



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA - IME  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - PGMAT  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



## LEIS DE CONSERVAÇÃO UNIDIMENSIONAIS

ISABELLA SILVA DUARTE

Salvador-Bahia

Maio de 2017



# LEIS DE CONSERVAÇÃO UNIDIMENSIONAIS

ISABELLA SILVA DUARTE

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientador:** Prof. Dr. Juan Andres Gonzalez Marin.

**Salvador-Bahia**

Maio de 2017

Duarte, Isabella Silva.

Leis de Conservação Unidimensionais / Isabella Silva Duarte. – Salvador: UFBA/IME, 2017.

93 f.

Orientador: Prof. Dr. Juan Andres Gonzalez Marin.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática e Estatística, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2017.

Referências bibliográficas.

1. Análise Matemática. 2. Equações Diferenciais. I. Marin, Juan Andres Gonzalez. II. Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática e Estatística. III. Leis de Conservação Unidimensionais.

CDU : 517

: 517.9

# LEIS DE CONSERVAÇÃO UNIDIMENSIONAIS

ISABELLA SILVA DUARTE

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 19 de Maio de 2017.

## Banca examinadora:

---

Prof. Dr. Juan Andres Gonzalez Marin (Orientador)  
UFBA

---

Prof. Dr. Tertuliano Franco Santos Franco  
UFBA

---

Prof. Dr. Henrique Barbosa da Costa  
UFBA

*Dedico à minha família e ao  
meu noivo, pela compreen-  
são e apoio.*

# Agradecimentos

Não poderia iniciar de outra maneira, senão com aquela frase que parece clichê, mas não é. Não é mesmo. Agradeço a Deus. Se tem alguém que merece todo o meu agradecimento, eternamente, esse alguém é Deus. Ele quem fez com que tudo acontecesse, que eu saísse da minha Paraíba e viesse tentar uma pós-graduação aqui na Bahia. Que eu conseguisse ultrapassar todos os obstáculos do caminho, suportar toda a saudade dos familiares e do noivo e conseguisse chegar ao fim desse mestrado. É claro que ele precisou de ajudantes e não poderia ter escolhido melhores.

O primeiro ajudante Dele foi meu noivo, Jucyano Cunha. Quero agradecê-lo por todo o amor, carinho e confiança depositados em mim durante o tempo que estamos juntos, principalmente nesses dois últimos anos. Sem o seu apoio, tudo teria sido ainda mais difícil. Obrigada por acreditar em mim, por sempre me dizer que daria certo e por ter feito muito esforço para vir me ver muitas vezes.

Aos meus pais, Fátima e José Paulo, às minhas irmãs, Cássia e Larissa, e ao meu sobrinho, Cauã, agradeço por serem minha maior fonte de estímulo para eu seguir em frente e nunca pensar em desistir, para querer e lutar por um “futuro melhor” pensando em cada um.

Ao meu querido amigo Clesio Lima, agradeço por ter me avisado da abertura das inscrições desse mestrado e me auxiliado em todo o processo. Fomos agraciados ao sermos selecionados juntos e acabamos por dividir apartamento, contas, alegrias, tristezas e a vida durante esses anos de mestrado. Todos os risos e choros compartilhados ficarão para sempre na memória, além de terem trazido grande aprendizado. Obrigada por ter me aturado todo esse tempo. Acredito que não deve ter sido muito fácil... Mas, saiba que fui agraciada por ter alguém como você aqui por perto.

Aos colegas de mestrado, da famosa sala 18, digo que sentirei saudades, muitas saudades. Das conversas e risadas, das companhias na gigantesca fila do RU, das saídas em grupo, de tanta coisa... Em especial quero agradecer aos primeiros amigos que fiz na UFBA, Vinicius e Rodrigo, obrigada por terem me acolhido, me ajudado inúmeras vezes, tanto academicamente quanto na estadia em Salvador e também pelas boas risadas. Tive as melhores indicações de boa música e as mais sinceras gargalhadas graças a Vinicius e os melhores convites gastronômicos (risos) através de Rodrigo, não poderia ter sido melhor.

Reservo aqui um parágrafo para outros amigos que a matemática me deu. Agra-

deço à Thâmara Brasil e à Elionora Farias que me acompanham desde a graduação e que, mesmo com a distância e ausência de minha parte, sempre têm palavras de conforto e torcem por mim em qualquer situação. Tenho um carinho enorme por vocês. Além delas, cito aqui Esaú, Djavan, Joedson, Rosy, e todos os outros que fazem parte do grupo “Frutos do Verão 2015”. Para as pessoas da matemática, o nome do grupo já é autoexplicativo. Compartilhamos boas experiências e vibramos a cada conquista uns dos outros, avisamos sobre os concursos e com isso acredito termos uma concorrência saudável.

Agradeço ao corpo docente da UFBA, principalmente aos que foram meus professores. Em especial a Joilson Ribeiro, que, como coordenador da pós-graduação, sempre foi prestativo e atencioso. Nesse parágrafo também se encaixa meu querido orientador, Juan Gonzalez. Muito obrigada por toda a paciência que teve comigo desde o início, por sempre tentar me deixar calma e por ser maleável e compreensivo durante todos os encontros da orientação. Obrigada por ter me ajudado a chegar até aqui!

Obrigada aos professores da banca, Tertuliano Franco e Henrique Barbosa, por aceitarem o convite para avaliar o meu trabalho e pelas prováveis correções e sugestões que virão a enriquecê-lo.

Por fim, agradeço ao auxílio financeiro da FAPESB, fator importante para minha estadia na Bahia.



*“A matemática é um produto de mentes humanas, mas não se dobra à vontade humana. Explorá-la é como explorar uma nova extensão de terra; podes não saber aquilo que está para lá da próxima curva do rio, mas não tens outra opção que não seja esperar para veres. A paisagem matemática não existe até que a explores.”*

–Ian Stewart

# Resumo

O intuito deste trabalho é garantir a existência de solução para leis de conservação com condições iniciais no caso unidimensional, assim como a unicidade de tal solução. Inicialmente iremos expor um modo de encontrar soluções bastante comum no estudo de equações diferenciais parciais, conhecido como Método das Características. Esse método consiste em encontrar curvas no domínio da solução que liguem pontos do bordo a pontos do domínio, e ao longo das quais a EDP se transforma num sistema de EDO's. No entanto, o método das características não garante existência de solução para todos os tempos devido ao cruzamento das curvas, ou à falta delas em parte do domínio. Para sanar tal dificuldade, desenvolvemos a Teoria de Hamilton-Jacobi, que, aplicada às leis de conservação, nos assegura a existência de soluções integrais para todos os tempos. Já a unicidade da solução integral é garantida pela condição de entropia, que de certa forma, faz com que a solução seja aquela que representa o sentido físico do problema.

**Palavras-chave:** leis de conservação, método das características, equação de Hamilton-Jacobi.

# Abstract

The purpose of this work is to guarantee the existence of a solution to conservation laws with initial conditions in the onedimensional case, as well the uniqueness of such a solution. Initially we will expose a very common way of finding solutions in the study of partial differential equations, known as the Characteristic Method. This method consists of finding curves in the solution domain that connect boundary domains points to points in the domain, and along which EDP becomes an ODE system. However, the feature method does not guarantee this curves the existence of a solution at all times due to cross-curves, or the lack of themim part of the domain. To solve this difficulty, we developed the Hamilton-Jacobi Theory, which, applied to conservation laws, assures us of the existence of integral solutions for all time. The uniqueness of the integral solution is guaranteed by the condition of entropy, which in a way, causes the solution to be the one that represents the physical sense of the problem.

**Keywords:** conservation laws; characteristic method; Hamilton-Jacobi's equation.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Equações diferenciais parciais e o método das características</b>	<b>4</b>
1.1 Equações Diferenciais Parciais: Conceitos básicos . . . . .	4
1.2 Método das Características para Equações Diferenciais de Primeira Ordem	6
1.2.1 Um primeiro contato . . . . .	7
1.2.2 O Método das Características: construção e aplicações . . . . .	8
1.2.3 Limitações do método das características . . . . .	29
<b>2 Equações de Hamilton-Jacobi</b>	<b>32</b>
2.1 Equações de Hamilton-Jacobi . . . . .	32
2.1.1 Motivação . . . . .	32
2.1.2 Cálculo de variações . . . . .	33
2.1.3 EDO's de Hamilton . . . . .	36
2.2 A transformada de Legendre . . . . .	39
2.3 Fórmula de Hopf-Lax . . . . .	44
2.3.1 Propriedades da Fórmula de Hopf-Lax . . . . .	48
2.4 Unicidade da solução integral para a equação de Hamilton-Jacobi . . . . .	55
<b>3 Leis de conservação: existência e unicidade de soluções fracas</b>	<b>64</b>
3.1 Solução integral para leis de conservação unidimensionais . . . . .	64
3.1.1 Condição de Rankine-Hugoniot . . . . .	66
3.1.2 Entropia . . . . .	73
3.2 Fórmula de Lax-Oleinik . . . . .	75
3.3 Unicidade da solução . . . . .	82
<b>Conclusão</b>	<b>91</b>
<b>Referências</b>	<b>92</b>

# Introdução

Uma lei de conservação expressa em termos matemáticos a conservação de alguma entidade física, tais como massa, energia, momento, população, entre outros. Equações do tipo

$$u_t + F(u)_x = 0 \quad (1)$$

onde  $u : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , são geralmente denominadas leis de conservação em analogia a exemplo de sistemas que surgem na Física, como conservação das entidades físicas citadas anteriormente.

As leis de conservação traduzem-se em equações integrais, de onde podem ser deduzidas equações diferenciais, na maior parte dos casos. Estas equações descrevem como o processo evolui com o tempo e, por este motivo, elas são também chamadas de *equações de continuidade*.

Uma lei de conservação afirma que a variação da quantidade total de uma substância física numa região  $\Omega$  do espaço é dada pelo fluxo da substância na fronteira de  $\Omega$ . A quantidade total é representada por meio da integral da densidade da substância física e a variação dela por meio da derivada do tempo.

Pelo anterior, numa lei de conservação temos uma função  $u$  que depende tanto do espaço como do tempo,  $u(x, t)$ , que representa a densidade da substância física e o seu fluxo representado pela função  $F$ . Em termos de equações, uma lei de conservação tem a forma

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u dx = - \int_{\partial\Omega} F(u) \cdot \nu dS,$$

onde  $\nu$  é o vetor normal externo à fronteira  $\partial\Omega$ . Pelo Teorema da Divergência e dividindo a expressão resultante pelo volume de  $\Omega$ , obtemos a forma diferencial da lei de conservação:

$$u_t + \operatorname{div}(F) = 0.$$

Neste trabalho iremos estudar o caso unidimensional, em que as equações também são chamadas de *leis de conservação escalares*. Para esse caso, encontraremos solução da equação

$$u_t + F(u)_x = 0, \quad \text{em } \mathbb{R} \times [0, \infty) \quad (2)$$

de modo que

$$u(x, 0) = g(x), \quad (3)$$

para alguma função  $g$  dada, tal função denominaremos *condição inicial*. Embora aqui, o conceito da solução alcançada seja mais abrangente do que o conceito de solução conhecida normalmente.

Notemos que a equação (2) equivale a

$$u_t + a(u)u_x = 0,$$

onde  $a(u) = F'(u)$ . No caso que  $a(u)$  é uma constante temos que (2) é uma equação de transporte, e podemos resolvê-la pelo Método das Características, que será desenvolvido no Capítulo 1. Ao tentar utilizar o mesmo método para uma função  $a(u)$  geral, a solução pode perder suavidade ou até deixar de ser contínua, como veremos nos exemplos do primeiro capítulo. Um exemplo de equação para a qual o método das características falha é quando  $a(u) = u$ , conhecida com equação de Burgers:

$$u_t + uu_x = 0.$$

A depender da condição inicial, podemos não ter solução a partir de certo tempo  $t > 0$ .

Como proposto por Conway e Hopf em [1], para contornar a dificuldade encontrada ao tentar resolver uma lei de conservação pelo método das características, no Capítulo 2 desenvolveremos a Teoria de Hamilton-Jacobi para garantirmos existência de soluções para equações semelhantes às leis de conservação, as equações de Hamilton-Jacobi:

$$\begin{cases} u_t + H(Du, x) = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = g & \text{em } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}, \quad (4)$$

onde  $u : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função desconhecida, dependendo da variável espacial  $x$  e do tempo  $t$ ;  $Du$  representa o gradiente da função  $u$  com respeito à variável  $x$  e  $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função suave.

No Capítulo 3, relacionaremos as equações de Hamilton-Jacobi em dimensão 1 com as leis de conservação escalares e mostraremos que, de fato, a solução encontrada para (4), após uma pequena modificação, é solução integral para as leis de conservação em todos os tempos  $t > 0$ . A unicidade para tal solução foi proposta por Oleinik em [7].

A abordagem que fizemos neste trabalho não é a única capaz de obter solução para leis de conservação. Uma outra possibilidade pode ser vista em [10] com o método de diferenças finitas.

# Capítulo 1

## Equações diferenciais parciais e o método das características

Neste capítulo trataremos alguns conceitos básicos das equações diferenciais parciais, como definição e classificação quanto à ordem e linearidade. Além disso, apresentaremos um método de soluções para EDP's, denominado Método das Características.

### 1.1 Equações Diferenciais Parciais: Conceitos básicos

Em termos gerais, uma equação diferencial parcial, que indicaremos por suas iniciais EDP, é uma equação que envolve uma função desconhecida de duas ou mais variáveis e algumas de suas derivadas parciais. No decorrer do texto, considere a ordem  $k$  das derivadas da função sendo sempre um número inteiro maior ou igual 1 e  $U$  sendo um subconjunto aberto do  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição 1.1.** *Uma expressão da forma*

$$f(D^k u(x), D^{k-1} u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0 \quad (1.1)$$

com  $x \in \mathbb{R}^n$  é chamada de **equação diferencial parcial de  $k$ -ésima ordem**, onde

$$f : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \dots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times U \longrightarrow \mathbb{R}$$

é dada e  $u : \bar{U} \longrightarrow \mathbb{R}$  é a função que desejamos encontrar.

Se cada uma das parcelas da equação contém a variável dependente,  $u$ , ou alguma de suas derivadas, dizemos que a EDP é **homogênea**, caso contrário, dizemos que a equação é **não-homogênea**. A equação (1.1) é **linear** se  $f$  é linear em relação a  $u$  e a todas as suas derivadas parciais, caso contrário, dizemos que é **não-linear**. Dependendo do tipo da não-linearidade, as EDP's são classificadas da seguinte forma:

- *Equações semilineares*: quando  $f$  é não linear somente com relação a  $u$ , mas é linear com relação às todas as suas derivadas parciais;
- *Equações quasilineares*: quando  $f$  é linear somente com relação às derivadas parciais da ordem da equação;
- *Equações totalmente não-lineares*: quando  $f$  é não-linear com relação às derivadas parciais da ordem da equação.

As equações diferenciais parciais lineares, normalmente, são mais simples de se estudar, se comparadas às não-lineares. Entre as equações lineares mais conhecidas, estão:

- i) A *equação de transporte com coeficientes constantes*,

$$u_t(x, t) + b \cdot D_x u(x, t) = 0,$$

onde  $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$  e  $b$  é um vetor fixo do  $\mathbb{R}^n$ , que é uma equação homogênea de 1ª ordem;

- ii) A *equação de Laplace*, dada por

$$\Delta u(x, t) = 0,$$

que é uma equação de 2ª ordem, onde

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2};$$

- iii) A *equação do calor*,

$$u_t + \Delta u = 0,$$

que é uma equação homogênea de 2ª ordem e é utilizada para modelar a evolução da temperatura de um corpo através do tempo;

- iv) A *equação da onda*,

$$u_{tt} - \Delta u = 0$$

que também é homogênea e de 2ª ordem e que descreve a propagação de uma onda em um determinado meio.

As equações exibidas em (ii), (iii) e (iv), são representantes de classes mais gerais de EDP's: *elípticas*, *parabólicas* e *hiperbólicas*, respectivamente.

Quanto aos métodos de resolução de equações diferenciais parciais lineares, dependendo da ordem e do tipo de equação, destacam-se o *método das características*, *separação de variáveis*, uso de *séries de Fourier*, entre outros artifícios, que são usados comumente.



Já a resolução de equações não-lineares é geralmente mais complicada. Dos métodos existentes, nenhum é capaz de resolver toda essa classe de equações, e sim, apenas partes dela. Temos, por exemplo, o método das curvas características, que abordaremos a seguir com o intuito de resolver as leis de conservação, que são EDP's quasilineares.

## 1.2 Método das Características para Equações Diferenciais de Primeira Ordem

A ideia geral do método das características é obter curvas ao longo das quais as EDP's se reduzem a equações diferenciais ordinárias - EDO's. Feito isso, veremos se é possível resolver tais EDO's e, assim, obter a solução da equação diferencial parcial.

Consideremos a equação diferencial parcial

$$f(Du, u, x) = 0, \quad (1.2)$$

com  $x \in U$  e sujeita à condição inicial

$$u = g \quad \text{em} \quad \Gamma, \quad (1.3)$$

onde  $\Gamma$ , que é uma parte da fronteira de  $U$  ( $\Gamma \subseteq \partial U$ ), e  $g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  são dados. Além disso, as funções  $f$  e  $g$  são suaves.

Suponha que  $u$  é solução de (1.2) e (1.3) e fixe qualquer ponto  $x \in U$ . Gostaríamos de calcular  $u(x)$  ao longo de curvas, pertencentes a  $U$ , que ligam  $x$  a um ponto  $x_0 \in \Gamma$ . Por (1.3) já temos um valor para  $u$ , a partir dela esperamos computar a solução ao longo de toda a curva, e assim, em particular, no ponto  $x \in U$ .

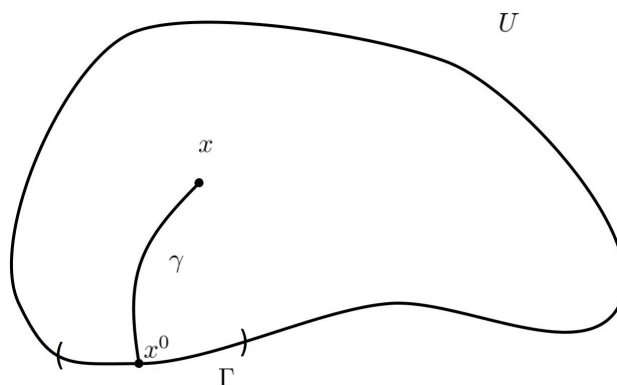


Figura 1.1: Método das características

### 1.2.1 Um primeiro contato

Para facilitar a compreensão, inicialmente desenvolveremos o método das características para o caso  $x \in \mathbb{R}$ . Este caso nos é mais conveniente, uma vez que equações deste tipo serão nosso objeto de estudo. Considere a equação linear homogênea a seguir

$$u_t(x, t) + c(x, t)u_x(x, t) = 0 \quad (1.4)$$

com  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$  e  $c$  uma função pertencente ao conjunto  $C^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ . Observe que  $(x(t), t)$  é uma curva arbitrária do plano  $xt$  e a derivada de uma função  $u$  ao longo desta curva é dada por

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = u_t(x(t), t) + x'(t)u_x(x(t), t). \quad (1.5)$$

Logo, se  $u$  satisfaz a equação de transporte (1.4), e  $x'(t) = c(x, t)$  então

$$\frac{du}{dt} = 0,$$

com isso,  $u$  é constante ao longo das curvas  $x'(t) = c(x, t)$ . Ou seja, a EDP (1.4) foi reduzida à EDO  $u' = 0$  ao longo das curvas características  $(x(t), t)$ . Portanto, obtemos como solução de (1.4) a função

$$u(x, t) = u(x - c(x, t)t, 0) = g(x - c(x, t)t).$$

Aqui, as curvas soluções da equação diferencial ordinária

$$x'(t) = c(x, t)$$

são chamadas de **curvas características** da equação do transporte  $u_t + c(x, t)u_x = 0$ .

**Observação 1.2.** *Pelo fato de nem sempre as EDO's encontradas serem lineares, essas podem não estar definidas para todo o domínio da equação inicial, logo, as curvas características geralmente estão definidas apenas localmente.*

**Exemplo 1.3.** *Resolvamos o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} u_t - xt u_x = 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \text{ e } t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = f(x) & \text{se } x \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

**Solução.** *Pelo anterior, sabemos que as curvas características para a equação de transporte são as soluções da equação diferencial ordinária*

$$x'(t) = -xt.$$

Após a separação de variáveis,

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = -t$$

e integrando ambos os membros em relação a  $t$ , teremos

$$\ln(x) = -t^2/2 + k,$$

para algum  $k \in \mathbb{R}$ . Aplicando a função exponencial em ambos os membros, temos

$$x = e^{-t^2/2+k}$$

isto é,

$$x(t) = k_0 e^{-t^2/2} \tag{1.6}$$

onde  $k_0 = e^k$  é uma constante.

Fixe um ponto  $(x_0, t_0)$ , onde  $x(0) = x_0$ , no bordo do domínio da função  $u$ , que neste caso é o eixo- $x$ . Esse ponto também intersecta a curva característica, logo, substituindo  $t = 0$  na equação (1.6), obtemos que  $x_0 = k_0$ . Uma vez que  $u$  é constante ao longo das curvas características, segue que

$$u(x, t) = u(x_0, t_0) = u(k_0, 0) = u\left(x_0 e^{t_0^2/2}, 0\right) = f\left(x_0 e^{t_0^2/2}\right).$$

Daí, a solução para o problema de valor inicial é

$$u(x, t) = f\left(x e^{t^2/2}\right).$$

## 1.2.2 O Método das Características: construção e aplicações

Considere a EDP não-linear de 1ª ordem

$$f(Du, u, x) = 0 \tag{1.7}$$

no conjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  e sujeita à condição de fronteira

$$u = g \text{ em } \Gamma, \tag{1.8}$$

onde  $\Gamma$  é uma parte da fronteira de  $U$ . As funções  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  são dadas e  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  é a função a ser encontrada.

Considere uma função  $u$  que satisfaça (1.7) e (1.8) e tome uma curva  $\gamma \subset U$  de modo que ligue o ponto  $x \in U$  a um ponto  $x^0 \in \Gamma$  e ao longo da qual podemos calcular  $u$ . Suponha que essa curva seja parametrizada pela função  $\mathbf{x}(s) = (x_1(s), \dots, x_n(s))$ , com

$s$  variando num intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ . Assuma  $u \in C^2$  e defina

$$z(s) := u(\mathbf{x}(s)) \quad (1.9)$$

e

$$\mathbf{p}(s) := Du(\mathbf{x}(s)); \quad (1.10)$$

sendo  $\mathbf{p}(s)$  um vetor do  $\mathbb{R}^n$ , denotamos  $\mathbf{p}(s) = (p_1(s), \dots, p_n(s))$  e assim segue que

$$p_i(s) = u_{x_i}(\mathbf{x}(s)). \quad (1.11)$$

**Observação 1.4.** *Perceba que a notação para as funções  $\mathbf{x}(\cdot)$  e  $\mathbf{p}(\cdot)$  são diferenciadas da notação de  $z(\cdot)$ , isso para que o leitor atente ao fato de que as duas primeiras funções são vetores do  $\mathbb{R}^n$ , enquanto a última é uma função escalar. Além disso, para  $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ , escreveremos*

$$\dot{\tau}(s) = \frac{d}{ds}\tau(s).$$

Se derivarmos a identidade (1.11) com respeito a  $s$ , teremos

$$\dot{p}_i(s) = \sum_{j=1}^n u_{x_i x_j}(\mathbf{x}(s)) \dot{x}_j(s) \quad (1.12)$$

Note que essa expressão envolve derivadas de ordem 2, que é mais alta do que a ordem da equação inicial. Provavelmente, resolver uma EDP dessa ordem seria mais complicado. Para reverter tal situação, derivemos a equação (1.7) com respeito a  $x_i$ , obtendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} f(Du, u, x) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial p_j}(Du, u, x) u_{x_j x_i} \\ &+ \frac{\partial f}{\partial z}(Du, u, x) u_{x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_i}(Du, u, x) = 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

e então assumamos a seguinte condição para a curva  $\mathbf{x}(s)$ :

$$\dot{x}_j(s) = \frac{\partial f}{\partial p_j}(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s)), \quad \forall j = 1, \dots, n. \quad (1.14)$$

Substituindo a expressão (1.14) na equação (1.13), teremos

$$\sum_{j=1}^n u_{x_i x_j} \dot{x}_j + \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s)) p_i(s) + \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s)) = 0, \quad (1.15)$$

e em seguida usando a informação contida em (1.12) na equação acima, ao avaliarmos a

expressão resultante na curva  $\mathbf{x}(s)$ , obteremos

$$\dot{p}_i(s) + \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s))p_i(s) + \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s)) = 0. \quad (1.16)$$

Assim,

$$\dot{p}_i(s) = -\frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s))p_i - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s)), \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (1.17)$$

Agora, se derivarmos a equação (1.9) em relação a  $s$ , obteremos

$$\dot{z}(s) = \sum_{j=1}^n u_{x_j}(\mathbf{x}(s))\dot{x}_j(s),$$

que, pelas informações em (1.11) e (1.14), pode ser reescrita da forma

$$\dot{z}(s) = \sum_{j=1}^n p_j(s) \frac{\partial f}{\partial p_j}(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s)). \quad (1.18)$$

Usando a notação vetorial, podemos escrever as equações relativas à (1.14), (1.17) e (1.18), como

$$\begin{cases} a) \dot{\mathbf{p}}(s) = -D_z f(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s))\mathbf{p}(s) - D_x f(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s)) \\ b) \dot{z}(s) = D_p f(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s)) \cdot \mathbf{p}(s) \\ c) \dot{\mathbf{x}}(s) = D_p f(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s)). \end{cases}, \quad (1.19)$$

onde a operação entre os vetores da segunda equação corresponde ao produto escalar entre eles. Chamamos o sistema acima de **sistema característico**, onde a equação (1.19(c)) recebe o nome de **característica projetada**.

Podemos resumir a construção feita até agora no seguinte resultado:

**Teorema 1.5.** (*Estrutura das EDO's características*) *Seja  $u \in C^2$  solução da EDP não-linear de 1ª ordem (1.7) em  $U$ . Tome  $\mathbf{x}(s)$  solução de (1.19(c)), onde  $\mathbf{p}(\cdot) = Du(\mathbf{x}(\cdot))$  e  $z(\cdot) = u(\mathbf{x}(\cdot))$ . Então  $\mathbf{p}(\cdot)$  satisfaz (1.19(a)) e  $z(\cdot)$  satisfaz (1.19(b)), para todo  $s \in \mathbb{R}$  tal que  $\mathbf{x}(s) \in U$ .*

A seguir, vejamos algumas aplicações desse teorema em EDP's de primeira ordem, desde que essas tenham condições de fronteira apropriadas.

### Aplicação em EDP's lineares

Considere uma EDP linear e homogênea, que na sua forma geral é dada por

$$f(Du, u, x) = \mathbf{b}(x) \cdot Du(x) + c(x)u(x) = 0, \quad (1.20)$$

onde  $x \in U$ ,  $\mathbf{b}(x)$  é um vetor do  $\mathbb{R}^n$  e  $c(x) \in \mathbb{R}$ .

