Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática - IM
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PGMAT
Dissertação de Mestrado

# Identidades e Cocaracteres $\mathbb{Z}$-graduados da Álgebra de Lie $W_1$

Gildeane Almeida Duarte

**Salvador - Bahia**
Setembro de 2016

# Identidades e Cocaracteres $\mathbb{Z}$-graduados da Álgebra de Lie $W_1$

Gildeane Almeida Duarte

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientadora:** Prof. Drª. Manuela da Silva Souza.

**Salvador - Bahia**
Setembro de 2016

Duarte, Gildeane Almeida.

Identidades e Cocaracteres $\mathbb{Z}$-graduados da Álgebra de Lie $W_1$/ Gildeane Almeida Duarte . - - Salvador, 2016.

98f. : il

Orientadora: Drª. Manuela da Silva Souza.

Dissertação (Mestrado-Matemática) - - Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, 2016.

1.PI-álgebras. 2.Identidades polinomiais graduadas. 3. Cocaracteres graduadas. 4.Álgebras de Lie. I. Souza, Manuela da Silva. II.Título.

# Identidades e Cocaracteres $\mathbb{Z}$-graduados da Álgebra de Lie $W_1$

Gildeane Almeida Duarte

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 15 de setembro de 2016.

## Banca examinadora:

Prof. Dr$^a$. Manuela da Silva Souza (Orientadora)
UFBA

Prof. Dr. Maurício de Araujo Ferreira
UEFS

Prof. Dr. Thiago Castilho de Mello
UNIFESP-São José dos Campos

*Aos meus pais,*
*João e Maria.*

# Agradecimentos

Agradeço a Deus, por sempre estar comigo, conduzindo os meus passos e cuidando de mim com tanto amor. Toda honra e toda glória sejam dadas a Ti, Senhor!

Aos meus pais, João e Maria, pela dedicação e por me apoiarem totalmente em cada jornada da minha vida. Vocês são os principais responsáveis por mais essa conquista. Aos meus irmãos Jaciane, João e Jerliane, pelo apoio e por acreditarem em mim sempre. Família, essa conquista é nossa! Amo muito vocês!

Às minhas sobrinhas: Bianca, Letícia, Duda e Alice por tornarem meus dias mais alegres, por cada abraço e sorriso. Incluo também a minha amiguinha Duda (mais conhecida como Duda grande). O amor dessas pequeninas me fortaleceu muito nos momentos de dificuldades! (Tá bom Bianca, tu é grande!) Agradeço também a minha cunhada Mariana pelos momentos de descontração, a pessoa que mais me perturba, mas que amo mesmo assim.

À minha vó, minhas tias, meus primos e primas, pelas orações e por sempre torcerem pela minha vitória.

A Marcelo, o qual Deus colocou em minha vida exatamente quando comecei o mestrado. Agradeço pela paciência, por me dá forças, pelas palavras de incentivo e por compreender os momentos em que eu não pude estar presente e apesar da distância sempre demonstrar seu amor e carinho por mim. Amor, seu apoio foi fundamental durante esses dois anos, te amo!

À professora Manuela pela orientação, por acreditar em mim, por sempre estar disposta a me ajudar e fazer com que eu buscasse melhorar. Pelas inúmeras vezes que disse: "Você consegue!", quando eu tentava convencê-la de que eu não conseguiria. Isso contribuiu muito para meu crescimento! Professora, muito obrigada!

Aos demais professores do IM-UFBA, pelo incentivo e pelas grandes contribuições para minha formação.

Aos professores Maurício e Thiago, por comporem minha banca, pelas correções e sugestões, contribuindo para a melhoria do meu trabalho.

É uma alegria ter a participação do professor Maurício em mais uma etapa da minha carreira acadêmica, pois o mesmo contribuiu muito para minha formação, através da orientação dada na Especialização em Matemática da UEFS. Agradeço aos demais professores da Especialização, pela formação e incentivo que tanto contribuiu para meu desempenho nessa jornada. Com certeza, se não tivesse passado pela especialização tudo seria mais difícil.

À Romelia por sempre me apoiar, pelos conselhos, amizade, companheirismo e por cuidar de mim em Salvador! Aos meus amigos de Feira, pelas palavras de incentivo, mesmo eu estando distante. A Junilson por me incentivar a fazer o mestrado, quando pensei nas dificuldades e quis recuar. Aos colegas da UFBA, foi um prazer conhecê-los! Às meninas que passaram pelo apartamento 104, onde morei em Salvador no período do mestrado, pela convivência, em especial à Joana. Foi uma alegria e um aprendizado para a vida compartilhar momentos com vocês.

Aos funcionários do CEAPG-MAT/UFBA pelo profissionalismo e pela atenção, em especial à Davilene.

Por fim, à FAPESB e à CAPES pelo apoio financeiro.

*"Porque eu, o Senhor, teu Deus, te tomo pela mão direita e te digo: Não temas, que eu te ajudo."*

Isaías 41:13.

# Resumo

Seja $K$ um corpo de característica 0 e $W_1$ a álgebra de Lie das derivações da álgebra de polinômios na variável $t$ com coeficientes em $K$. Neste trabalho, descrevemos as identidades polinomiais $\mathbb{Z}$-graduadas de $W_1$, exibindo uma base infinita para essas identidades. Além disso, mostramos que essa base é minimal e concluímos que as identidades $\mathbb{Z}$-graduadas de $W_1$ não admitem qualquer base finita. Por fim, obtemos como resultado original, a descrição dos cocaracteres $\mathbb{Z}$-graduados de $W_1$.

**Palavras-chave:** PI-álgebras; identidades polinomiais graduadas; álgebra de Lie; cocaracteres graduados.

# Abstract

Let $K$ be a field of characteristic 0 and let $W_1$ be the Lie algebra of the derivations of the polynomial algebra in the variable $t$ with coefficients in $K$. In this work we describe the $\mathbb{Z}$-graded identities of $W_1$ exhibiting a infinite basis for these identities. Moreover, we show that this basis is minimal and we conclude that the $\mathbb{Z}$-graded identities of $W_1$ do not admit any finite basis. Finally, we obtain as a original result the description of $\mathbb{Z}$-graded cocharacters of $W_1$.

**Keywords:** PI-algebras; graded polynomial identities; Lie algebra; graded cocharacters.

# Sumário

# Introdução

A teoria das álgebras com identidades polinomiais, mais conhecida como PI-teoria, é uma importante área da teoria de anéis. Na classe das álgebras associativas, onde essa teoria está mais desenvolvida, uma identidade polinomial de uma álgebra é um polinômio em variáveis não comutativas que se anula ao ser avaliado nos elementos dessa álgebra. Uma álgebra que satisfaz pelo menos uma identidade polinomial não trivial é chamada $PI$-álgebra. As álgebras comutativas são exemplos de PI-álgebras, já que satisfazem a identidade $f(x, y) = xy - yx$.

Um interesse maior pela PI-teoria começou em 1948, quando percebeu-se a possibilidade de estudar propriedades de uma álgebra sabendo-se que ela satisfaz alguma identidade polinomial. Assim, descrever as identidades polinomiais satisfeitas por uma determinada álgebra tornou-se um dos principais problemas da PI-teoria. Essa descrição é feita apresentando um conjunto gerador, chamado de base, para o conjunto das identidades satisfeitas por tal álgebra.

