{L^1} \leq C \|f\|_{H^s}$$

Agora, se  $k \geq 1$ , pelo item 1)

$$\|\partial_x^\alpha f\|_{L^\infty} = \|(\widehat{\partial_x^\alpha f})^\vee\|_{L^\infty} \leq \|(\widehat{\partial_x^\alpha f})\|_{L^1} \leq C \|f\|_{H^s}$$

□

**Observação 7.** Como consequência desse teorema, temos que para  $s > \frac{n}{2}$  as funções de  $H^s$  são contínuas.

**Teorema 13.** Se  $s > \frac{1}{2}$  então  $H^s$  é uma álgebra de Banach com respeito ao produto interno de funções, isto é, se  $f$  e  $g \in H^s$  então  $fg \in H^s$  com  $\|fg\|_{H^s} \leq C_s \|f\|_{H^s} \|g\|_{H^s}$ .

*Demonstração.* Dados  $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ , temos da desigualdade triangular que

$$(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \leq 2^s [(1+|\xi-\eta|^2)^{\frac{s}{2}} + (1+|\eta|^2)^{\frac{s}{2}}].$$

Usando esta desigualdade, obtemos que

$$\begin{aligned} |\Lambda^s(fg)| &= |(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{(fg)}(\xi)| \\ &= (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi-\eta) \hat{g}(\eta) d\eta \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq 2^s \int_{\mathbb{R}^n} [(1 + |\xi - \eta|^2)^{\frac{s}{2}} |\hat{f}(\xi - \eta) \hat{g}(\eta)| + (1 + |\eta|^2)^{\frac{s}{2}} |\hat{f}(\xi - \eta) \hat{g}(\eta)|] d\eta \\ &\leq 2^s (|\Lambda^s f| * |\hat{g}| + |\hat{f}| * |\Lambda^s g|). \end{aligned}$$

Agora, tomando a norma  $L^2$  e usando a desigualdade de Young, segue que

$$\|fg\|_{H^s} = \|\Lambda^s(fg)\|_2 \leq c(\|\Lambda^s f\|_2 \|\hat{g}\|_1 + \|\hat{f}\|_1 \|\Lambda^s g\|_2).$$

Por fim, pelo Teorema 12, temos que se  $r > \frac{n}{2}$  então

$$\begin{aligned} \|fg\|_{H^s} &= \|\Lambda^s(fg)\|_2 \leq c_s(\|f\|_{H^s} \|\hat{g}\|_1 + \|\hat{f}\|_1 \|g\|_{H^s}) \\ &\leq c_s(\|f\|_{H^s} \|g\|_{H^r} + \|f\|_{H^r} \|g\|_{H^s}). \end{aligned}$$

Tomando  $r = s$  obtemos o resultado desejado.  $\square$

# Capítulo 3

## Equações Dispersivas

### 3.1 Definições e classificações

Aqui, apresentaremos a definição e algumas classificações das equações diferenciais parciais.

**Definição 13. Equação Diferencial Parcial-EDP:** Uma equação diferencial parcial (EDP) é uma equação matemática que contém uma função desconhecida de duas ou mais variáveis independentes e derivadas parciais desta função com respeito as variáveis independentes. A forma geral de uma EDP em  $n$  variáveis independentes  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  é

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \partial_{x_1} u, \dots, \partial_{x_n} u, \partial_{x_1^2}^2 u, \partial_{x_1 x_n}^2 u, \dots, \partial_{x_n^k}^k u) = 0,$$

onde  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ , em que  $\Omega$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $F$  é uma função dada e  $u = u(x)$  é a função que queremos determinar.

A ordem de uma EDP é dada pela derivada parcial de maior ordem. Ela é dita linear se é de primeiro grau em  $u$  e em todas suas derivadas parciais que ocorrem na equação. Caso contrário, a EDP é dita não linear. A forma geral de uma EDP de primeira ordem é

$$\sum_{j=1}^n a_j(x) D_j u + b(x)u + c(x) = 0, \quad (3.1)$$

onde algum dos coeficientes  $a_j$  não é identicamente nulo.

Para equações de segunda ordem, a forma mais geral de uma EDP linear é

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_i D_j u + \sum_{j=1}^n b_j(x) D_j u + c(x)u + d(x) = 0, \quad (3.2)$$

onde algum dos coeficientes  $a_{ij}$  não é identicamente nulo.

Uma EDP linear é homogênea se o termo que não contém a variável dependente é identicamente nulo. Por exemplo, a equação (3.1) é homogênea se e somente se a função  $d(x)$  é identicamente nula. Note que a função identicamente nula é sempre solução de qualquer EDP linear homogênea.

A parte da equação que contém as derivadas de maior ordem é chamada *parte principal* da EDP e em muitos casos determina as propriedades principais da solução. Por exemplo, a parte principal da equação (3.2) é

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_i D_j u.$$

Dentre as equações não lineares, as que tem parte principal linear são chamadas *semi-lineares*. No caso de duas variáveis independentes, é usual escrever uma EDP semi-linear de segunda ordem na forma

$$a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right). \quad (3.3)$$

Podemos classificar (3.3) da seguinte maneira:

- Elítica se  $b^2 - ac < 0$ .

As equações elíticas descrevem fenômenos em regime permanente, ou seja, aqueles em que as propriedades do fluido são invariantes em cada ponto com o passar do tempo. A equação de Poisson, dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

é um exemplo de equação elítica. No caso em que  $f \equiv 0$ , esta equação é chamada de equação de Laplace. A equação de Poisson está relacionada a fenômenos físicos estacionários, ou seja, que não dependem do tempo.

- Parabólica se  $b^2 - ac = 0$ .

As equações parabólicas descrevem fenômenos difusivos, ou seja, o comportamento de sistemas que estão fora do equilíbrio mas tendem a equilibrar-se. A equação do calor, dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t),$$

onde  $x \in \mathbb{R}, t > 0$  e  $\alpha^2$  é uma constante é um exemplo de equação parabólica.

- Hiperbólica se  $b^2 - ac > 0$ .

Equações hiperbólicas descrevem fenômenos ondulatórios, que podem ser exemplificados como o comportamento de uma onda que se propaga e encontra um obstáculo ou superfície e interage com ele gerando reações específicas, como uma onda se chocando contra as rochas. Em resumo, podem ser entendidos como uma perturbação que pode ou não se propagar infinitamente em um meio qualquer. A equação unidimensional da onda, dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

onde  $x \in \mathbb{R}, t > 0$  e  $c$  é uma constante positiva é um exemplo de equação hiperbólica.

Na próxima seção, apresentaremos uma classificação especial das EDPs que são as dispersivas. Embora existam várias classificações, neste trabalho daremos uma atenção especial à esta. Apresentaremos a definição, alguns exemplos e mostraremos que a KdV é uma equação dispersiva.

## 3.2 Equações Dispersivas

Intuitivamente, uma equação diferencial parcial (EDP) é dispersiva se, quando nenhuma condição inicial de fronteira é imposta, suas soluções de ondas se espalham no espaço à medida que o tempo varia.

Para uma definição mais formal, considere uma EDP linear

$$F(\partial_x, \partial_t)u(x, t) = 0, \quad (3.4)$$

onde  $F$  é polinomial nas derivadas parciais. Procuramos por soluções planas da forma

$$u(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}, \quad (3.5)$$

onde  $A$  é a amplitude, ou seja a altura da onda,  $k$  é o número de ondas e  $\omega$  é a frequência, que indica o número de oscilações que ocorrem numa unidade de tempo. Todas são constantes reais.

Portanto,  $u$  será solução se, e somente se

$$F(ik, i\omega) = 0.$$

Essa relação é chamada relação de dispersão e caracteriza o movimento de uma onda plana. Escrevemos  $\omega$  como uma função real de  $k$ , isto é  $\omega = \omega(k)$ .

Em geral, cada número de ondas  $k$  corresponde a  $m$  frequências, onde  $m$  é a ordem da equação diferencial em relação ao tempo  $t$  e é por isso que (3.5) é chamado de relação e não de função. Para a maioria dos propósitos, é apropriado restringir a atenção aos valores de  $k$  que são reais e, nesse caso,  $\omega$  pode ser real ou complexo, dependendo da EDP.

Suponha que uma EDP admite uma solução (3.5). Então, qualquer crista individual desta onda se move à velocidade dada por

$$V_f(k) = -\frac{\omega}{k}.$$

Esta expressão é chamada *velocidade de fase*.

No entanto, no início do século  $XX$ , percebeu-se que a energia das ondas se propaga a uma velocidade diferente, dada por

$$V_g = \frac{d\omega}{dk}.$$

Esta expressão é chamada *velocidade de grupo*. O significado algébrico dessa expressão é que diferenciamos a relação de dispersão em relação a  $k$ .