Seja  $\mathbf{x}(s)$  a curva escolhida para desenvolvermos o método das características. Ao avaliarmos a equação (1.20) nessa curva, obtemos

$$f(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s)) = \mathbf{b}(\mathbf{x}(s)) \cdot \mathbf{p}(s) + c(\mathbf{x}(s))z(s),$$

donde segue que

$$D_p f = \mathbf{b}(\mathbf{x}(s)) \quad \text{e} \quad D_z f = c(\mathbf{x}(s)).$$

Pelo sistema característico encontrado anteriormente, temos

$$\dot{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{b}(\mathbf{x}(s)) \tag{1.21}$$

e

$$\dot{z}(s) = \mathbf{b}(\mathbf{x}(s)) \cdot \mathbf{p}(s). \tag{1.22}$$

Além disso, como  $\mathbf{p}(\cdot) = Du(\cdot)$ , a expressão (1.22) equivale a

$$\dot{z}(s) = \mathbf{b}(\mathbf{x}(s))Du(\mathbf{x}(s)) = -c(\mathbf{x}(s))u(\mathbf{x}(s)) = -c(\mathbf{x}(s))z(s).$$

Observe que, para equações lineares, reduzimos o sistema característico geral para

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{b}(\mathbf{x}(s)) \\ \dot{z}(s) = -c(\mathbf{x}(s))z(s) \end{cases} . \tag{1.23}$$

Sendo um sistema fechado, no sentido de relacionar apenas as funções  $\mathbf{x}(s)$  e  $z(s)$ , não precisaremos da equação (1.19(a)).

**Exemplo 1.6.** *Considere o problema*

$$\begin{cases} xu_y - yu_x = u \text{ em } U \\ u = g \text{ em } \Gamma \end{cases} \tag{1.24}$$

onde  $U = \{x > 0 \text{ e } y > 0\}$  e  $\Gamma = \{x > 0 \text{ e } y = 0\}$ .

**Solução.** *Reordenando os termos da EDP para compará-los à equação na sua forma geral e considerando  $u = u(x, y)$  temos*

$$f(u_x, u_y, u, x, y) = (-y, x) \cdot (u_x, u_y) - u = 0,$$

*implicando que*

$$\mathbf{b}(x, y) = (-y, x) \quad \text{e} \quad c(x, y) = -1.$$

Usando o sistema característico (1.23), concluímos que

$$\begin{cases} x'(s) = -y \\ y'(s) = x \\ u'(x(s), y(s)) = u(x(s), y(s)) \end{cases} . \quad (1.25)$$

Resolvendo tal sistema, temos que

$$x(s) = x_0 \cos(s) \quad e \quad y(s) = x_0 \sin(s),$$

onde  $x_0 = (x(0), y(0))$  e  $s \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . Além disso, a última equação do sistema nos fornece  $z(s) = e^s z_0$ , com  $z_0 = u(x_0)$ . Utilizando a condição inicial deste problema, obtemos que  $z(s) = e^s g(x_0)$ .

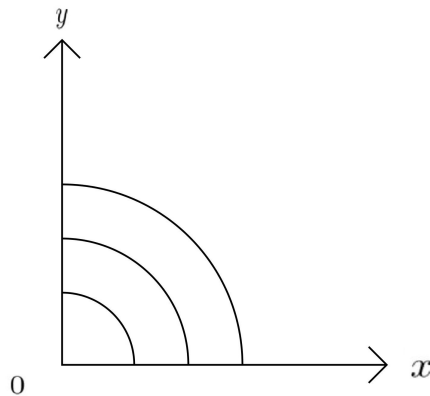


Figura 1.2: Curvas características

Agora, fixado um ponto  $(x, y) \in U$ , explicitemos a solução. Para isso, encontremos os valores de  $x_0$  e  $s$  em função de tal ponto. Adicionando as soluções das duas primeiras equações do sistema (1.25), encontramos que  $x_0 = \sqrt{x^2 + y^2}$ . O valor de  $s$  pode ser obtido fazendo

$$\frac{\sin(s)}{\cos(s)} = \frac{y}{x}$$

e assim,  $s = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ . Portanto, a solução para o sistema proposto é dada por

$$u(x, y) = e^{\arctan\left(\frac{y}{x}\right)} g(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

### Aplicação em EDP's quasilineares

Seja

$$f(Du, u, x) = b(x, u(x))Du(x) + c(x, u(x)) = 0. \quad (1.26)$$

Considerando a curva  $\mathbf{x}(s)$  e avaliando a EDP nesta curva temos

$$f(p, z, x) = b(x, z) \cdot p + c(x, z) = 0$$

e, pelo sistema característico geral,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(s) = b(\mathbf{x}(s), z(s)) \\ \dot{z}(s) = b(\mathbf{x}(s), z(s)) \cdot \mathbf{p}(s) \end{cases} .$$

Uma vez que  $\mathbf{p}(s) := Du(\mathbf{x}(s))$ , obtemos

$$\dot{z}(s) = b(\mathbf{x}(s), z(s)) \cdot Du(\mathbf{x}(s)) = -c(\mathbf{x}(s), z(s)).$$

Ou seja, para o caso em que a equação diferencial parcial de primeira ordem é do tipo quasilinear, podemos dispor do seguinte sistema característico:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(s) = b(\mathbf{x}(s), z(s)) \\ \dot{z}(s) = -c(\mathbf{x}(s), z(s)) \end{cases} .$$

**Exemplo 1.7.** *Considere o seguinte problema com condição inicial:*

$$\begin{cases} u_x + u_y = u^2 & \text{em } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = g & \text{em } \mathbb{R} \times \{0\} \end{cases} .$$

Reescrevendo a EDP na sua forma geral, temos

$$\begin{aligned} f(u_x, u_y, u, x, y) &= \mathbf{b}(x, y, u(x, y)) \cdot Du(x, y) + c(x, y, u(x, y)) \\ &= (1, 1) \cdot (u_x, u_y) - u^2 = 0, \end{aligned}$$

donde segue que

$$b(\mathbf{x}(s), z(s)) = (1, 1) \quad e \quad c(\mathbf{x}(s), z(s)) = -z^2.$$

Pelo sistema característico para equações quasilineares, temos que

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = 1, & \dot{y}(s) = 1 \\ \dot{z}(s) = z^2 \end{cases} .$$

Resolvendo as primeiras equações, obtemos  $x(s) = s + k_1$ , onde  $k_1 \in \mathbb{R}$  é constante, e  $y(s) = s$  (aqui a constante de integração é 0, devido à fronteira).

Já pela última equação do sistema, se tomarmos

$$h'(s) := \frac{\dot{z}}{z^2} = 1,$$



teremos

$$h(s) = -\frac{1}{z(s)}$$

e então,  $h(0) = k_2$ , para  $k_2 \in \mathbb{R}$ , de modo que  $z^0 = z(0) = -\frac{1}{k_2}$ . Por outro lado,  $h'(s) = 1$  e com isso, obtemos  $h(s) = s + k_2$ . Ou seja,

$$-\frac{1}{z(s)} = s + k_2,$$

daí,

$$z(s) = -\frac{1}{s + k_2} = -\frac{1}{s - \frac{1}{z^0}} = \frac{z^0}{1 - z^0 s}.$$

Sendo  $z^0 = g(x^0) = g(k_1)$ , a solução pode ser reescrita da forma

$$z(s) = \frac{g(k_1)}{1 - sg(k_1)}.$$

Ao invertemos a solução, no sentido de torná-la dependente de  $x$  e  $y$ , obtemos

$$u(x, y) = \frac{g(x - y)}{1 - yg(x - y)},$$

para  $1 - yg(x - y) \neq 0$ . Aqui, usamos o fato de que, pelo anterior,  $y = s$  e  $x = s + x^0$ , daí,  $x = y + k_1$  e então,  $k_1 = x - y$ .

### Condições de fronteira

Até agora, vimos que dada uma solução  $u \in C^2$  da equação  $f(Du, u, x) = 0$  ela satisfaz às equações do sistema característico. Agora, mostraremos que dado o sistema característico, podemos construir ao menos uma solução para a EDP do problema inicial, ou seja, que a solução das equações características é de fato uma solução para a EDP, ao menos localmente. Para tal, devemos dispor de condições iniciais adequadas.

Para facilitar um pouco as contas, faremos uma redução do domínio ao caso semi-espaço superior ( $x_n > 0$ ). Uma fronteira nessas condições será denominada de **fronteira flat**.

No caso de uma fronteira suave  $\partial U$  qualquer, considere que o bordo do domínio  $U$  é  $C^k$ , com  $k > 0$ .

**Definição 1.8.** Dizemos que o conjunto  $U$  tem **bordo  $C^k$**  se, dado um ponto  $x^0$  em  $\partial U$ , uma vizinhança  $\Gamma$  desse ponto corresponde ao gráfico de uma função  $C^k$ . Em outras palavras, existe uma função  $\gamma \in C^k$  tal que

$$\Gamma = \{(x_1, \dots, x_n); \quad x_n = \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\}.$$

Agora considere o conjunto  $U_1 = \{(x_1, \dots, x_n); x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\}$ . O que faremos é tornar retilínea a parte da fronteira que delimita tal conjunto, através de uma mudança de coordenadas, e analisar o conjunto  $U_1$  após essa transformação. Tome  $y^0$  um ponto na fronteira retilínea e defina as aplicações  $\Phi, \Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  da seguinte forma

$$\Phi(x) : \begin{cases} \Phi_i(x) = y_i = x_i, & \text{se } i = 1, \dots, n-1 \\ \Phi_n(x) = y_n = x_n - \gamma(x_1, \dots, x_{n-1}) \end{cases}$$

e

$$\Psi(y) : \begin{cases} \Psi_i(y) = x_i = y_i & \text{se } i = 1, \dots, n-1 \\ \Psi_n(y) = x_n = y_n + \gamma(y_1, \dots, y_{n-1}) \end{cases},$$

que são, claramente, mapas inversos.

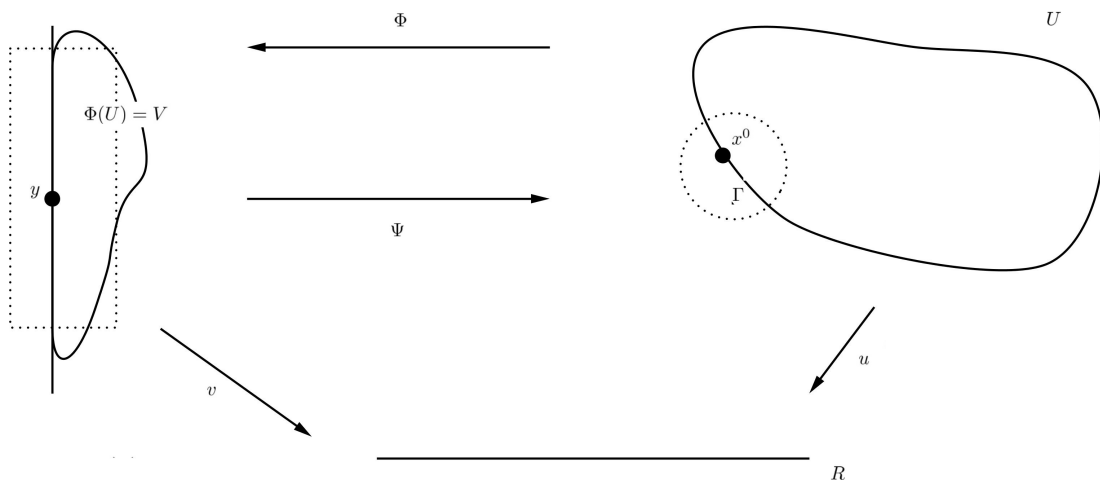


Figura 1.3: Diagrama dos mapas

Agora, dada uma função qualquer  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ , tome  $V := \Phi(U)$  e defina

$$v(y) = u(\Psi(y)) \text{ com } y \in V.$$

Daí, segue que

$$u(x) = v(\Phi(x)) \text{ para } x \in U_1, \quad (1.27)$$

onde

$$\begin{cases} x = \Psi(y) \\ y = \Phi(x) \end{cases}.$$

*Pergunta:* Se temos que  $u$  é solução de

$$\begin{cases} f(Du, u, x) = 0 \text{ em } U \\ u = g \text{ em } \Gamma \end{cases}, \quad (1.28)$$

qual é o problema de valor inicial que  $v$  satisfaz em seu conjunto de definição?

Derivando a expressão em (1.27), obtemos

$$u_{x_1}(x) = \sum_{j=1}^n v_{y_j}(\Phi(x)) \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

ou seja,

$$Du(x) = Dv(\Phi(x))D\Phi(x) = Dv(y)D\Phi(\Psi(y)).$$

Assim,  $f(Du, u, x) = 0$  equivale a dizer que

$$f(Dv(y)D\Phi(\Psi(y)), v(y), \Psi(y)) = 0,$$

onde  $\Phi$  e  $\Psi$  são mapas suaves. Podemos reescrever tal equação da seguinte maneira

$$G(Dv(y), v(y), y) = 0 \text{ em } V,$$

na qual  $G$  é também suave.

Quanto a condição de bordo, uma vez que  $u = g$  em  $\Gamma$ , temos que a igualdade  $v(y) = g(\Phi(x)) := h(y)$  no conjunto  $\tilde{\Gamma} := \Phi(\Gamma)$ . Unindo essas informações, concluímos que  $v$  é solução do problema inicial

$$\begin{cases} G(Dv(y), v(y), y) = 0 & \text{em } V \\ v = h & \text{em } \tilde{\Gamma} \subset \partial U_1 \end{cases}. \quad (1.29)$$

Em resumo, a partir dos mapas suaves  $\Phi$  e  $\Psi$  conseguimos tornar o bordo de  $U$  uma “curva flat” e além disso, temos a garantia de que uma equação de primeira ordem em  $U$  pode ser convertida numa de mesma espécie na região definida como  $V$ .

### Condições de compatibilidade dos dados iniciais

Pelo anterior, se tivermos um ponto  $x^0 \in \Gamma$  podemos também assumir que  $\Gamma$  é plana próximo de  $x^0$  sobre o plano  $\{x_n = 0\}$ . Sabemos que podemos resolver uma EDP pelo método das características sobre certas condições. Aqui veremos como devem ser estas condições iniciais e se elas são *compatíveis*.

Para tal, devemos impor que  $\mathbf{x}(0) = x^0$  e, além disso, que o valor  $z(0) := z^0$  seja dado por  $z^0 = g(x^0)$ , devido à condição de fronteira. Mas, e a condição  $\mathbf{p}(0) = p^0$ ?

Lembre que  $\Gamma = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)\}$ , assim, numa vizinhança de  $\mathbf{x}^0$

$$u(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = g(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Derivando tal expressão, obtemos

$$u_{x_i}(x^0) = g_{x_i}(x^0)$$

e gostaríamos de ter

$$p_i^0 = g_{x_i}(x^0), \quad \forall i \in \{1, \dots, n-1\}.$$

Com isso, temos uma relação para as  $n-1$  primeiras coordenadas de  $\mathbf{p}^0$ . Para encontrar a coordenada  $p_n^0$  usaremos o fato de que a tripla  $(p^0, z^0, x^0)$  deve ser solução da equação inicial. Portanto, devemos ter

$$\begin{cases} z^0 = g(x^0) \\ p_i^0 = g_{x_i}(x^0) \\ f(p^0, z^0, x^0) = 0 \end{cases} \quad \forall i \in \{1, \dots, n-1\}. \quad (1.30)$$

Chamamos (1.30) de **condições de compatibilidade**. Dizemos que uma tripla  $(p^0, z^0, x^0) \in \mathbb{R}^{2n+1}$  é **admissível** se ela satisfaz às condições (1.30).

### Condições de fronteira não-característica

Iniciemos esclarecendo o que significa uma tripla admissível ser *não-característica*.

**Definição 1.9.** Denominamos de tripla **não-característica** a tripla admissível  $(p^0, z^0, x^0)$  que, no caso de uma fronteira flat, satisfaz

$$f_{p_n}(p^0, z^0, x^0) \neq 0.$$

Caso a fronteira não seja flat, a condição a ser satisfeita torna-se

$$D_p f(p^0, z^0, x^0) \cdot \nu(x^0) \neq 0,$$

onde  $\nu(x^0)$  é o vetor normal unitário exterior a  $\partial U$  no ponto  $x^0$ .

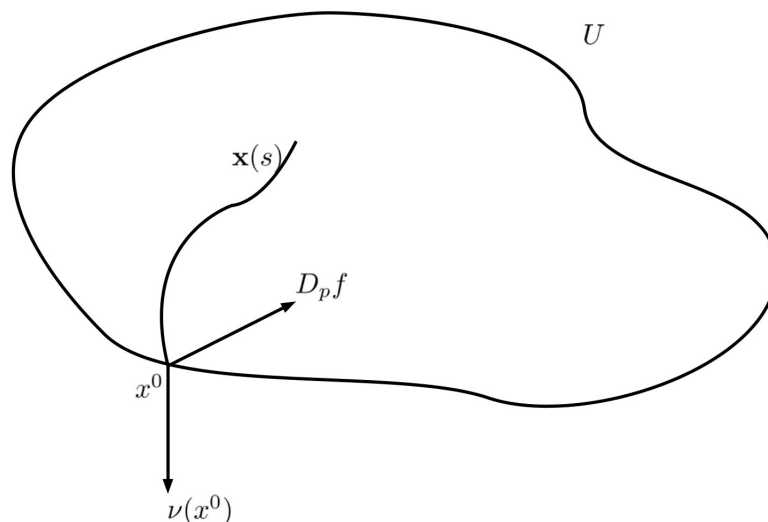


Figura 1.4: Fronteira não-característica

Geometricamente, isso nos diz que o vetor gradiente de  $f$  em relação a  $\mathbf{p}$ ,  $D_p f$ , não deve ser normal ao vetor  $\nu$ . Ou seja, o vetor  $D_p f$  não é tangente à superfície  $\partial U$ .

Agora, assumamos que  $x^0 \in \Gamma$ , que  $\Gamma$  pertence ao plano  $\{x_n = 0\}$  próximo de  $x^0$  e que a tripla  $(p^0, z^0, x^0)$  é admissível. Gostaríamos de encontrar uma tripla admissível sempre que perturbarmos um pouco a tripla inicial, isto é, que a tripla admissível inicial varie de maneira suave.

Em outras palavras, queremos verificar se existem um ponto  $x^0 \in \Gamma$  e uma função  $q : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$  de modo que para todo  $y \in \Gamma$  suficientemente próximo de  $x^0$  a tripla  $(q(y), g(y), y)$  seja admissível e que

$$q(x^0) = p^0. \quad (1.31)$$

Em termos de equações, equivale a

$$\begin{cases} q_i(y) = g_{x_i}(y) & \text{para } i \in \{1, \dots, n-1\} \\ f(q(y), g(y), y) = 0 \end{cases}. \quad (1.32)$$

Para encontrarmos condições necessárias para a existência da função  $q$  descrita acima, vejamos o lema que segue.

**Lema 1.10.** *(Condição de fronteira não-característica) Suponha que*

$$f_{p_n}(p^0, z^0, x^0) \neq 0.$$

*Então, existe uma única função suave  $q : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$  de modo que  $(q(y), g(y), y)$  seja uma tripla admissível e, simultaneamente, que  $q(x^0) = p^0$ , para todo  $y$  pertencente à uma vizinhança de  $x^0$  contida em  $\Gamma$ .*

*Demonstração.* Tome  $y = (y_1, \dots, y_{n-1}, 0) \in \Gamma$  um ponto na vizinhança de  $x^0$  e defina a aplicação

$$\begin{aligned} \mathbf{G} : \mathbb{R}^n \times \Gamma &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (p, y) &\mapsto \mathbf{G}(p, y) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{cases} G_i(p, y) = p_i - g_{x_i}, & \forall i \in \{1, \dots, n-1\} \\ G_n(p, y) = f(p, g(y), y) \end{cases}.$$

Note que  $\mathbf{G}(p^0, x^0) = 0$ , uma vez que por construção,  $p_i^0 = g_{x_i}(x^0)$  para todo  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  e também pelo fato de que  $f(p^0, g(x^0), x^0) = 0$ .

Calculando o determinante da matriz  $\mathbf{G}(p^0, x^0)$ , a qual é da forma

$$D_p \mathbf{G}(p^0, x^0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{p_1}(p^0, z^0, x^0) & f_{p_2}(p^0, z^0, x^0) & \cdots & f_{p_n}(p^0, z^0, x^0) \end{pmatrix}_{n \times n},$$

temos que  $\det[G(p^0, x^0)] = f_{p_n}(p^0, z^0, x^0) \neq 0$ , por hipótese.

Desse modo, pelo Teorema da Função Implícita, garantimos a existência de um conjunto aberto  $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^n \times \Gamma$ , contendo  $(p^0, x^0)$ , de um conjunto aberto  $\tilde{W} \subset \Gamma$ , contendo  $x^0$ , e de uma função  $q : \tilde{W} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , tão suave quanto a função  $G$ , de modo que

- i)  $q(x^0) = p^0$ ,
- ii)  $G(q(y), y) = z^0$ , para  $y \in W$  e
- iii) se  $(p, y) \in \tilde{V}$  e  $G(p, y) = z^0$ , então,  $p = q(y)$ ,

obtendo o desejado. □

Recapitulando, temos que dada uma tripla admissível  $(p^0, z^0, x^0)$  podemos estender essa tripla continuamente, inclusive diferenciavelmente, numa vizinhança de  $x^0$ , contida em  $\Gamma$ . Dessa forma podemos resolver as equações do sistema característico, ao menos localmente.

### Soluções locais

Uma vez que para cada  $y$  próximo de  $x^0$  existe uma solução local para o sistema característico, é natural inserirmos na notação a dependência de  $y$  nas equações de tal sistema. Por isso, para  $\mathbf{p}(s)$ ,  $z(s)$  e  $\mathbf{x}(s)$ , escreva, respectivamente

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(y, s) &= \mathbf{p}(y_1, \dots, y_{n-1}, s) \\ z(y, s) &= z(y_1, \dots, y_{n-1}, s) \\ \mathbf{x}(y, s) &= \mathbf{x}(y_1, \dots, y_{n-1}, s) \end{aligned}$$

onde  $\mathbf{x}(y, 0) = y$ ,  $z(y, 0) = g(y)$  e  $\mathbf{p}(y, 0) = \mathbf{q}(y)$ .

O lema a seguir nos garantirá que ao encontrarmos a solução das EDO's características em função de  $y$  e  $s$ , poderemos inverter a solução para torná-la dependente de  $\mathbf{x}$ .

**Lema 1.11.** *(Invertibilidade local) Assuma que  $f_{p_n}(p^0, z^0, x^0) \neq 0$ . Então, a função  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um difeomorfismo local.*

*Demonstração.* Avalie a função  $\mathbf{x}$  no ponto  $(x^0, 0)$ .

Note que  $\det [D\mathbf{x}(x^0, 0)] \neq 0$ . De fato, sabemos que  $\mathbf{x}(y, 0) = y$ , onde, para  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ , temos

$$\frac{\partial x_j}{\partial y_i}(x^0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Pela equação característica (1.19(c)), temos que

$$\frac{\partial x_j}{\partial s}(x^0, 0) = D_{p_j} f(p^0, z^0, x^0) = f_{p_j}(p^0, z^0, x^0)$$

e assim, calculando o determinante de

$$D\mathbf{x}(x^0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & f_{p_1}(p^0, z^0, x^0) \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & f_{p_{n-1}}(p^0, z^0, x^0) \\ 0 & \cdots & 0 & f_{p_n}(p^0, z^0, x^0) \end{pmatrix},$$

segue que

$$\det [D\mathbf{x}(x^0, 0)] = f_{p_n}(p^0, z^0, x^0) \neq 0,$$

por hipótese.

Pelo Teorema da Função Inversa, existem um intervalo aberto  $I \subset \mathbb{R}$  contendo 0, uma vizinhança  $W$  de  $x^0$  em  $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n-1}$  e uma vizinhança  $V$  de  $x^0$  em  $\mathbb{R}^n$ , tais que, para cada  $x \in V$ , existem únicos  $s \in I$  e  $y \in W$  de modo que

$$x = \mathbf{x}(y, s),$$

como queríamos. □

Decorre deste resultado que para cada  $x \in V$  podemos resolver localmente, de maneira única, a equação

$$x = \mathbf{x}(y, s)$$

para  $y = \mathbf{y}(x)$  e  $s = \mathbf{s}(x)$ . A partir desse fato, para  $x \in V$  e  $y, s$  como foi descrito, definimos

$$\begin{cases} u(x) & := & z(\mathbf{y}(x), \mathbf{s}(x)) \\ \mathbf{p}(x) & := & \mathbf{p}(\mathbf{y}(x), \mathbf{s}(x)) \end{cases}.$$

**Teorema 1.12.** (*Existência de solução local*) A função  $u$  definida como

$$u(x) := z(y(x), s(x))$$

é  $C^2$  e resolve a equação  $f(Du(x), u(x), x) = 0$ , para  $x \in V$ , com condição de fronteira

$$u(x) = g(x) \quad \text{se} \quad x \in \Gamma \cap V.$$

*Demonstração.* Fixe  $y \in \Gamma$  perto de  $x^0$  de modo que solucione o sistema característico

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}} &= -D_{\mathbf{x}}f - D_z f \\ \dot{z} &= D_p f \cdot \mathbf{p} \\ \dot{\mathbf{x}} &= D_{\mathbf{p}}f \end{cases}$$

onde  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(y, s)$ ,  $z = z(y, s)$  e  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(y, s)$ , tendo como condições de iniciais  $\mathbf{p}(0) = \mathbf{q}(y)$ ,  $z(0) = g(y)$  e  $\mathbf{x}(0) = y$ .

Defina  $\tilde{f}(y, s) := f(\mathbf{p}(y, s), z(y, s), \mathbf{x}(y, s))$  com  $s \in \mathbb{R}$ .

**Afirmção 1:**  $\tilde{f}(y, s) = 0$ .

De fato, para  $s = 0$ , temos  $\tilde{f}(y, 0) = f(\mathbf{p}(y, 0), z(y, 0), \mathbf{x}(y, 0)) = f(\mathbf{q}(y), g(y), y)$ .

Como, pelo Lema 1.10, temos que  $(\mathbf{q}(y), g(y), y)$  é uma tripla admissível, concluímos que  $\tilde{f}(y, 0) = 0$ .

Além disso,

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial s} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial p_j} \dot{p}_j + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \dot{x}_j.$$

Usando as equações características, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial s} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial p_j} \left( -\frac{\partial f}{\partial z} \dot{p}_j - \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial f}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial p_j} \\ &= 0, \end{aligned}$$

o que nos diz que  $\tilde{f}$  é constante em relação a  $s$ . Uma vez que vimos que  $\tilde{f}$  se anula no bordo, provamos a afirmação.

Tendo  $f(\mathbf{p}(y, s), z(y, s), \mathbf{x}(y, s)) = 0$  e denotando por

$$x(y, s) = x \text{ e } z(y(x), s(x)) = u(x),$$

obtemos

$$f(\mathbf{p}(x), z(x), x) = 0.$$

Resta-nos provar que  $\mathbf{p}(x) = Du(x)$  para  $x \in V$ .