Denotamos por $K\langle X\rangle$ a álgebra dos polinômios não comutativos em um conjunto de variáveis $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ sobre um corpo $K$, ou seja, a álgebra livre associativa gerada por $X$ sobre $K$. As identidades polinomiais satisfeitas por uma álgebra $A$ formam um ideal de $K\langle X\rangle$ invariante por endomorfismos, chamado $T$-ideal de $A$. Por outro lado, cada $T$-ideal de $K\langle X\rangle$ é dessa forma, ou seja, é T-ideal de alguma álgebra $A$. Portanto, descrever as identidades das álgebras significa descrever os $T$-ideais da álgebra livre, ou seja, apresentar uma base para os $T$-ideais.

Em 1950 Specht conjecturou que sobre um corpo de característica zero todo $T$-ideal da álgebra livre associativa é finitamente gerado como $T$-ideal. Essa conjectura é conhecida como “Problema de Specht”. Uma prova completa desse problema foi dada por Kemer em 1987 (veja [9]). Porém, encontrar uma base para um $T$-ideal, sobre um corpo de característica zero ou não, em geral, é um trabalho muito difícil, e em muitos casos é um problema ainda em aberto.

Na busca de novas técnicas para o estudo das identidades polinomiais “ordinárias” de uma álgebra, Kemer também introduz em seus trabalhos o uso das identidades graduadas. E desde então essa técnica tornou-se um objeto de interesse independente. Podemos encontrar uma extensa lista de referências sobre resultados recentes em álgebras graduadas e suas identidades graduadas em [2]. Dentro desse contexto, determinar uma base do conjunto das identidades polinomiais graduadas de uma álgebra graduada, também não é uma tarefa fácil.

No contexto das álgebras não associativas, as dificuldades só aumentam. Temos uma literatura reduzida acerca da PI-teoria nesse contexto e poucos resultados nessa direção. Em particular, no caso das álgebras de Lie temos como exemplo duas álgebras em que as bases para identidades graduadas (graduação não trivial) são conhecidas: a $sl_2(K)$ (álgebra das matrizes quadradas com entradas em $K$ de traço nulo) sempre que $K$ é um corpo infinito e de característica diferente de 2, provado por Koshlukov em [10]. E recentemente para álgebra de Lie das derivações da álgebra de polinômios comutativos $K[t]$, denotada por $W_1$, com $K$ um corpo de característica 0, provada por Freitas, Koshlukov e Krassilnikov publicado em [4], artigo base para o desenvolvimento do nosso trabalho. Conhecemos também uma base para as identidades graduadas (graduação trivial) de $sl_2(K)$, ou seja, para as identidades polinomiais "ordinárias", provado em 1973 por Razmyslov em [19] para $K$ de característica 0 e em 1989 para $K$ infinito e de característica diferente de 2, provado por Vasilovskii em [18].

Sabemos que a álgebra de Lie $W_1$ satisfaz identidades polinomiais não triviais, como por exemplo, a identidade standard de Lie de grau 4, mas não conhecemos uma base para o conjunto de todas as suas identidades, nem mesmo se o conjunto das identidades polinomiais de $W_1$ admite qualquer base finita. No entanto, temos informações importantes sobre as identidades $\mathbb{Z}$-graduadas dessa álgebra apresentadas neste trabalho, o qual é divido em 3 capítulos, como segue.

O primeiro capítulo, contém os pré-requisitos necessários para a leitura dos seguintes. Apresentamos os conceitos e resultados básicos da PI-teoria, acompanhados de exemplos. Descrevemos com mais detalhes a álgebra de Lie $W_1$, um dos objetos fundamentais do nosso trabalho. Introduzimos os conceitos das álgebras com identidades polinomiais graduadas, acompanhados de resultados que serão usados no decorrer do texto. Muitos desses conceitos e resultados são descritos já no ambiente das álgebras de Lie, por ser o ambiente de nosso interesse. Além disso, na Seção 1.7, fazemos uma abordagem sobre a teoria de representações do grupo simétrico que fornece ferramentas importantes aplicadas para descrever os cocaracteres de uma álgebra.

No segundo capítulo descrevemos uma base para as identidades $\mathbb{Z}$-graduadas de $W_1$. Além disso, concluímos que essa base é minimal, ou seja, essa base não contém propriamente qualquer outra base das identidades $\mathbb{Z}$-graduadas de $W_1$ e obtemos que o conjunto das identidades graduadas de $W_1$ não admite qualquer base finita. Esses resultados estão provados em [4].

No terceiro e último capítulo, estendemos a teoria de representação do grupo simétrico dada no Capítulo 1 para o caso das álgebras graduadas e definimos cocaracter nesse contexto. Com base nessa ferramenta e usando técnicas trabalhadas no capítulo 2, apresentamos como resultado original, a descrição dos cocaracteres $\mathbb{Z}$-graduados de $W_1$.

# Capítulo 1

# Conceitos iniciais

Neste capítulo apresentaremos os conceitos básicos sobre a PI-teoria, necessários para o entendimento dos próximos capítulos, como os conceitos de álgebras graduadas e identidades polinomiais graduadas. Definimos a álgebra denominada $W_1$, um dos objetos fundamentais do nosso trabalho. Além disso, apresentamos uma teoria bastante rica aplicada para resolver determinados problemas em PI-álgebras, a teoria de representações do grupo simétrico $S_n$. Mas, usaremos essa teoria apenas no Capítulo 3, para descrever os cocaracteres graduados de $W_1$.

Em todo o trabalho $K$ representará um corpo de característica 0.

## 1.1 Álgebras

**Definição 1.1.** *Um $K$-espaço vetorial $A$ é dito $K$-**álgebra** se é munido de uma operação binária $* : A \times A \longrightarrow A$, denominada produto, tal que para quaisquer $a, b, c \in A$ e $\alpha \in K$, temos:*

*(i)* $a * (b + c) = a * b + a * c$;

*(ii)* $(a + b) * c = a * c + b * c$;

*(iii)* $(\alpha a) * b = a * (\alpha b) = \alpha(a * b)$.

Para simplificar a notação escreveremos apenas $ab$ ou $a \cdot b$ em lugar de $a * b$ e vamos usar a expressão álgebra em vez de $K$-álgebra.

**Definição 1.2.** *Uma álgebra $A$ é dita:*

- ***associativa**, se $(ab)c = a(bc)$, para quaisquer $a, b, c \in A$;*
- ***comutativa**, se $ab = ba$, para quaisquer $a, b \in A$;*
- ***com unidade**, se existe $1 \in A$ tal que $1a = a1 = a$, para todo $a \in A$.*

**Definição 1.3.** *Uma álgebra $A$ é dita **nilpotente** de índice $k \geq 1$ se $A^{k-1} \neq 0$ e $A^k = 0$, ou seja, $a_1 a_2 \cdots a_k = 0$ para quaisquer $a_1, \ldots, a_k \in A$, mas existem $b_1, \ldots, b_{k-1} \in A$ tais que $b_1 \cdots b_{k-1} \neq 0$.*

Antes de apresentarmos alguns exemplos de álgebras, vejamos as definições de subálgebras, ideais, homomorfismo entre álgebras e álgebra quociente.