Formalmente, dizemos que uma EDP linear é dispersiva se  $\omega(k)$  é uma função real e sua velocidade de grupo é não constante, ou seja  $\omega'(k) \neq 0$ . Uma EDP não linear será dispersiva se sua parte linear for dispersiva. No contexto físico, isso significa que quando o tempo varia, ondas diferentes se dispersam, e como consequência uma única onda se transforma em um trem de ondas.

A relação de dispersão diz que ondas planas com maior número de onda,  $k$ , viaja mais rápido que ondas com número de onda menor. Essa é a razão pela qual há uma "dispersão". Em termos matemáticos, este fenômeno é chamado de ampliação do pacote de ondas.

Por outro lado, diferentemente dos *solitons*, as soluções de ondas de uma EDP podem perder energia à medida que o tempo varia, podendo diminuir amplitude ou velocidade por exemplo, dependendo da natureza da onda. Essa propriedade é chamada *dissipação*, e tende a combater a instabilidade e oscilação. Uma fórmula diferencial será dita *dissipativa* se a parte imaginária de  $w(k)$  for não nula.

Note que uma EDP não pode ser dispersiva e dissipativa ao mesmo tempo pois se a  $\omega(k)$  tiver parte imaginária não nula (condição para que o sistema seja dissipativo), não será uma função real (condição necessária para que o sistema seja dispersivo). No entanto a EDP pode ser não dissipativa e não dispersiva. Por exemplo, no caso em que  $\omega(k)$  for uma constante real a EDP não será dispersiva pois sua velocidade de grupo é constante, e não será dissipativa pois a parte imaginária de  $\omega(k)$  é nula.

A ideia geral é que a dissipação leva ao decaimento de uma forma de onda, enquanto a dispersão leva à sua separação gradual em um trem de ondas.

Um fato que requer atenção é que a análise da velocidade de fase e de grupo depende do problema ser linear e não dispersivo, isto é,  $\omega$  deve ser real quando  $k$  é real.

A seguir, veremos alguns exemplos de EDPs que classificaremos como dispersivas ou não dispersivas.

### 3.3 Exemplos

#### Exemplo 4. *KdV linearizada*

*A equação linear da KdV*

$$u_t + u_{xxx} = 0, \quad t, x \in \mathbb{R} \quad (3.6)$$

*modela a propagação unidirecional de ondas longas de pequena amplitude, ou ondas de águas rasas.*

*Ao substituirmos (3.5) em (3.6), temos:*

$$\begin{aligned} -i\omega A e^{i(kx-\omega t)} + (ik)^3 A e^{i(kx-\omega t)} &= 0 \\ -iA e^{i(kx-\omega t)}(\omega + k^3) &= 0 \\ \omega &= -k^3. \end{aligned}$$

*Daí*

$$V_g = \frac{d\omega}{dk} = -3k^2,$$

*ou seja, a velocidade de grupo não é constante e portanto (3.6) é uma EDP dispersiva. Como a parte imaginária de  $\omega$  é nula, ela é não dissipativa.*

*A figura abaixo, com condição inicial  $3A^2 \operatorname{sech}(5A(x-3))^2 + 3B^2 \operatorname{sech}(5B(x-4))^2$ , mostra o comportamento dispersivo da equação KdV linear em 3 tempos diferentes. No tempo  $t = 0$  temos a onda azul e quando variamos o tempo obtemos o trem de ondas ( $t = 0,0078$  vermelho e  $0,0156$  amarelo).*



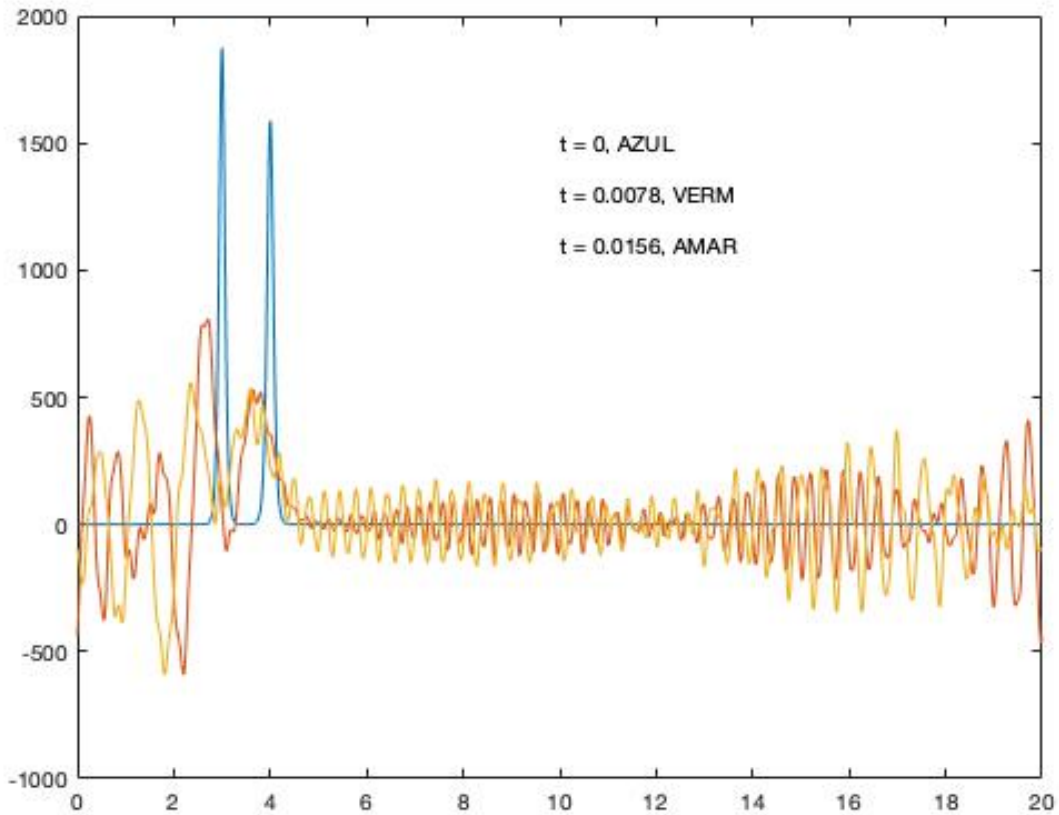


Figura 3.1: KdV linear

**Exemplo 5. Equação do calor**

A equação do calor, dada por

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad (3.7)$$

mede a velocidade de condução da energia térmica no interior de um material, onde  $u(x, t)$  descreve a temperatura do material em uma certa posição  $x$  e tempo  $t > 0$ , e  $\alpha^2$  é uma constante que modela a difusividade térmica.

Para verificar se a equação (3.7) é dispersiva, repetiremos o processo anterior, substituindo (3.5) em (3.7). Temos então:

$$\begin{aligned} -i\omega A e^{i(kx-\omega t)} + \alpha^2 (ik)^2 A e^{i(kx-\omega t)} &= 0 \\ -A e^{i(kx-\omega t)} (i\omega + \alpha^2 (k)^2) &= 0 \\ \omega &= i\alpha^2 k^2. \end{aligned}$$

Note que a parte imaginária de  $\omega$  é não nula, o que implica que esta é uma equação dissipativa mas não é dispersiva, visto que  $\omega(k)$  não é uma função real.

**Exemplo 6. Equação da onda**

A equação da onda unidimensional é dada por

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (3.8)$$

Imagine uma corda presa em uma pontas. Se um lado emite um pulso, a função  $u(x, t)$  diz a posição da onda no tempo  $t$  no ponto  $x$ , e a constante real  $c > 0$  indica a velocidade da onda.

Repetindo o processo anterior, verificamos que

$$\omega = \pm ck.$$

Portanto

$$V_g = \frac{d\omega}{dk} = \pm c,$$

ou seja, a velocidade de grupo é constante e a equação (3.8) não é dispersiva nem dissipativa.

**Exemplo 7. Equação de transporte**

A equação de transporte dada por

$$u_t - cu_x u = 0, \quad x, t \in \mathbb{R}, \quad (3.9)$$

pode ser usada, por exemplo, para medir poluição. Neste caso,  $u$  representa a densidade do poluente na posição  $x$  e tempo  $t$ .

Note que esta equação não pode ser dispersiva, uma vez que sua parte linear, dada por  $u_t$ , não é. Repetindo o processo anterior, vemos que  $\omega(k) = 0$ . Portanto, esta equação não é dispersiva nem dissipativa.

### 3.4 Método das curvas características

No próximo capítulo resolveremos uma EDP dispersiva do tipo Airy. Nossa principal ferramenta será a transformada de Fourier e o método das curvas características.

A ideia do método das características para resolver equações de primeira ordem é obter curvas ao longo das quais a EDP é uma derivada total. Essas curvas são chamadas *curvas características da equação*.