**Afirmção 2:**

$$\frac{\partial z}{\partial s}(y, s) = \sum_{j=1}^n p_j(y, s) \frac{\partial x_j}{\partial s}(y, s).$$



Segue diretamente do uso das duas últimas equações do sistema característico que

$$\dot{z}(y, s) = D_p f(y, s) \cdot \mathbf{p}(y, s) = \sum_{j=1}^n p_j(y, s) \frac{\partial x_j}{\partial s}(y, s).$$

**Afirmção 3:**

$$\frac{\partial z}{\partial y_i}(y, s) = \sum_{j=1}^n p_j(y, s) \frac{\partial x_j}{\partial y_i}(y, s) \text{ para todo } i \in \{1, \dots, n-1\}$$

De fato, fixado  $y \in \Gamma$  e para todo  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ , defina

$$r_i(s) := \frac{\partial z}{\partial y_i} - \sum_{j=1}^n p_j(y, s) \frac{\partial x_j}{\partial y_i}(y, s).$$

A ideia é mostrar que  $\mathbf{r}(s)$  é a função nula. Primeiramente, usando as condições iniciais, note que

$$\begin{aligned} r_i(0) &= \frac{\partial z}{\partial y_i} - \sum_{j=1}^n p_j(y, 0) \frac{\partial x_j}{\partial y_i}(y, 0) \\ &= g_{x_i}(y) - \sum_{j=1}^n q_j(y) \delta_{ij} = g_{x_i} - q_i(y) \end{aligned}$$

e, pelas condições de compatibilidade (1.30),  $r_i(0) = 0$ . Já para  $s \neq 0$ ,

$$\frac{\partial r_i}{\partial s}(s) = \frac{\partial^2 z}{\partial s \partial y_i}(y, s) - \sum_{j=1}^n \left[ \dot{p}_j \frac{\partial x_j}{\partial y_i}(y, s) + p_j(y, s) \frac{\partial^2 x_j}{\partial s \partial y_i}(y, s) \right]. \quad (1.33)$$

Por outro lado, utilizando a segunda equação do sistema característico na segunda igualdade abaixo,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s \partial y_i}(y, s) = \frac{\partial}{\partial y_i} \dot{z}(y, s) = \frac{\partial}{\partial y_i} [D_p f(\mathbf{q}(y), g(y), y) \cdot \mathbf{p}(y, s)],$$

agora, pela terceira equação característica e pela regra da cadeia,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s \partial y_i}(y, s) = \sum_{j=1}^n \left[ \frac{\partial p_j}{\partial y_i}(y, s) \frac{\partial x_j}{\partial s}(y, s) + p_j(y, s) \frac{\partial^2 x_j}{\partial y_i \partial s}(y, s) \right]. \quad (1.34)$$

Substituindo (1.34) em (1.33), obtemos a igualdade

$$\dot{r}_i(s) = \sum_{j=1}^n \left[ \frac{\partial p_j}{\partial y_i} \frac{\partial x_j}{\partial s} - \frac{\partial p_j}{\partial s} \frac{\partial x_j}{\partial y_i} \right](y, s).$$

Usando as equações características, (1.19-c) e (1.19-a) respectivamente, na expressão acima,

$$\dot{r}_i(s) = \sum_{j=1}^n \left[ \frac{\partial p_j}{\partial y_i} \frac{\partial f}{\partial p_j} - \left( -\frac{\partial f}{\partial z} p_j - \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \frac{\partial x_j}{\partial y_i} \right],$$

ou seja,

$$\dot{r}_i(s) = \sum_{j=1}^n \left[ \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial y_i} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial x_j}{\partial y_i} p_j + \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial y_i} \right]. \quad (1.35)$$

Observe que se derivarmos  $\tilde{f}(y, s)$  com respeito a  $y_i$ ,

$$\sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial y_i} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y_i} + \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial y_i} \right) = 0$$

e comparamos com a equação (1.35), obteremos

$$\begin{aligned} \dot{r}_i(s) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial x_j}{\partial y_i} p_j + \left( -\frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y_i} \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial z} \left[ \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial y_i} p_j - \frac{\partial z}{\partial y_i} \right] \\ &= -\frac{\partial f}{\partial z} r_i(s), \end{aligned}$$

que é uma equação diferencial ordinária linear. Unindo essa informação ao fato de que  $r_i(0) = 0$ , temos uma EDO linear homogênea com condição inicial. Então, pelo Teorema de Picard, concluímos que  $r \equiv 0$ , finalizando nossa afirmação.

Perceba que, para  $j \in \{1, \dots, n-1\}$ ,

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} [z(y(x), s(x))] = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial z}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} + \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x_j}$$

e usando as afirmações 3 e 2, respectivamente, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_j} &= \sum_{i=1}^{n-1} \left( \sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial x_k}{\partial y_i} \right) \frac{\partial y_i}{\partial x_j} + \left( \sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial x_k}{\partial s} \right) \frac{\partial s}{\partial x_j} \\ &= \sum_{k=1}^n p_k \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial x_k}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} + \frac{\partial x_k}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial x_k}{\partial x_j} = p_j, \end{aligned}$$

pois,

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{se } k = j \\ 0, & \text{se } k \neq j \end{cases}.$$

Portanto,

$$Du(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^n p_j = \mathbf{p}(x).$$

□

Veja agora a aplicação do Teorema 1.12 para garantir a existência de solução local para as equações diferenciais parciais de 1ª ordem.

### Existência de soluções locais para EDP's lineares

Estudemos a equação

$$f(Du, u, x) = b(x) \cdot Du(x) + c(x) \cdot u(x) = 0, \quad (1.36)$$

onde  $x \in U$  sujeita à condição de fronteira

$$u = g \text{ em } \Gamma.$$

Assumindo que  $\Gamma$  é não-característica, para  $x^0 \in \Gamma$ , temos que

$$D_p f(p^0, z^0, x^0) \cdot \nu(x^0) \neq 0,$$

logo,  $b(x^0) \cdot \nu(x^0) \neq 0$ .

Além disso, pela condição de fronteira  $u = g$  em  $\Gamma$ , existe  $q : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$  que resolve unicamente o sistema

$$\begin{cases} q_i(y) = g_{x_i}(y) & \text{para } i \in \{1, \dots, n-1\} \\ f(\mathbf{q}(y), g(y), y) = 0 \end{cases},$$

para  $y \in \Gamma$  pertencente a uma vizinhança de  $x^0$ . Aplicando o Teorema 1.12, construímos uma solução para a equação (1.36) satisfazendo à condição inicial estabelecida.

Observe que as curvas características  $\mathbf{x}(\cdot)$ , partindo de diferentes pontos em  $\Gamma$ , não podem se cruzar devido à unicidade das soluções da equação característica

$$\dot{\mathbf{x}}(s) = b(\mathbf{x}(s)).$$

A unicidade é garantida através da expressão  $b(\mathbf{x}(s)) = D_p F(p^0, z^0, x^0)$ , que vimos anteriormente. Como  $F$  é uma função suave e o teorema garante existência local, temos

que  $D_b(\mathbf{x}(s)) = D_p^2 F(p^0, z^0, x^0)$  é limitada, logo, a função  $b(\cdot)$  é lipschitz contínua e assim podemos aplicar o Teorema de Picard para existência e unicidade locais de EDO's.

### Existência de soluções locais para EDP's quasilineares

Seja

$$f(Du, u, x) = b(x, u) \cdot Du + c(x, u) = 0 \quad (1.37)$$

onde  $u = u(x)$  e  $x \in U$ . Assumindo que  $\Gamma \subset \partial U$  é não-característica, temos

$$b(x^0, z^0) \cdot \nu(x^0) \neq 0,$$

onde  $z^0 = g(x^0)$ .

Especificando a condição de fronteira  $u = g$  em  $\Gamma$ , podemos resolver unicamente o sistema relacionado à condição de compatibilidade,

$$\begin{cases} q_i(y) = g_{x_i}(y) & \text{para } i \in \{1, \dots, n-1\} \\ f(\mathbf{q}(y), g(y), y) = 0 \end{cases},$$

para  $\mathbf{q}(y)$ , com  $y \in \Gamma$  numa vizinhança de  $x^0$ . Assim, pelo Teorema (1.12), garantimos a existência de uma solução para a equação (1.37) com a condição de fronteira dada.

Como vimos anteriormente, o sistema característico para  $f$  quasilinear se reduz ao sistema de EDO's

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(s) = b(\mathbf{x}(s), z(s)) \\ \dot{z}(s) = -c(\mathbf{x}(s), z(s)) \end{cases}.$$

Para o caso em que a função  $g$  da condição inicial não é contínua, podemos ter o cruzamento de curvas características para uma EDP quasilinear. Veremos mais adiante alguns exemplos onde isso acontece.

**Exemplo 1.13.** (*Características para leis de conservação*) Seja

$$G(Du, u_t, u, x, t) = u_t + \operatorname{div} F(u) = u_t + F'(u) \cdot Du = 0 \quad (1.38)$$

no conjunto  $U := \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ , sujeito à condição inicial

$$u = g \quad \text{em} \quad \Gamma := \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}.$$

A notação 'div' representa o divergente da função  $F$  com respeito à variável espacial  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , onde a função  $F$  representa o fluxo, com  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Consideraremos  $t = x_{n+1}$  e por isso iremos denotar

$$q = (p, p_{n+1}) \quad \text{e} \quad y = (x, t),$$

lembrando que  $x$  e  $p$  são vetores do  $\mathbb{R}^n$ . A partir dessa notação, reescrevemos a equação (1.38) da seguinte forma

$$G(q, z, y) = p_{n+1} + F'(z) \cdot p = (p, p_{n+1}) \cdot (F'(z), 1),$$

onde as derivadas parciais são dadas por

$$\begin{aligned} D_q G &= (F'(z), 1) \\ D_z G &= F''(z) \cdot p \\ D_y G &= 0. \end{aligned}$$

Veja que a condição de compatibilidade é satisfeita, pois

$$D_{p_{n+1}} G(q^0, z^0, y^0) = 1 \neq 0.$$

Comparando a equação (1.38) com a EDP quasilinear na sua forma geral,  $\mathbf{b}(x, u) \cdot Du(x) + c(x, u) = 0$ , temos que

$$\mathbf{b}(x, u) = (F'(u), 1) \quad e \quad c(x, u) = 0.$$

Relembre que as equações características para EDP's quasilineares são

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{b}(\mathbf{x}(s), z(s)) \\ \dot{z}(s) = -c(\mathbf{x}(s), z(s)) \end{cases}.$$

A partir desse sistema, temos que

$$\dot{\mathbf{x}}(s) = (F'(z), 1) = \begin{cases} a) & \dot{x}_i = F'_i(z) \quad \text{quando } i \in \{1, \dots, n\} \\ b) & \dot{x}_n = 1. \end{cases} \quad (1.39)$$

Resolvendo (1.39(b)), encontramos  $x_{n+1} = s$ , mas, por outro lado, havíamos considerado  $x_{n+1} = t$ . Isso significa que podemos identificar o parâmetro  $s$  com o tempo  $t$ . Por outro lado, solucionando (1.39(a)), obtemos  $x_i = F'_i(z)s + x_i^0$ . Concluindo assim que

$$\mathbf{x}(s) = F'(z)s + x^0. \quad (1.40)$$

Pela equação (1.19(b)),  $\dot{z}(s) = 0$  e com isso extraímos a informação de que  $z$  é constante ao longo da curva característica  $\mathbf{x}(s)$ . Logo, pela condição de fronteira,  $z(s) = z(0) = z^0 = g(x^0)$ . Substituindo tal expressão em (1.40), obtemos

$$\mathbf{x}(s) = F'(g(x^0))s + x^0 \quad (1.41)$$

e assim, a característica projetada da lei de conservação (1.38) é dada por

$$\mathbf{y}(s) = (\mathbf{x}(s), s) = (F'(g(x^0))s + x^0, s),$$

com  $s > 0$ . Então temos que as curvas características para leis de conservação são retas, onde a solução  $u$  é constante.

**Observação 1.14.** Podemos encontrar uma fórmula implícita para a solução  $u$  da lei de conservação do exemplo anterior a partir das expressões

$$\mathbf{x}(s) = F'(g(x^0))s + x^0 \quad e \quad z(s) = g(x^0).$$

Basta eliminarmos o parâmetro  $s$ .

Com efeito, dado  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $t > 0$ , uma vez que podemos tomar  $s = t$ ,

$$z(s) = z(t) = g(x^0) = g(\mathbf{x}(t) - tF'(z^0)) = g(\mathbf{x}(t) - tF'(u(\mathbf{x}(t), t))),$$

ou seja,

$$u(x, t) = g(x - tF'(u)). \quad (1.42)$$

Para o caso unidimensional, devemos conseguir escrever a solução  $u$  em função das variáveis  $x$  e  $t$ . Para isso, defina a aplicação

$$T(u, x, t) = u - g(x - tF'(u)) = 0,$$

a qual, pelo Teorema da Aplicação Implícita, deve satisfazer

$$\frac{\partial T}{\partial u} \neq 0,$$

logo,

$$1 + g'(x - tF'(u))tF''(u) \neq 0,$$

ou, equivalentemente,

$$t \neq -\frac{1}{g'(x - tF'(u))F''(u)}. \quad (1.43)$$

Uma vez que  $t > 0$ , note que, se  $F'' > 0$  ( $F$  for convexa) e  $g' < 0$ , então a expressão (1.43) será falsa para algum tempo  $t > 0$ . Ou seja, não conseguiremos exibir uma solução  $u$  dada pelo método das características em função de  $x$  e  $t$  para algum  $t$ , como o representado em (1.43). Essa falha da fórmula implícita para  $u$  reflete a falha do método das características. Devido a esse fato, nos próximos capítulos, tentaremos resolver leis de conservação para os casos em que a função fluxo,  $F$ , seja convexa.

## Existência de solução local para equações totalmente não lineares

Para este tipo de equação diferencial parcial o sistema característico pode ser um tanto complicado, mas, a depender do caso, podemos ‘montar’ uma estrutura matemática. Um caso que podemos resolver, por exemplo, é o da **equação de Hamilton-Jacobi** que, em sua forma geral, é dada por

$$G(Du, u_t, u, x, t) = u_t + H(Du, x) = 0, \quad (1.44)$$

onde  $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função suave.

**Exemplo 1.15.** (*Características para a equação de Hamilton-Jacobi*)

Denotando  $q := (p, p_{n+1})$  e  $y := (x, t)$  podemos reescrever a equação (1.44) como

$$G(q, z, y) = p_{n+1} + H(p, x),$$

onde suas derivadas parciais são

$$D_q G = (D_p H(p, x), 1), \quad D_z G = 0 \quad e \quad D_y G = (D_x H(p, x), 0).$$

Pelo sistema característico na sua forma geral, a partir da equação da característica projetada adaptada para este caso, temos

$$\dot{y}(s) = D_q G(q(s), z(s), y(s))$$

implicando que

$$\begin{cases} \dot{x}_i(s) = \frac{\partial H}{\partial p_i}(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)) & \text{para } i \in \{1, \dots, n\} \\ \dot{x}_{n+1}(s) = 1 \end{cases}.$$

Novamente poderemos identificar o parâmetro  $s$  com o tempo  $t$ , devido a última equação do sistema acima. Já a equação característica

$$\dot{q}(s) = -D_y G(\mathbf{q}(s), z(s), \mathbf{y}(s)) - D_z G(\mathbf{q}(s), z(s), \mathbf{y}(s)) \cdot \mathbf{q}(s),$$

nos diz que

$$\begin{cases} \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}(p, x) & \text{para } i \in 1, \dots, n \\ \dot{p}_{n+1} = 0 \end{cases}.$$

Observe que, como  $(q, z, y) \in U$  satisfaz a equação  $G(q, z, y) = 0$ , temos

$$p_{n+1} + H(p, x) = 0,$$

logo,  $p_{n+1} = -H(p, x)$ . Com isso, a segunda equação do sistema característico geral,

$\dot{z}(s) = D_q G(q(s), z(s), y(s)) \cdot q$ , estabelece que

$$\begin{aligned}\dot{z}(s) &= (D_p H, 1) \cdot (p, p_{n+1}) = D_p H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)) \cdot \mathbf{p}(s) + p_{n+1}(s) \\ &= D_p H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)) \cdot \mathbf{p}(s) - H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)).\end{aligned}$$

Em resumo, encontramos que o sistema característico para as equações de Hamilton-Jacobi são

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}}(s) = -D_x H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)) \\ \dot{z}(s) = D_p H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)) \cdot \mathbf{p}(s) - H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)) \\ \dot{\mathbf{x}}(s) = D_p H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)) \end{cases},$$

com  $\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s) \in \mathbb{R}^n$  e  $z(s) \in \mathbb{R}$ .

Onde denominamos as seguinte equações

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}}(s) = -D_x H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)) \\ \dot{\mathbf{x}}(s) = D_p H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)) \end{cases}$$

de equações de Hamilton.

Perceba que a equação para encontrar  $z(\cdot)$  se torna trivial ao resolvermos as equações de Hamilton, onde encontramos  $\mathbf{x}(\cdot)$  e  $\mathbf{p}(\cdot)$ .

**Observação 1.16.** Do mesmo modo que para as leis de conservação, o problema de valor inicial para a equação de Hamilton-Jacobi, em geral, não possui solução suave para todos os tempos  $t > 0$ .

### 1.2.3 Limitações do método das características

Como vimos anteriormente, em alguns casos o método das características não nos fornece informações precisas sobre a solução de uma EDP em parte de seu domínio de definição. Classificaremos tais limitações de acordo com a falta de informação ou ao choque de informações distintas sobre a mesma solução.

Dizemos que há uma **onda de rarefação** no domínio de uma equação diferencial parcial, quando as retas características não existem em parte desse domínio. Veja o exemplo a seguir.

**Exemplo 1.17.** (Ondas de rarefação) Resolvamos o seguinte problema

$$\begin{cases} u_t + \frac{1}{2}(u^2)_x = 0 & \text{em } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = |x| & \text{em } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}. \quad (1.45)$$

Aqui, o Hamiltoniano é dado por  $H(p) = \frac{1}{2}p^2$ . Lembremos que podemos identificar o parâmetro  $s$  com o tempo  $t$ .



Para este problema, com base no exemplo para equações de Hamilton vistas anteriormente, as equações características são:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}}(s) = 0 \\ \dot{z}(s) = D_p H(\mathbf{p}(s)) \cdot p - H(p) = \frac{1}{2}(p^0)^2 \\ \dot{\mathbf{x}}(s) = D_p H(\mathbf{p}(s)) = p^0 \end{cases} .$$

Logo, as características projetadas são as retas

$$\mathbf{x}(s) = p^0 s + x^0,$$

onde  $p^0 = Du(x, 0) = g'(x)$  e então, os possíveis valores para  $p^0$  são

$$p^0 = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases} .$$

Com base nisso, temos duas soluções.

**Caso  $x > 0$ :**

As curvas características são do tipo  $x(t) = t + x^0 > 0$ , ou seja,  $x^0 = x - t > 0$  e então  $x > t$ . A segunda equação características nos fornece  $\dot{z}(s) = \frac{1}{2}$  e daí,  $z(s) = \frac{1}{2}s + z^0$ . Em termos de  $x$  e  $t$ , temos

$$u(x, t) = \frac{1}{2}t + |x - t| = \frac{1}{2}t + x - t = x - \frac{1}{2}t, \quad x > t.$$

**Caso  $x < 0$ :**

As características projetadas são dadas por  $x(t) = -t + x^0 < 0$ , logo  $x^0 = x + t < 0$  e  $t < -x$ . Obtemos também que  $\dot{z}(s) = -\frac{1}{2}s + z^0$  e então

$$z(s) = -\frac{1}{2}s + z^0 = -\frac{1}{2}s + |x + t|.$$

A solução dependente das variáveis  $x$  e  $t$  é então

$$u(x, t) = -x - \frac{3}{2}t, \quad t < -x.$$

Observe que acima das retas  $-x = t$  e  $x = t$  existe uma região que não possui curvas características e assim não podemos indicar a solução  $u$  do problema. Ver Figura (1.5).

Já para o caso em que há o cruzamento de curvas características em alguma parte do domínio, chamamos esse evento de **ondas de choque**. Para efeito de exemplo, considere o Exemplo (1.17) mudando apenas a condição de fronteira para  $g(x) = -|x|$ .

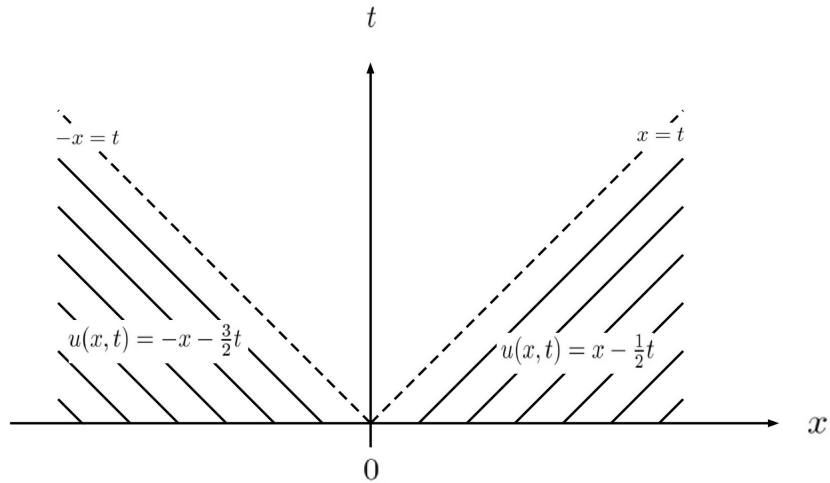


Figura 1.5: Ondas de rarefação

**Exemplo 1.18.** Para o problema

$$\begin{cases} u_t + \frac{1}{2}(u^2)_x = 0 & \text{em } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = -|x| & \text{em } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}, \quad (1.46)$$

teremos o seguinte esboço de curvas características:

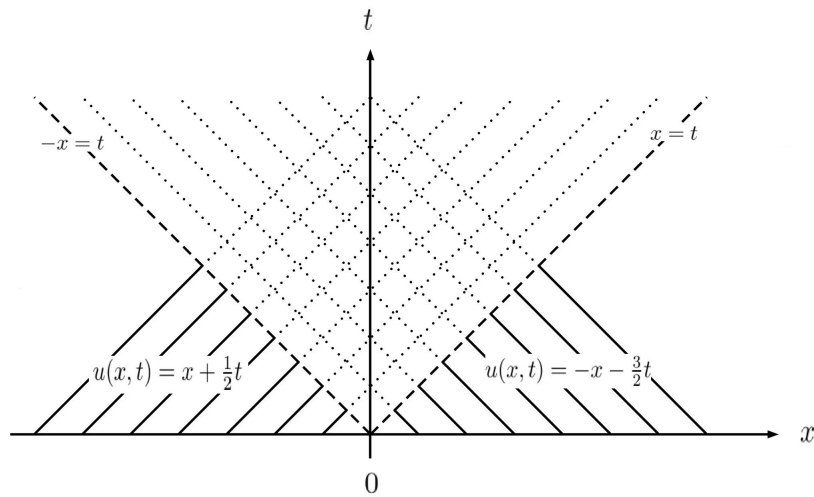


Figura 1.6: Cruzamento de retas características

Daí, haveria uma incerteza quanto às informações sobre o valor da solução  $u$ , acima das retas  $x = t$  e  $-x = t$ .

Para reverter tais situações, no próximo capítulo desenvolveremos uma teoria que nos possibilitará, mais adiante, estender a solução de uma lei de conservação, encontrada pelo método das características, para todo o domínio da EDP.

# Capítulo 2

## Equações de Hamilton-Jacobi

### 2.1 Equações de Hamilton-Jacobi

Neste capítulo estudaremos a equação de Hamilton-Jacobi. Já sabemos que para equações não-lineares o método das características pode falhar para algum tempo  $t > 0$ . O intuito aqui é estender a solução para todos os tempos, mesmo que a suavidade não seja mantida. Para isso construiremos a Teoria de Hamilton-Jacobi e com ela, mais adiante, teremos suporte para alcançar o objetivo desejado.

#### 2.1.1 Motivação

Lembre-se que nosso intuito é resolver o problema envolvendo uma lei de conservação com condição inicial

$$\begin{cases} u_t + F(u)_x = 0 & \text{em } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = g & \text{em } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases} . \quad (2.1)$$

Se resolvermos o problema

$$\begin{cases} w_t + F(w_x) = 0 & \text{em } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ w = h & \text{em } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases} , \quad (2.2)$$

quase teremos a solução de (2.1). A diferença entre os dois problemas se dá pela presença da derivação do fluxo  $F$  com respeito à variável espacial em (2.1) e pela falta de tal derivação em (2.2).

Observe que se derivarmos as equações de (2.2) com relação a variável  $x$ , teremos

$$\begin{cases} w_{xt} + F(w_x)_x = 0 & \text{em } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ w_x = g & \text{em } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases} , \quad (2.3)$$

desde que

- a)  $w \in C^2$ , para que seja possível a inversão da ordem das derivações com respeito às variáveis  $x$  e  $t$ ;
- b)  $h : \mathbb{R} \times \{t = 0\} \rightarrow \mathbb{R}$  seja tal que

$$h(x) = \int_0^x g(y)dy,$$

para  $g \in L^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ .

Dessa forma, tomando  $u = w_x$ , podemos estudar o problema (2.3) para encontrarmos solução de (2.1).

O problema (2.3), na sua forma geral, corresponde ao problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + H(Du, x) = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = g & \text{em } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}, \quad (2.4)$$

onde  $u : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função desconhecida, dependendo da variável espacial  $x$  e do tempo  $t$ ;  $Du$  representa o gradiente da função  $u$  com respeito à variável  $x$  e  $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função suave, chamada de **Hamiltoniano**.

Como vimos no último exemplo do capítulo anterior, para uma equação de Hamilton-Jacobi

$$G(Du, u_t, u, x, t) = u_t + H(Du, x) = 0 \quad (2.5)$$

o sistema característico é dado por

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}}(s) = -D_x H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)) \\ \dot{z}(s) = D_p H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)) \cdot \mathbf{p}(s) - H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)) \\ \dot{\mathbf{x}}(s) = D_p H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)) \end{cases}. \quad (2.6)$$

Chamamos de **equações de Hamilton** às seguintes equações

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}}(s) = -D_x H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)) \\ \dot{\mathbf{x}}(s) = D_p H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)) \end{cases}. \quad (2.7)$$

## 2.1.2 Cálculo de variações

O modo como definiremos o novo conceito de solução para o problema envolvendo a equação (2.5) será sugerido pelo cálculo de variações. A ligação entre esses dois conceitos será dada através da íntima relação entre duas funções envolvidas específicas, o já conhecido Hamiltoniano e o Lagrangiano, que será definida a seguir.

Considere  $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave, que chamaremos de **Lagrangiano**, onde

$$L = L(q, x) \quad \text{com } q, x \in \mathbb{R}^n.$$

Agora denote  $q = \dot{\mathbf{w}}(s)$  e  $x = \mathbf{w}(s)$ , para  $s \in [0, t]$ , onde  $\mathbf{w} : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Dados  $x, y \in \mathbb{R}^n$  e  $t > 0$ , definimos uma **ação funcional**  $I : A \rightarrow \mathbb{R}$ , como sendo

$$I[\mathbf{w}] = \int_0^t L(\dot{\mathbf{w}}(s), \mathbf{w}(s)) ds, \quad (2.8)$$

onde o domínio da ação é o conjunto

$$A = \{ \mathbf{w}(\cdot) \in C^2([0, t]; \mathbb{R}^n); \quad \mathbf{w}(0) = y \quad e \quad \mathbf{w}(t) = x \},$$

ao qual chamamos de **classe admissível**.

Um problema básico em cálculo de variações é encontrar uma curva  $\mathbf{x} \in A$  que minimize o funcional  $I[\cdot]$ , ou seja,

$$I[\mathbf{x}] = \min_{\mathbf{w} \in A} I[\mathbf{w}].$$

E é exatamente sobre a abordagem de minimização de funcionais que vamos desenvolver a Teoria de Hamilton-Jacobi.