**Definição 1.4.** *Seja $A$ uma álgebra. Um subespaço vetorial $B$ de $A$ é dito **subálgebra** de $A$ se é fechado com respeito ao produto, isto é, $a, b \in B$ implica $ab \in B$. Uma subálgebra $J$ de $A$ é **ideal** de $A$ se $xa \in J$ e $ax \in J$ para todo $x \in J$ e $a \in A$.*

**Definição 1.5.** *Sejam $A$ e $B$ álgebras. Uma transformação linear $\phi : A \longrightarrow B$ é um **homomorfismo** de álgebras, se para todo $a, b \in A$*

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$$

*e $\phi(1_A) = 1_B$, se as álgebras são com unidade.*

Se $\phi$ é bijetivo, dizemos que $\phi$ é um **isomorfismo**. Neste caso, dizemos que $A$ e $B$ são isomorfos e denotamos por $A \cong B$. Um homomorfismo $\phi : A \longrightarrow A$ é dito um **endomorfismo**.

**Definição 1.6.** *Seja $A$ uma álgebra e $J$ um ideal de $A$. O espaço vetorial $\dfrac{A}{J}$ munido do produto*

$$(a + J)(b + J) = ab + J, \text{ para todo } a, b \in A,$$

*é uma álgebra, chamada de **álgebra quociente** de $A$ por $J$.*

Vejamos agora alguns exemplos de álgebras.

**Exemplo 1.7.** *O espaço vetorial $M_n(K)$ das matrizes $n \times n$ com entradas em $K$, munido do produto usual de matrizes, é uma álgebra associativa com unidade. As matrizes unitárias $E_{ij}$, para $1 \leq i, j \leq n$, onde $E_{ij}$ é a matriz cuja a entrada $(i, j)$ da $i$-ésima linha e $j$-ésima coluna é igual a 1 e as demais entradas são iguais a zero, formam uma base para a álgebra $M_n(K)$.*

**Exemplo 1.8.** *O conjunto $UT_n(K)$ consistindo de todas as matrizes triangulares superiores $n \times n$ é uma subálgebra de $M_n(K)$. O conjunto de todas as matrizes triangulares superiores $n \times n$ com diagonal nula é dita álgebra das matrizes triangulares estritamente superiores e também é uma subálgebra de $M_n(K)$.*

**Exemplo 1.9.** *Seja $K[t]$ o espaço vetorial dos polinômios na variável $t$ com coeficientes em $K$. Munido do produto usual de polinômios, $K[t]$ é uma álgebra associativa, comutativa e com unidade. Podemos definir $K[t_1, \cdots, t_n]$ a álgebra dos polinômios em várias variáveis com $n \geq 1$.*

**Exemplo 1.10.** *Seja $V$ um espaço vetorial de dimensão infinita com base $\{e_1, e_2, \cdots\}$. Definimos a álgebra de Grassmann ou álgebra exterior de $V$, denotada por $E(V)$, como sendo a álgebra associativa com base*

$$\{1, e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k} \mid i_1 < i_2 < \cdots < i_k, k \geq 1\},$$

*cujo produto satisfaz, para quaisquer $i, j > 0$,*

$$e_ie_j = -e_je_i.$$

Observamos que sobre um corpo de característica 2, é necessário definir também que $e_i^2 = 0$ para todo $i > 0$ no Exemplo 1.10.

Os principais objetos do nosso trabalho estão na classe das álgebras de Lie, e é no estudo dessa classe que estamos interessados. Vejamos então a definição de álgebra de Lie.

**Definição 1.11.** *Uma álgebra $L$ é dita **álgebra de Lie** se para quaisquer $a, b, c \in L$, satisfaz:*

*(i)* $aa = 0$ *(anticomutatividade);*

*(ii)* $(ab)c + (bc)a + (ca)b = 0$ *(identidade de Jacobi).*

Observamos que a propriedade $(i)$ implica que $ab = -ba$ para todo $a, b \in L$. Reciprocamente, se $ab = -ba$ para todo $a, b \in L$ então $aa = 0$, quando a característica de $K$ é diferente de 2.

No caso de álgebras de Lie vamos usar a notação $[a, b]$ para escrever o produto de dois elementos $a, b \in L$. Esse produto é chamado usualmente de comutador de $a$ e $b$. Para todo $n \geq 3$ e para qualquer $x_1, \ldots, x_n \in L$, definiremos indutivamente o comutador normado à esquerda, como segue:

$$[x_1, x_2, \ldots, x_n] = [[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}], x_n].$$

Uma álgebra de Lie $L$ é dita abeliana se $[a, b] = 0$, para todo $a, b \in L$. Toda álgebra de Lie unidimensional é abeliana.

**Exemplo 1.12.** *O espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ com o produto vetorial usual $\times$ é uma álgebra de Lie.*

**Exemplo 1.13.** *Seja $A$ uma álgebra associativa. Denotamos por $A^{(-)}$ o espaço vetorial $A$ com o produto $[a, b] = ab - ba$. Temos que $A^{(-)}$ é uma álgebra de Lie.*

**Exemplo 1.14.** *A álgebra $UT_n(K)$, munida do produto $[a, b] = ab - ba$, é uma subálgebra de Lie de $M_n(K)^{(-)}$. Munido desse mesmo produto, o conjunto das matrizes $n \times n$ com* *entradas em $K$ de traço nulo, denotada por $sl_n(K)$ também é uma subálgebra de $M_n(K)^{(-)}$. Notemos que, diferente da álgebra $UT_n(K)$, a álgebra $sl_n(K)$ não é uma subálgebra de $M_n(K)$ com o produto associativo.*

**Exemplo 1.15.** *Seja $V$ um espaço vetorial. O conjunto $\mathcal{L}(V)$ de todos os operadores lineares de $V$ em $V$ com o produto $[f, g] = f \circ g - g \circ f$ é uma álgebra de Lie.*

A seguir vamos definir uma subálgebra de $\mathcal{L}(V)$, denominada álgebra de derivações. Esta álgebra é um importante exemplo de álgebra de Lie, em particular para o nosso trabalho.

### 1.1.1 Álgebra de derivações

Primeiro, vamos definir derivação.

**Definição 1.16.** *Seja $A$ uma álgebra qualquer. Uma transformação linear $\delta : A \longrightarrow A$ tal que, para todo $a, b \in A$ vale:*

$$\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b) \text{ (Lei de Leibniz)}$$

*é dita uma **derivação** de $A$.*

**Definição 1.17.** *Seja $A$ uma álgebra qualquer. Denotemos por $Der(A)$ o conjunto de todas as derivações de $A$. Não é difícil ver que para todo $\delta, \mu \in Der(A)$, o comutador $[\delta, \mu] = \delta\mu - \mu\delta$ é uma derivação. E disso concluir que $Der(A)$ é uma subálgebra de Lie de $\mathcal{L}(A)$. Chamamos $Der(A)$ de **álgebra de derivações** da álgebra $A$.*

Em particular, para $A = K[t]$, obtemos as álgebra de derivações da álgebra de polinômios em uma variável. A seguir vamos fazer uma descrição mais detalhada desta álgebra.