Antes de apresentar esta técnica, daremos algumas informações e definições que serão utilizadas no processo. Ao trabalharmos com equações diferenciais parciais, o espaço das variáveis independentes é multidimensional. Procuramos por soluções em um aberto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  e impomos condições no bordo  $\partial\Omega$  de  $\Omega$ .

Para sistematizar o conceito de condições iniciais para EDPs, consideramos que temos mais de uma variável dependente,  $x$  e  $t$  por exemplo, fixamos uma das variáveis, por exemplo  $t = 0$  e impomos o valor da solução e de suas derivadas parciais em relação à variável fixa como função das outras variáveis. No caso  $n = 2$  e variáveis  $x, t$ , isso significa impor o valor da solução e de suas derivadas ao longo da curva  $t = 0$ . De forma análoga, no caso  $n = 3$  com variáveis  $x, y, t$ , fixar  $t = 0$  significa olhar a solução e suas derivadas, quando for o caso, ao longo da superfície  $t = 0$ . Assim, podemos obter o conceito de *condições iniciais* impondo o valor da solução e de suas derivadas ao longo de uma curva ou superfície inicial. Este problema é denominado *problema de Cauchy* ou *problema de valor inicial* (PVI).

Ao trabalharmos com um PVI, normalmente buscamos informações sobre a existência e unicidade de soluções. Para falar sobre a existência, devemos explicitar a classe de funções onde procuramos solução e em que sentido as condições iniciais são satisfeitas. Caso a solução exista, podemos verificar a validade da unicidade.

Consideremos o seguinte PVI linear:

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) + \partial_x u(x, t) = 0, & x, t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \quad (3.10)$$

Supondo que o problema (3.10) tem solução e que esta é única, podemos definir uma função que a cada condição inicial  $u_0$  em um espaço  $Y$  associa uma única solução  $u$  em um espaço  $X$ , onde  $X$  e  $Y$  são espaços de Banach. Essa função é chamada de *fluxo* e está bem definida pela existência e unicidade de solução.

**Definição 14.** Dizemos que um problema de Cauchy linear é localmente bem posto no sentido de Hadamard em  $H^s$  se:

- *i) Dado  $u_0 \in H^s$  existe  $T > 0$  e uma única solução  $u$  de (3.10) tal que  $u$  pertence ao espaço das funções contínuas definidas de  $[-T, T]$  em  $H^s$  denotado por  $C([-T, T], H^s)$  e  $u(x, 0) = u_0$ .*
- *ii) O fluxo é contínuo, ou seja, para cada  $T_0 \in [0, T]$  a função*

$$u_0 \in H^s \mapsto C([-T_0, T_0], H^s)$$

*é contínua. Dizemos que  $u$  é a solução associada à condição inicial  $u_0$ , isto é, a solução depende continuamente da condição inicial.*

Um problema de Cauchy é globalmente bem posto em  $H^s$  se podemos escolher  $T = +\infty$ .

Agora, voltaremos ao método das características. Para introduzir esta técnica, usaremos o seguinte PVI de primeira ordem

$$\begin{cases} a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = c(x, y) \\ u(\sigma(t), \rho(t)) = f(t), t \in I \end{cases} \quad (3.11)$$

onde  $I$  é um intervalo aberto finito ou infinito. O leitor interessado em aprender curvas características com mais detalhes pode consultar [Io].

Em (3.11),  $(\sigma, \rho)$  é a parametrização da curva inicial plana  $\gamma$ . Esta curva, contida numa região aberta de  $\mathbb{R}^2$  deve ser coberta por curvas características planas que intersectam a curva  $\gamma$  em exatamente um ponto.

Se  $C$  é uma curva característica plana parametrizada por  $(\alpha, \beta)$  então a derivada total de  $u$  ao longo de  $C$  é, pela regra da cadeia

$$\frac{d}{ds}[u(\alpha(s), \beta(s))] = \alpha'(s)u_x(\alpha(s), \beta(s)) + \beta'(s)u_y(\alpha(s), \beta(s)). \quad (3.12)$$

Por outro lado a equação (3.11) parametrizada tem a seguinte forma

$$a(\alpha(s), \beta(s))u_x(\alpha(s), \beta(s)) + b(\alpha(s), \beta(s))u_y(\alpha(s), \beta(s)) = c(\alpha(s), \beta(s))$$

Comparando as duas últimas equações vem

$$\begin{cases} \alpha'(s) = a(\alpha(s), \beta(s)) \\ \beta'(s) = b(\alpha(s), \beta(s)) \end{cases}$$

Assim, nossa equação pode ser reescrita com uma derivada total do lado esquerdo e obtemos então

$$\frac{d}{ds}[u(\alpha(s), \beta(s))] = c(\alpha(s), \beta(s)).$$

Agora basta integrar!

Essa discussão pode ser formalizada no seguinte teorema:

**Teorema 14.** *Sejam  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$  um intervalo aberto,  $\gamma$  uma curva suave em  $\Omega$  parametrizada por  $\gamma(t) = (\sigma(t), \rho(t))$ ,  $t \in I$ ,  $f \in C^1(I)$  e  $a, b, c \in C^1(\Omega)$ . Suponha que  $a(x, y)^2 + b(x, y)^2 \neq 0 \forall (x, y) \in \Omega$  e*

$$\begin{vmatrix} a(\sigma(t), \rho(t)) & b(\sigma(t), \rho(t)) \\ \sigma'(t) & \rho'(t) \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall t \in I.$$

Então, o problema (3.11) tem uma única solução de classe  $C^1$  em uma vizinhança da curva  $\gamma$  em  $\Omega$ .

Apresentamos a seguir um exemplo onde o método das características é utilizado.

**Exemplo 8.** *Considere o problema*

$$\begin{cases} -y\partial_x u + x\partial_y u = 4xy \\ u(x, 0) = f(x), \quad x > 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

Vamos começar calculando as curvas características planas para a EDP em (3.13). Procuramos então curvas  $s \mapsto (\alpha(s), \beta(s))$  satisfazendo

$$\begin{cases} \alpha'(s) = -\beta'(s) \\ \beta'(s) = \alpha'(s). \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por  $\alpha(s)$ , a segunda por  $\beta(s)$  e somando, obtemos

$$\alpha(s)\alpha'(s) + \beta(s)\beta'(s) = 0 \quad (3.14)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds}[\alpha(s)^2 + \beta(s)^2] = 0 \quad (3.15)$$

$$\Rightarrow \alpha(s)^2 + \beta(s)^2 = \text{constante}. \quad (3.16)$$

Portanto, as curvas características planas para a EDP em (3.13) são círculos centrados na origem. Como a curva inicial é o semi-eixo  $y = 0, x > 0$ , a curva inicial intersecta ortogonalmente cada característica plana em exatamente um ponto e todos os pontos em  $\mathbb{R} - \{0\}$  estão em alguma dessas características.