**Observação 2.1.** *A técnica de solucionar problemas utilizando o minimizador de alguma ação funcional é comum. Um exemplo disso é o Princípio de Dirichlet,*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } U \\ u = g & \text{em } \partial U \end{cases},$$

cuja solução é dada pela função  $u$  minimizadora do funcional de energia

$$E[w] = \int_U \frac{1}{2} |Dw|^2 - w f dx,$$

com  $w$  pertencente ao conjunto

$$A = \{ w \in C^2; w = g \text{ em } \partial U \}.$$

Assumamos que exista uma função  $\mathbf{x} \in A$  que minimize o funcional  $I[\cdot]$ , a partir dessa suposição, vamos inferir algumas de suas propriedades. A primeira delas, descrita no teorema a seguir, nos diz que a solução minimizadora de  $I[\cdot]$  é também solução de uma outra equação, as equações de Euler-Lagrange.

**Teorema 2.2.** *Seja  $\mathbf{x}$  um mínimo da ação  $I[\cdot]$ . Então, a curva  $\mathbf{x}$  é solução para o sistema de equações de Euler-Lagrange (E-L)*

$$-\frac{d}{ds} (D_q L(\dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s))) + D_x L(\dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s)) = 0, \quad (2.9)$$

com  $s \in [0, t]$ .

*Demonstração.* Considere uma função  $\mathbf{v} \in C_0^\infty([0, t]; \mathbb{R}^n)$ , ou seja,  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}(t) = 0$ , e onde  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ . Defina, para  $\xi \in \mathbb{R}$ , a curva

$$\mathbf{w} = \mathbf{x} + \xi \mathbf{v}.$$

Veja que  $\mathbf{w} \in A$ . De fato, sendo  $\mathbf{x} \in A$  e  $\mathbf{v} \in C^\infty$ , garantimos que  $\mathbf{w} \in C^2$ . Além disso, usando o suporte de  $\mathbf{v}$ , temos que  $\mathbf{w}(0) = \mathbf{x}(0)$  e  $\mathbf{w}(t) = \mathbf{x}(t)$ . Uma vez que  $\mathbf{w} \in A$ , e pelo fato de  $\mathbf{x}$  ser minimizador da ação, temos

$$I[\mathbf{x}] \leq I[\mathbf{w}].$$

Agora defina  $i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de modo que

$$i(\xi) = I[\mathbf{x} + \xi \mathbf{v}].$$

Note que  $i$  atinge seu mínimo em  $\xi = 0$ , daí,  $i'(0) = 0$  por ser ponto crítico, onde denotamos  $' = \frac{d}{d\xi}$ .

Usando a definição da ação funcional, reescrevamos o raciocínio anterior,

$$i(\xi) = \int_0^t L(\dot{\mathbf{x}}(s) + \xi \dot{\mathbf{v}}(s), \mathbf{x}(s) + \xi \mathbf{v}(s)) ds. \quad (2.10)$$

Derivando (2.10) em relação à variável  $\xi$ , usando a regra da cadeia, obtemos

$$i'(\xi) = \int_0^t \sum_{j=1}^n L_{q_j}(\dot{\mathbf{x}} + \xi \dot{\mathbf{v}}, \mathbf{x} + \xi \mathbf{v}) \dot{v}_j + L_{x_j}(\dot{\mathbf{x}} + \xi \dot{\mathbf{v}}, \mathbf{x} + \xi \mathbf{v}) v_j ds,$$

logo,

$$0 = i'(0) = \int_0^t \sum_{j=1}^n L_{q_j}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) \dot{v}_j ds + \int_0^t \sum_{j=1}^n L_{x_j}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) v_j ds. \quad (2.11)$$

Integrando por partes o primeiro termo de (2.11), temos

$$\int_0^t \sum_{j=1}^n L_{q_j}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) \dot{v}_j ds = L_{q_j}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) v_j \Big|_{s=0}^{s=t} - \int_0^t v_j L'_{q_j}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) ds,$$

e pelo fato de  $\mathbf{v}$  ter suporte compacto, concluímos que

$$\int_0^t \sum_{j=1}^n L_{q_j}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) \dot{v}_j ds = - \int_0^t \frac{d}{ds} (L_{q_j}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x})) v_j ds.$$

Substituindo essa informação em (2.11) obtemos

$$0 = \int_0^t \sum_{j=1}^n \left[ -\frac{d}{ds} (L_{q_j}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x})) + L_{x_j}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) \right] v_j ds \quad (2.12)$$

e como a expressão (2.12) é válida para toda  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in C_0^\infty([0, t])$ , conseqüentemente,

$$-\frac{d}{ds} (L_q(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x})) + L_x(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) = 0, \quad (2.13)$$

com  $0 \leq s \leq t$ . □

**Observação 2.3.** *No teorema anterior, mostramos que todo minimizador da ação funcional é solução para a equação de Euler-Lagrange, mas a recíproca não é verdadeira. Chamamos a solução de (E-L) que não necessariamente é um minimizador de **ponto crítico**.*

### 2.1.3 EDO's de Hamilton

Aqui, converteremos as equações de Euler-Lagrange num sistema de  $n$  equações diferenciais ordinárias de 2ª ordem, afim de, a partir delas, voltarmos às equações características para a EDP de Hamilton-Jacobi. Além disso, apresentarmos uma relação entre Hamiltoniano e Lagrangiano.

Considere uma curva  $\mathbf{x} \in C^2$  sendo um ponto crítico. Defina

$$p(s) := D_q L(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) \quad (2.14)$$

para  $s \in [0, t]$ . Considere também a seguinte hipótese, que será bastante relevante para nossos próximos passos:

**Hipótese:** Suponha que para todo  $p, x \in \mathbb{R}^n$  exista um único  $q = \mathbf{q}(p, x)$  que satisfaça a equação

$$p = D_q L(\mathbf{q}(p, x), x) \quad (2.15)$$

e além disso, que o mapa  $(p, x) \mapsto \mathbf{q}(p, x)$  seja suave.

**Definição 2.4.** *Definimos o **Hamiltoniano**  $H = H(p, x)$  associado ao Lagrangiano  $L$  por meio da equação*

$$H(p, x) := p \cdot \mathbf{q}(p, x) - L(\mathbf{q}(p, x), x) \quad (2.16)$$

para todo  $p, x \in \mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{q}$  sendo definido implicitamente como em (2.15).

Para elucidar a definição, estudemos o seguinte exemplo.

**Exemplo 2.5.** O Hamiltoniano associado ao Lagrangiano

$$L(q, x) = \frac{1}{2}m|q|^2 - \Phi(x),$$

onde  $m > 0$ . é dado por

$$H(p, x) = \frac{1}{2m}|p|^2 + \Phi(x), \quad (2.17)$$

para alguma função  $\Phi$ . Com efeito, já sabemos que

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{1}{2}2m|q| \cdot \frac{q_i}{|q|} = m \cdot q_i$$

daí,  $p = mq$  e assim,  $q = \frac{p}{m}$ . Substituindo essa informação na fórmula do Hamiltoniano, obtemos a expressão (2.17).

O próximo resultado nos ajuda a reescrever as equações de Euler-Lagrange em termos de  $\mathbf{x}(\cdot)$  e  $\mathbf{p}(\cdot)$ .

**Teorema 2.6.** (Obtenção alternativa para as EDO's de Hamilton) As funções  $\mathbf{x}(\cdot)$  e  $\mathbf{p}(\cdot) = D_q L(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x})$  satisfazem às EDO's de Hamilton:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(\cdot) = D_p H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)) \\ \dot{\mathbf{p}}(\cdot) = -D_x H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)) \end{cases} \quad (2.18)$$

para todo  $0 \leq s \leq t$ . Além disso, a aplicação  $s \mapsto H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s))$  é constante.

*Demonstração.* Considere aqui  $H$  como sendo o Hamiltoniano associado ao Lagrangiano  $L$ , ou seja,

$$H(p, x) := p \cdot \mathbf{q}(p, x) - L(\mathbf{q}(p, x), x).$$

Em seguida, calculemos as derivadas parciais de  $H$ .

$$\begin{aligned} (i) \quad \frac{\partial H}{\partial x_i}(p, x) &= \sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial q^k}{\partial x_i}(p, x) - \left[ \frac{\partial L}{\partial q^k}(q(p, x), x) \frac{\partial q^k}{\partial x_i} + \frac{\partial L}{\partial x_i}(q(p, x), x) \right] \\ &= \sum_{k=1}^n \left[ p_k \frac{\partial q^k}{\partial x_i}(p, x) - \frac{\partial L}{\partial q^k}(q(p, x), x) \frac{\partial q^k}{\partial x_i}(p, x) \right] - \frac{\partial L}{\partial x_i}(q(p, x), x). \end{aligned}$$

Uma vez que  $p = D_q L(q, x) = \frac{\partial L}{\partial q}(q, x)$ , obtemos que

$$\frac{\partial H}{\partial x_i}(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)) = -\frac{\partial L}{\partial x_i}(\mathbf{q}(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)), \mathbf{x}(s)).$$

Note que

$$\dot{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{q}(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)). \quad (2.19)$$



De fato, por (2.15) temos que a equação  $p(s) = D_q L(q, x)$  tem única solução  $(q, x)$  e, por outro lado, por (2.14),  $\mathbf{p}(s) = D_q L(\dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s))$ . Sendo assim,  $(q, x) = (\dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s))$ , em particular,  $\dot{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{q}(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s))$ .

Disso, segue que

$$\frac{\partial H}{\partial x_i}(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)) = -\frac{\partial L}{\partial x_i}(\dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s)).$$

Pela equação (E-L), obtemos

$$\frac{\partial H}{\partial x_i}(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)) = -\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i}(\dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s)) \right)$$

e, usando o fato de que

$$\mathbf{p}(s) = D_q L(\dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s)), \quad (2.20)$$

concluimos que

$$\frac{\partial H}{\partial x_i}(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)) = -\dot{p}^i(s). \quad (2.21)$$

Com isso, provamos a segunda equação do sistema de EDO's de Hamilton.

(ii) Derivando  $H$  em relação à variável  $p_i$ , temos

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = q_i + \sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial q_k}{\partial p_i} - \frac{\partial L}{\partial q_k}(q, x) \frac{\partial q_k}{\partial p_i}(p, x).$$

Por (2.20), temos

$$\sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial q_k}{\partial p_i} - \frac{\partial L}{\partial q_k}(q, x) \frac{\partial q_k}{\partial p_i}(p, x) = 0.$$

daí,

$$\frac{\partial H}{\partial p_i}(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)) = q^i(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)),$$

Utilizando a informação contida em (2.19), concluimos que

$$\frac{\partial H}{\partial p_i}(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)) = \dot{x}^i(s), \quad (2.22)$$

referente à primeira EDO de Hamilton.

Agora nos resta provar que  $H$  é constante em relação à variável  $s$ . Dado que

$$\frac{d}{ds} H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i}(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)) \frac{\partial p_i}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial x_i}(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)) \frac{\partial x_i}{\partial s}, \quad (2.23)$$

e usando (2.21) e (2.22) em (2.23) temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}H &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}^i + \frac{\partial H}{\partial x_i} \dot{x}^i \\ &= \sum_{i=1}^n -\frac{\partial H}{\partial p_i} \left( \frac{\partial H}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial H}{\partial x_i} \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto,  $s \mapsto H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s))$  é constante.  $\square$

## 2.2 A transformada de Legendre

O objetivo a ser alcançado nessa seção é encontrar uma conexão entre a equação de Hamilton-Jacobi e o problema de cálculo de variações.

A partir de agora assumiremos o Hamiltoniano  $H$  dependendo apenas da variável  $p$ ;  $H = H(p)$ . Com isso, o problema a ser resolvido passa a ser

$$\begin{cases} u_t + H(Du) = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = g & \text{em } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}. \quad (2.24)$$

Suponha que o Lagrangiano  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função convexa. Além disso, considere  $L$  sendo **superlinear**, isto é,

$$\lim_{|q| \rightarrow +\infty} \frac{L(q)}{|q|} = \infty.$$

**Definição 2.7.** Fixado  $p \in \mathbb{R}^n$ , definimos a **transformada de Legendre** de  $L$  como sendo

$$L^*(p) = \sup_{q \in \mathbb{R}^n} \{p \cdot q - L(q)\}. \quad (2.25)$$

**Observação 2.8.** A transformada de Legendre, para todo  $p \in \mathbb{R}^n$ , está bem definida. De fato, vamos provar que o supremo em (2.25) é atingido, logo, garantiremos a existência de  $\tilde{q} \in \mathbb{R}^n$  para o qual  $L^*(p) = p \cdot \tilde{q} - L(\tilde{q})$ .

É suficiente provar que

$$\lim_{|q| \rightarrow \infty} p \cdot q - L(q) = -\infty. \quad (2.26)$$

Devemos provar que, dado  $M > 0$  qualquer, existe  $N > 0$  tal que se  $|q| > N$  então  $p \cdot q - L(q) < -M$ , ou seja, que  $M < L(q) - p \cdot q$ . Da superlinearidade de  $L$ , existe  $N_0 > 0$  de modo que, para  $|q| > N_0$ , temos

$$\frac{L(q)}{|q|} > |p| + 1,$$

logo,

$$L(q) > |p||q| + |q|.$$

Pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que  $|p||q| \geq \langle p, q \rangle = p \cdot q$ , daí, obtemos que

$$L(q) - p \cdot q > |q|.$$

Considerando  $N = \max \{M, N_0\}$  para  $|q| > N$  temos que  $L(q) - p \cdot q > M$  e daí,

$$p \cdot q - L(q) < -M$$

com  $M > 0$ , concluindo assim o que queríamos.

Dado  $p \in \mathbb{R}^n$ , pela Observação 2.8, temos que existe  $\tilde{q}$  dependendo de  $p$ , no qual a função  $q \rightarrow p \cdot q - L(q)$  atinge seu máximo. Dessa forma,

$$D(p \cdot \tilde{q} - L(\tilde{q})) = 0,$$

e uma vez que  $L$  é suave, em particular diferenciável no ponto  $\tilde{q}$ , concluímos que  $p = DL(\tilde{q})$ .

Logo, a transformada de Legendre de  $L$  satisfaz à igualdade

$$L^*(p) = p \cdot \mathbf{q}(p) - L(\mathbf{q}(p)),$$

que é a definição de Hamiltoniano associado ao Lagrangiano quando omitimos a variável  $x$ , ou seja, temos que

$$H = L^*. \tag{2.27}$$

Portanto, dado o Lagrangiano podemos obter o Hamiltoniano apenas calculando sua transformada de Legendre.

No resultado a seguir, veremos a íntima ligação entre essas duas aplicações.

**Teorema 2.9.** *(Dualidade convexa entre Hamiltoniano e Lagrangiano)* Suponha que  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  seja uma função  $C^1$ , convexa e superlinear. Considere sua transformada de Legendre  $L^* = H$ . Então:

- i)  $H$  é convexa e superlinear;
- ii) A transformada de Legendre do Hamiltoniano  $H$  coincide com o Lagrangiano  $L$ , isto é,

$$L = H^*. \tag{2.28}$$

Em particular, pelo anterior temos que  $L = H^*$  e  $L^* = H$ .

*Demonstração.* (i) Inicialmente, provemos a convexidade de  $H$ :

Seja  $t \in [0, 1]$  e  $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n$ . Por definição de  $H$  segue

$$H(tp_1 + (1-t)p_2) = \sup_p \{[tp_1 + (1-t)p_2] \cdot q + L(q)\}.$$

Escrevendo  $L(q) = tL(q) + (1-t)L(q)$ , temos

$$\begin{aligned} H(tp_1 + (1-t)p_2) &= \sup_p \{[tp_1 + (1-t)p_2] \cdot q - [tL(q) + (1-t)L(q)]\} \\ &\leq t \sup_q \{p_1 \cdot q - L(q)\} + (1-t) \sup_p \{p_2 \cdot q - L(q)\} \\ &= t \cdot H(p_1) + (1-t) \cdot H(p_2). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Agora mostremos a superlinearidade. Fixado  $\lambda > 0$  e considerando  $p \neq 0$  e  $q = \lambda \frac{p}{|p|}$ , na definição de Hamiltoniano, obtemos

$$\begin{aligned} H(p) &= \sup_q \{p \cdot q - L(q)\} \\ &\geq p \cdot \left( \lambda \frac{p}{|p|} \right) - L \left( \lambda \frac{p}{|p|} \right) \\ &= \lambda \frac{|p|^2}{|p|} - L \left( \lambda \frac{p}{|p|} \right) \\ &\geq \lambda |p| - \max_{B(0, \lambda)} L. \end{aligned}$$

Dividindo a expressão resultante por  $|p| > 0$ ,

$$\frac{H(p)}{|p|} \geq \lambda - \frac{1}{|p|} \max_{B(0, \lambda)} L.$$

e passando o lim inf quando  $|p| \rightarrow \infty$ , obtemos

$$\liminf_{|p| \rightarrow \infty} \frac{H(p)}{|p|} > \lambda.$$

Pela a arbitrariedade de  $\lambda$  e o fato de que limite inferior é sempre menor ou igual ao limite superior, temos que

$$\lim_{|p| \rightarrow \infty} \frac{H(p)}{|p|} = +\infty.$$

(ii) Para finalizar a demonstração, nos resta provar que  $H^* = L$ . Sabemos que  $L^* = H$ , daí

$$H(p) = \sup_q \{p \cdot q - L(q)\} \geq p \cdot q - L(q),$$

então, temos  $H(p) + L(q) \geq p \cdot q$ , para todo  $p, q \in \mathbb{R}^n$ . Pela arbitrariedade de  $p$ , obtemos

$$L(q) \geq \sup_p \{p \cdot q - H(p)\} = H^*(q),$$

ou seja,  $L(q) \geq H^*(q)$ .

Por outro lado,

$$H^*(q) = \sup_p \{p \cdot q - H(p)\},$$

e uma vez que  $H(p) = L^*(p) = \sup_r \{p \cdot r - L(r)\}$ , obtemos

$$\begin{aligned} H^*(q) &= \sup_p \left\{ p \cdot q - \sup_r \{p \cdot r - L(r)\} \right\} \\ &= \sup_p \left\{ p \cdot q + \inf_r \{-(p \cdot r - L(r))\} \right\} \\ &= \sup_p \left\{ p \cdot q + \inf_r \{-p \cdot r + L(r)\} \right\} \\ &= \sup_p \inf_r \{p(q - r) + L(r)\}, \end{aligned}$$

em particular,

$$H^*(q) \geq \inf_r \{p(q - r) + L(r)\}. \quad (2.30)$$

Pela convexidade de  $L$  e pelo fato de  $L \in C^1$ , temos que (ver Seção 6.6 de [9])

$$L(r) \geq L(q) + DL(q) \cdot (r - q)$$

ou, equivalentemente,

$$L(q) \leq L(r) + DL(q)(q - r). \quad (2.31)$$

Usando o fato de  $p = DL(q)$  e substituindo a desigualdade (2.31) em (2.30), obtemos

$$\begin{aligned} H^*(q) &\geq \inf_r \{p(q - r) + L(r)\} \\ &= \inf_r \{DL(q)(q - r) + L(r)\} \\ &\geq L(q). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Portanto, concluímos que

$$H^*(q) = L(q), \quad \forall q \in \mathbb{R}^n.$$

□

Observe que pela dualidade convexa de  $L$  e  $H$  temos, se  $H$  é diferenciável em  $p$  e  $L$  é diferenciável em  $q$ , que as seguintes afirmações são equivalentes:

$$\begin{cases} p \cdot q = L(q) + H(p) \\ p = DL(q) \\ q = DH(p) \end{cases}. \quad (2.33)$$

**Proposição 2.10.** *Seja  $H \in C^k(\mathbb{R}^n)$  com  $k > 2$ , estritamente convexa e superlinear.*

Então:

i)  $DH : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um difeomorfismo global.

ii) Se  $L = H^*$  então

$$L(DH(p)) = p \cdot DH(p) - H(p)$$

e  $DL(\cdot)$  é a aplicação inversa de  $DH(\cdot)$  (logo,  $L$  é  $C^k$ ).

*Demonstração.* i) Provemos a injetividade de  $DH$ . Tome  $p, q \in \mathbb{R}^n$  fixos e  $t \in [0, 1]$  e considere  $r(t) = tp + (1 - t)q$ . Suponha que  $DH(p) = DH(q)$ . Mostraremos que  $p = q$ .

Defina

$$h(t) = \frac{d}{dt} (H(r(t))) = \frac{d}{dt} (H(tp + (1 - t)q)) = DH(r(t)) \cdot (p - q).$$

Veja que

$$h(0) = DH(r(0)) \cdot (p - q) = DH(q) \cdot (p - q)$$

e

$$h(1) = DH(r(1)) \cdot (p - q) = DH(p) \cdot (p - q)$$

daí,  $h(0) = h(1)$ . Assim, pelo Teorema de Rolle, existe  $s \in [0, 1]$  de modo que

$$h'(s) = 0,$$

então,

$$0 = h'(s) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}(r(s))(p_i - q_i)(p_j - q_j).$$

Uma vez que, por hipótese,  $H$  estritamente convexa, temos

$$0 = h'(s) \geq \theta(r(s))|p - q|^2, \text{ com } \theta > 0.$$

Com isso  $|p - q| = 0$  e daí,  $p = q$ .

Para provar a sobrejetividade de  $H$ , observe que temos  $L = H^* = \sup_{p \in \mathbb{R}^n} \{q \cdot p - H(q)\}$ .

Pelo fato de  $H$  ser superlinear, temos que o supremo é atingido. Logo, existe um ponto de máximo,  $\tilde{p}$ , da aplicação  $p \cdot q - H(p)$ . Com isso, a derivada dessa aplicação se anula em  $\tilde{p}$ , daí

$$0 = q - DH(\tilde{p}), \text{ daí } q = DH(\tilde{p}). \quad (2.34)$$

Dessa maneira, temos que todo  $q \in \mathbb{R}^n$  é a imagem do ponto de máximo da aplicação  $p \cdot q - H(p)$  pela função  $DH$ .

Uma vez que  $H$  é estritamente convexa, temos que a matriz Hessiana de  $H$  é invertível, ou seja, matriz que representa a derivada de  $DH$  é invertível. Pelo Teorema da

Aplicação Inversa,  $DH$  é um difeomorfismo local, e sendo uma bijeção, é um difeomorfismo global de classe  $C^{k-1}$ .

ii) Vejamos que  $DH$  e  $DL$  são aplicações inversas.

Como o ponto  $\tilde{p}$  que maximiza o mapa  $p \cdot q - H(p)$  depende do  $q$  escolhido, escrevamos  $\tilde{p} = \tilde{p}(q)$ . Veja que, por definição de  $L$  e supondo  $\tilde{p}$  maximizador,

$$L(DH(p)) = \tilde{p} \cdot DH(p) - H(\tilde{p})$$

e, por (2.34), concluímos que  $DH(p) = DH(\tilde{p})$ . Então, pela injetividade de  $DH$ ,  $p = \tilde{p}$ . Com isso, temos que  $L(DH(p)) = p \cdot DH(p) - H(p)$ , ou ainda, fazendo as substituições  $p = \tilde{p}$  e  $q = DH(p)$ , temos  $L(q) = \tilde{p} \cdot q - H(\tilde{p})$ .

Dado que

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \tilde{p}_i + \sum_{j=1}^n q_j \frac{\partial \tilde{p}_j}{\partial q_i} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial \tilde{p}_j}{\partial q_i},$$

e que  $\tilde{p}$  é tal  $q_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$ , obtemos na expressão acima que

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \tilde{p}_i.$$

Além disso, como  $q = DH(\tilde{p})$  então  $(DH)^{-1}q = \tilde{p}$ . Assim,

$$DH(DL(q)) = DH(\tilde{p}) = DH((DH)^{-1}q) = q.$$

Uma vez que  $DH$  é invertível, sua inversa é única. Portanto,  $(DH)^{-1} = DL$ .  $\square$

## 2.3 Fórmula de Hopf-Lax

Nessa seção conectaremos a equação diferencial parcial de Hamilton-Jacobi com o cálculo de variações através das EDO's de Hamilton.

Pelo sistema característico visto anteriormente, temos que para a EDP de Hamilton-Jacobi

$$\begin{cases} u_t + H(Du) = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = g & \text{em } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}, \quad (2.35)$$

as equações características são da forma

$$\begin{cases} \dot{p} = 0 \\ \dot{z} = DH(p) \cdot p - H(p) \\ \dot{x} = DH(p) \end{cases}.$$

A primeira e a terceira equações são chamadas de EDO's de Hamilton, as quais, anteriormente, foram derivadas a partir do problema de minimização para o Lagrangiano  $L = H^*$ . Perceba que a segunda equação coincide com a definição da transformada de Legendre do Hamiltoniano  $H$  associado a  $L$ , daí,

$$\dot{z} = DH(p) \cdot p - H(p) = H^*(p) = L(p) = L(\dot{\mathbf{x}}). \quad (2.36)$$

Integrando

$$\dot{z} = u(x, t)$$

para tempos  $t > 0$  pequenos o suficiente, de modo que a solução de (2.35) seja suave, obtemos

$$\int_0^t \dot{z} = u(x, t) + z^0 = u(x, t) + g(x),$$

por outro lado, integrando (2.36), obtemos

$$\int_0^t \dot{z} = \int_0^t L(\dot{\mathbf{x}}(s)) ds$$

e, a partir dessas duas informações, concluímos que

$$u(x, t) = \int_0^t L(\dot{\mathbf{x}}(s)) ds + g(\mathbf{x}(0)).$$

Nossa intenção é modificar essa expressão para que faça sentido para longos tempos  $t > 0$ , quando (2.35) não tem solução suave.

Enfraqueçamos as hipóteses tidas até agora e busquemos uma expansão para a solução em todo o domínio. Suponha que a função  $H$  é convexa e superlinear e que a função da condição inicial,  $g$ , é Lipschitz contínua, ou seja, que

$$|g(x) - g(y)| \leq C_g |x - y|$$

para alguma constante  $C_g > 0$  e todo  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

Dados  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $t > 0$ , proporemos minimizar entre as curvas  $\mathbf{w}(s)$  satisfazendo  $\mathbf{w}(t) = x$  a expressão

$$\int_0^t L(\dot{\mathbf{w}}(s)) ds + g(\mathbf{w}(0))$$

que é ação acrescida com o dado inicial. Construiremos um candidato à solução do problema de valor inicial (2.5), em termos de princípio variacional, vinculado à ação modificada:

$$u(x, t) := \inf_{\mathbf{w} \in A_0} \left\{ \int_0^t L(\dot{\mathbf{w}}(s)) ds + g(y) \right\}. \quad (2.37)$$



O ínfimo na definição da solução  $u$  é tomado sobre o conjunto

$$A_0 = \{w \in C^2; \quad w(0) = y \quad \text{e} \quad w(t) = x\},$$

que representa, o conjunto de todas as curvas que ligam o ponto  $y \in \partial U$  ao ponto  $x \in U$ .

**Teorema 2.11.** (*Fórmula de Hopf-Lax*) Se  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $t > 0$ , então a solução  $u = u(x, t)$  do problema de minimização (2.37) é

$$u(x, t) := \min_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ tL \left( \frac{x - y}{t} \right) + g(y) \right\}. \quad (2.38)$$

**Observação 2.12.** A expressão (2.38) é chamada de *fórmula de Hopf-Lax*.

*Demonstração.* Basta verificarmos que

$$u(x, t) = \inf_{w \in A_0} \int_0^t L(\dot{\mathbf{w}}(s)) ds + g(y),$$

com  $u(x, t)$  como definido em (2.38).