**Proposição 1.18.** *Considere a álgebra de polinômios comutativos $K[t]$. As derivações dessa álgebra determinam uma álgebra de Lie de dimensão infinita denotada por $W_1 = Der(K[t])$ onde*

$$e_{-1} = \frac{d}{dt}, e_0 = t\frac{d}{dt}, \dots, e_n = t^{n+1}\frac{d}{dt}, \cdots$$

*com $\dfrac{d}{dt}$ denotando a derivada usual formam uma base para $W_1$. Vamos definir $e_d = 0$, para todo $d \leq -2$. A multiplicação em $W_1$ é definida como no Exemplo 1.15, ou seja, $[e_i, e_j] = e_i \circ e_j - e_j \circ e_i$ e pode ser dada por*

$$[e_i, e_j] = (j - i)e_{i+j}, \tag{1.1}$$

*para quaisquer $i, j \geq -1$.*

*Demonstração.* Seja $D : K[t] \longrightarrow K[t]$ uma derivação. Vamos obter uma formulação para $D$ em função de $\dfrac{d}{dt}$. Como $D$ é linear, é suficiente calcularmos $D$ em monômios para encontrarmos a derivada em qualquer polinômio de $K[t]$. Notemos que

(1) $D(c) = 0$, para todo $c \in K$.

De fato, pela Lei de Leibniz temos que

$$\begin{aligned} D(1) &= D(1 \cdot 1) \\ &= D(1) \cdot 1 + 1 \cdot D(1) \\ &= D(1) + D(1). \end{aligned}$$

Assim,

$$0 = D(1) - D(1) = D(1) + D(1) - D(1) = D(1).$$

Como $D$ é linear temos que

$$D(c) = D(c \cdot 1) = c \cdot D(1) = 0.$$

(2) $D(t^2) = D(t)\dfrac{d}{dt}(t^2)$.

De fato, pela Lei de Leibniz,

$$\begin{aligned} D(t^2) &= D(t \cdot t) \\ &= D(t)t + tD(t) \\ &= D(t)2t \\ &= D(t)\frac{d}{dt}(t^2). \end{aligned}$$

(3) $D(t^3) = D(t)\dfrac{d}{dt}(t^3)$.

De fato, pela Lei de Leibniz e substituindo a igualdade anterior, obtemos que

$$\begin{aligned} D(t^3) &= D(t^2 \cdot t) \\ &= D(t^2)t + t^2 D(t) \\ &= 2tD(t)t + t^2 D(t) \\ &= 2t^2 D(t) + t^2 D(t) \\ &= D(t)3t^2 \\ &= D(t)\frac{d}{dt}(t^3). \end{aligned}$$

(4) $D(t^n) = \dfrac{d}{dt}(t^n)D(t)$.

De fato, procedendo por indução, concluímos que

$$\begin{aligned}
D(t^n) &= D(t^{n-1}t)\\
&= D(t^{n-1})t + t^{n-1}D(t)\\
&= (n-1)t^{n-2}D(t)t + t^{n-1}D(t)\\
&= (n-1)t^{n-1}D(t) + t^{n-1}D(t)\\
&= D(t)nt^{n-1}\\
&= \frac{d}{dt}(t^n)D(t).
\end{aligned}$$

Notemos que a derivada de cada monômio $t^i$ está em função de um polinômio $D(t)$ de $K[t]$ e de sua derivada usual.

Seja $f(t) = a_0 + a_1t + \cdots + a_nt^n$ um polinômio qualquer em $K[t]$. Temos que

$$\begin{aligned}
D(f) &= a_0D(1) + a_1D(t) + a_2D(t^2) + \cdots + a_nD(t^n)\\
&= a_1\frac{d}{dt}(t)D(t) + a_2\frac{d}{dt}(t^2)D(t) + \cdots + a_n\frac{d}{dt}(t^{n+1})D(t)\\
&= D(t)(a_1\frac{d}{dt}(t) + a_2\frac{d}{dt}(t^2) + \cdots + a_n\frac{d}{dt}(t^{n+1}))\\
&= D(t)\frac{d}{dt}(f).
\end{aligned}$$

Como $D(t)$ é um polinômio de $K[t]$, podemos escrever $D(t) = \sum\limits_{i=0}^{n} b_it^i$. Assim, temos que $D$ é escrito como combinação linear de $\{e_{-1} = \dfrac{d}{dt}, e_0 = t\dfrac{d}{dt}, \ldots, e_n = t^{n+1}\dfrac{d}{dt}, \cdots\}$, ou seja, $\{e_{-1}, e_0, \ldots, e_n, \cdots\}$ gera $W_1$. Resta mostrar que esse conjunto é linearmente independente.

Seja $\sum \alpha_ie_i(f) = 0$ para todo $f \in K[t]$. Em particular, para $f(t) = t$ temos:

$$\sum \alpha_ie_i(t) = \sum \alpha_it^{i+1}\frac{d}{dt}(t) = \sum \alpha_it^{i+1} = 0.$$

Isso implica que $\alpha_i = 0$ para todo $i$. Logo, $\{e_{-1}, e_0, \ldots, e_n, \cdots\}$ é linearmente independente. Portanto, $\{e_{-1}, e_0, \ldots, e_n, \cdots\}$ é uma base de $W_1$.

Vamos mostrar, agora, que a multiplicação em $W_1$ pode ser dada por

$$[e_i, e_j] = (j - i)e_{i+j},\ i, j \geq -1.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
[e_i, e_j](f) &= \left(t^{i+1}\frac{d}{dt}\right) \circ \left(t^{j+1}\frac{d}{dt}(f)\right) - \left(t^{j+1}\frac{d}{dt}\right) \circ \left(t^{i+1}\frac{d}{dt}(f)\right) \\
&= t^{i+1}\frac{d}{dt}\left(t^{j+1}\frac{d}{dt}(f)\right) - t^{j+1}\frac{d}{dt}\left(t^{i+1}\frac{d}{dt}(f)\right) \\
&= t^{i+1}\frac{d}{dt}(t^{j+1})\frac{d}{dt}(f) + t^{i+1}t^{j+1}\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}(f)\right) \\
&- \left(t^{j+1}\frac{d}{dt}(t^{i+1})\frac{d}{dt}(f) + t^{j+1}t^{i+1}\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}(f)\right)\right) \\
&= t^{i+1}\frac{d}{dt}(t^{j+1})\frac{d}{dt}(f) - t^{j+1}\frac{d}{dt}(t^{i+1})\frac{d}{dt}(f) \\
&= (j+1)t^{i+1}t^{j}\frac{d}{dt}(f) - (i+1)t^{j+1}t^{i}\frac{d}{dt}(f) \\
&= (j+1)t^{i+j+1}\frac{d}{dt}(f) - (i+1)t^{i+j+1}\frac{d}{dt}(f) \\
&= t^{i+j+1}\frac{d}{dt}(f)(j+1-i-1) \\
&= (j-i)t^{i+j+1}\frac{d}{dt}(f) \\
&= (j-i)e_{i+j}(f).
\end{aligned}$$

□

A álgebra $W_1$ é conhecida como Álgebra de Witt, em homenagem ao matemático Ernst Witt. Encontramos também, na literatura diversas objetos que levam o nome desse matemático que não estão diretamente ligados com álgebra de Witt, como anel de Witt das formas quadráticas e álgebra de vetores Witt. Em algumas referências, a álgebra de Lie das derivações do anel $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ também é chamada de álgebra de Witt. Essa álgebra desempenha um papel importante nas aplicações sobre campos vetoriais em Geometria Diferencial.