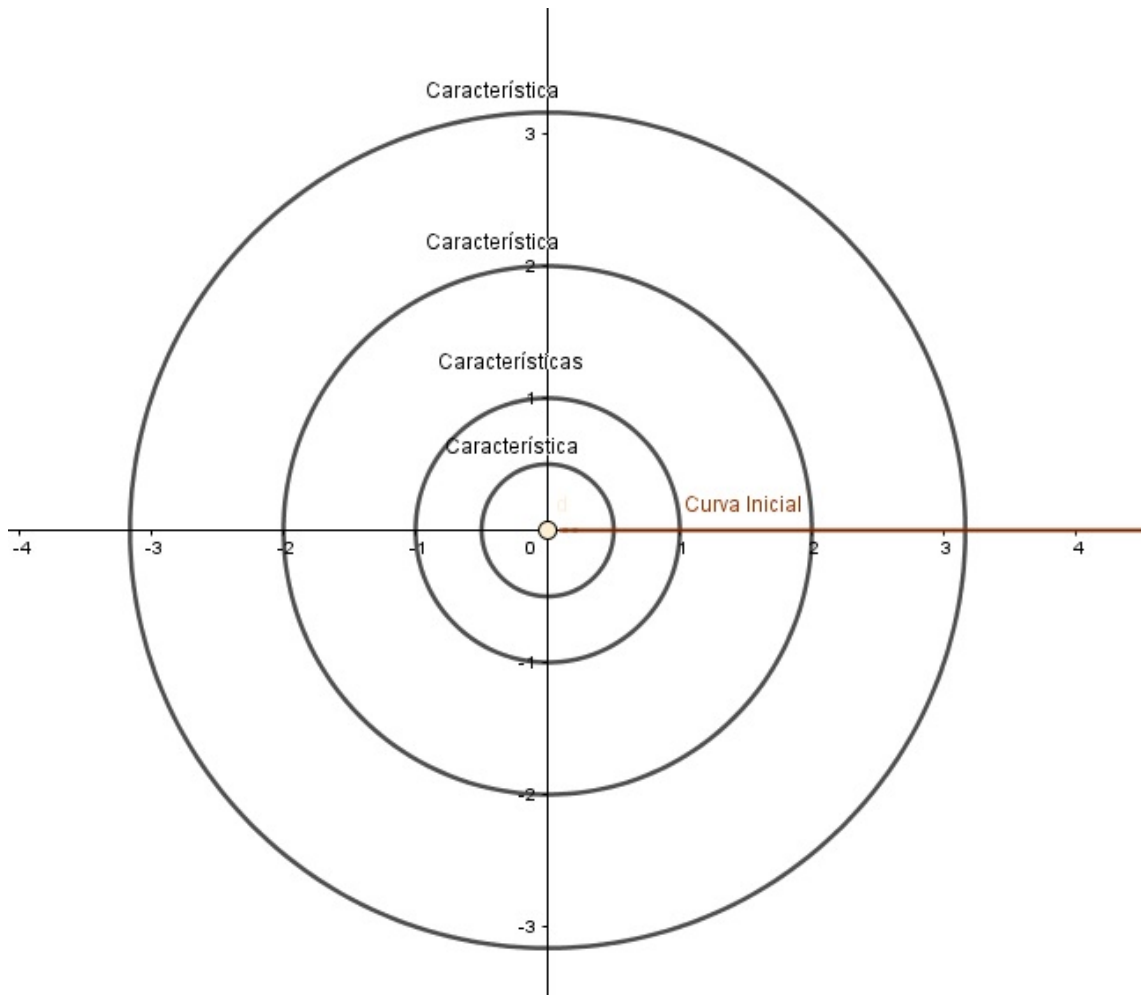


Figura 3.2: Curvas características

Ao longo do círculo de raio  $r$  a EDP fica

$$\frac{d}{d\theta}[u(r\cos(\theta)r\sin(\theta))] = 4r^2\sin(\theta)\cos(\theta).$$

Usando coordenadas polares para integrar a EDP, obtemos

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^{\theta(x,y)} 4r^2\sin(\theta)\cos(\theta)d\theta + u(r, 0) \\ &= 2r^2\sin^2(\theta) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\theta(x,y)} + f(r) \\ &= 2y^2 + f(\sqrt{x^2 + y^2}). \end{aligned}$$

Portanto, a solução do problema (3.13) é

$$u(x, y) = 2y^2 + f(\sqrt{x^2 + y^2}), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}.$$

Note que na origem, como  $\sqrt{x^2 + y^2}$  não é diferenciável, a diferenciabilidade de  $u$  depende de  $f$ .

# Capítulo 4

## Boa Colocação

### 4.1 KdV linear

Nesta seção trabalharemos com o seguinte problema de Cauchy envolvendo a KdV linear

$$\begin{cases} \partial_t v(x, t) + \partial_x^3 v(x, t) = 0, & x, t \in \mathbb{R} \\ v(x, 0) = v_0(x). \end{cases} \quad (4.1)$$

Provaremos a boa colocação no sentido de Hadamard em espaços de Sobolev  $H^s$  para  $s > \frac{7}{2}$ , ou seja, que dada uma condição inicial  $v_0 \in H^s$  ( $s > \frac{7}{2}$ ), existe uma única solução  $v \in C(\mathbb{R}, H^s)$  de (4.1) e que o fluxo é contínuo.

Mostraremos inicialmente a existência de solução.

Considere o problema (4.1) com  $v_0 \in H^s$ . Aplicando a transformada de Fourier em relação a  $x$  e utilizando a linearidade, obtemos

$$\begin{cases} \partial_t \hat{v}(\xi, t) + (i\xi)^3 \hat{v}(\xi, t) = 0 & \xi \in \mathbb{R} \\ \hat{v}(\xi, 0) = \hat{v}_0(\xi). \end{cases} \quad (4.2)$$

Multiplicando a primeira equação em (4.2) pelo fator integrante  $e^{(i\xi)^3 t}$ , obtemos

$$\partial_t \hat{v}(\xi, t) e^{(i\xi)^3 t} + (i\xi)^3 \hat{v}(\xi, t) e^{(i\xi)^3 t} = 0,$$

o que implica

$$\partial_t (\hat{v}(\xi, t) e^{(i\xi)^3 t}) = 0.$$

Integrando em ambos os membros em relação a  $t$ , obtemos

$$\hat{v}(\xi, t) e^{(i\xi)^3 t} = \hat{v}(\xi, 0) = \hat{v}_0(\xi)$$

e portanto



$$\hat{v}(\xi, t) = \hat{v}_0(\xi)e^{i\xi^3 t}. \quad (4.3)$$

Agora, para recuperar a função original  $v$ , aplicamos a transformada inversa de Fourier em (4.3) e obtemos

$$v(x, t) = (\hat{v}_0(\xi)e^{i\xi^3 t})^\vee. \quad (4.4)$$

Concluimos então que o problema (4.1) tem solução. Mostraremos agora que (4.4) é derivável em  $t$  no sentido usual do cálculo.

Temos de (4.4) que

$$v(x, t) = c \int_{\mathbb{R}} \hat{v}_0(\xi)e^{i\xi^3 t} e^{ix\xi} d\xi$$

onde  $c$  é uma constante. Pelo Teorema da derivação sob o sinal da integral (Teorema 6)  $v$  é derivável em  $t$ . Como consequência, temos que (4.4) é contínua  $t$ , ou seja,

$$\|v(x, t) - v(x, t_0)\|_{H^s} \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow t_0.$$

Agora provaremos que a solução é única.

Multiplicando a primeira equação de (4.1) por  $v$  e integrando em relação a  $x$  obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \partial_t v(x, t)v(x, t)dx + \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x^3 v(x, t)v(x, t)dx = 0.$$

Integrando por partes

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v^2(x, t)}{2} dx + \lim_{N \rightarrow \infty} \partial_x^2 v(N, t)v(N, t) - \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \partial_x^2 v(x, t)\partial_x v(x, t)dx = 0.$$

Do Teorema 12, como  $s > \frac{7}{2}$ , temos que  $v$  decai no infinito e portanto esta última equação é equivalente a

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v^2(x, t)}{2} dx - \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \frac{d}{dx} \frac{1}{2} (\partial_x v(x, t))^2 dx = 0.$$

de onde obtemos

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v^2(x, t)}{2} dx - \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ (\partial_x v(N, t))^2 - (\partial_x v(-N, t))^2 \right] = 0.$$

e portanto

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v^2(x, t)}{2} dx = 0. \quad (4.5)$$

Integrando (4.5) de 0 à  $t$  obtemos

$$\int_0^t \left[ \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v^2(x, t)}{2} dx \right] dt = 0$$

que pelo Teorema Fundamental do Cálculo é equivalente a

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} v^2(x, t) dx - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} v^2(x, 0) dx = 0$$

de onde concluímos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} v^2(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} v_0^2(x) dx \quad \forall t, \quad (4.6)$$

ou seja, a massa é conservada.

Suponhamos agora que o problema (4.1) possua uma outra solução  $u \in H^s$ ,  $s > \frac{7}{2}$ . Temos então que  $u(x, 0) = v_0(x)$ .

Seja  $w = v - u$ . Como estamos trabalhando com uma equação linear, repetindo o processo anterior temos de (4.6) que

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} w^2(x, t) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [v^2(x, 0) - u^2(x, 0)] dx$$

e como  $u$  também é solução

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} w^2(x, t) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [v_0^2(x) - v_0^2(x)] dx$$

ou seja

$$\int_{-\infty}^{\infty} w^2(x, t) dx = 0.$$

Portanto

$$0 = w = v - u.$$

Logo,  $v = u$  e a solução é única.

Provaremos agora a continuidade do fluxo. Já mostramos, via transformada de Fourier, que dada uma condição inicial  $v_0 \in H^s$ , existe uma única solução  $v(x, t) \in C(\mathbb{R}, H^s)$  de (4.1). Portanto, o fluxo

$$v_0 \in H^s \mapsto v \in C(\mathbb{R}, H^s)$$

está bem definido.

Agora, seja  $h$  solução de (4.1) com condição inicial  $h_0$ . Temos então, pelo teorema de Plancherel que

$$\|h(t)\|_{H^s} = \left\| \left[ (1 + |x|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{h} \right]^\vee \right\|_{L^2} = \left\| \left( (1 + |x|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{h} \right) \right\|_{L^2}. \quad (4.7)$$

Como  $h$  é solução, obtemos, por (4.4), que (4.7) é igual a

$$\begin{aligned} \left\| (1 + |x|^2)^{\frac{s}{2}} \left( (e^{i\xi^3 t} \hat{h}_0)^\vee \right)^\wedge \right\|_{L^2} &= \left\| (1 + |x|^2)^{\frac{s}{2}} e^{i\xi^3 t} \hat{h}_0 \right\|_{L^2} \\ &= \left\| (1 + |x|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{h}_0 \right\|_{L^2} \\ &= \|h_0\|_{H^s}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\sup_t \|h(t)\|_{H^s} = \|h_0\|_{H^s}$$

ou seja

$$\|h_0\|_{H^s} = \|h(t)\|_{C[\mathbb{R}, H^s]}. \quad (4.8)$$

Mostraremos que, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que, para  $v_0$  fixado, se  $\|v_0 - u_0\|_{H^s} < \delta$  então  $\|v - u\|_{C[[0, \infty), H^s]} < \epsilon$ .