Fixe  $y \in \mathbb{R}^n$  e defina

$$\mathbf{w}(s) = y + \frac{s}{t}(x - y),$$

com  $0 \leq s < t$ . Note que  $\mathbf{w}(t) = x$  e  $\mathbf{w}(0) = y$  e portanto,  $\mathbf{w} \in A_0$ .

Pela definição de  $u$  em (2.38) e tendo que  $\dot{\mathbf{w}}(s) = \frac{x - y}{t}$ , temos

$$\begin{aligned} u(x, t) &\leq \int_0^t L(\dot{\mathbf{w}}(s)) ds + g(y) \\ &= L \left( \frac{x - y}{t} \right) s \Big|_{s=0}^{s=t} + g(y) \\ &= L \left( \frac{x - y}{t} \right) t - L \left( \frac{x - y}{t} \right) 0 + g(y) \\ &= tL \left( \frac{x - y}{t} \right) + g(y), \end{aligned}$$

isso para qualquer  $y \in \mathbb{R}^n$ . Em particular, temos

$$u(x, t) \leq \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ tL \left( \frac{x - y}{t} \right) + g(y) \right\}. \quad (2.39)$$

Por outro lado, sendo  $\mathbf{w}$  uma função  $C^1$  qualquer, satisfazendo  $\mathbf{w}(t) = x$ , e  $L$  sendo convexa, podemos aplicar a Desigualdade de Jensen (ver Seção 6.6 de [9]), e assim,

$$L \left( \frac{1}{t} \int_0^t \dot{\mathbf{w}}(s) ds \right) \leq \frac{1}{t} \int_0^t L(\dot{\mathbf{w}}(s)) ds,$$

daí,

$$L\left(\frac{x-y}{t}\right) \leq \frac{1}{t} \int_0^t L(\dot{\mathbf{w}}(s)) ds. \quad (2.40)$$

Multiplicando (2.40) por  $t > 0$ , somando  $g(y)$  a ambos os membros da desigualdade e depois tomando o ínfimo sobre os  $y \in \mathbb{R}^n$ , obtemos

$$\inf_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y) \right\} \leq \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ \int_0^t L(\dot{\mathbf{w}}) ds + g(y) \right\} = u(x, t). \quad (2.41)$$

Concluimos assim, de (2.39) e (2.41), que

$$u(x, t) = \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y) \right\}. \quad (2.42)$$

Resta-nos provar que de fato o ínfimo é atingido para algum  $y \in \mathbb{R}^n$ . Para tal, fixe  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $t > 0$  e provemos que para  $|y|$  suficientemente grande, o valor da função

$$tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y)$$

também tende a infinito. Com efeito, pela superlinearidade de  $L$ ,

$$\lim_{|q| \rightarrow \infty} \frac{L(q)}{|q|} = +\infty,$$

é dizer, para  $|y|$  grande e  $\lambda$  arbitrário, temos

$$\frac{L\left(\frac{x-y}{t}\right)}{\left|\frac{x-y}{t}\right|} > \lambda.$$

Pelo anterior, temos que

$$L\left(\frac{x-y}{t}\right) > \lambda \left|\frac{x-y}{t}\right|,$$

para  $\lambda \in \mathbb{R}$  qualquer, sempre que  $|y|$  for suficientemente grande. Com isso,

$$tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y) > \lambda|x-y| + g(y) = \lambda|x-y| + g(y) - g(x) + g(x),$$

sendo  $g$  Lipschitz contínua, temos que

$$-C_g|x-y| < g(y) - g(x) < C_g|x-y|,$$

daí,

$$tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y) > \lambda|x-y| - C_g|x-y| + g(x) = (\lambda - C_g)|x-y| + g(x).$$

Pelo fato de  $x$  e  $t$  estarem fixos e  $C_g$  ser uma constante, para  $|y|$  e  $\lambda$  arbitrariamente grandes, temos que

$$tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y) \rightarrow +\infty.$$

□

### 2.3.1 Propriedades da Fórmula de Hopf-Lax

Os lemas seguintes nos darão algumas informações sobre a Fórmula de Hopf-Lax, que nos serão útil mais adiante.

**Lema 2.13.** *A fórmula de Hopf-Lax é Lipschitz contínua em relação à variável espacial. E ainda mais, a constante de Lipschitz para a solução  $u$  é a mesma constante de Lipschitz da função  $g$ .*

*Demonstração.* Para mostrar que  $u$  é Lipschitz na primeira coordenada, fixe  $t > 0$ , tome  $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$  e escolha  $y \in \mathbb{R}^n$  de modo que

$$tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y) = u(x, t),$$

ou seja, o  $y$  é escolhido de modo que o mínimo é atingido. Então,

$$u(\tilde{x}, t) - u(x, t) = \inf_z \left\{ tL\left(\frac{\tilde{x}-z}{t}\right) + g(z) \right\} - \left( tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y) \right)$$

e tomando  $z = \tilde{x} - x + y$ , obtemos

$$u(\tilde{x}, t) - u(x, t) \leq g(\tilde{x} - x + y) - g(y).$$

Usando o fato de  $g$  ser Lipschitz contínua, temos

$$u(\tilde{x}, t) - u(x, t) \leq C_g |\tilde{x} - x|.$$

e, revertendo os papéis de  $\tilde{x}$  e  $x$ , obtemos a desigualdade

$$u(\tilde{x}, t) - u(x, t) \geq -C_g |\tilde{x} - x|$$

e com isso,

$$|u(\tilde{x}, t) - u(x, t)| \leq C_g |\tilde{x} - x|.$$

□

**Lema 2.14.** (*Identidade funcional*) Para cada  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $0 \leq s < t$ , temos

$$u(x, t) := \min_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ (t - s)L \left( \frac{x - y}{t - s} \right) + u(y, s) \right\}. \quad (2.43)$$

Em outras palavras, para calcular  $u(\cdot, t)$ , podemos calcular  $u$  no tempo  $s$  e então usar a condição inicial nos tempos restantes pertencentes a  $[s, t]$ .

*Demonstração.* Fixe  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $0 \leq s < t$  e escolha  $z \in \mathbb{R}^n$  de modo que

$$u(y, s) = sL \left( \frac{y - z}{s} \right) + g(z), \quad (2.44)$$

ou seja, escolhamos  $z$  que minimize tal expressão. Verifica-se que

$$\left(1 - \frac{s}{t}\right) \frac{x - y}{t - s} + \frac{s}{t} \frac{y - z}{s} = \frac{x - z}{t}.$$

Daí, usando a convexidade de  $L$ ,

$$L \left( \frac{x - z}{t} \right) \leq \left(1 - \frac{s}{t}\right) L \left( \frac{x - y}{t - s} \right) + \frac{s}{t} L \left( \frac{y - z}{s} \right).$$

Multiplicando essa expressão por  $t$  e somando  $g(z)$  a ambos os membros, obtemos

$$tL \left( \frac{x - z}{t} \right) + g(z) \leq (t - s)L \left( \frac{x - y}{t - s} \right) + sL \left( \frac{y - z}{s} \right) + g(z). \quad (2.45)$$

Uma vez que

$$u(x, t) = \min_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ tL \left( \frac{x - y}{t} \right) + g(y) \right\},$$

temos que, para o vetor  $z$  escolhido, vale

$$u(x, t) \leq tL \left( \frac{x - z}{t} \right) + g(z)$$

e então

$$u(x, t) \leq (t - s)L \left( \frac{x - y}{t - s} \right) + sL \left( \frac{y - z}{s} \right) + g(z).$$

Por (2.44), concluímos que

$$u(x, t) \leq (t - s)L \left( \frac{x - y}{t - s} \right) + u(y, s), \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Para garantir que de fato o mínimo é atingido, procedemos como na prova do Teorema 2.11, porém, usando a Lipschitz continuidade da função  $u$  na sua coordenada referente à

variável espacial. Assim,

$$u(x, t) \leq \min_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ (t-s)L \left( \frac{x-y}{t-s} \right) + u(y, s) \right\}. \quad (2.46)$$

Agora mostremos a desigualdade no sentido oposto ao da expressão em (2.46). Escolha  $w$  tal que

$$u(x, t) = tL \left( \frac{x-w}{t} \right) + g(w) \quad (2.47)$$

e tome

$$y := \frac{s}{t}x + \left(1 - \frac{s}{t}\right)w, \quad (2.48)$$

assim,

$$\frac{x-y}{t-s} = \frac{x-w}{t} = \frac{y-w}{s}. \quad (2.49)$$

Logo, usando a informação em (3.31) e também o fato de  $u$  ser definida como mínimo sobre os vetores  $w \in \mathbb{R}^n$ , obtemos

$$\begin{aligned} (t-s)L \left( \frac{x-y}{t-s} \right) + u(y, s) &\leq (t-s)L \left( \frac{x-w}{t} \right) + \left[ sL \left( \frac{y-w}{s} \right) + g(w) \right] \\ &= tL \left( \frac{x-w}{t} \right) + g(w) = u(x, t). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Assim, pela arbitrariedade de  $y$ , que é consequência da arbitrariedade de  $x$  em (2.48), se tomarmos o mínimo sobre os pontos  $y \in \mathbb{R}^n$ , obtemos

$$\min_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ (t-s)L \left( \frac{x-y}{t-s} \right) + u(y, s) \right\} \leq u(x, t). \quad (2.51)$$

De (2.46) e (2.51), concluímos o desejado.  $\square$

**Lema 2.15.** (*Lipschitz continuidade na segunda coordenada*) A função  $u$  definida pela fórmula de Hopf-Lax é Lipschitz contínua em  $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ , onde  $u = g$  em  $\mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$  e  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  globalmente Lipschitz contínua.

*Demonstração.* Escolha  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t > 0$  e tome  $x = y$  na Fórmula de Hopf-Lax, daí

$$u(x, t) \leq tL(0) + g(x), \quad \text{ou seja} \quad u(x, t) - g(x) \leq tL(0) \quad (2.52)$$

Por outro lado, como  $g$  é Lipschitz contínua, temos

$$g(y) \geq g(x) - C_g|x-y|, \quad (2.53)$$

daí,

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \min_y \left\{ tL \left( \frac{x-y}{t} \right) + g(y) \right\} \\
&\geq \min_y \left\{ tL \left( \frac{x-y}{t} \right) + g(x) - C_g |x-y| \right\} \\
&= g(x) + \min_y \left\{ tL \left( \frac{x-y}{t} \right) - C_g |x-y| \right\} \\
&= g(x) + \min_y \left\{ -t \left( -L \left( \frac{x-y}{t} \right) + C_g \frac{|x-y|}{t} \right) \right\} \\
&= g(x) - t \max_y \left\{ -L \left( \frac{x-y}{t} \right) + C_g \frac{|x-y|}{t} \right\}. \tag{2.54}
\end{aligned}$$

Tomando  $z = \frac{x-y}{t}$  em (2.54), temos que o máximo em  $y$  corresponderá ao máximo em  $z$  e assim,

$$\begin{aligned}
u(x, t) &\geq g(x) - t \max_z \{ C_g |z| - L(z) \} \\
&= g(x) - t \max_{w \in B(0, C_g)} \max_z \{ w \cdot z - L(z) \}. \tag{2.55}
\end{aligned}$$

Observe que o subtraendo do lado direito da desigualdade acima é exatamente a definição de  $L^*$ , que já vimos que coincide com o Hamiltoniano  $H$ , sendo assim,

$$u(x, t) \geq g(x) - t \max_{B(0, C_g)} H$$

e desse modo,

$$g(x) - u(x, t) \leq t \max_{B(0, C_g)} H. \tag{2.56}$$

Tome  $C = \max \left\{ L(0), \max_{B(0, C_g)} H \right\}$  em (2.52) e (2.56), com isso obtemos

$$|u(x, t) - g(x)| \leq Ct = C(t - 0). \tag{2.57}$$

Acabamos de provar que  $u$  é Lipschitz para a condição de fronteira. Agora, para  $s \in [0, t]$ , pelo lema anterior, tomando  $x = y$  em (2.43), temos

$$u(x, t) \leq (t-s)L(0) + u(x, s), \quad \text{ou seja, } u(x, t) - u(x, s) \leq (t-s)L(0).$$

Por outro lado, pelo Lema 2.14, podemos escrever a solução  $u(x, t)$  em função de  $u(y, s)$ , da forma

$$u(x, t) = \min_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ (t-s)L \left( \frac{x-y}{t-s} \right) + u(y, s) \right\}.$$

Por esse fato, temos

$$u(x, t) - u(x, s) = \min_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ (t - s)L \left( \frac{x - y}{t - s} \right) + u(y, s) \right\} - u(x, s) \quad (2.58)$$

e, pelo Lema 2.13 provamos que  $u$  é Lipschitz contínua na variável espacial e que tem mesma constante de Lipschitz que a função  $g$ , logo

$$u(y, s) - u(x, s) \geq -C_g |y - x|. \quad (2.59)$$

Daí, substituindo (2.59) em (2.58), obtemos

$$u(x, t) \geq \min_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ (t - s)L \left( \frac{x - y}{t - s} \right) - C_g |x - y| \right\} + u(x, s).$$

Tome  $z = \frac{x - y}{t - s}$ , com  $s \in (0, t)$ , e assim,

$$\begin{aligned} u(x, t) &\geq \min_z \{ (t - s)L(z) - C_g(t - s)|z| \} + u(x, s) \\ &= -(t - s) \max_z \{ -L(z) + C_g|z| \} + u(x, s) \\ &= -(t - s) \max_{|w| \leq C_g} \{ w \cdot z - L(z) \} + u(x, s) \\ &= -(t - s) \max_{|w| \leq C_g} H(w) + u(x, s). \end{aligned} \quad (2.60)$$

Considerando  $C := \max \left\{ \max_{|w| \leq C_g} H(w); L(0) \right\}$ , concluímos que

$$|u(x, t) - u(x, s)| \leq C(t - s). \quad (2.61)$$

□

O *Teorema de Rademacher* (ver cap. 5, seção 8 de [4]) afirma que uma função Lipschitz contínua é diferenciável em quase todo ponto. Portanto, nossa solução  $u$ , definida pela fórmula de Hopf-Lax, é diferenciável q.t.p.  $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ . O próximo teorema nos diz que tal função  $u$  é solução da equação de Hamilton-Jacobi.

**Teorema 2.16.** (*Resolvendo a equação de Hamilton-Jacobi*) *Suponha  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t > 0$  e  $u$  tome definida pela fórmula de Hopf-Lax,*

$$u(x, t) = \min_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ tL \left( \frac{x - y}{t} \right) + g(y) \right\},$$

*diferenciável no ponto  $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ . Então*

$$u_t(x, t) + H(Du(x, t)) = 0$$

*Demonstração.* Fixe  $q \in \mathbb{R}^n$  e  $h > 0$ . Pelo Lema 2.14,

$$\begin{aligned} u(x + hq, t + h) &= \min_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ (t + h - t)L \left( \frac{x + hq - y}{t + h - t} \right) + u(y, t) \right\} \\ &= \min_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ hL \left( \frac{x + hq - y}{h} \right) + u(y, t) \right\}. \end{aligned}$$

Fazendo  $x = y$ , obtemos

$$u(x + hq, t + h) \leq hL(q) + u(x, t), \quad (2.62)$$

que equivale a

$$\frac{u(x + hq, t + h) - u(x, t)}{h} \leq L(q). \quad (2.63)$$

Considerando a aplicação

$$\Psi(\eta) = u(x + \eta q, t + \eta),$$

teremos que a expressão (2.63) corresponde a

$$\frac{\Psi(h) - \Psi(0)}{h}$$

e fazendo  $h \rightarrow 0^+$ , obtemos

$$q \cdot Du(x, t) + u_t(x, t) \leq L(q).$$

Sendo assim,

$$u_t(x, t) + q \cdot Du(x, t) - L(q) \leq 0. \quad (2.64)$$

Pela arbitrariedade de  $q \in \mathbb{R}^n$  na expressão acima, se, em particular, tomarmos  $q$  de forma que maximize a expressão

$$q \cdot Du(x, t) - L(q),$$

temos a definição do Hamiltoniano  $H$  no ponto  $Du(x, t)$ ,  $H(Du(x, t))$ , e assim

$$u_t(x, t) + H(Du(x, t)) = u_t(x, t) + \max_{q \in \mathbb{R}^n} \{q \cdot Du(x, t) - L(q)\} \leq 0.$$

Nos resta mostrar a desigualdade oposta.

Escolha  $z \in \mathbb{R}^n$  de forma que

$$u(x, t) = tL \left( \frac{x - z}{t} \right) + g(z). \quad (2.65)$$



Fixe  $h > 0$  e defina  $s = t - h$  e  $y = \frac{s}{t}x + \left(1 - \frac{s}{t}\right)z$ . Observe que

$$\frac{y - z}{s} = \frac{\frac{s}{t}s + z - \frac{s}{t}z - z}{s} = \frac{\frac{s}{t}(x - z)}{s} = \frac{x - z}{t}.$$

Usando a definição da fórmula de Hopf-Lax e a informação acima, teremos

$$\begin{aligned} u(x, t) - u(y, s) &\geq tL\left(\frac{x - z}{t}\right) + g(z) - \left[sL\left(\frac{y - z}{s}\right) + g(z)\right] \\ &\geq (t - s)L\left(\frac{x - z}{t}\right). \end{aligned} \quad (2.66)$$

Unindo o fato de que  $t - s = h$  e a escolha que fizemos para  $y$ , a desigualdade (2.66) transforma-se na seguinte

$$\frac{1}{h} \left[ u(x, t) - u\left(\left(1 - \frac{h}{t}\right)x + \frac{h}{t}z, t - h\right) \right] \geq L\left(\frac{x - z}{t}\right). \quad (2.67)$$

Considerando a aplicação

$$\Psi(h) = u\left(x - \left(\frac{x - z}{t}\right)h, t - h\right),$$

teremos que a expressão (2.67) corresponde a

$$\frac{\Psi(h) - \Psi(0)}{h} \geq L\left(\frac{x - z}{t}\right)$$

e fazendo  $h \rightarrow 0^+$ , obteremos

$$\left(\frac{x - z}{t}\right) \cdot Du(x, t) + u_t(x, t) \geq L\left(\frac{x - z}{t}\right),$$

agora, tomando  $q = \left(\frac{x - z}{t}\right)$ , temos que

$$q \cdot Du(x, t) + u_t(x, t) - L(q) \geq 0.$$

Em particular, escolhendo  $q$  que maximize a expressão  $q \cdot Du(x, t) + u_t(x, t)$ , concluímos que

$$u_t + H(Du) \geq 0. \quad (2.68)$$

Portanto,

$$u_t(x, t) + H(Du(x, t)) = 0,$$

para todo  $(x, t)$ . □

Conectando os resultados vistos nessa seção, acabamos de provar o seguinte

**Teorema 2.17.** (*Fórmula de Hopf-Lax como solução*) A função  $u$  definida pela fórmula de Hopf-Lax, que é Lipschitz contínua, diferenciável q.t.p.  $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ , é solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t(x, t) + H(Du(x, t)) & = 0 \\ u(x, 0) & = g(x) \end{cases} \quad (2.69)$$

## 2.4 Unicidade da solução integral para a equação de Hamilton-Jacobi

Para atingirmos o novo conceito de solução para a equação de Hamilton-Jacobi, nos resta garantir a unicidade. Com esse intuito, a seguir, veremos alguns conceitos e resultados.

**Definição 2.18.** Dizemos que uma função  $f$  é **semicôncava** se, para todos  $x, z \in \mathbb{R}^n$ , existe uma constante  $C$  tal que

$$f(x + z) - 2f(x) + f(x - z) \leq C|z|^2.$$

**Lema 2.19.** Suponha que a função  $g$  da condição de fronteira para a equação de Hamilton-Jacobi é Lipschitz contínua e **semicôncava**. Então,  $u$  definida pela fórmula de Hopf-Lax é **semicôncava** para todo  $t \in [0, \infty)$ , isto é,

$$u(x + z, t) - 2u(x, t) + u(x - z, t) \leq C|z|^2$$

para todo  $x, z \in \mathbb{R}^n$ ,  $t > 0$ . Além disso, a constante de semiconcavidade de  $u(\cdot, t)$  pode ser tomada igual à de  $g$ .

*Demonstração.* Escolha  $y \in \mathbb{R}^n$  de modo que

$$u(x, t) = tL\left(\frac{x - y}{t}\right) + g(y).$$

Substituindo  $y + z$  e  $y - z$  na fórmula de Hopf-Lax para  $u(x + z, t)$  e  $u(x - z, t)$ , temos

$$\begin{aligned} u(x + z, t) & - 2u(x, t) + u(x - z, t) \leq \\ & \leq tL\left(\frac{x - y}{t}\right) + g(y + z) - 2tL\left(\frac{x - y}{t}\right) - 2g(y) \\ & + tL\left(\frac{x - y}{t}\right) + g(y - z) \\ & = g(y + z) - 2g(y) + g(y - z). \end{aligned}$$

E, pela semiconcavidade de  $g$ ,

$$u(x+z, t) - 2u(x, t) + u(x-z, y) \leq C|z|^2.$$

□

Se deixarmos de considerar  $g$  semicôncava e passarmos a assumir o Hamiltoniano  $H$  sendo uniformemente convexo, teremos o mesmo resultado.

**Definição 2.20.** *Suponha que  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  seja uma função  $C^2$ . Dizemos que  $H$  é **uniformemente convexa**, com  $\theta > 0$  constante, se*

$$\sum_{i,j=1}^n H_{p_i p_j}(p) \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2, \quad \forall p, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

**Teorema 2.21.** *(Semiconcavidade) Suponha que  $H$  seja uniformemente convexa e que  $u$  é a solução definida pela fórmula de Hopf-Lax. Então, para todo  $x, z \in \mathbb{R}^n$  e  $t > 0$ , temos*

$$u(x+z, t) - 2u(x, t) + u(x-z, t) \leq \frac{1}{\theta t} |z|^2. \quad (2.70)$$

*Demonstração.*

*Passo 1.* Sejam  $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n$ . Expandindo  $H(p_1)$  e  $H(p_2)$  em séries de Taylor até segunda ordem, com resto de Lagrange em torno de  $\frac{p_1 + p_2}{2}$ ,

$$H(a+v) = H(a) + \langle DH(a), v \rangle + \frac{1}{2} D^2 H(a + \theta v) \cdot v^2.$$

Considerando  $a+v = p_1$  e  $a = \frac{p_1 + p_2}{2}$ , temos que  $v = \frac{p_1 - p_2}{2}$ , e daí,

$$\begin{aligned} H(p_1) &= H\left(\frac{p_1 + p_2}{2}\right) + DH\left(\frac{p_1 + p_2}{2}\right) \cdot \left(\frac{p_1 - p_2}{2}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2} D^2 H(p_\theta) \cdot \left(\frac{p_1 - p_2}{2}\right)^2 \\ &= H\left(\frac{p_1 + p_2}{2}\right) + DH\left(\frac{p_1 + p_2}{2}\right) \cdot \left(\frac{p_1 - p_2}{2}\right) \\ &\quad + \frac{1}{8} D^2 H(p_\theta) |p_1 - p_2|^2. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Agora, tomando  $\tilde{a} + \tilde{v} = p_2$  e  $\tilde{a} = \frac{p_1 + p_2}{2}$  temos que  $\tilde{v} = \frac{p_2 - p_1}{2}$  e assim

$$\begin{aligned}
H(p_2) &= H\left(\frac{p_1 + p_2}{2}\right) + DH\left(\frac{p_1 + p_2}{2}\right) \cdot \left(\frac{p_2 - p_1}{2}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}D^2H(p_\theta) \cdot \left(\frac{p_2 - p_1}{2}\right)^2 \\
&= H\left(\frac{p_1 + p_2}{2}\right) - DH\left(\frac{p_1 + p_2}{2}\right) \cdot \left(\frac{p_1 - p_2}{2}\right) \\
&\quad + \frac{1}{8}D^2H(p_\theta)|p_1 - p_2|^2.
\end{aligned} \tag{2.72}$$

Somando (2.71) com (2.72), obtemos

$$H(p_1) + H(p_2) = 2H\left(\frac{p_1 + p_2}{2}\right) + \frac{1}{4}D^2H(p_\theta)|p_1 - p_2|^2,$$

e, usando a convexidade uniforme de  $H$ ,

$$H\left(\frac{p_1 + p_2}{2}\right) \leq \frac{H(p_1)}{2} + \frac{H(p_2)}{2} - \frac{\theta}{8}|p_1 - p_2|^2.$$

Segundo a Proposição (2.10), para qualquer  $p$ , temos que  $DL(DH(p)) = p$ . Assim, a matriz Hessiana de  $L$  avaliada em  $DH$  coincide com a inversa da matriz Hessiana de  $DH$  avaliada em  $p$ . Além disso, como  $L$  é  $C^2$ , vale

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial q_j}(q) \xi_i \xi_j \leq \frac{1}{\theta} |\xi|^2. \tag{2.73}$$

Com efeito, sendo  $\theta$  uma cota inferior para o menor autovalor da matriz Hessiana de  $H$ , temos que  $\frac{1}{\theta}$  é uma cota superior para o maior autovalor da Hessiana de  $L$ . E por isso, para o Lagrangiano  $L$ , procedendo analogamente à obtenção da estimativa para a função Hamiltoniana, conseguimos

$$\frac{1}{2}L(q_1) + \frac{1}{2}L(q_2) \leq L\left(\frac{q_1 + q_2}{2}\right) + \frac{1}{8\theta}|q_1 - q_2|^2, \tag{2.74}$$

para todo  $q_1, q_2 \in \mathbb{R}^n$ .

Agora, escolha  $y \in \mathbb{R}^n$  de modo que

$$u(x, t) = tL\left(\frac{x - y}{t}\right) + g(y).$$

Usando o mesmo valor de  $y$  para as fórmulas de Hopf-Lax para  $u(x + z, t)$  e  $u(x - y, t)$  e,

de posse da estimativa acima, obtemos

$$\begin{aligned}
u(x+z, t) &= 2u(x, t) + u(x-z, t) \\
&\leq \left[ tL \left( \frac{x+z-y}{t} \right) + g(y) \right] - 2 \left[ tL \left( \frac{x-y}{t} \right) + g(y) \right] \\
&\quad + \left[ tL \left( \frac{x-z-y}{t} \right) + g(y) \right] \\
&= 2t \left[ \frac{1}{2}L \left( \frac{x+z-y}{t} \right) + \frac{1}{2}L \left( \frac{x-z-y}{t} \right) - L \left( \frac{x-y}{t} \right) \right] \\
&\leq 2t \frac{1}{8\theta} \left| \frac{2z}{t} \right|^2 \leq \frac{1}{\theta t} |z|^2
\end{aligned}$$

□

Aqui, veremos que as condições de semiconcavidade para a solução de Hopf-Lax  $u$  podem ser utilizadas como critério de unicidade.

**Definição 2.22.** Dizemos que uma função Lipschitz contínua  $u : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma *solução fraca* do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} u_t + H(Du) = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = g & \text{em } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (2.75)$$

se satisfaz

- a)  $u(x, 0) = g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$
- b)  $u_t(x, t) + H(Du(x, t)) = 0$  para q.t.p.  $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty),$  e
- c)  $u(x+z, t) - 2u(x, t) + u(x-z, t) \leq C \left(1 + \frac{1}{t}\right) |z|^2,$  para alguma constante  $C \leq 0$  e todo  $x, z \in \mathbb{R}^n, t > 0.$

Provaremos a seguir que a solução fraca de (2.75) é única. O ponto chave para tal demonstração decorre, principalmente, da semiconcavidade da função  $u$ .

**Teorema 2.23.** (Unicidade de soluções fracas) Assuma que  $H \in C^2$  é uma função convexa e superlinear e  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é Lipschitz contínua. Então, existe no máximo uma solução fraca do problema de valor inicial (2.75).