Em geral, definimos $W_n$ a álgebra de Lie das derivações da álgebra polinomial $K[t_1, \dots, t_n]$, $n \geq 1$ que é gerada por todas derivações da forma $f(t_1, \dots, t_n)\frac{\delta}{\delta t_i}$, $1 \leq i \leq n$, em que $\frac{\delta h}{\delta t_i}$ é a derivada parcial do polinômio $h(t_1, ..., t_n)$ em relação a $t_i$, com o produto

$$[f\frac{\delta}{\delta t_i}, g\frac{\delta}{\delta t_j}] = f\frac{\delta g}{\delta t_i}\frac{\delta}{\delta t_j} - g\frac{\delta f}{\delta t_j}\frac{\delta}{\delta t_i}.$$

As álgebras $W_n$ formam uma série de álgebras de Lie simples de dimensão infinita, também chamadas álgebras do tipo Cartan.

## 1.2 Álgebras graduadas

Apresentaremos a seguir como graduar uma álgebra e depois daremos alguns exemplos.

**Definição 1.19.** *Seja $G$ um grupo abeliano. Uma álgebra $A$ é $G$-**graduada** se existe uma família de subespaços $\{A_g : g \in G\}$ de $A$, tal que:*

$$A = \bigoplus_{g \in G} A_g$$

*com $A_g A_h \subseteq A_{g+h}$, para todo $g, h \in G$.*

*O subespaço $A_g$ é chamado componente homogênea de $G$-grau $g$. Um elemento $a \in \bigcup_{g \in G} A_g$ é chamado elemento homogêneo. Se $a \in A_g$, dizemos que $a$ é homogêneo de $G$-grau $g$.*

Em muitos casos, por simplicidade, escreveremos apenas álgebra graduada em vez de $G$-graduada.

Observamos que podemos definir $G$-graduação com qualquer grupo $G$. Porém, no caso das álgebras de Lie, o grupo $G$ necessariamente é abeliano devido a anticomutatividade do produto. De fato, se $G$ é um grupo qualquer, $L$ uma álgebra de Lie não abeliana e se $a \in L_g$, $b \in L_h$ então $ab = -ba \in L_{gh} \cap L_{hg}$. Logo, $L_{gh} = L_{hg}$ e $gh = hg$. Adotamos $G$ abeliano, apenas por conveniência, já que nosso trabalho está concentrado em álgebras de Lie.

**Definição 1.20.** *Um subespaço $B$ de uma álgebra $G$-graduada $A$ é $G$-graduada se é soma direta das interseções $B \cap A_g$, ou seja, $B = \bigoplus_{g \in G} B_g$, onde $B_g = B \cap A_g$.*

**Exemplo 1.21.** *Seja $A$ uma álgebra. A decomposição*

$$A = \bigoplus_{g \in G} A_g,$$

*onde $A_g = \{0\}$ se $g \neq 0$ e $A_0 = A$ é uma $G$-graduação em $A$. Esta graduação é chamada de **graduação trivial**.*

**Exemplo 1.22.** *A álgebra de Grassmann $E = E(V)$, definida no Exemplo 1.10, possui uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural*

$$E = E_0 \oplus E_1,$$

*em que $E_0$ e $E_2$ são gerados respectivamente pelos seguintes conjuntos $\{1, e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i2k} \mid i_1 < i_2 < \cdots < i_{2k}, k \geq 1\}$ e $\{e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_{2k+1}} \mid i_1 < i_2 < \cdots < i_{2k+1}, k \geq 1\}$.*

**Exemplo 1.23.** *Seja $n$ um inteiro positivo, $n \geq 2$. Consideremos a álgebra $M = M_n(K)$. Temos que*

$$M_n(K) = \bigoplus_{\gamma \in \mathbb{Z}_n} M_\gamma$$

*onde $M_\gamma = \langle E_{ij} \mid j - i \equiv \gamma \ mod\ n \rangle$ é uma $\mathbb{Z}_n$-graduação de $M$. Note que se $M_{\gamma_1} = \langle E_{ij} \mid j - i \equiv \gamma_1 \ mod\ n \rangle$ e $M_{\gamma_2} = \langle E_{kl} \mid l - k \equiv \gamma_2 \ mod\ n \rangle$ então $M_{\gamma_1} M_{\gamma_2} \subseteq M_{\gamma_1 + \gamma_2}$, pois*

$$E_{ij}E_{kl} = \begin{cases} 0 & se \quad j \neq k \\ 1 & se \quad j = k. \end{cases}$$

*Vejamos o caso particular, em que $n = 2$, ou seja, em que $M = M_2(K)$. Temos que*

$$M = M_0 \oplus M_1,$$

*onde $M_0 = \langle E_{ij} \mid j - i \equiv 0 \ mod\ 2 \rangle = \langle E_{12}, E_{21} \rangle$ e $M_1 = \langle E_{ij} \mid j - i \equiv 1 \ mod\ 2 \rangle = \langle E_{11}, E_{22} \rangle$ é uma $\mathbb{Z}_2$-graduação de $M_2(K)$.*

**Exemplo 1.24.** *A álgebra $W_1$ possui uma $\mathbb{Z}$-graduação*

$$W_1 = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} L_i$$

*em que $L_i = 0$ se $i \leq -2$ e $L_i = \langle e_i \rangle = \langle t^{i+1} d/dt \rangle$ se $i \geq -1$. Note que, como $[e_i, e_j] = (j - i)e_{i+j}$ temos que $[L_i, L_j] \subseteq L_{i+j}$.*

**Definição 1.25.** *Seja $A$ uma álgebra $G$-graduada. O* ***suporte*** *da $G$-graduação de $A$ é o conjunto*

$$Supp(A) = \{g \in G \mid A_g \neq 0\}.$$

Temos, por exemplo que o suporte da $\mathbb{Z}$-graduação de $W_1$ dado no Exemplo 1.24 é igual ao conjunto $\{g \in \mathbb{Z} \mid g \geq -1\}$.

Antes de definirmos uma identidade polinomial para uma álgebra $A$, precisamos definir em qual ambiente serão considerados tais polinômios, ou seja, precisamos estudar a estrutura da álgebra livre, fixada uma classe de álgebras na qual $A$ pertence.

## 1.3 Álgebras livres

**Definição 1.26.** *Seja $\mathfrak{C}$ uma classe de álgebras e $F \in \mathfrak{C}$ uma álgebra gerada por um conjunto $X$. A álgebra $F$ é chamada* ***álgebra livre*** *na classe $\mathfrak{C}$ gerada por um conjunto $X$, se para qualquer álgebra $A \in \mathfrak{C}$ e cada aplicação $h : X \longrightarrow A$ existe único homomorfismo $\phi : F \longrightarrow A$ estendendo $h$. Essa propriedade é chamada propriedade universal.*

A seguir vamos apresentar a álgebra não associativa livre, ou seja, a álgebra livre na classe de todas as álgebras.