Fixemos então  $v_0 \in H^s$ . Sabemos que existe única solução  $v$  de (4.1) com condição inicial  $v_0$ . Tome  $u_0 \in H^s$  de forma que  $\|u_0 - v_0\| < \delta$ . Para este  $u_0$  existe também única solução  $u$  com condição inicial  $u_0$ . Devemos mostrar então que  $\|u - v\|_{C[[0, \infty), H^s]} < \epsilon$ . Defina  $w_0 := u_0 - v_0 \in H^s$ , pois  $H^s$  é espaço vetorial. Assim, existe única solução  $w$  com condição inicial  $w_0$ . Por (4.8), temos que  $\|w_0\|_H^s = \|w\|_{C[[0, \infty), H^s]}$ . Então, tomando  $\epsilon = \delta$  temos o desejado. Note que pela unicidade da solução  $w = u - v$ . Com isso, temos a continuidade.

## 4.2 Equação linear do tipo Airy

Nesta seção trabalharemos o seguinte problema de Cauchy envolvendo uma equação linear tipo Airy:

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) + x \partial_x^3 u(x, t) = 0, & x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x) \in H^s. \end{cases} \quad (4.9)$$

Este problema foi estudado por Walter Craig e Jonathan Goodman no artigo *Linear Dispersive Equations of Airy Type\** (ver [CG]) e envolve uma variação da KdV linearizada com coeficiente de dispersão variável,  $a(x) = x$ , que é um caso especial de problema onde o coeficiente de dispersão pode desaparecer, (quando  $x = 0$ ). Para provar os resultados de boa colocação, eles utilizaram variações da estimativa de energia padrão, resultados estes que só são possíveis se o coeficiente de dispersão  $a(x)$  mudar de sinal no máximo uma vez e em qualquer outro caso for diferente de zero, que é o caso de  $a(x) = x$ .

A figura abaixo ilustra o comportamento dispersivo de (4.9), com condição inicial  $3A^2 \operatorname{sech}(5A(x-3))^2 + 3B^2 \operatorname{sech}(5B(x-4))^2$ , que inicia com duas ondas ( em azul) no tempo  $t = 0$  e se transforma em um trem de ondas (em vermelho) no tempo finito  $t = 0.0078$ .

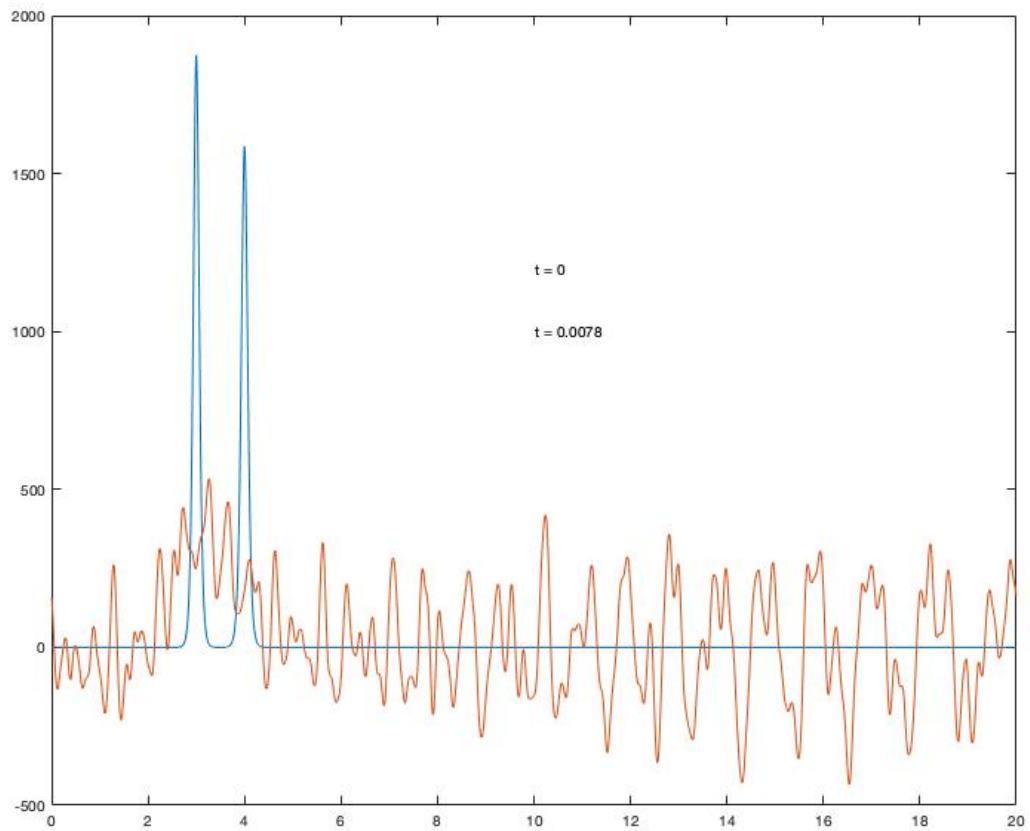
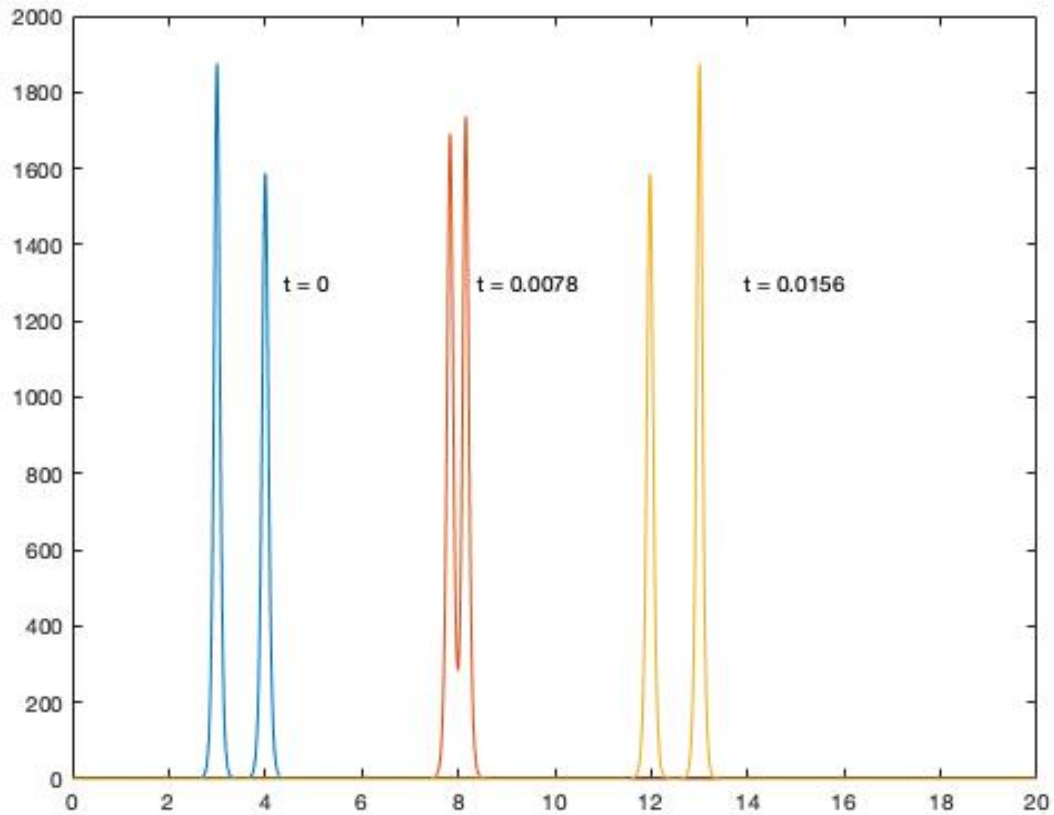


Figura 4.1: Dispersiva

Para ilustrar, apresentamos a seguir uma outra figura, condição  $3A^2 \operatorname{sech}(5A(x-3))^2 + 3B^2 \operatorname{sech}(5B(x-4))^2$ , que descreve o comportamento de um par de *sólitons*.

Figura 4.2: *Sólitons*

Na figura (4.2), podemos ver um par de *sólitons* (azul), sendo que o maior inicia no tempo  $t = 0$  com condição inicial atrás do menor. No tempo  $t = 0.0078$  o *sóliton* maior alcançou o menor e estão interagindo (vermelho). Após decorrer um pouco mais de tempo, podemos ver que o *sóliton* maior ultrapassou o menor e segue intacto (amarelo).