*Demonstração.* Suponhamos que  $u$  e  $\tilde{u}$  sejam duas soluções fracas de (2.75). Tome um ponto qualquer  $(y, s)$  onde  $u$  e  $\tilde{u}$  sejam diferenciáveis e defina  $w := u - \tilde{u}$ .

Observe que  $w$  é solução de uma determinada EDP. De fato,

$$\begin{aligned}
w_t(y, s) &= u_t(y, s) - \tilde{u}_t(y, s) \\
&= -H(Du(y, s)) + H(D\tilde{u}(y, s)) \\
&= -\int_0^1 \frac{\partial}{\partial r} H(rDu(y, s) + (1-r)D\tilde{u}(y, s)) dr \\
&= -\int_0^1 DH(rDu(y, s) + (1-r)D\tilde{u}(y, s)) dr \cdot (Du(y, s) - D\tilde{u}(y, s))
\end{aligned} \tag{2.76}$$

e, definindo

$$b(y, s) := \int_0^1 DH(rDu(y, s) + (1-r)D\tilde{u}(y, s)) dr,$$

temos que  $w$  satisfaz

$$w_t(y, s) + b(y, s) \cdot Dw(y, s) = 0 \quad \text{q.t.p. } (y, s) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty). \tag{2.77}$$

Agora, escreva  $v := \Phi(w) \geq 0$ , onde  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  é uma função suave que será explicitada posteriormente. Mais adiante, devido a definição da função  $\Phi$ , mostraremos que  $v \equiv 0$ . Veja também que  $v$  é solução da EDP encontrada multiplicando a expressão (2.77) por  $\Phi'(w)$ , como segue

$$\begin{aligned}
0 &= w_t \Phi'(w) + b \cdot Dw \Phi'(w) \\
&= (\Phi(w))_t + b \cdot D(\Phi(w)) \\
&= v_t + b \cdot Dv \quad \text{q.t.p..}
\end{aligned} \tag{2.78}$$

Escolha  $\epsilon > 0$  e defina  $u^\epsilon := \eta_\epsilon * u$  e  $\tilde{u}^\epsilon := \eta_\epsilon * \tilde{u}$ , onde  $\eta_\epsilon$  é um molificador nas variáveis  $x$  e  $t$ . As próximas três afirmações, relacionadas a tais convoluções, serão empregadas logo mais e nos auxiliarão a reescrever a equação (2.78).

**Afirmção 1:**  $|Du^\epsilon| \leq Lip(u)$  e  $|D\tilde{u}^\epsilon| \leq Lip(\tilde{u})$ .

Observe que

$$\begin{aligned}
|u^\epsilon(x+h, t) - u^\epsilon(x, t)| &= \left| \int_{B_\epsilon(0)} \eta_\epsilon(y, s) (u(x+h-y, t-s) - u(x-y, t)) dy ds \right| \\
&\leq \int_{B_\epsilon(0)} \eta_\epsilon(y, s) |u(x+h-y, t-s) - u(x-y, t)| dy,
\end{aligned}$$

e, como  $u$  é Lipschitz contínua e  $\int_{B_\epsilon(0)} \eta_\epsilon(y, s) dy ds = 1$ , obtemos

$$|u^\epsilon(x+h, t-s) - u^\epsilon(x, t)| \leq Lip(u) |h| \int_{B_\epsilon(0)} \eta_\epsilon(y, s) dy ds = |h| Lip(u),$$

daí,

$$\left| \frac{u^\epsilon(x+h, t-s) - u^\epsilon(x, t)}{h} \right| \leq Lip(u).$$

Logo,  $Du \leq Lip(u)$ . Analogamente,  $D\tilde{u} \leq Lip(\tilde{u})$ .

**Afirmção 2:**  $Du^\epsilon \rightarrow Du$  e  $D\tilde{u}^\epsilon \rightarrow D\tilde{u}$ .

Tome um conjunto aberto limitado  $Z \subset U$ , de modo que  $\partial Z$  seja de classe  $C^1$ . Como  $u, \tilde{u} : U \rightarrow \mathbb{R}$  são funções Lipschitz contínuas, em particular, são Lipschitz contínuas em  $Z$ . Desse modo,  $u, \tilde{u} \in W^{1,\infty}(Z)$ , o que implica que  $Du, D\tilde{u} \in L^\infty(Z)$ . Sendo limitadas,  $Du$  e  $D\tilde{u}$  são localmente limitadas. Portanto,  $Du^\epsilon \rightarrow Du$  e  $D\tilde{u}^\epsilon \rightarrow D\tilde{u}$ , quando  $\epsilon \rightarrow 0$ .

É possível provar que  $D^2u^\epsilon, D^2\tilde{u}^\epsilon \leq C \left(1 + \frac{1}{s}\right) I$ , para alguma constante  $C$  e todo  $\epsilon > 0$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $s > 2\epsilon$  (ver referência [2]).

Agora, escreva

$$b_\epsilon(y, s) := \int_0^1 DH(rDu^\epsilon(y, s) + (1-r)D\tilde{u}^\epsilon(y, s)) dr.$$

Daí, como  $v_t + b \cdot Dv = 0$  q.t.p., temos que  $v_t = -b \cdot Dv$ . Assim,

$$\begin{aligned} v_t + b_\epsilon \cdot Dv &= -b \cdot Dv + b_\epsilon \cdot Dv \\ &= (b_\epsilon - b) \cdot Dv \quad \text{q.t.p.} \end{aligned} \tag{2.79}$$

Logo,

$$\begin{aligned} v_t + \operatorname{div}(v \cdot b_\epsilon) &= v_t + Dv \cdot b_\epsilon + v \cdot \operatorname{div}(b_\epsilon) \\ &= (b_\epsilon - b) \cdot Dv + \operatorname{div}(b_\epsilon) \cdot v \quad \text{q.t.p.} \end{aligned} \tag{2.80}$$

Calculemos

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(b_\epsilon) &= \int_0^1 \sum_{k,l=1}^n H_{p_k p_l} (rDu^\epsilon + (1-r)D\tilde{u}^\epsilon) \cdot [ru_{x_l x_k}^\epsilon + (1-r)\tilde{u}_{x_l x_k}^\epsilon] dr \\ &\leq C \left(1 + \frac{1}{s}\right), \end{aligned} \tag{2.81}$$

pois  $H$  é uma função suave e convexa.

Fixado  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  e  $t_0 > 0$ , defina

$$R = \max \{ |DH(p)|; |p| \leq \max(Lip(u), Lip(\tilde{u})) \}$$

e considere o cone

$$C := \{(x, t); \quad 0 \leq t \leq t_0 \quad \text{e} \quad |x - x_0| \leq R(t_0 - t)\}.$$

Defina

$$e(t) = \int_{B(x_0, R(t_0-t))} v(x, t) dx, \quad (2.82)$$

para q.t.p.  $x \in U$  e  $t > 0$ . Derivando (2.82), temos

$$\dot{e}(t) = \int_{B(x_0, R(t_0-t))} v_t dx - R \int_{\partial B(x_0, R(t_0-t))} v dS,$$

e, como por (2.79) temos

$$v_t = -\operatorname{div}(v \cdot b_\epsilon) + \operatorname{div}(b_\epsilon) \cdot v + (b_\epsilon - b) \cdot Dv \quad \text{q.t.p.,}$$

obtemos

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \int_{B(x_0, R(t_0-t))} -\operatorname{div}(v \cdot b_\epsilon) + \operatorname{div}(b_\epsilon) \cdot v + (b_\epsilon - b) \cdot Dv dx \\ &\quad - R \int_{\partial B(x_0, R(t_0-t))} v dS. \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema da Divergência no primeiro membro da expressão acima, temos

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \int_{B(x_0, R(t_0-t))} \operatorname{div}(b_\epsilon) \cdot v + (b_\epsilon - b) \cdot Dv dx \\ &\quad - \int_{\partial B(x_0, R(t_0-t))} v \cdot b_\epsilon \cdot \nu - Rv dS \\ &= - \int_{\partial B(x_0, R(t_0-t))} v(b_\epsilon \cdot \nu + R) dS \\ &\quad + \int_{B(x_0, R(t_0-t))} \operatorname{div}(b_\epsilon) \cdot v + (b_\epsilon - b) \cdot Dv dx \end{aligned} \quad (2.83)$$

**Afirmção 4:**  $\int_{\partial B(x_0, R(t_0-t))} v(b_\epsilon \cdot \nu + R) dS \geq 0$

Com efeito, uma vez que  $|\nu| = 1$  e que  $|b_\epsilon| < R$  temos

$$-b_\epsilon \cdot \nu \leq |b_\epsilon \cdot \nu| \leq R,$$

logo  $R + b_\epsilon \cdot \nu \geq 0$ .

Como  $v \geq 0$ , então  $v(R + b_\epsilon \cdot \nu) \geq 0$ , implicando que

$$\int_{\partial B(x_0, R(t_0-t))} v(b_\epsilon \cdot \nu + R) dS \geq 0.$$



De posse da Afirmação 4 e usando a desigualdade (2.81) na expressão (2.83), obtemos

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &\leq \int_{B(x_0, R(t_0-t))} (\operatorname{div} b_\epsilon) \cdot v + (b_\epsilon - b) \cdot Dv dx \\ &\leq C \left(1 + \frac{1}{t}\right) e(t) + \int_{B(x_0, R(t_0-t))} (b_\epsilon - b) \cdot Dv dx. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Uma vez que  $b_\epsilon \rightarrow b$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$  e pela Afirmação 1, usando o Teorema da Convergência Dominada, obtemos

$$\int_{B(x_0, R(t_0-t))} (b_\epsilon - b) \cdot Dv dx \rightarrow 0 \quad \text{q.t.p. } x \in \mathbb{R}^n \quad \text{quando } \epsilon \rightarrow 0.$$

Daí,

$$\dot{e}(t) \leq C \left(1 + \frac{1}{t}\right) e(t) \quad \text{q.t.p. } 0 < t < t_0 \quad (2.85)$$

Fixe  $0 < \epsilon < r < t$  e escolha a função  $\Phi(z)$  de modo que

$$\Phi(z) = 0 \quad \text{se } |z| \leq \epsilon [Lip(u) + Lip(\tilde{u})],$$

ou, caso contrário, a função é positiva. Uma vez que  $u = \tilde{u}$  em  $\mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$ , pela condição inicial, temos

$$\begin{aligned} |w(x, \epsilon) - w(x, 0)| &= |u(x, \epsilon) - u(x, 0) + \tilde{u}(x, \epsilon) - \tilde{u}(x, 0)| \\ &\leq Lip(u)\epsilon + Lip(\tilde{u})\epsilon = \epsilon (Lip(u) + Lip(\tilde{u})). \end{aligned}$$

Logo,

$$\Phi(w) = \Phi(u - \tilde{u}) = 0 \quad \text{até } \{t = \epsilon\}.$$

Em particular,  $e(\epsilon) = 0$ .

Vejam agora o que acontece a partir do tempo  $t = \epsilon$ . Pela Desigualdade de Gronwall, temos, a partir de (2.85), que vale

$$e(r) \leq e^{\int_\epsilon^r C(1+\frac{1}{s})ds} e(\epsilon).$$

Como  $e(\epsilon) = 0$ , concluímos que  $e(r) = 0$ . Com isso,

$$v(x, t) = \Phi(u - \tilde{u}) = 0 \quad \text{em } B(x_0, R(t_0 - t)).$$

Logo,

$$|u - \tilde{u}| \leq \epsilon [Lip(u) + Lip(\tilde{u})] \quad \text{em } B(x_0, R(t_0 - t)). \quad (2.86)$$

Como desigualdade (2.86) vale para todo  $\epsilon > 0$ , temos que

$$u - \tilde{u} = 0 \quad \text{em} \quad B(x_0, R(t_0 - t)).$$

Em particular,

$$u(x_0, t_0) = \tilde{u}(x_0, t_0).$$

□

# Capítulo 3

## Leis de conservação: existência e unicidade de soluções fracas

Com este capítulo a nossa intenção é resolver, para todos os tempos  $t > 0$ , o problema de valor inicial para a lei de conservação

$$\begin{cases} u_t + F(u)_x = 0 & \text{em } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = g & \text{em } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}, \quad (3.1)$$

com  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função convexa suave e  $u : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  desconhecida.

Uma vez desenvolvida a Teoria de Hamilton-Jacobi, no capítulo anterior, basta relacionar a equação de Hamilton-Jacobi com leis de conservação. Feito isto, garantiremos a existência de solução para tais equações.

### 3.1 Solução integral para leis de conservação unidimensionais

Por definição, a solução de uma EDP deve ser suave, ou seja, no caso de equações de primeira ordem, as suas derivadas parciais de primeira ordem devem ser contínuas. Portanto, faz sentido calcularmos suas derivadas e substituí-las na EDP para verificar se, de fato, temos uma solução. A essas, damos o nome de **soluções clássicas**.

Para generalizarmos o conceito de solução, permitiremos que exista uma curva no espaço-tempo ao longo da qual a superfície solução passa por um salto. Se existe uma descontinuidade na superfície solução espaço-tempo, deve existir uma maneira de verificarmos a solução ao longo desta curva de descontinuidade. Sem que, para isso, seja necessário calcular derivadas, até porque estas não existem nesse caso. Por isso, abordaremos mais adiante o conceito de *solução integral*.

Sendo a equação de Burgers uma lei de conservação, como vimos no Capítulo 1, nem sempre podemos encontrar uma solução suave de (3.1). Devemos então encontrar

uma maneira de interpretar uma função  $u$  menos regular que seja solução dessa equação com condição inicial. A ideia é multiplicar a equação diferencial parcial em (3.1) pela função teste  $\varphi$ ,  $\varphi = \varphi(x, t)$ , e então integrar por partes, transferindo assim as derivadas de  $u$  para  $\varphi$ .

Tome  $\varphi : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  sendo uma função suave e com suporte compacto. Multiplicando a equação  $u_t + F(u)_x = 0$  por  $\varphi$ , e integrando com respeito ao espaço  $x$  e ao tempo  $t$ , obtemos

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u_t \varphi dx dt + \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty F(u)_x \varphi dx dt = 0. \quad (3.2)$$

Se escrevemos

$$I = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u_t \varphi dx dt \quad \text{e} \quad II = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty F(u)_x \varphi dx dt$$

temos que trocando a ordem de integração através do Teorema de Fubini e integrando por partes a primeira parcela,  $I$ , obtemos

$$I = \int_{-\infty}^\infty u \varphi \Big|_{t=0}^{t=\infty} - \int_0^\infty u \varphi_t dt dx,$$

pelo Teorema Fundamental do Cálculo e integração imprópria, temos que

$$I = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^b u(x, b) \varphi(x, b) - u(x, 0) \varphi(x, 0) - \int_0^\infty u \varphi_t dt dx.$$

Devido ao fato de  $\varphi$  ter suporte compacto e também por  $u(x, 0) = g(x)$  em  $t = 0$ , conseguimos

$$I = - \int_{-\infty}^\infty g(x) \varphi(0, x) + \int_0^\infty u \varphi_t dt dx.$$

Para a segunda parcela,  $II$ , integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned} II &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty F(u)_x \varphi dx dt = \int_0^\infty F(u) \varphi \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} - \int_0^\infty F(u) \varphi_x dx dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b F(u(b, t)) \varphi(b, t) - F(u(-b, t)) \varphi(-b, t) \\ &\quad - \int_{-\infty}^\infty F(u) \varphi_x dx dt \\ &= - \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty F(u) \varphi_x dx dt \end{aligned}$$

Substituindo I e II na igualdade (3.2), obtemos

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u\varphi_t + F(u)\varphi_x dxdt + \int_{-\infty}^\infty g(x)\varphi(x,0)dx = 0. \quad (3.3)$$

A expressão acima faz sentido supondo  $u$  uma solução limitada de (3.1). E disso, decorre a seguinte definição

**Definição 3.1.** *Uma função  $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))$  é dita **solução integral** do problema (3.1) se*

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u\varphi_t + F(u)\varphi_x dxdt = - \int_0^\infty g(x)\varphi(x,0)dx, \quad (3.4)$$

para toda função  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ .

Agora, veremos como uma solução desse tipo deve se comportar ao longo de uma descontinuidade.

### 3.1.1 Condição de Rankine-Hugoniot

Suponha que em alguma região aberta  $V \subset U$ , com  $U := \mathbb{R} \times [0, \infty)$ , a função  $u$  seja suave em qualquer lado de uma curva suave  $C$ , a qual divide  $V$  em duas partes.

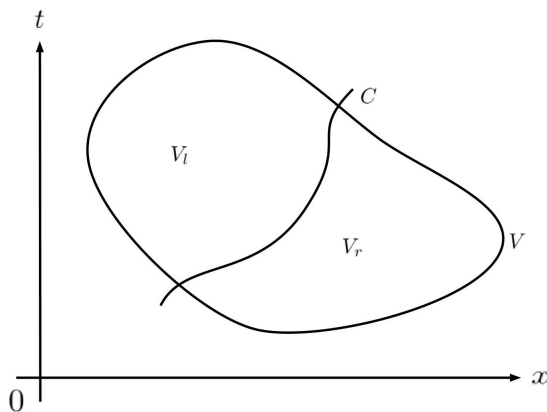


Figura 3.1: Curva de descontinuidade de  $u$  no conjunto  $V$

**Observação 3.2.** *Uma solução integral de (3.1) que é também diferenciável, é uma solução clássica para a equação (3.1).*

Com efeito, seja  $V_l$  a parte de  $V$  à esquerda da curva  $C$  e  $V_r$  a parte à direita. Assuma que  $u$  é uma solução integral de (3.1) e que  $u$  e suas primeiras derivadas sejam uniformemente contínuas em  $V_l$  e  $V_r$ . Agora tome uma função teste  $\varphi$  de suporte compacto em  $V_l$ . Pela igualdade (3.4), obtemos

$$0 = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u\varphi_t + F(u)\varphi_x dxdt = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u\varphi_t dxdt + \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty F(u)\varphi_x dxdt. \quad (3.5)$$

Empregando o Teorema de Fubini na primeira parcela da expressão (3.5) e integrando por partes, temos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} u \varphi_t dt dx &= \int_{-\infty}^{\infty} u \varphi \Big|_{t=0}^{t=\infty} - \int_0^{\infty} u_t \varphi dt dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^b u(x, b) \varphi(x, b) - u(x, 0) \varphi(x, 0) - \int_0^b u_t \varphi dt dx. \end{aligned}$$

Pelo fato de  $\varphi$  ter suporte compacto, concluímos que

$$\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u \varphi_t dx dt = - \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_t \varphi dx dt. \quad (3.6)$$

Para a segunda parcela de (3.5), procedemos de forma semelhante,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \varphi_x dx dt &= \int_0^{\infty} F(u) \varphi \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} F(u)_x \varphi dx dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b F(u(b, t)) \varphi(b, t) - F(u(-b, t)) \varphi(-b, t) \\ &\quad - \int_{-b}^b F(u)_x \varphi dx dt \end{aligned}$$

obtendo

$$\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \varphi_x dx dt = - \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u)_x \varphi dx dt. \quad (3.7)$$

Por (3.6) e (3.7), obtemos a igualdade

$$0 = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u \varphi_t + F(u) \varphi_x dx dt = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (u_t + F(u)_x) \varphi dx dt. \quad (3.8)$$

Como a expressão acima é satisfeita para toda função teste  $\varphi$  com suporte compacto em  $V_l$ , temos que

$$u_t + F(u)_x = 0 \quad \text{em } V_l.$$

De forma análoga, concluímos também que

$$u_t + F(u)_x = 0 \quad \text{em } V_r.$$

Agora considere uma função teste  $\varphi$  com suporte compacto em  $V$  que não se anule ao longo da curva  $C$ . Utilizando a expressão (3.4) e atentando ao fato de que  $\varphi(x, 0) = 0$ ,

deduzimos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u\varphi_t + F(u)\varphi_x dxdt \\ &= \iint_{V_l} u\varphi_t + F(u)\varphi_x dxdt + \iint_{V_r} u\varphi_t + F(u)\varphi_x dxdt. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Analisando separadamente as integrais sobre  $V_l$  e  $V_r$ , temos que, em  $V_l$

$$\iint_{V_l} u\varphi_t + F(u)\varphi_x dxdt = \iint_{V_l} u\varphi_t dxdt + \iint_{V_l} F(u)\varphi_x dxdt. \quad (3.10)$$

Então, integrando por partes a primeira parcela, temos

$$\iint_{V_l} u\varphi_t dxdt = - \iint_{V_l} u_t\varphi dxdt + \iint_{\partial V_l} u_l\varphi\nu_2 dS,$$

lembrando do fato de que  $\varphi$  não necessariamente se anula na curva  $C$ , obtemos

$$\iint_{V_l} u\varphi_t dxdt = - \iint_{V_l} u_t\varphi dxdt + \int_C u_l\varphi\nu_2 dS.$$

Repetindo o processo para a segunda parcela de (3.10), concluímos que

$$\iint_{V_l} F(u)\varphi_x dxdt = - \iint_{V_l} F(u)_x\varphi dxdt + \int_C F(u_l)\varphi\nu_1 dS.$$

Dessa forma,

$$\iint_{V_l} u\varphi_t + F(u)\varphi_x dxdt = \iint_{V_l} u_t + F(u)_x dxdt + \int_C (u_l\nu_2 + F(u_l)\nu_1)\varphi dS,$$

uma vez que  $u_t + F(u)_x = 0$  em  $V_l$ , obtemos

$$\iint_{V_l} u\varphi_t + F(u)\varphi_x dxdt = \int_C (u_l\nu_2 + F(u_l)\nu_1)\varphi dS, \quad (3.11)$$

onde  $\nu = (\nu_1, \nu_2)$  é o vetor unitário normal da curva  $C$ , apontando de  $V_l$  para  $V_r$ . Aqui o subíndice  $l$  indica o limite à esquerda enquanto o subíndice  $r$  denotará o limite à direita.

De forma semelhante, concluímos que

$$\iint_{V_r} u\varphi_t + F(u)\varphi_x dxdt = - \int_C (u_r\nu_2 + F(u_r)\nu_1)\varphi dS. \quad (3.12)$$

Adicionando as expressões (3.11) e (3.12) e substituindo em (3.9) obtemos

$$0 = \int_C [(F(u_l) - F(u_r))\nu_1 + (u_r - u_l)\nu_2]\varphi dz. \quad (3.13)$$

Como (3.13) é satisfeita para qualquer função teste  $\varphi$  nas condições anteriores, temos que

$$(F(u_l) - F(u_r)) \nu_1 + (u_r - u_l) \nu_2 = 0 \quad (3.14)$$

ao longo da curva  $C$ .

Suponha que a curva  $C$  seja parametrizada por  $x = s(t)$ , para alguma função suave  $s : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Logo, o vetor tangente à curva  $C$  é  $(s'(t), 1)$ , implicando que

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{1 + |s'(t)|}} (1, -s'(t)).$$

Consequentemente, (3.14) implica que

$$F(u_l) - F(u_r) = s'(t)(u_l - u_r) \quad (3.15)$$

em  $V$ , ao longo da curva  $C$ .

A expressão (3.15) é chamada **condição de Rankine - Hugoniot** ou **condição de salto** e, em resumo, nos diz que os limites à esquerda e à direita da função  $u$  devem estar alinhados com o coeficiente angular da curva de descontinuidade.

Vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 3.3.** Considere o problema de valor inicial para a equação de Burgers:

$$\begin{cases} u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0 & \text{em } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = g & \text{em } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

com dado inicial

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 - x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}.$$

**Solução** Aqui,  $F(u) = \frac{u^2}{2}$  e assim,  $F'(u) = u$ . Identificando o parâmetro  $s$  com o tempo  $t$  na equação da curva característica para leis de conservação, temos

$$x(t) = F'(g(x^0))t + x^0,$$

pela qual a solução  $u$  é sempre constante.

- Para  $x \leq 0$  temos que a curva característica tem equação  $x(t) = t + x^0$ , onde  $u(x, t) = 1$ ;
- Se  $0 \leq x \leq 1$ , então a equação característica é dada por  $x(t) = (1 - x^0)t + x^0$ , o que implica que

$$x^0 = \frac{x - t}{1 - t}$$



e assim,

$$u(x, t) = g(x^0) = 1 - x^0 = \frac{1 - x}{1 - t}.$$

- Já quando  $x \geq 1$ , a equação da curva característica é  $x(t) = x^0$ , pela qual  $u(x, t) = 0$ .

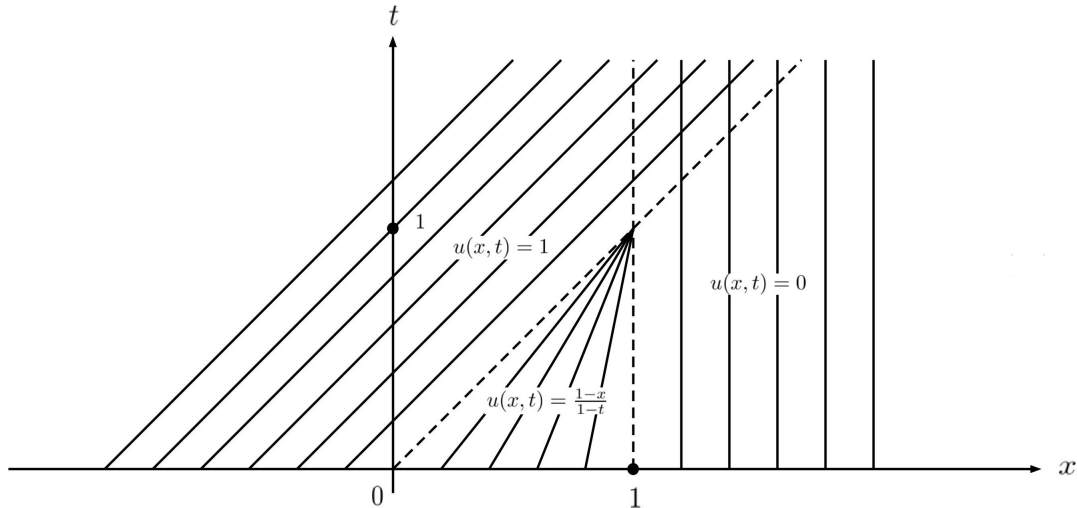


Figura 3.2: Retas características

Portanto, a solução para o problema proposto é dada por

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{para } x < t \leq 1 \\ \frac{1-x}{1-t} & \text{para } t < x \leq 1 \text{ e } 0 < t < 1 \\ 0, & \text{para } x \geq 1 \text{ e } 0 \leq t < 1 \end{cases}.$$

Observe que, para esse problema, o método das características só é válido até o tempo  $t = 1$ . A partir dele, principalmente no ponto  $(1, 1)$ , várias retas se cruzam e com isso, existem vários valores para a solução  $u$ . É razoável imaginar uma curva  $C$  de descontinuidade para  $u$  passando pelo ponto  $(1, 1)$ .