Seja $X = \{x_1, x_2, \cdots\}$ um conjunto enumerável, o qual chamamos conjunto de variáveis. A esse conjunto adicionamos dois símbolos "(" e ")", obtendo o conjunto $X^* = X \cup \{(,)\}$. Definimos indutivamente o conjunto $V[X]$ das sequências finitas de $X^*$ que chamaremos de palavras não associativas (ou monômios não associativos) de elementos de $X$. Temos que um monômio não associativo de grau 1 é um elemento de $X$. Dado um número natural $n > 1$, um monômio não associativo de grau $n$ é uma expressão da forma $(u)(v)$, em que $u$ é um monômio não associativo de grau $m$ e $v$ um monômio não associativo de grau $n - m$. Denotaremos o grau de um monômio $v$ por $\deg(v)$.

**Proposição 1.27.** *Seja $v$ uma palavra não associativa de elementos de $X$. Então:*

*(1) O número de símbolos "("que aparece em $v$ é igual ao número de símbolos ")";*

*(2) Em qualquer subsequência inicial de $v$ o número de símbolos "("que aparece não é menor que o número símbolos ")".*

*Demonstração.* Veja [20], p. 2, Proposição 1. □

Definimos no conjunto $V[X]$ uma operação binária, denotada por $\cdot$, satisfazendo para todo $x_1, x_2 \in X$ e $u, v \in V[X] - X$:

- $x_1 \cdot x_2 = x_1 x_2$;
- $x_1 \cdot u = x_1(u)$;
- $v \cdot x_2 = (v)x_2$;
- $u \cdot v = (u)(v)$.

**Proposição 1.28.** *Toda palavra não associativa $v$ com deg($v$)$\geq 2$ tem uma única representação como produto de duas palavras não associativas de grau menor.*

*Demonstração.* Veja [20], p. 2, Proposição 2. □

Denotamos por $K\{X\}$ o espaço vetorial com base no conjunto $V[X]$, com o produto dado pela extensão natural do produto $\cdot$ em $V[X]$, como segue:

$$(\sum_i \alpha_i u_i) \cdot (\sum_j \beta_j v_j) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j (u_i \cdot v_j),$$

onde $\alpha_i, \beta_j \in K$ e $u_i, v_j \in V[X]$. Com esse produto $K\{X\}$ é a álgebra não associativa livre gerada pelo conjunto $X$. Temos que de fato, $K\{X\}$ satisfaz a propriedade universal, como afirma o teorema a seguir.

**Teorema 1.29.** *Seja $A$ uma álgebra e $\phi$ uma aplicação de $X$ em $A$. Existe um único homomorfismo da álgebra $K\{X\}$ na álgebra $A$ que estende $\phi$.*

*Demonstração.* Veja [20], p. 3, Teorema 1. □

Os elementos de $K\{X\}$ são chamados polinômios não associativos. Um polinômio não associativo da forma $\alpha v$, $\alpha \in K$, $v \in V[X]$ é chamado monômio não associativo. O grau de um polinômio é dado pelo maior grau dos monômios que o constitui.

Seja $G$ um grupo enumerável. Escrevendo $X$ como sendo uma união disjunta de conjuntos infinitos $X^{(g)} = \{x_i^{(g)} \mid i \geq 1\}$ com $g \in G$, ou seja,

$$X = \bigcup_{g \in G} X^{(g)},$$

temos que a álgebra livre $K\{X\}$ possui uma $G$-graduação natural. Se $x \in X^{(g)}$ então definimos o grau de $x$ (com respeito a graduação) como sendo $g$. E o grau do monômio $\alpha(u)(v)$ com $\alpha \in K$ e $u, v \in V[X]$ como sendo a soma dos graus de $u$ e $v$. Pela Proposição 1.28, isso define o grau de um monômio qualquer. Assim, denotando por $K\{X\}_g$ o subespaço de $K\{X\}$ gerado pelos monômios de grau $g$, temos que

$$K\{X\} = \bigoplus_{g \in G} K\{X\}_g$$

é uma $G$-graduação para $K\{X\}$. Com essa graduação $K\{X\}$ é chamada álgebra não associativa livre $G$-graduada.

## 1.4 Identidades polinomiais e álgebras relativamente livres

**Definição 1.30.** *Sejam $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in K\{X\}$ e $A$ uma álgebra não associativa. Dizemos que $f$ é uma **identidade polinomial** para $A$ se*

$$f(a_1, \ldots, a_n) = 0 \text{ para todo } a_1, \ldots, a_n \in A.$$

*Usamos a notação $f \equiv 0$ para dizer que $f$ é uma identidade polinomial para $A$.*

**Definição 1.31.** *Uma álgebra que satisfaz uma identidade polinomial não nula é chamada de **PI-álgebra**.*

**Exemplo 1.32.** *No ambiente das álgebras não associativas, toda álgebra associativa é uma PI-álgebra pois satisfaz a identidade polinomial $(x_1x_2)x_3 - x_1(x_2x_3) \equiv 0$. E toda álgebra de Lie também é uma PI-álgebra, já que satisfaz as identidades $x_1x_1 \equiv 0$ e $(x_1x_2)x_3 + (x_2x_3)x_1 + (x_3x_1)x_2 \equiv 0$.*

**Definição 1.33.** *Um ideal $J$ de $K\{X\}$ é dito $T$-**ideal** se é invariante por endomorfismos de $K\{X\}$.*

Dada uma álgebra $A$, definimos

$$T(A) = \{f \in K\{X\} \mid f \equiv 0 \text{ em } A\},$$

o conjunto das identidades polinomiais de $A$. Podemos ver que $T(A)$ é um ideal de $K\{X\}$. Além disso, considerando $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in T(A)$ e $g_1, \ldots, g_n$ polinômios arbitrários em $K\{X\}$ temos que $f(g_1, \ldots, g_n) \in T(A)$. Como todo endomorfismo $\varphi$ de $K\{X\}$ é determinado por $x \longmapsto g$, $x \in X$, $g \in K\{X\}$ temos que $\varphi(f(x_1, \ldots, x_n)) = f(\varphi(x_1, \ldots, x_n)) = f(g_1, \ldots, g_n) = 0$, pois $g_i(a_1, \ldots, a_n) \in A$ para todo $a_1, \ldots, a_n \in A$ e assim $\varphi(f) \in T(A)$. Logo, $\varphi(T(A)) \subseteq T(A)$, ou seja, $T(A)$ é invariante por endomorfismos de $K\{X\}$. Isso faz de $T(A)$ um $T$-ideal de $K\{X\}$.

Da mesma forma, temos que o conjunto das identidades satisfeitas por todas as álgebras de uma classe de álgebras $\mathfrak{V}$, denotado por $T(\mathfrak{V})$, também é um $T$-ideal de $K\{X\}$, pois $T(\mathfrak{V}) = \bigcap\limits_{A \in \mathfrak{V}} T(A)$.