Mostraremos agora a boa colocação de (4.9) em espaços de Sobolev para  $\frac{1}{2} < s \leq \frac{3}{2}$ .

### 4.2.1 Solução do problema de Cauchy

Usando transformada de Fourier e o método das características ([Io]) encontraremos um candidato à solução do problema (4.9). Depois provaremos a continuidade do fluxo.

Considerando o PVI (4.9), aplicando a transformada de Fourier em relação a  $x$  e usando as Proposições 4 e 5 obtemos

$$\begin{cases} \partial_t \hat{u}(\xi, t) + 3\xi^2 \hat{u}(\xi, t) + \xi^3 \partial_\xi \hat{u}(\xi, t) = 0 \\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi) \end{cases}. \quad (4.10)$$

Assim, a EDP de primeira ordem que queremos resolver é

$$\partial_t \hat{u}(\xi, t) + \xi^3 \partial_\xi \hat{u}(\xi, t) = -3\xi^2 \hat{u}(\xi, t). \quad (4.11)$$

Para tanto, aplicaremos o Teorema 14.

Inicialmente, encontraremos as curvas características planas.

De (4.10), vemos que a curva inicial  $\gamma$  é o eixo  $\xi$ . Parametrizando  $\gamma$  por  $(\sigma(r), \rho(r)) = (r, 0)$ ,  $r \in \mathbb{R}$  podemos reescrever (4.10) como

$$\begin{cases} \partial_t \hat{u}(\xi, t) + \xi^3 \partial_\xi \hat{u}(\xi, t) = -3\xi^2 \hat{u}(\xi, t) \\ \hat{u}(\sigma(r), \rho(r)) = \hat{f}(r). \end{cases}$$

Se  $C$  é uma curva característica plana parametrizada por  $(\alpha(s), \beta(s))$ , então a derivada total de  $\hat{u}$  ao longo de  $C$  é, pela regra da cadeia

$$\frac{d}{ds} [\hat{u}(\alpha(s), \beta(s))] = \alpha'(s) \partial_\xi \hat{u}(\alpha(s), \beta(s)) + \beta'(s) \partial_t \hat{u}(\alpha(s), \beta(s)). \quad (4.12)$$

Por outro lado, a EDP (4.11) ao longo de  $C$  fica

$$\partial_t \hat{u}(\alpha(s), \beta(s)) + \alpha(s)^3 \partial_\xi \hat{u}(\alpha(s), \beta(s)) = -3\xi^2 \alpha(s)^2 \hat{u}(\alpha(s), \beta(s)). \quad (4.13)$$

Portanto, se queremos que o lado esquerdo de (4.13) seja igual a qualquer uma das expressões em (4.12), devemos ter

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= \alpha(s)^3 \\ \beta'(s) &= 1. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Então, as curvas características planas da equação (4.11) são as curvas suaves que admitem parametrização  $(\alpha(s), \beta(s))$  satisfazendo (4.14).

Assim, temos

$$\beta(s) = s + \text{constantes}$$

e

$$\int_0^s \frac{\alpha'(z)}{\alpha^3(z)} dz = \int_0^s dz \Rightarrow \frac{-1}{2\alpha(s)^2} + \frac{1}{2\alpha(0)^2} = s = \beta(s) + \text{constantes},$$

ou seja,  $\beta(s) = \frac{-1}{2\alpha(s)^2}$  e portanto, as curvas características planas são da forma

$$t = \frac{-1}{\xi^2} + \text{constantes},$$

ou seja, a curva plana inicial  $\gamma$  é o eixo  $Ox$ . Note que as curvas características intersectam  $\gamma$  apenas uma vez, como podemos ver na imagem abaixo.

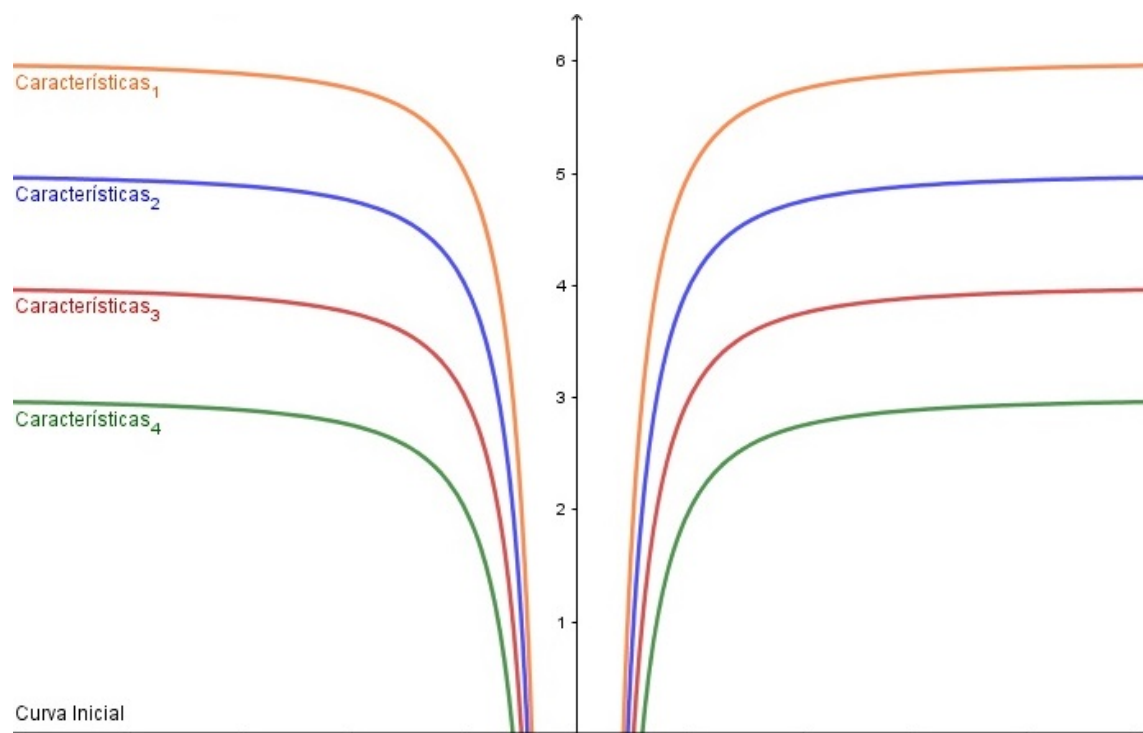


Figura 4.3: Curvas características

Agora, vamos verificar as hipóteses do Teorema 5.

Denotando a curva característica plana que passa por  $(\sigma(r), \rho(r))$  por



$(\xi(s, r), t(s, r))$  e seguindo a notação da seção 3.4 temos

$$\begin{aligned}\xi_s(s, r) &= a(\xi(s, r), t(s, r)) = \xi^3 \\ t_s(s, r) &= b(\xi(s, r), t(s, r)) = 1 \\ \xi(0, r) &= \sigma(r) = r \\ t(0, r) &= \rho(r) = 0.\end{aligned}$$

Portanto

$$\det \begin{pmatrix} \xi_s(0, r) & t_s(0, r) \\ \sigma'(r) & \rho'(r) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} r^3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$$

Então a transformação  $(r, s) \mapsto (\xi(r, s), t(r, s))$  é localmente injetora, o que nos permite fazer a mudança de variáveis

$$v(s, r) = \hat{u}(\xi, t).$$

Pela regra da cadeia, obtemos

$$\partial_s v(s, r) = \partial_\xi \hat{u}(\xi(s, r), t(s, r)) \partial_s \xi(s, r) + \partial_t \hat{u}(\xi(s, r), t(s, r)) \partial_s t(s, r). \quad (4.15)$$

Note que tomando  $\partial_s \xi(s, r) = \xi^3(s, r)$  e  $\partial_s t(s, r) = 1$  e comparando com (4.11) e (4.15), obtemos

$$\xi^2(s, r) = \frac{\partial_s \xi(s, r)}{\xi(s, r)} \quad (4.16)$$

e

$$\partial_s v(s, r) = -3\xi^2(s, r)v(s, r). \quad (4.17)$$

Além disso, a condição inicial de (4.11) satisfaz

$$v(0, r) = \hat{f}(r).$$

Então, o PVI a ser resolvido é

$$\begin{cases} \partial_s v(s, r) = -3\xi^2(s, r)v(s, r) \\ v(0, r) = \hat{f}(r) \end{cases} \quad (4.18)$$

o que implica, por (4.16) que

$$\frac{\partial_s v(s, r)}{v(s, r)} = -3\xi^2(s, r) = -3 \frac{\partial_s \xi(s, r)}{\xi(s, r)}.$$

Para cada  $r$  fixo, (4.18) é um problema de valor inicial cuja solução é obtida integrando de  $s = 0$  a  $s$ .