Pela condição de Rankine-Hugoniot, a velocidade  $s'(t)$  de tal curva é

$$s'(t) = \frac{F(u_l) - F(u_r)}{u_l - u_r} = \frac{\frac{1}{2} - 0}{1 - 0} = \frac{1}{2}.$$

Com isso,  $s(t) = \frac{1}{2} + K$ , onde  $K$  é uma constante. Além disso,  $s(1) = 1$ , daí,

$$s(t) = \frac{t + 1}{2}.$$

Logo, essa é a única curva que satisfaz (R-H) e passa pelo ponto  $(1, 1)$ . Portanto, para tempos  $t > 1$  podemos definir a solução  $u$  da lei de conservação com a condição inicial

dada, como sendo

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{quando } x < \frac{t+1}{2} \\ 0, & \text{quando } x > \frac{t+1}{2} \end{cases}.$$

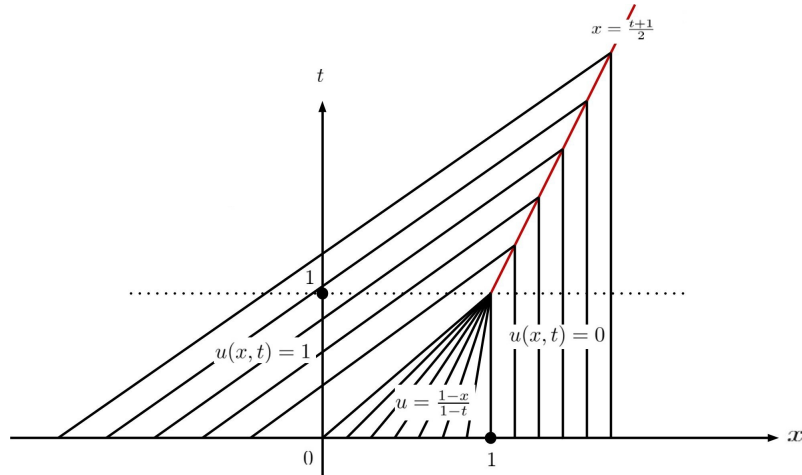


Figura 3.3: Aplicação do teorema de R-H

Agora, mudando apenas a condição inicial do exemplo anterior, acompanhemos o próximo exemplo.

**Exemplo 3.4.** Consideremos o problema inicial

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 & \text{se } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = g(x) \end{cases} \quad (3.16)$$

para o qual

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

**Solução** As curvas características são dadas por  $x(t) = F'(g(x^0))t + x^0$ , onde

$$x(t) = \begin{cases} x^0, & \text{se } x < 0 \\ t + x^0, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

e, dessa forma, a solução é dada por

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 1, & \text{se } x \geq t \end{cases}$$

Pela Figura (3.4), vemos que existe uma região do domínio de  $u$  que não é coberta por curvas características, quando  $0 < x < t$ . Para driblar tal impasse, podemos, por exemplo, criar uma curva de choque usando a condição de (R-H), pois, com isso, teríamos

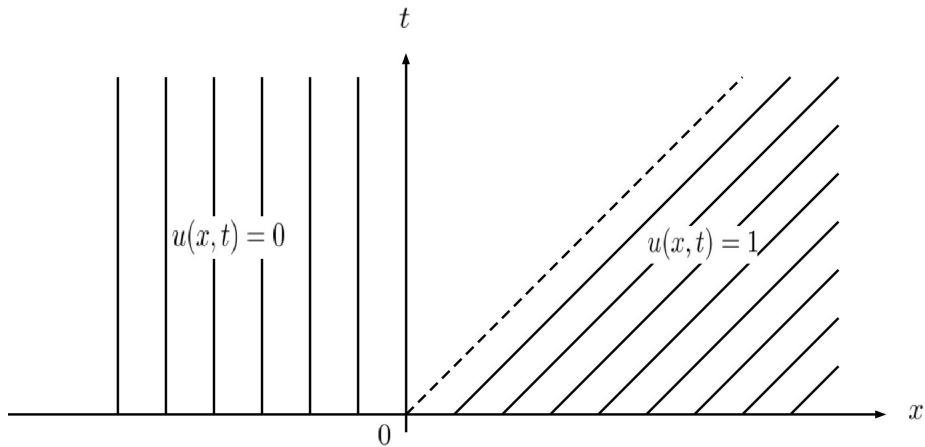


Figura 3.4: Retas características para o problema

valores para  $u$  em todo o domínio. Então

$$s'(t) = \frac{F(u_l) - F(u_r)}{u_l - u_r} = \frac{0 - \frac{1}{2}}{0 - 1} = \frac{1}{2}.$$

Com isso, podemos definir a solução

$$u_1(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < \frac{t}{2} \\ 1, & \text{se } x > \frac{t}{2} \end{cases}.$$

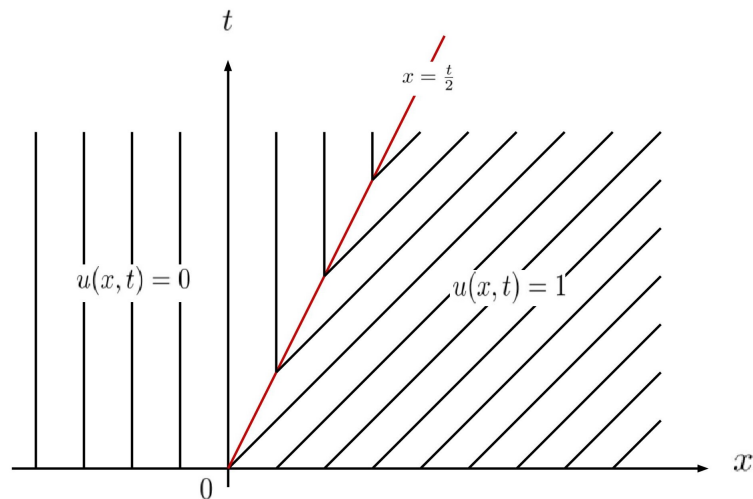


Figura 3.5: Curvas características emanando da curva de choque  $C$

Em contrapartida, poderíamos também optar por não construir uma curva de

choque e então definir como solução

$$u_2(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{x}{t} & \text{se } 0 < x < t \\ 1 & \text{se } x \geq t \end{cases},$$

que também é uma solução integral do problema. De fato, por construção, a solução  $u$  satisfaz a condição de (R-H) e, para  $x < 0$ , a solução  $u(x, t) = 0$  e, para  $x \geq t$ , a solução  $u(x, t) = 1$  satisfazem a equação. Resta-nos verificar se, para  $0 < x < t$ , a solução  $u(x, t) = \frac{x}{t}$  resolve a lei de conservação. E isso ocorre, pois

$$\left(\frac{x}{t}\right)_t + \left(\frac{x}{t}\right) \left(\frac{x}{t}\right)_x = -\frac{x}{t^2} + \frac{x}{t} \left(\frac{1}{t}\right) = 0, \quad \text{para todo } t > 0.$$

Então,  $u_2$  também é uma solução para o problema proposto.

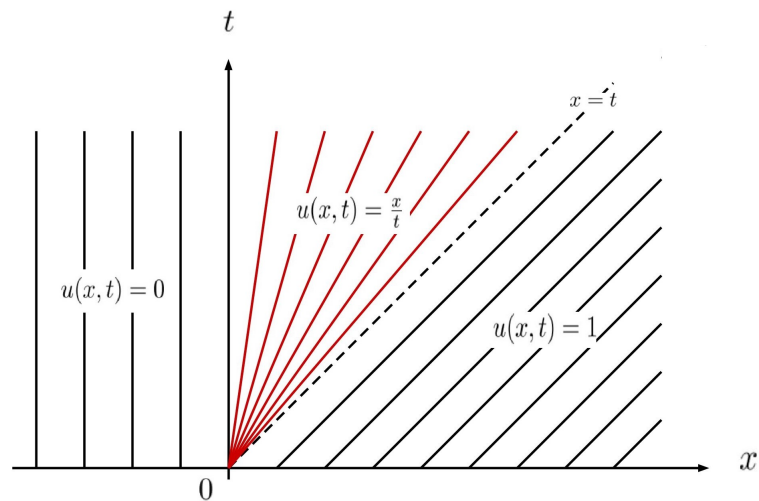


Figura 3.6: Revertendo o quadro de rarefação

As funções  $u_1$  e  $u_2$  também são soluções integrais de (3.16) que satisfazem a condição inicial. Dessa maneira, vemos que as soluções integrais para as leis de conservação unidimensionais não são únicas em geral.

### 3.1.2 Entropia

A condição de Rankine-Hugoniot não é suficiente para estabelecer a unicidade de soluções para as leis de conservação escalares, como vimos nos exemplos anteriores. Uma relação importante para conseguir a unicidade é a condição de entropia.

**Definição 3.5.** Dizemos que uma solução  $u$  satisfaz a **condição de entropia** se existe

uma constante positiva  $E$  tal que para todo  $h > 0$  vale

$$u(x+h, t) - u(x, t) \leq \frac{E}{t}h \quad (3.17)$$

para todo  $t > 0$  e para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

**Observação 3.6.** Se  $u$  satisfaz a condição de entropia então temos a seguinte relação

$$u_l \geq u_r.$$

Com efeito, se  $u$  satisfaz a condição de entropia, então, em particular, a função

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto u(x, t) - \frac{E}{t}x \end{aligned}$$

é não-crescente: tome  $h > 0$ , daí,

$$\begin{aligned} \Psi(x+h) - \Psi(x) &= u(x+h, t) - \frac{E}{t}(x+h) - u(x, t) + \frac{E}{t}x \\ &= u(x+h, t) - u(x, t) - \frac{E}{t}(x+h-x) \\ &\leq \frac{E}{t}h - \frac{E}{t}h = 0. \end{aligned}$$

Portanto,  $\Psi(x+h) \leq \Psi(x)$ . Sendo monótona, a função  $\Psi$  possui limites laterais direito e esquerdo em todo ponto. Em particular, a função  $x \mapsto u(x, t)$  também possui limites laterais à esquerda e à direita,  $u_l$  e  $u_r$ , respectivamente, em todo ponto.

Do fato de  $\Psi$  ser não-crescente,  $\Psi_l \geq \Psi_r$ , ou seja,

$$u_l(x, t) - \frac{E}{t}x \geq u_r(x, t) - \frac{E}{t}x$$

e assim,  $u_l \geq u_r$ .

Em outras palavras, ao atravessar uma descontinuidade, a solução pode sofrer um salto apenas para baixo. Podemos perceber, por exemplo como na Figura (3.3), que a condição de entropia elimina a existência de ondas de rarefação,

**Observação 3.7.** Suponha agora que a função  $F$  é convexa, ou seja,  $F'' > 0$ , daí,  $F'$  é estritamente crescente. Se  $u$  satisfaz a condição de entropia  $u_l \geq u_r$  e como  $F'$  é estritamente crescente, temos que  $F'(u_l) > F'(u_r)$ . Se  $u$  satisfaz também a condição de Rankine-Hugoniot, temos que

$$F'(u_l) > s'(t) > F'(u_r) \quad (3.18)$$

onde  $s'$  representa a velocidade do salto.

De fato, se  $u$  satisfaz a condição de Rankine-Hugoniot, então

$$s'(t) = \frac{F(u_l) - F(u_r)}{u_l - u_r}. \quad (3.19)$$

Por outro lado, pelo Teorema do Valor Médio, existe  $\xi$  com  $u_r < \xi < u_l$  de modo que

$$F'(\xi) = \frac{F(u_l) - F(u_r)}{u_l - u_r}. \quad (3.20)$$

Unindo o fato de  $F$  ser crescente ao da solução  $u$  satisfazer a condição de entropia e as equações (3.19) e (3.20), obtemos

$$F'(u_l) > s' > F'(u_r).$$

Com isso, a velocidade de choque é intermediária entre as velocidades das curvas características antes e depois do choque.

A condição de entropia será abordada mais adiante quando formos garantir a unicidade para soluções integrais das leis de conservação unidimensionais.

## 3.2 Fórmula de Lax-Oleinik

O objetivo agora é obter uma fórmula de solução integral apropriada para o problema (3.1), assumindo que a função fluxo  $F$  é uniformemente convexa. Suponha que  $g \in L^\infty(\mathbb{R})$  e considere

$$h(x) := \int_0^x g(y) dy, \quad (3.21)$$

com  $x \in \mathbb{R}$ . Pela fórmula de Hopf-Lax, defina

$$w(x, t) := \min_{y \in \mathbb{R}} \left\{ tF^* \left( \frac{x - y}{t} \right) + h(y) \right\} \quad (3.22)$$

com  $x \in \mathbb{R}$  e  $t > 0$ . Nesse caso,  $F^*$  é a nossa função Lagrangiana.

Provada a unicidade da solução de Hopf-Lax no capítulo anterior, temos que  $w$  é a única solução do problema

$$\begin{cases} w_t + F(w_x) = 0 & \text{em } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ w = h & \text{em } \mathbb{R} \times t = 0 \end{cases}. \quad (3.23)$$

Assumindo  $w$  suave e derivando em relação à variável espacial as equações de (3.23), temos

$$\begin{cases} w_{xt} + F(w_x)_x = 0 & \text{em } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ w_x = g & \text{em } \mathbb{R} \times t = 0 \end{cases}. \quad (3.24)$$

Consequentemente, se  $u = w_x$ , temos que  $u$  resolve o problema (3.23). E, como vimos anteriormente,  $w$  é diferenciável em q.t.p.  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$ , assim,

$$u(x, t) := \frac{\partial}{\partial x} \left[ \min_{y \in \mathbb{R}} \left\{ tF^* \left( \frac{x-y}{t} \right) + h(y) \right\} \right] \quad (3.25)$$

é definido q.t.p.  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$  e é presumivelmente o principal candidato a ser solução do problema de valor inicial (3.1). A partir de agora, justificaremos a relação entre a equação de Hamilton-Jacobi e leis de conservação.

**Notação.** Uma vez que  $F$  é uniformemente convexa, em particular,  $F'' \geq \theta > 0$ , temos que  $F'$  é estritamente crescente e também sobrejetora, logo, possui inversa. Denote

$$G := (F')^{-1}.$$

**Lema 3.8.** *Assuma que  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é suave e uniformemente convexa. Então, a sua transformada de Legendre,  $F^*$ , é  $C^2$  e vale*

$$(F^*)'(q) = G(q), \quad \forall q \in \mathbb{R}.$$

Além disso,  $F^*$  é estritamente convexa.

*Demonstração.* Pela definição da Transformada de Legendre, temos que

$$F^*(q) = \max_{p \in \mathbb{R}} \{qp - F(p)\}, \quad \forall q \in \mathbb{R}.$$

Tome  $\tilde{p} \in \mathbb{R}$  de modo que o máximo para  $F^*(q)$  seja atingido. Agora, considere a aplicação

$$\Psi(p) = pq - F(p), \quad (3.26)$$

e, sendo  $\tilde{p}$  um ponto crítico para  $\Psi$ , temos que

$$(\Psi)'(\tilde{p}) = 0,$$

e assim,

$$F'(\tilde{p}) = q. \quad (3.27)$$

Aplicando a função  $G$  em ambos os membros da igualdade (3.27), temos que

$$\tilde{p} = G(q).$$

Assim, substituindo em (3.26), obtemos

$$F^*(q) = qG(q) - F(G(q)).$$

Derivando essa expressão em relação à variável  $q$ , temos

$$(F^*)'(q) = G(q) + qG'(q) - F'(G(q))G'(q)$$

e usando (3.27), obtemos

$$(F^*)'(q) = G(q) \quad \forall q \in \mathbb{R}. \quad (3.28)$$

Agora, para provar a convexidade estrita, veja que derivando ambos os membros da expressão (3.28) com respeito à variável  $q$ , temos

$$(F^*)''(q) = G'(q).$$

Note que, pela definição de  $G$ ,

$$G'(q) = [(F')^{-1}]'(q),$$

que, pelo Teorema da Aplicação Inversa, implica em

$$G'(q) = \frac{1}{F''(G(q))}.$$

Sendo  $F$  uniformemente convexa,  $F'' > 0$ , temos que

$$\frac{1}{F''(G(q))} > 0.$$

Portanto, comparando a informação acima com a equação (3.28), obtemos

$$(F^*)''(q) = \frac{1}{F''(G(q))} > 0, \forall q \in \mathbb{R},$$

de onde inferimos que  $F^*$  é estritamente convexa.  $\square$

Sem perda de generalidade, assumamos que  $F(0) = 0$ , assim podemos considerar  $F'' \geq 0$ .

No resultado a seguir, provaremos que o ponto  $y \in \mathbb{R}$  que minimiza a Fórmula de Hopf-Lax, em que a função fluxo  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uniformemente convexa, mantém uma relação não-decrescente. Isto é, se  $x_1 < x_2$  e  $y_1$  é tal que realiza o mínimo para a fórmula de Hopf-Lax no ponto  $x_1$ , então o ponto  $y_2$  que realiza o mínimo para a fórmula aplicada no ponto  $x_2$  deve ser maior ou igual a  $y_1$  ( $y_1 \leq y_2$ ). Esta informação será utilizada para definirmos a solução para leis de conservação, mais adiante.

**Lema 3.9.** *Para  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  suave e uniformemente convexa, fixados  $t > 0$  e  $x_1 < x_2$*



números reais, suponha que  $y_1$  satisfaz

$$\min_{y \in \mathbb{R}} \left\{ tF^* \left( \frac{x_1 - y}{t} \right) + h(y) \right\} = tF^* \left( \frac{x_1 - y_1}{t} \right) + h(y_1). \quad (3.29)$$

Então,

$$tF^* \left( \frac{x_2 - y}{t} \right) + h(y) > tF^* \left( \frac{x_2 - y_1}{t} \right) + h(y_1) \quad (3.30)$$

para  $y < y_1$ . Ou seja, qualquer ponto  $y$  à esquerda de  $y_1$  não minimiza a aplicação  $z \mapsto tF^* \left( \frac{x-z}{t} \right) + h(z)$ .

*Demonstração.* Seja  $y < y_1$ , onde  $y_1$  realiza o mínimo para a fórmula de Hopf-Lax no ponto  $x_1$ . Por conveniência, escreva

$$\begin{cases} x_2 - y_1 &= \xi(x_1 - y_1) + (1 - \xi)(x_2 - y) \\ x_1 - y &= (1 - \xi)(x_1 - y_1) + \xi(x_2 - y) \end{cases}, \quad (3.31)$$

onde  $\xi := \frac{y_1 - y}{x_2 - x_1 + y_1 - y}$ . Pelo fato de  $y < y_1$  e  $x_1 < x_2$ , temos  $0 < \xi < 1$ .

Uma vez que, pelo Lema 3.8,  $F^*$  é convexa, e usando a informação (3.31), temos

$$F^* \left( \frac{x_2 - y_1}{t} \right) \leq \xi F^* \left( \frac{x_1 - y_1}{t} \right) + (1 - \xi) F^* \left( \frac{x_2 - y}{t} \right)$$

e

$$F^* \left( \frac{x_1 - y}{t} \right) \leq (1 - \xi) F^* \left( \frac{x_1 - y_1}{t} \right) + \xi F^* \left( \frac{x_2 - y}{t} \right).$$

Somando essas duas desigualdades temos

$$F^* \left( \frac{x_2 - y_1}{t} \right) + F^* \left( \frac{x_1 - y}{t} \right) \leq F^* \left( \frac{x_1 - y_1}{t} \right) + F^* \left( \frac{x_2 - y}{t} \right). \quad (3.32)$$

Multiplicando a expressão (3.32) por  $t > 0$  e somando  $h(y_1) + h(y)$  a ambos os membros, obtemos

$$\begin{aligned} tF^* \left( \frac{x_2 - y_1}{t} \right) + h(y_1) + tF^* \left( \frac{x_1 - y}{t} \right) + h(y) \\ \leq tF^* \left( \frac{x_1 - y_1}{t} \right) + h(y_1) + tF^* \left( \frac{x_2 - y}{t} \right) + h(y), \end{aligned}$$

e assim,

$$\begin{aligned} tF^* \left( \frac{x_2 - y_1}{t} \right) + h(y_1) - \left[ tF^* \left( \frac{x_2 - y}{t} \right) + h(y) \right] \\ < tF^* \left( \frac{x_1 - y_1}{t} \right) + h(y_1) - \left[ tF^* \left( \frac{x_1 - y}{t} \right) + h(y) \right] \\ < 0, \end{aligned}$$

usamos o fato de que  $y_1$  é minimizador da Fórmula de Hopf-Lax para o ponto  $x_1$ , por hipótese. Portanto,

$$tF^*\left(\frac{x_2 - y_1}{t}\right) + h(y_1) < tF^*\left(\frac{x_2 - y}{t}\right) + h(y),$$

com  $y < y_1$  e  $x_1 < x_2$ . □

**Observação 3.10.** Dado  $t > 0$ , para cada  $x \in \mathbb{R}$  defina

$$y(x, t) := \text{o menor } y \text{ que realiza o mínimo para a fórmula de Hopf-Lax.}$$

Pelo Lema 3.9, sabemos que a aplicação

$$x \mapsto y(x, t)$$

é não-decrescente, o que implica que ela possui um conjunto enumerável de descontinuidades. Ou seja, essa aplicação é contínua q.t.p.  $x \in \mathbb{R}$ .

**Afirmção:** Em um ponto  $x$  de continuidade de  $y(\cdot, t)$ , temos que  $y(x, t)$  é único valor de  $y$  satisfazendo o mínimo de Hopf-Lax.

De fato, dado que, para  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y_1$  é o menor valor satisfazendo o mínimo, se existir  $y_2$  que também minimize a Fórmula de Hopf-Lax, então  $y_2 > y_1$ . Com isso, para quaisquer  $z \in \mathbb{R}$  com  $z > x$ , os valores  $y(z, t)$  serão sempre maiores ou iguais a  $y_2$ , o que configura uma descontinuidade no ponto  $x \in \mathbb{R}$  e assim, contradiz nossa hipótese.

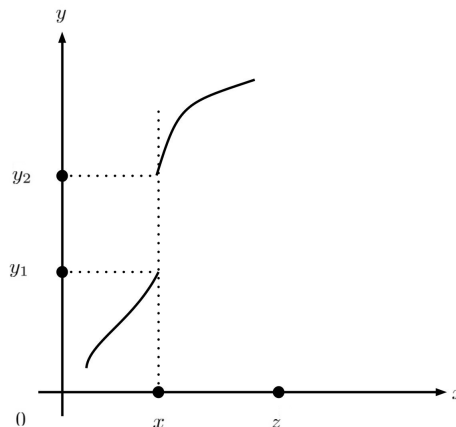


Figura 3.7:  $y(\cdot, t)$  é uma função não-decrescente

**Teorema 3.11.** (Fórmula de Lax-Oleinik) Assuma que  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é suave e uniformemente convexa e que  $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ .

i) Para cada  $t > 0$ , para q.t.p.  $x \in \mathbb{R}$  (a menos de conjunto enumerável), existe um

único ponto  $y(x, t)$  modo que

$$\min_{y \in \mathbb{R}} \left\{ tF^* \left( \frac{x - y}{t} \right) + h(y) \right\} = tF^* \left( \frac{x - y(x, t)}{t} \right) + h(y(x, t));$$

ii) A aplicação  $x \mapsto y(x, t)$  é não-decrescente;

iii) Para todos os tempos  $t > 0$ , a função  $u$  definida por (3.25) é dada por

$$u(x, t) = G \left( \frac{x - y(x, t)}{t} \right) \quad (3.33)$$

para q.t.p.  $x \in \mathbb{R}$ . Em particular, a fórmula (3.33) é satisfeita para q.t.p.  $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ .

**Definição 3.12.** A fórmula (3.33) é conhecida como **fórmula de Lax-Oleinik** para a solução de (3.1), onde  $h$  é definida por (3.21) e  $L = F^*$ .

*Demonstração.* Note que o Lema 3.9 prova o item ii) desse teorema e a Observação 3.10 prova o item i). Nos resta provar iii).

De acordo com a teoria desenvolvida no Capítulo 2, para cada  $t > 0$  fixado, a seguinte aplicação, dada pela fórmula de Hopf-Lax,

$$x \mapsto w(x, t) := \min_{y \in \mathbb{R}} \left\{ tF^* \left( \frac{x - y}{t} \right) + h(y) \right\} \quad (3.34)$$

$$= tF^* \left( \frac{x - y(x, t)}{t} \right) + h(y(x, t)) \quad (3.35)$$

é diferenciável q.t.p.  $x \in \mathbb{R}$ . Em particular, dado  $t > 0$ , para q.t.p.  $x \in \mathbb{R}$ , as aplicações

$$x \mapsto F^* \left( \frac{x - y(x, t)}{t} \right)$$

e

$$x \mapsto h(y(x, t))$$

são diferenciáveis q.t.p.  $x \in \mathbb{R}$ , logo, podemos derivá-las com respeito à variável  $x$ ,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ tF^* \left( \frac{x - y(x, t)}{t} \right) + h(y(x, t)) \right] \\ &= t(F^*)' \left( \frac{x - y(x, t)}{t} \right) \frac{1}{t} + t(F^*)' \left( \frac{x - y(x, t)}{t} \right) \left( -\frac{y_x(x, t)}{t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} h(y(x, t)) \\ &= (F^*)' \left( \frac{x - y(x, t)}{t} \right) (1 - y_x(x, t)) + \frac{\partial}{\partial x} h(y(x, t)). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Uma vez que a aplicação  $tF^* \left( \frac{x-y}{t} \right) + h(y)$  tem um mínimo em  $y = y(x, t)$ , a aplicação

$$z \mapsto tF^* \left( \frac{x - y(z, t)}{t} \right) + h(y(z, t))$$

tem mínimo em  $z = x$ . Portanto, derivando tal aplicação em relação à variável  $z$  e aplicando no ponto  $x$ , temos:

$$-t(F^*)' \left( \frac{x - y(x, t)}{t} \right) y_x(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} h(y(x, t)) = 0. \quad (3.37)$$

Substituindo essa identidade em (3.36), obtemos

$$u(x, t) = (F^*)' \left( \frac{x - y(x, t)}{t} \right),$$

e, pelo Lema 3.8, concluímos que

$$u(x, t) = G \left( \frac{x - y(x, t)}{t} \right),$$

para todo  $t > 0$ . □

Feito isto, resta-nos verificar que de fato a fórmula de Lax-Oleinik satisfaz a lei de conservação unidimensional para todos os tempos  $t > 0$ .

**Teorema 3.13.** (*Fórmula de Lax-Oleinik como solução integral*) *Nas hipóteses do teorema anterior, a função  $u$  definida por Lax-Oleinik,*

$$u(x, t) = G \left( \frac{x - y(x, t)}{t} \right),$$

*é uma solução integral do problema de valor inicial (3.1).*

*Demonstração.* Defina  $w(x, t) := \min_{y \in \mathbb{R}} \left\{ tF^* \left( \frac{x - y}{t} \right) + h(y) \right\}$  com  $x \in \mathbb{R}$  e  $t > 0$ .

Já vimos que tal aplicação é Lipschitz contínua, diferenciável q.t.p.  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$  e é solução de

$$\begin{cases} w_t(x, t) + F(w_x(x, t)) = 0 \\ w(x, 0) = h(x) \end{cases}.$$

Assim, para qualquer função teste  $v : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , suave e de suporte compacto, vale

$$0 = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty w_t v_x dx dt + \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty F(w_x) v_x dx dt. \quad (3.38)$$

Uma vez que a aplicação  $x \mapsto w(x, t)$  é Lipschitz contínua, ela é absolutamente contínua para cada  $t > 0$ , e então existe sua derivada q.t.p.  $x \in \mathbb{R}$  (ver Seção 6.4 de [9]). Com isso, podemos calcular a integração por partes em (3.38). Depois de usarmos o Teorema de Fubini para inverter a ordem de integração, para a primeira parcela da soma (3.38), temos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} w_t v_x dt dx &= \int_{-\infty}^{\infty} w v_x \Big|_{t=0}^{t=\infty} - \int_0^{\infty} w v_{xt} dt dx \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} w(x, 0) v_x(x, 0) dx - \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} w v_{xt} dt dx, \end{aligned} \quad (3.39)$$

lembrando que usamos o fato de  $v_x$  ter suporte compacto na última igualdade.