**Definição 1.34.** *Dado um conjunto $S \subseteq K\{X\}$. A interseção de todos os $T$-ideais de $K\{X\}$ que contém $S$ é o $T$-ideal gerado por $S$, denotado por $\langle S \rangle^T$. Se $S \subseteq T(A)$ é tal que $T(A) = \langle S \rangle^T$, dizemos que $S$ é uma **base** das identidades polinomiais de $A$.*

**Definição 1.35.** *Seja $S$ um subconjunto de $K\{X\}$. A classe $\mathfrak{V}$ das álgebras que satisfazem todas as identidades de $S$ é chamada de **variedade** das álgebras definidas pelas identidades de $S$. Uma variedade $\mathfrak{W}$ é dita subvariedade de $\mathfrak{V}$, se $\mathfrak{W} \subseteq \mathfrak{V}$.*

A variedade que consiste apenas da álgebra nula é chamada variedade trivial.

**Exemplo 1.36.** *Temos que:*

- *O conjunto $S_1 = \{f(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2)x_3 - x_1(x_2x_3)\}$ define a variedade das álgebras associativas.*

- *O conjunto $S_2 = S_1 \cup \{g(x_1, x_2) = x_1x_2 - x_2x_1\}$ define a variedade das álgebras associativas e comutativas.*

- *O conjunto $S_3 = \{f(x_1) = x_1x_1, g(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2)x_3 + (x_2x_3)x_1 + (x_3x_1)x_2\}$ define a variedade das álgebras de Lie.*

**Definição 1.37.** *Sejam $\mathfrak{V}$ uma variedade não trivial e $F \in \mathfrak{V}$ uma álgebra com conjunto de geradores $X$. A álgebra $F$ é chamada **álgebra relativamente livre** na variedade $\mathfrak{V}$ gerada pelo conjunto $X$, se $F$ é uma álgebra livre na classe $\mathfrak{V}$. Vamos escrever $F = F_X(\mathfrak{V})$.*

Observamos que se $S \subseteq K\{X\}$ define a variedade $\mathfrak{V}$, então dizemos que $S$ é uma base das identidades polinomiais de $\mathfrak{V}$. Os elementos de $T(\mathfrak{V})$ são chamados consequências das identidades polinomiais da base $S$.

Sejam $A$ uma álgebra e $I$ é um subconjunto de $K\{X\}$, vamos denotar por $I(A)$ o ideal da álgebra $A$ gerado por todos os elementos da forma $f(a_1, \ldots, a_n)$, em que $f \in I$ e $a_1, \ldots, a_n \in A$.

**Teorema 1.38.** *Seja $\mathfrak{V}$ uma variedade não trivial de álgebras determinada pelo conjunto $I \subset K\{X\}$. Então, para todo conjunto $Y$, a restrição a $Y$ do homomorfismo canônico $\sigma : K\{Y\} \longrightarrow \dfrac{K\{Y\}}{I(K\{Y\})}$ é injetiva e a álgebra $\dfrac{K\{Y\}}{I(K\{Y\})}$ é livre na variedade $\mathfrak{V}$ com conjunto de geradores $\sigma(Y)$, ou seja,*

$$F_{\sigma(Y)}(\mathfrak{V}) \cong \frac{K\{Y\}}{I(K\{Y\})}.$$

*Além disso, quaisquer duas álgebras em $\mathfrak{V}$ com conjunto de geradores de mesma cardinalidade são isomorfos.*

*Demonstração.* Veja [20], p. 4, Teorema 2. □

**Corolário 1.39.** *Se a variedade $\mathfrak{V}$ é determinada pelo conjunto $I$, então $T(\mathfrak{V}) = I(K\{X\})$.*

*Demonstração.* Veja [20], p. 6, Corolário 1. □

Segue do corolário anterior que existe uma correspondência biunívoca entre os $T$-ideais de $K\{X\}$ e variedades de álgebras não associativas. Nesta correspondência uma variedade $\mathfrak{V}$ corresponde ao $T$-ideal $T(\mathfrak{V})$ e um $T$-ideal $I$ corresponde a variedade de álgebras não associativas satisfazendo todas as identidades polinomiais em $I$.

Se $\mathfrak{V}$ é uma variedade e $A$ é uma álgebra tal que $T(A) = T(\mathfrak{V})$, então dizemos que $\mathfrak{V}$ é a variedade gerada por $A$.

Considere $X = \{x_1, x_2, \cdots\}$, vamos denotar por $K\langle X\rangle$ a álgebra relativamente livre gerada por $X$ da variedade das álgebras associativas e por $\mathfrak{L}(X)$ a álgebra relativamente livre gerada por $X$ da variedade das álgebras de Lie. Assim, considerando $Y = \{y_1, y_2, \cdots\}$ , pelos resultados anteriores, obtemos que

$$K\langle X\rangle \cong \frac{K\{Y\}}{\langle (y_1y_2)y_3 - y_1(y_2y_3) \mid y_j \in Y\rangle^T}$$

e

$$\mathfrak{L}(X) \cong \frac{K\{Y\}}{\langle y_1y_1, (y_1y_2)y_3 + (y_2y_3)y_1 + (y_3y_1)y_2 \mid y_j \in Y\rangle^T}.$$

Assim, para estudarmos as identidades polinomiais em álgebras associativas ou em álgebras de Lie vamos trabalhar em $K\langle X\rangle$ ou $\mathfrak{L}(X)$, respectivamente, em vez de $K\{X\}$. Neste caso, podemos reescrever as definições dadas nesta seção restringindo $K\{X\}$ a $K\langle X\rangle$

ou a $\mathfrak{L}(X)$. Mas vamos trabalhar principalmente em $\mathfrak{L}(X)$, já que estamos interessados em identidades polinomiais especificamente em álgebras de Lie.

Os elementos de $\mathfrak{L}(X)$ são chamados **polinômios de Lie** em $X$, qualquer comutador de elementos de $X$ é chamado **monômio de Lie** ou **comutador de Lie**.

Vejamos alguns exemplos de identidades polinomiais, consideradas nos ambientes $K\langle X\rangle$ ou $\mathfrak{L}(X)$ .

**Exemplo 1.40.** *Temos que*

**1.** *A álgebra de Grassmann $E$, que é em particular associativa, satisfaz a identidade,*

$$[[x_1, x_2], x_3] = (x_1x_2 - x_2x_1)x_3 - x_3(x_1x_2 - x_2x_1) \in K\langle X\rangle;$$

**2.** *A álgebra $M_2(K)$ satisfaz a identidade, chamada identidade standard de grau 4,*

$$\sum_{\sigma\in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)} \in K\langle X\rangle;$$

**3.** *A álgebra de Lie $W_1$ satisfaz a identidade, dita identidade standard de Lie de grau 5,*

$$\sum_{\sigma\in S_4} (-1)^\sigma [x_0, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}] \in \mathfrak{L}(X).$$

## 1.5 Identidades polinomiais $G$-graduadas

Começamos esta seção ressaltando que uma forma conveniente de estudar as identidades polinomiais para álgebras graduadas é estudar as identidades graduadas. Nesta seção, vamos nos restringir ao ambiente de interesse do nosso trabalho, as álgebras de Lie, mas as definições dadas aqui valem em geral.