Assim

$$\int_0^s \frac{\partial_s v(z, r)}{v(z, r)} dz = - \int_0^s 3 \frac{\partial_s \xi(z, r)}{\xi(z, r)} dz.$$

e então

$$\ln(v(s, r)) - \ln(v(0, r)) = -3[\ln(\xi(s, r)) - \ln(\xi(0, r))]$$

de onde obtemos

$$\ln\left(\frac{v(s, r)}{\hat{f}(r)}\right) = \ln\left(\frac{\xi(s, r)}{\xi(0, r)}\right)^{-3}$$

e conseqüentemente

$$\frac{v(s, r)}{\hat{f}(r)} = \left(\frac{\xi(s, r)}{\xi(0, r)}\right)^{-3},$$

que implica

$$v(s, r) = \hat{f}(r) \left(\frac{\xi(s, r)}{\xi(0, r)}\right)^{-3}. \quad (4.19)$$

Voltaremos agora às variáveis originais.

Como havíamos tomado  $\partial_s \xi(s, r) = \xi^3(s, r)$  e  $\partial_s t(s, r) = 1$ , temos que

$$\partial_s t(s, r) = 1 \Rightarrow t(s, r) = s + c_1(r),$$

onde  $c_1(r)$  é uma constante (em relação a  $s$ ) que depende de  $r$ . Como  $t(0, r) = 0$ , temos que

$$t(r, s) = s. \quad (4.20)$$

Por outro lado, como  $\partial_r \xi(s, r) = \xi^3(s, r)$ , temos que  $\frac{\partial_r \xi(s, r)}{\xi^3(s, r)} = 1$ .

Integrando, de 0 a  $s$  obtemos

$$\int_0^s \frac{\partial_s \xi(z, r)}{\xi^3(z, r)} dz = \int_0^s dz$$

e daí

$$-\frac{\xi^{-2}(s, r)}{2} + \frac{\xi^{-2}(0, r)}{2} = s = t(s, r)$$

que é equivalente a

$$\frac{-1}{2\xi^2(s, r)} + \frac{1}{2\xi^2(0, r)} = t(s, r).$$

Usando o fato de  $\xi(0, r) = r$ , obtemos

$$\frac{-1}{2\xi^2(s, r)} + \frac{1}{2r^2} = t(s, r).$$

De onde segue que

$$s = \frac{|\xi(s, r)|}{[2t(s, r)\xi^2(s, r) + 1]^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.21)$$

Note que da última equação temos também que

$$\frac{\xi(s, r)}{s} = [1 + 2t(s, r)\xi^2(s, r)]^{\frac{1}{2}}.$$

Substituindo (4.21) em (4.19), obtemos

$$v(s, r) = \hat{f}\left(\xi(s, r)[2t(s, r)\xi^2(s, r) + 1]^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(\frac{\xi(s, r)}{s}\right)^{-3}.$$

Temos portanto que

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1 + 2t\xi^2}}\right) \cdot [1 + 2t\xi^2]^{-\frac{3}{2}}. \quad (4.22)$$

Aplicando a transformada inversa de Fourier, obtemos a solução desejada que é expressa por

$$u(x, t) = \left(\hat{f}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1 + 2t\xi^2}}\right) \cdot [1 + 2t\xi^2]^{-\frac{3}{2}}\right)^{\vee}(x). \quad (4.23)$$

De (4.23) temos a existência da solução, a qual mostraremos agora ser contínua em  $t$ .

Para provar que  $u$  é contínua em  $t$  é suficiente mostrar que

$$\|u(x, t) - u(x_0, t)\|_{H^s} \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow t_0.$$

Seja então

$$A = \left\| (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} (u(\xi, t) - u(\xi, t_0)) \wedge \right\|_{L^2}.$$

Utilizando a linearidade da transformada de Fourier obtemos

$$A = \left\| (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \left[ \hat{f} \left( \frac{\xi}{\sqrt{1 + 2t\xi^2}} \right) (1 + 2t\xi^2)^{-\frac{3}{2}} - \hat{f} \left( \frac{\xi}{\sqrt{1 + 2t_0\xi^2}} \right) (1 + 2t_0\xi^2)^{-\frac{3}{2}} \right] \right\|_{L^2}.$$

Passando o limite, com  $t \rightarrow t_0$  vem que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} A = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n 0 = 0.$$

como queríamos.

Logo, (4.23) é contínua em  $t$ .

Mostraremos agora que a solução é única.

Multiplicando a primeira equação de (4.23) por  $u$  e integrando em relação a  $x$  obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \partial_t u(x, t) u(x, t) dx + \int_{-\infty}^{\infty} x \partial_x^3 u(x, t) u(x, t) dx = 0.$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^2(x, t)}{2} + \int_{-\infty}^{\infty} x \partial_x^3 u(x, t) u(x, t) dx = 0. \quad (4.24)$$

Vamos trabalhar separadamente com o termo

$$A := \int_{-\infty}^{\infty} x \partial_x^3 u(x, t) u(x, t) dx.$$

Integrando por partes obtemos

$$A = xu(x, t) \partial_x^2 u(x, t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x^2 u(x, t) [u(x, t) + x \partial_x u(x, t)] dx$$

e como  $s > \frac{1}{2}$ , temos pelo Teorema 12 que

$$A = - \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) \partial_x^2 u(x, t) dx - \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x^2 u(x, t) x \partial_x u(x, t) dx.$$

Integrando por partes o termo

$$B := - \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) \partial_x^2 u(x, t) dx$$

vem que

$$A = -u(x, t)\partial_x u(x, t)\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} (\partial_x u(x, t))^2 dx - \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x^2 u(x, t)x\partial_x u(x, t)dx.$$

Novamente usando que  $u$  decai no infinito concluimos que

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} (\partial_x u(x, t))^2 dx - \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x^2 u(x, t)x\partial_x u(x, t)dx. \quad (4.25)$$

Seja

$$J = - \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x^2 u(x, t)x\partial_x u(x, t)dx.$$

Integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned} J &= x\partial_x^2 u(x, t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x u(x, t)[\partial_x u(x, t) + x\partial_x^2 u(x, t)]dx \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} (\partial_x u(x, t))^2 dx - J \end{aligned}$$

de onde segue que

$$2J = - \int_{-\infty}^{\infty} (\partial_x u(x, t))^2 dx.$$

Portanto

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x^2 u(x, t)x\partial_x u(x, t)dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\partial_x u(x, t))^2 dx. \quad (4.26)$$

Substituindo (4.26) em (4.25), vem que

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\partial_x^3 u(x, t)u(x, t)dx = \frac{3}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\partial_x u(x, t))^2 dx.$$

De (4.24) obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \partial_t u(x, t)dx = -\frac{3}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\partial_x u(x, t))^2 dx$$

ou seja

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^2(x, t)}{2} dx \leq 0$$

e portanto a função

$$g(t) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^2(x, t)}{2} dx \text{ é decrescente.}$$

Por conseguinte

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^2(x, t) dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} u^2(x, 0) dx \quad \forall t \geq 0,$$

ou equivalentemente

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^2(x, t) dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2 dx. \quad (4.27)$$

Suponhamos agora que existam duas soluções  $u$  e  $v$  de (4.9). D a linearidade da equação temos que  $w = u - v$  também é solução de (4.9). De (4.27) segue que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} w^2(x, t) dx &\leq \int_{-\infty}^{\infty} [u^2(x, 0) - v^2(x, 0)] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [f(x)^2 - f(x)^2] dx = 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$0 = w(x, t) = u(x, t) - v(x, t)$$

e consequentemente  $u = v$ , como queríamos.

Logo, a solução é única.

Por fim mostraremos a continuidade do fluxo

$$f \in H^s \longmapsto \in C([0, t], H^s), \quad \frac{1}{2} < s \leq \frac{3}{2}.$$

A linearidade da equação implica que para obter a continuidade do fluxo em espaços de Sobolev,  $\frac{1}{2} < s \leq \frac{3}{2}$  é suficiente provar a desigualdade

$$\|u\|_{H^s} \leq C_s \|f\|_{H^s}, \quad (4.28)$$

onde  $C_s$  é uma constante positiva que depende apenas do índice  $s$ .