Novamente integrando (3.39) por partes em relação a  $x$ , temos

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w_t v_x dx dt &= - \left( w v \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} w_x v dx \Big|_{t=0} \right) \\ &\quad - \left( \int_0^{\infty} w v_t \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} - \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w_x v_t dx dt \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} w_x v \Big|_{t=0} + \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} w_x v_t dx dt. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Como  $w(x, 0) = h(x) = \int_0^x g(y) dy$  e  $w$  é diferenciável q.t.p.  $x$ , temos

$$\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w_t v_x dx dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} w_x v_t dx dt + \int_{-\infty}^{\infty} g(x) v(x, t) dx. \quad (3.41)$$

Substituindo a expressão anterior em (3.38), obtemos

$$\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w_x v_t + F(w_x) v_x dx dt + \int_{-\infty}^{\infty} g(x) v(x, t) dx = 0$$

e, como  $u = w_x$ , concluímos que

$$\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u v_t + F(u) v_x dx dt + \int_{-\infty}^{\infty} g(x) v(x, t) dx = 0.$$

□

### 3.3 Unicidade da solução

Veremos que a fórmula de Lax-Oleinik satisfaz a condição de entropia.

**Lema 3.14.** (*Estimativa unilateral de salto*): Assuma  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  suave e uniformemente convexa e  $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ . Então existe uma constante  $C$  tal que a função  $u$  definida pela

fórmula de Lax-Oleinik

$$u(x, t) = G\left(\frac{x - y(x, t)}{t}\right)$$

satisfaz a desigualdade

$$u(x + z, t) - u(x, t) \leq \frac{C}{t}z$$

para todo  $t > 0$  e  $x, z \in \mathbb{R}$ , com  $z > 0$ .

*Demonstração.* Inicialmente, observe que ao calcularmos o mínimo para a solução de Lax-Oleinik, basta que escolhamos  $y$  de modo que

$$\left|\frac{x - y}{t}\right| \leq C, \text{ para algum } C.$$

**Afirmção:** A função  $G$  é Lipschitz contínua.

De fato, uma vez que  $G = (F')^{-1}$  e a função  $F$  é suave, temos que  $G$  é uma função suave. Como avaliaremos sempre a função  $G$  num intervalo limitado  $[-C, C]$ , podemos supor que sua derivada tem um supremo nesse intervalo, o qual podemos considerar como a constante de Lipschitz de  $G$  no intervalo  $[-C, C]$ . Pois,

$$G'(x) = \frac{1}{F''(G(x))} \leq \frac{1}{\theta},$$

uma vez que  $F$  é convexa, com  $F'' > \theta$ .

Dessa forma, temos o seguinte

$$\begin{aligned} G\left(\frac{x + z - y(x + z, t)}{t}\right) - G\left(\frac{x - y(x + z, t)}{t}\right) &\leq \\ &\leq \text{Lip}(G) \left| \frac{x + z - y(x + z, t)}{t} - \frac{x - y(x + z, t)}{t} \right| \\ &= \text{Lip}(G) \frac{z}{t}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Pela convexidade de  $F$ ,  $F'' > 0$ , e então temos que  $F'$  é estritamente crescente, daí  $G$  é não-decrescente. Lembremos também que  $y(\cdot, t)$  é não-decrescente. Usando essas informações e a desigualdade (3.42), temos

$$\begin{aligned} u(x, t) = G\left(\frac{x - y(x, t)}{t}\right) &\geq G\left(\frac{x - y(x + z, t)}{t}\right) \\ &\geq G\left(\frac{x + z - y(x, t)}{t}\right) - \text{Lip}(G) \frac{z}{t} \\ &= u(x + z, t) - \text{Lip}(G) \frac{z}{t}, \end{aligned}$$

obtendo

$$u(x + z, t) - u(x, t) \leq \frac{\text{Lip}(G)}{t}z, \text{ com } z > 0,$$

como queríamos. □

**Definição 3.15.** Dizemos que uma função  $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty))$  é uma *solução de entropia* do problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + F(u)_x = 0 & \text{em } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = g & \text{em } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (3.43)$$

se ela satisfaz as seguintes condições

$$(i) \quad \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty uv_t + F(u)v_x dx dt + \int_{-\infty}^\infty gv dx \Big|_{t=0} = 0 \quad (3.44)$$

para toda função  $v : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  suave com suporte compacto e

$$(ii) \quad u(x+z, t) - u(x, t) \leq C \left(1 + \frac{1}{t}\right), \quad (3.45)$$

para alguma constante  $C > 0$  e q.t.p.  $x, z \in \mathbb{R}$  e  $t > 0$ , com  $z > 0$ .

**Teorema 3.16.** (Unicidade de soluções de entropia) Seja  $F$  convexa e suave. Então, a menos de um conjunto de medida nula, existe uma única solução para o problema

$$\begin{cases} u_t + F(u)_x = 0 & \text{em } \mathbb{R} \times [0, \infty) \\ u = g & \text{em } \mathbb{R} \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

*Demonstração.* Suponha que  $u$  e  $\tilde{u}$  são duas soluções entrópicas de (3.43). Logo,  $u, \tilde{u} \in L^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty))$  são soluções integrais de (3.43) e satisfazem a condição de entropia,

$$u(x+z, t) - u(x, t) \leq C \left(1 + \frac{1}{t}\right) z,$$

para algum  $C \geq 0$ , q.t.p.  $x, z \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$  e  $z > 0$ .

1. Defina  $w := u - \tilde{u}$ . Queremos mostrar que  $w = 0$ . Observe que, para todo  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$ ,

$$\begin{aligned} F(u(x, t)) - F(\tilde{u}(x, t)) &= \int_0^1 \frac{d}{dr} F(ru(x, t) + (1-r)\tilde{u}(x, t)) dr \\ &= \int_0^1 F'(ru(x, t) + (1-r)\tilde{u}(x, t)) \cdot (u(x, t) - \tilde{u}(x, t)) dr, \end{aligned}$$

e, definindo

$$b(x, t) := \int_0^1 F'(ru(x, t) + (1-r)\tilde{u}(x, t)) dr,$$

temos

$$F(u(x, t)) - F(\tilde{u}(x, t)) = b(x, t) \cdot w(x, t). \quad (3.46)$$

Tome  $v$  uma função teste e faça

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u - \tilde{u})v_t + (F(u) - F(\tilde{u}))v_x dx dt \\
&= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty w \cdot v_t + (b \cdot w)v_x dx dt \\
&= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty w \cdot (v_t + b \cdot v_x) dx dt
\end{aligned} \tag{3.47}$$

A partir de agora, a ideia é reescrever a expressão  $v_t + b \cdot v_x$  de modo que consigamos mostrar que  $w$  é a função nula, e assim,  $u = \tilde{u}$ . Para isso, consideraremos um problema de condição inicial para essa equação de transporte, no caso não homogênea, de modo essa EDP possa ser substituída por uma função teste na expressão (3.47).

2. Tome  $\epsilon > 0$  e defina as convoluções  $u^\epsilon = \eta_\epsilon * u$  e  $\tilde{u}^\epsilon = \eta_\epsilon * \tilde{u}$ , onde  $\eta_\epsilon$  é um molificador nas variáveis  $x$  e  $t$ .

**Afirmção 1:**  $\|u^\epsilon\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{L^\infty}$  e  $\|\tilde{u}^\epsilon\|_{L^\infty} \leq \|\tilde{u}\|_{L^\infty}$ .

De fato,

$$|u^\epsilon(x, t)| = \left| \int_{B_\epsilon(0)} \eta_\epsilon(y) u(x - y, t) dy \right| \leq \int_{B_\epsilon(0)} \eta_\epsilon(y) |u(x - y, t)| dy.$$

Como  $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ , temos  $|u| \leq \|u\|_{L^\infty}$ , daí

$$\begin{aligned}
|u^\epsilon(x)| &\leq \int_{B_\epsilon(0)} \eta_\epsilon(y) \|u\|_{L^\infty} dy \\
&= \|u\|_{L^\infty} \int_{B_\epsilon(0)} \eta_\epsilon(y) dy = \|u\|_{L^\infty}.
\end{aligned}$$

A desigualdade  $\|\tilde{u}^\epsilon\|_{L^\infty} \leq \|\tilde{u}\|_{L^\infty}$  segue de forma análoga.

Dado que  $u, \tilde{u} \in L^\infty$ , temos que elas são localmente integráveis, pela definição de convolução, temos

$$u^\epsilon \rightarrow u \quad \text{e} \quad \tilde{u}^\epsilon \rightarrow \tilde{u} \quad \text{q.t.p. quando} \quad \epsilon \rightarrow 0. \tag{3.48}$$

Uma vez que as soluções  $u$  e  $\tilde{u}$  são entrópicas, temos que

$$u_x^\epsilon, \tilde{u}_x^\epsilon < C \left( 1 + \frac{1}{s} \right),$$

ver [2].

3. Escreva

$$b_\epsilon(x, t) := \int_0^1 F'(ru^\epsilon(x, t) + (1-r)\tilde{u}^\epsilon(x, t)) dr.$$



Usando o fato de que

$$v_t + b \cdot v_x = v_t + b \cdot v_x + b_\epsilon v_x - b_\epsilon v_x$$

e substituindo na expressão (3.48), obtemos

$$0 = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty w(v_t + b_\epsilon v_x) dx dt + \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty w(b - b_\epsilon) v_x dx dt. \quad (3.49)$$

Pelo método das características, garantiremos existência e unicidade local de solução para a EDP  $v_t + b_\epsilon v_x$  da primeira parcela da soma acima.

4. Tome  $T > 0$  e uma função suave  $\psi : \mathbb{R} \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  com suporte compacto e considere uma função  $v$  que seja solução do seguinte problema de condição inicial para a equação do transporte

$$\begin{cases} v_t^\epsilon + b_\epsilon v_x^\epsilon = \psi & \text{em } \mathbb{R} \times (0, T) \\ v = 0 & \text{em } \mathbb{R} \times \{t = T\}. \end{cases} \quad (3.50)$$

Resolvamos o problema (3.50) pelo método das características. Podemos reescrever a EDP da seguinte maneira

$$f(v_x^\epsilon, v_t^\epsilon, v^\epsilon, x, t) = (v_x^\epsilon, v_t^\epsilon) \cdot (b_\epsilon, 1) - \psi = 0,$$

e portanto, o sistema característico é dado por

$$\begin{cases} \dot{y}(s) = (b_\epsilon, 1) \\ \dot{v}(s) = (v_x^\epsilon, v_t^\epsilon) \cdot (b_\epsilon, 1) = \psi \\ \dot{p}(s) = 0 \end{cases}, \quad (3.51)$$

onde  $y(s) = (x_\epsilon(s), s)$  e  $p(s) = (v_x^\epsilon(s), v_t^\epsilon(s))$ . Da primeira equação do sistema acima, obtemos

$$\begin{cases} \dot{x}_\epsilon(s) = b_\epsilon(x_\epsilon(s), s) & s \geq t \text{ e } x \text{ fixado} \\ x_\epsilon(s) = x \end{cases}. \quad (3.52)$$

**Observação 3.17.** Note que  $b_\epsilon$  é uma aplicação contínua (pois,  $F$  é suave, em particular,  $F'$  é contínua e sua composição pela função integral também é contínua), além disso, como  $u^\epsilon, \tilde{u}^\epsilon$  são limitadas e  $F'$  é contínua, temos que  $b_\epsilon$  é uma função limitada.

Observe também que  $b_\epsilon$  é Lipschitz contínua. De fato, perceba que

$$\begin{aligned}
(b_\epsilon)_x &= \int_0^1 F''(ru^\epsilon(x,t) + (1-r)\tilde{u}^\epsilon(x,t)) \cdot (ru^\epsilon(x,t) + (1-r)\tilde{u}^\epsilon(x,t)) dr \\
&\leq \int_0^1 F''(ru^\epsilon(x,t) + (1-r)\tilde{u}^\epsilon(x,t)) \cdot \left( rC \left( 1 + \frac{1}{t} \right) + (1-r)C \left( 1 + \frac{1}{t} \right) \right) dr \\
&= C \left( 1 + \frac{1}{t} \right) \int_0^1 F''(ru^\epsilon(x,t) + (1-r)\tilde{u}^\epsilon(x,t)) dr \\
&\leq C \left( 1 + \frac{1}{t} \right), \tag{3.53}
\end{aligned}$$

pois  $F$  é convexa, em particular, é limitada num conjunto limitado e também já temos pela Afirmação 1 que  $\|u^\epsilon\|$  e  $\|\tilde{u}^\epsilon\|$  são limitados.

Agora, pelo Teorema do Valor Médio, para algum  $w \in \mathbb{R}$  e para todo  $x, y$ , temos

$$|b_\epsilon(x,t) - b_\epsilon(y,t)| = |(b_\epsilon)_x| |x - y| \leq K|x - y|,$$

com  $K \geq C \left( 1 + \frac{1}{t} \right)$ . Logo,  $b_\epsilon$  é uma função Lipschitz contínua na coordenada espacial.

Essa Observação nos garante que, pelo Teorema de Picard para existência e unicidade de soluções para EDO's, o problema (3.52) tem uma única solução.

Pela segunda equação do sistema característico (3.51), temos que

$$\begin{aligned}
v^\epsilon(x,T) - v^\epsilon(x,t) &= \int_t^T \psi(x_\epsilon(s), s) ds \\
0 - v^\epsilon(x,t) &= \int_t^T \psi(x_\epsilon(s), s) ds,
\end{aligned}$$

logo,

$$v^\epsilon(x,t) := - \int_t^T \psi(x_\epsilon(s), s) ds, \tag{3.54}$$

com  $x \in \mathbb{R}$  e  $0 \leq t \leq T$ .

Temos então que  $v^\epsilon$  é a única solução de (3.50), e como  $\psi$  tem suporte compacto,  $v^\epsilon$  tem suporte compacto em  $\mathbb{R} \times [0, T]$ .

5. Aqui provaremos um fato que será utilizado no Passo 6 dessa demonstração.

**Afirmação 3:** Para cada  $s > 0$ , existe uma constante  $C_s$  tal que

$$|v_x^\epsilon| \leq C_s \quad \text{em } \mathbb{R} \times (s, T).$$

Derivando a EDP de (3.50) com respeito a  $x$ , temos

$$v_{tx}^\epsilon + (b_\epsilon)_x \cdot v_x^\epsilon + b_\epsilon \cdot v_{xx}^\epsilon = \psi_x. \tag{3.55}$$

Defina

$$a(x, t) := e^{\lambda t} v_x^\epsilon(x, t), \quad (3.56)$$

para  $\lambda = \frac{C}{s} + 1$ . Então,

$$\begin{aligned} a_t + b_\epsilon a_x &= [\lambda e^{\lambda t} v_x^\epsilon(x, t) + e^{\lambda t} v_{tx}^\epsilon] + b_\epsilon e^{\lambda t} v_{xx}^\epsilon \\ &= \lambda a + e^{\lambda t} [v_{xt}^\epsilon + b_\epsilon v_{xx}^\epsilon], \end{aligned}$$

como, por (3.55),  $v_{xt}^\epsilon + b_\epsilon v_{xx}^\epsilon = \psi_x - (b_\epsilon)_x v_x^\epsilon$ , temos

$$\begin{aligned} a_t + b_\epsilon a_x &= \lambda a + e^{\lambda t} [\psi_x - (b_\epsilon)_x v_x^\epsilon] \\ &= e^{\lambda t} \psi_x + \lambda a - (b_\epsilon)_x a \\ &= e^{\lambda t} \psi_x + a [\lambda - (b_\epsilon)_x]. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Na definição da função  $a$ , uma vez que  $v^\epsilon$  tem suporte compacto,  $v_x^\epsilon$  também o tem. Logo, no compacto  $\{x\} \times [s, T]$ , a função  $a$ , que é contínua, atinge um ponto de máximo e um de mínimo.

Suponha que o ponto de máximo seja  $(x_0, t_0)$ .

- Se  $t_0 = T$ , como  $v(x, T) = 0$ , temos que  $v_x(x, T) = 0$ .
- Se  $0 \leq t_0 < T$ , considerando que  $t_0$  pode atingir o tempo  $s$  e que  $(x_0, t_0)$  é ponto de máximo, a derivada  $a_t$  não pode ser crescente, logo

$$a_t(x_0, t_0) \leq 0 \quad \text{e} \quad a_x(x_0, t_0) = 0.$$

Consequentemente, por (3.57),

$$a_t = e^{\lambda t_0} \psi_x + a [\lambda - (b_\epsilon)_x] \leq 0 \quad \text{em} \quad (x_0, t_0). \quad (3.58)$$

Mas, como por (3.53),  $(b_\epsilon)_x \leq \frac{C}{s}$ , e, por definição,  $\lambda = \frac{C}{s} + 1$ , obtemos

$$a(x_0, t_0) \leq -e^{\lambda t_0} \psi_x \leq | -e^{\lambda t_0} \psi_x | \leq e^{\lambda T} \|\psi_x\|_{L^\infty}. \quad (3.59)$$

Agora, suponha que  $a$  atinge o mínimo no ponto  $(x_1, t_1)$ . Segue de forma análoga ao anterior que

- Se  $t_1 = T$ , então  $v_x = 0$ , pois  $v(x_1, T) = 0$ .
- Se  $0 \leq t_1 < T$ , então  $a_t(x_1, t_1) \geq 0$  e  $a_x(x_1, t_1) = 0$ . Por (3.57), teremos

$$(\lambda - (b_\epsilon)_x) a + e^{\lambda t_1} \psi_x \geq 0 \quad \text{em} \quad (x_1, t_1). \quad (3.60)$$

Por (3.53) e usando a definição de  $\lambda$  em (3.60),

$$a(x_1, t_1) \geq -e^{\lambda t_1} \psi_x \geq -e^{\lambda T} \|\psi_x\|_{L^\infty}. \quad (3.61)$$

Pelas desigualdades (3.59) e (3.61), obtemos

$$-e^{\lambda T} \|\psi_x\|_{L^\infty} \leq a(x_0, t_0) \leq a(x, t) \leq a(x_0, t_0) \leq e^{\lambda T} \|\psi_x\|_{L^\infty},$$

daí,  $|a(x, t)| \leq e^{\lambda T} \|\psi_x\|$ , de onde,

$$|v_x^\epsilon(x, t)| \leq e^{\lambda(T-t)} \|\psi_x\|_{L^\infty}.$$

Tomando  $C_s$  de modo que  $e^{\lambda(T-t)} \|\psi_x\|_{L^\infty} \leq C_s$ , obtemos o desejado.

6. Mostremos que é verdadeira a desigualdade

$$\int_{-\infty}^{\infty} |v_x^\epsilon(x, t)| dx \leq D,$$

para todo  $0 \leq t \leq \tau$  e alguma constante  $D$ , e algum  $\tau$  suficientemente pequeno. Usaremos tal informação mais adiante, na Afirmação 5.

Uma vez que  $\psi$  tem suporte compacto em  $\mathbb{R} \times (0, T)$ , podemos escolher  $\tau > 0$  tão pequeno de modo que  $\psi = 0$  em  $\mathbb{R} \times (0, \tau)$ . Logo, para  $0 \leq t \leq \tau$  na equação (3.54), temos que  $v$  é constante ao longo das curvas características  $x_\epsilon(\cdot)$  do problema (3.52) para  $t \leq s \leq T$ .

Escolha as partições  $P = \{m = x_0 < x_1 < \dots < x_N = M\}$  e  $\tilde{P} = \{y_0 < y_1 < \dots < y_N\}$ , de modo que  $y_i := x_i(s)$  para todo  $i \in \{1, \dots, N\}$ . Pelo fato de  $v^\epsilon$  ser constante ao longo das curvas características, temos

$$\sum_{i=1}^N |v^\epsilon(x_i, t) - v^\epsilon(x_{i-1}, t)| = \sum_{i=1}^N |v^\epsilon(y_i, \tau) - v^\epsilon(y_{i-1}, \tau)|.$$

Por definição,  $\text{var}(v_\epsilon(\cdot, \tau)) = \sup_{[m, M]} |v^\epsilon(\cdot, t) - v^\epsilon(\cdot, t)|$ , para  $x_{i-1}, x_i \in [m, M]$ . Daí,

$$\sum_{i=1}^N |v^\epsilon(x_i, t) - v^\epsilon(x_{i-1}, t)| \leq \text{var}(v_\epsilon(\cdot, \tau)).$$

Uma vez que, para  $t < \tau$ ,  $\text{var}(v^\epsilon(\cdot, t)) \leq \text{var}(v^\epsilon(\cdot, \tau))$  e que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |v_x^\epsilon(x, t)| dx = \text{var}(\cdot, t),$$

temos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |v_x^\epsilon(x, t)| dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |v_x^\epsilon(x, \tau)| dx.$$

Tomando  $s = \tau$  na Afirmação 3 e usando o fato de que  $v^\epsilon$  ter suporte compacto, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |v_x^\epsilon(x, \tau)| dx &= \int_m^M |v_x^\epsilon(x, \tau)| dx \\ &\leq \int_m^M C_\tau dx = C_\tau(M - m) := D. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |v_x^\epsilon(x, t)| dx \leq D.$$

Para mais detalhes, consultar Seção 6.3 de [10].

7. Para finalizar a demonstração, tome  $v^\epsilon = v$  na equação (3.49). De acordo com o problema (3.50), temos que  $v_t^\epsilon + b_\epsilon v_x^\epsilon = \psi$  em  $\mathbb{R} \times (0, T)$ , daí, tomando  $0 < \tilde{\tau} < \tau$ , temos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty w \psi dx dt &= - \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty w (b - b_\epsilon) v_x^\epsilon dx dt \\ &= \int_{\tilde{\tau}}^T \int_{-\infty}^\infty w [b_\epsilon - b] v_x^\epsilon dx dt + \int_0^{\tilde{\tau}} \int_{-\infty}^\infty w [b_\epsilon - b] v_x^\epsilon dx dt \\ &:= I_{\tilde{\tau}}^\epsilon + J_{\tilde{\tau}}^\epsilon. \end{aligned}$$

**Afirmação 4:**  $I_{\tilde{\tau}}^\epsilon \rightarrow 0$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , para cada  $\tilde{\tau} > 0$ .

Com efeito, uma vez que  $u^\epsilon \rightarrow u$  e  $\tilde{u}^\epsilon \rightarrow \tilde{u}$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , temos  $b_\epsilon \rightarrow b$ , além disso,  $v_x^\epsilon$  é uma função limitada. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada, obtemos

$$\int_{\tilde{\tau}}^T \int_{-\infty}^\infty w [b_\epsilon - b] v_x^\epsilon dx dt \rightarrow 0,$$

quando  $\epsilon \rightarrow 0$ .

**Afirmação 5:**  $J_{\tilde{\tau}}^\epsilon \rightarrow 0$ .

Se  $0 < t < \tilde{\tau}$ , então

$$\begin{aligned} |J_{\tilde{\tau}}^\epsilon| &= \left| \int_0^{\tilde{\tau}} \int_{-\infty}^\infty w [b_\epsilon - b] v_x^\epsilon dx dt \right| \\ &\leq \int_0^{\tilde{\tau}} \int_{-\infty}^\infty |w [b_\epsilon - b] v_x^\epsilon| dx dt. \end{aligned}$$

Sendo  $w = u - \tilde{u} \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ ,  $b_\epsilon - b$  é limitada, temos obtemos

$$\begin{aligned} |J_{\tilde{\tau}}^\epsilon| &\leq C \int_0^{\tilde{\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} |v_x^\epsilon(x, t)| dx dt \\ &\leq C \int_0^{\tilde{\tau}} \left( \sup_{[0, \tilde{\tau}]} \int_{-\infty}^{\infty} |v_x^\epsilon(x, t)| dx \right) dt \\ &= C \tilde{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} |v_x^\epsilon(x, t)| dx \leq C \tilde{\tau} D, \end{aligned}$$

pela arbitrariedade de  $\tilde{\tau}$  e pelo fato de ser tão pequeno quanto se queira, temos que  $|J_{\tilde{\tau}}^\epsilon| \rightarrow 0$ .

Através das afirmações 4 e 5, concluímos que

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty w \psi dx dt = 0,$$

e, como a função teste  $\psi$  foi arbitrária, temos que  $w = u - \tilde{u} = 0$  q.t.p.  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$ .  $\square$

# Conclusão

Neste trabalho foi apresentada a teoria básica de resolução de leis de conservação unidimensionais via Teoria de Hamilton-Jacobi. No Capítulo 1 apresentamos alguns conceitos básicos sobre equações diferenciais parciais e desenvolvemos o *Método das Características*. Além disso, mostramos que em alguns casos, a depender da suavidade e do comportamento da função de condição inicial, a solução para problemas com leis de conservação só é garantida até certo tempo. Também apresentamos uma fórmula que identifica esse tempo de falha e exibimos alguns exemplos onde ocorrem a *rarefação* (ausência de retas características) ou o *choque* (cruzamento entre retas características), que são as possíveis limitações para o método das características.

Com o intuito de estender a solução obtida por esse método para todos os tempos  $t > 0$ , no Capítulo 3, enfraquecemos o conceito de solução clássica e definimos *solução integral*. Esse último conceito permite que a solução, sendo limitada, não seja necessariamente suave. Temos também que a solução integral pode sofrer uma descontinuidade e, pela *Condição de Rankine-Hugoniot*, podemos encontrar a equação de tal curva.

Na intenção de encontrar uma fórmula de obter soluções integrais para problemas de leis de conservação em dimensão 1 com condição inicial, no Capítulo 2 desenvolvemos a Teoria de Hamilton-Jacobi que garante existência e unicidade para solução de problemas parecidos com esses, os quais na sua forma generalizada são conhecidos como problemas de Hamilton-Jacobi. Feito isto, relacionamos esses dois tipos de problema e encontramos o que chamamos de Fórmula de Lax-Oleinik, que nos garante a existência de soluções integrais para todo os tempos  $t > 0$ .

Alcançados os objetivos esperados para esse trabalho, como extensão para o estudo feito aqui, temos a possibilidade de estudar a resolução de leis de conservação  $n$ -dimensionais, ou ainda, sistemas de leis de conservação. Para tal, uma primeira referência poderia ser os capítulos 8-11 de [4].

# Referências

- [1] CONWAY, F.; HOPF, E., *Hamilton's theory and generalized solutions of the Hamilton-Jacobi equation.*, J. Math. Mech., 13 (1964);
- [2] DOUGLIS, A., *Solutions in the Large for Multi-dimensional Non Linear Partial Differential Equations of First Order*, Annales de l'institut Fourier, n° 2 (1965);
- [3] DUJIN, C. J. van, *An introduction to Conservation Laws: Theory and Applications to Multi-Phase Flow* (2003)
- [4] EVANS, L.C., *Partial Differential Equations*, AMS (1998);
- [5] HORMANDER, L. *Lectures on Nonlinear Hyperbolic Differential Equations*, Springer (1997);
- [6] LAX, P., *Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation*, Comm. Pure Appl. Math. Vol. 7, pp 211-229 (1954);
- [7] OLEINIK, O., *Discontinuous solutions of nonlinear differential equations*, Usp. Mat. Nauk. 12 (1957);
- [8] RODNEY, J. B., *Equações Diferenciais Parciais I/II*, Notas de aula, Departamento de Matemática, UFMG (2010);
- [9] ROYDEN, H. L.; FITZPATRICK, P. M., *Real Analysis*, fourth edition (2010);
- [10] SMOLLER, J., *Shock Waves and Reaction Diffusion Equations*, Springer (1994).