### 4.2.2 Boa colocação em espaços de Sobolev : $\frac{1}{2} < s \leq \frac{3}{2}$

Por definição temos

$$\|u(\cdot, t)\|_{H^s}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n |(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi.$$

Utilizando a expressão (4.22) vem que

$$\|u(\cdot, t)\|_{H^s}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n \frac{|1 + |\xi|^2|^s}{|1 + 2t\xi^2|^{-3}} \left| \hat{f}\left(\frac{\xi}{1 + 2t\xi^2}\right) \right|^2 d\xi. \quad (4.29)$$

Para provar (4.28) é suficiente provar a seguinte desigualdade

$$\int_{-n}^n \frac{|1 + |\xi|^2|^s}{|1 + 2t\xi^2|^{-3}} \left| \hat{f}\left(\frac{\xi}{1 + 2t\xi^2}\right) \right|^2 d\xi \leq C_s \int_{-n}^n |(1 + |\xi|^2)|^s |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi. \quad (4.30)$$

Podemos reescrever o lado esquerdo de (4.30) como

$$I := \int_{-n}^n \frac{(1 + |\xi|^2)^s}{(1 + 2t\xi^2)^{\frac{3}{2}}} \left| \hat{f}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1 + 2t\xi^2}}\right) \right|^2 (1 + 2t\xi^2)^{-\frac{3}{2}} d\xi. \quad (4.31)$$

Pela Proposição 1, como  $s > 0$ , existe uma constante positiva  $M_s$  (que depende apenas de  $s$ ) tal que

$$\begin{aligned} I &= \int_{-n}^n \frac{(1 + |\xi|^2)^s}{(1 + 2t\xi^2)^{\frac{3}{2}}} \left| \hat{f}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1 + 2t\xi^2}}\right) \right|^2 (1 + 2t\xi^2)^{-\frac{3}{2}} d\xi \\ &\leq \int_{-n}^n \frac{M_s}{(1 + 2t\xi^2)^{\frac{3}{2}}} \left| \hat{f}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1 + 2t\xi^2}}\right) \right|^2 (1 + 2t\xi^2)^{-\frac{3}{2}} d\xi \\ &\quad + \int_{-n}^n \frac{M_s \xi^{2s}}{(1 + 2t\xi^2)^{\frac{3}{2}}} \left| \hat{f}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1 + 2t\xi^2}}\right) \right|^2 (1 + 2t\xi^2)^{-\frac{3}{2}} d\xi. \end{aligned}$$

Como  $(1 + 2t\xi^2)^{-\frac{3}{2}} \geq 1$ , pois  $t \geq 0$ , podemos majorar o lado direito da última inequação por

$$\begin{aligned} &\int_{-n}^n \left| \hat{f}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1 + 2t\xi^2}}\right) \right|^2 (1 + 2t\xi^2)^{-\frac{3}{2}} d\xi \\ &+ \int_{-n}^n \frac{M_s \xi^{2s}}{(1 + 2t\xi^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\xi}{\sqrt{1 + 2t\xi^2}}\right)^{2s} \left(\frac{\sqrt{1 + 2t\xi^2}}{\xi}\right)^{2s} \left| \hat{f}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1 + 2t\xi^2}}\right) \right|^2 (1 + 2t\xi^2)^{-\frac{3}{2}} d\xi \end{aligned}$$

obtendo

$$I \leq M_s \int_{-n}^n \left| \hat{f} \left( \frac{\xi}{\sqrt{1+2t\xi^2}} \right) \right|^2 (1+2t\xi^2)^{-\frac{3}{2}} d\xi \\ + \int_{-n}^n \frac{M_s}{(1+2t\xi^2)^{\frac{3}{2}-s}} \left( \frac{\xi}{\sqrt{1+2t\xi^2}} \right)^{2s} \left| \hat{f} \left( \frac{\xi}{\sqrt{1+2t\xi^2}} \right) \right|^2 (1+2t\xi^2)^{-\frac{3}{2}} d\xi.$$

Usando a hipótese  $s \leq \frac{3}{2}$  vem que

$$I \leq M_s \int_{-n}^n \left| \hat{f} \left( \frac{\xi}{\sqrt{1+2t\xi^2}} \right) \right|^2 (1+2t\xi^2)^{-\frac{3}{2}} d\xi \\ + M_s \int_{-n}^n \left( \frac{\xi}{\sqrt{1+2t\xi^2}} \right)^{2s} \left| \hat{f} \left( \frac{\xi}{\sqrt{1+2t\xi^2}} \right) \right|^2 (1+2t\xi^2)^{-\frac{3}{2}} d\xi.$$

Como  $f \in H^s$ , temos que  $\left( \frac{\xi}{\sqrt{1+2t\xi^2}} \right)^{2s} |\hat{f}|^2 \in L^1$ . Além disso,  $\sqrt{1+2t\xi^2}$

é injetora e sua inversa  $(1+2t\xi^2)^{-\frac{3}{2}}$  é contínua no intervalo limitado  $(-n, n)$ . Podemos então utilizar o Teorema da mudança de variáveis (Teorema 5). Considerando

$$y = y(\xi) = \frac{\xi}{\sqrt{1+2t\xi^2}}$$

obtemos

$$dy = \frac{\sqrt{(1+2t\xi^2)} - \xi \frac{1}{2} \frac{4t\xi}{\sqrt{1+2t\xi^2}}}{1+2t\xi^2} d\xi \\ = \frac{1+2t\xi^2 - 2t\xi^2}{(1+2t\xi^2)(\sqrt{1+2t\xi^2})} d\xi \\ = (1+2t\xi^2)^{-\frac{3}{2}} d\xi.$$

Portanto

$$I \leq M_s \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(y)|^2 dy + M_s \int_{\mathbb{R}} y^{2s} |\hat{f}(y)|^2 dy \\ \leq 2M_s \|f\|_{H^s}^2.$$

Fazendo  $n \rightarrow \infty$  obtemos

$$\|u\|_{H^s}^2 \leq M_s \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(y)|^2 dy + M_s \int_{\mathbb{R}} y^{2s} |\hat{f}(y)|^2 dy \\ \leq 2M_s \|f\|_{H^s}^2.$$



Logo, o fluxo é contínuo para  $\frac{1}{2} < s \leq \frac{3}{2}$ .

### 4.3 Considerações finais

Na seção 4.2 trabalhamos com o problema

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) + a(x) \partial_x^3 u(x, t) = 0, & x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x) \in H^s. \end{cases} \quad (4.32)$$

com  $a(x) = x$ . Não consideramos o caso  $a(x) = -x$ , que embora possa parecer análogo não é bem colocado, o que pode ser verificado no artigo estudado (ver [CG]).

Outra consideração que pode ser feita a respeito do problema (4.32) é que vale o seguinte resultado:

Suponha que para uma constante  $c \geq 1$  tenhamos  $\frac{1}{c} \leq a(x, t) \leq c$  e que  $a(x) \in C^k$  para algum  $k \geq 3$  inteiro. Então, para  $\alpha \leq \beta$ , o problema (4.32) com condição inicial  $u(x, 0) = f(x) \in H^\alpha$  é bem colocado e além disso vale a estimativa

$$\|u(x, t)\|_{H^\alpha} \leq C_2 \exp(C_1 t) \|f(x)\|_{H^\alpha}.$$

Os estudos desses casos ficaram para possíveis trabalhos futuros.

# Referências Bibliográficas

- [A] M. J. Ablowitz. *Nonlinear Dispersive Waves: Asymptotic Analysis and Solitons*. Cambridge University Press, (2011).
- [An] Angulo, J. *Nonlinear Dispersive Equations: Existence and Stability of Solitary and Periodic Travelling Wave Solutions*, Mathematical Surveys and Monographs (SURV), 156, AMS, (2009).
- [AGG] C. Amrouche, V. Girault, and J. Giroire. *Weighted Sobolev spaces for Laplace's equation in  $\mathbb{R}^n$* . Journal de mathématiques pures et appliquées, 73(6):579–606, 1994
- [Ca] Tenreiro, Carlos. (2000). *Apontamentos de Medida e Integração*. Universidade de Coimbra, Coimbra.
- [CG] W. Craig, J. Goodman, *Linear dispersive equations of Airy type*, J. Differential Equations 87 (1990) 38–61.
- [D] P. G. Drazin *Solitons*. Cambridge University Press. (1983).
- [I] ISNARD, C. *Introdução à medida e integração*. 2<sup>a</sup>.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009
- [Io] Iório, Valéria de Magalhães. *EDP, um curso de graduação*. Coleção Matemática Universitária, IMPA, 1991.
- [Ka] T. Kato, *On nonlinear Schrödinger equations, II,  $H^s$  solutions and unconditional well-posedness*, J. Anal. Math. **67** (1995), 281-306.
- [Ku] A. Kufner. *Weighted Sobolev spaces*. Wiley 1 edition, 1985
- [LE] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise. Vol. II*. Rio de Janeiro: Projeto Euclides IMPA, 2000
- [LM] Lizana, M. *Introducción a la Teoría de la Medida e Integración*. Universidad de Los Andes, 2018.

- [LP] F. Linares, G. Ponce, On the Davey-Stewartson systems, *Ann. Inst. Henry Poincaré* **10** (1993), 523-548.
- [LP1] F. Linares, G. Ponce, *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations*, Universitext, Springer, New York, 2009.
- [W] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, Nova Delhi, 1979.