Seja $G$ um grupo abeliano vamos escrever a $G$-graduação em $\mathfrak{L}(X)$ como segue

$$\mathfrak{L}(X) = \bigoplus_{i\in G} \mathfrak{L}(X)_i$$

em que $\mathfrak{L}(X)_i$ é o subespaço de $\mathfrak{L}(X)$ gerado pelos comutadores de Lie de grau $i$. Se $m, n \in \mathfrak{L}(X)$ são de $G$-grau $i$ e $j$ respectivamente, então $[m, n]$ é de grau $j + i$. Em particular, se $G = \mathbb{Z}$ temos uma $\mathbb{Z}$-graduação para $\mathfrak{L}(X)$.

**Definição 1.41.** *Seja $L$ uma álgebra de Lie $G$-graduada. Dizemos que um polinômio $f = f(x_1^{(g_1)}, \ldots, x_n^{(g_n)}) \in \mathfrak{L}(X)$ é uma identidade polinomial $G$-graduada de $L$ se $f$ se anula em toda avaliação de elementos em $L$ que respeita a $G$-graduação, ou seja, para todo elemento homogêneo $a_i \in L_{g_i}$, com $i \in \{1, \ldots, n\}$, tem-se que $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$.*

Denotamos o $G$-grau de cada variável do polinômio entre parênteses para não haver confusão com o grau usual de um polinômio. Por exemplo, $x_1^2 \neq x_1^{(2)}$, pois o primeiro representa o produto de $x_1$ por $x_1$ e o segundo indica que $x_1$ está em $\mathfrak{L}(X)_2$.

**Exemplo 1.42.** *Considere $\mathfrak{L}(X)$ $\mathbb{Z}$-graduada. A identidade*

$$f = f(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}) = [x_1^{(i)}, x_2^{(i)}] \in \mathfrak{L}(X), i \geq -1$$

*é uma identidade polinomial $\mathbb{Z}$-graduada da álgebra de Lie $W_1$ $\mathbb{Z}$-graduada, pois pela graduação de $W_1$ temos que $L_i = \langle e_i \rangle$, para $i \geq -1$ e $[re_i, se_i] = rs[e_i, e_i] = 0$ para todo $r, s \in K$.*

Observamos que as afirmações e definições dadas na seção anterior continuam valendo, de forma análoga, no caso das identidades graduadas. A diferença é que a graduação deve ser obrigatoriamente respeitada e fazemos pequenas mudanças na notação, como veremos. Dada uma álgebra de Lie $G$-graduada $L$, vamos denotar

$$T_G(L) = \{f \in \mathfrak{L}(X) \mid f \equiv 0 \text{ em } L\}$$

como o conjunto de todas as identidades $G$-graduadas satisfeitas por $L$. Assim como dito na seção anterior temos que $T_G(L)$ é um ideal de $\mathfrak{L}(X)$ invariante por endomorfismos $G$-graduados de $\mathfrak{L}(X)$ . Neste caso, dizemos que $T_G(L)$ é um $T_G$-ideal graduado de $L$. E uma álgebra de Lie $G$-graduada que satisfaz uma identidade polinomial $G$-graduada não nula é dita PI-álgebra $G$-graduada.

Também temos uma definição análoga para base de identidades graduadas.

**Definição 1.43.** *Dado um conjunto $S \subseteq \mathfrak{L}(X)$. A interseção de todos os $T_G$-ideais de $\mathfrak{L}(X)$ que contém $S$ é o $T_G$-ideal gerado por $S$, denotado por $\langle S \rangle^{T_G}$. Se $S \subseteq T_G(L)$ é tal que $T_G(L) = \langle S \rangle^{T_G}$, dizemos que $S$ é uma base das identidades polinomiais $G$-graduadas de $L$.*

## 1.6 Identidades multilineares

Quando um corpo $K$ é infinito, o estudo das identidades de uma determinada álgebra pode ser reduzida ao estudo de identidades multihomogêneas. Mais ainda, como estamos considerando o corpo $K$ de característica zero, podemos reduzir nosso estudo apenas as identidades multilineares. Nesta seção, mostramos porque podemos fazer tal redução.

Uma identidade polinomial $g \equiv 0$ é uma consequência do conjunto $S$ de identidades polinomiais, se $g$ pertence ao $T$-ideal gerado por $S$.

**Definição 1.44.** *Dois conjuntos de identidades polinomiais são equivalentes se geram o mesmo $T$-ideal.*

Seja $K_n = K\{x_1, \ldots, x_n\}$ a álgebra dos polinômios não associativos nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$. Essa álgebra pode ser naturalmente decomposta como

$$K_n = K_n^{(1)} \oplus K_n^{(2)} \oplus \cdots$$

onde para cada $K_n^{(k)}$ é a componente homogênea gerada por todos monômios de grau $k$, se $k \geq 0$ e as demais componentes são nulas. Como $K_n^{(i)} K_n^{(j)} \subseteq K_n^{(i+j)}$, para todo $i, j \geq 0$, dizemos que $K_n$ é graduada pelo grau ou possui uma estrutura de álgebra $\mathbb{Z}$-graduada.

Essa decomposição pode ser refinada, escrevendo para cada $k \geq 1$

$$K_n^{(k)} = \bigoplus_{i_1+\cdots+i_n=k} K_n^{(i_1,\ldots,i_n)}$$

em que $K_n^{(i_1,\ldots,i_n)}$ é o subespaço gerado por todos monômios de grau $i_1$ em $x_1$, $i_2$ em $x_2$,..., $i_n$ em $x_n$. Neste caso dizemos que $K_n$ é multigraduado.

Um monômio $g$ pertencente a $K_n^{(k)}$ para algum $k \geq 0$ é chamado homogêneo de grau $k$. E se $g$ pertence algum $K_n^{(i_1,\ldots,i_n)}$, será chamado multihomogêneo de multigrau $(i_1, \ldots, i_n)$.

**Definição 1.45.** *Um polinômio $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in K\{X\}$ é chamado **multihomogêneo** se é multihomogêneo em $K\{x_1, \ldots, x_n\}$. Se o multigrau de $f$ é $(1, \ldots, 1)$ então dizemos que $f$ é **multilinear**, ou seja, é linear em cada uma de suas variáveis.*

**Exemplo 1.46.** *Seja $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1^2x_2x_3^2 - x_2x_1 + x_1x_2x_1x_3^2 + x_2^3 \in K\langle X\rangle$. Temos que $x_1x_2 - x_2x_1$, $x_1^2x_2x_3^2 + x_1x_2x_1x_3^2$ e $x_2^3$ são as componentes multihomogêneas de $f$ com respectivos multigraus $(1, 1, 0)$,$(2, 1, 2)$ e $(0, 1, 0)$. Em particular, $f$ não é multihomogêneo.*

**Exemplo 1.47.** *O polinômio associativo $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^3x_2x_3^2 + x_1^2x_2x_3^2x_1 \in K\langle X\rangle$ é multihomogêneo de multigrau $(3, 1, 2)$. E o polinômio de Lie $f_2(x_1, x_2, x_3) = [x_1, x_2, x_3] \in \mathcal{L}(X)$ é multilinear.*

Note que se $f$ é linear em uma variável, digamos $x_1$, então

$$f(\sum \alpha_i y_i, x_2, \ldots, x_n) = \sum \alpha_i f(y_i, x_2, \ldots, x_n)$$

para todo $\alpha_i \in K$ e $y_i \in K\{X\}$. Descrevemos uma característica importante dos polinômios multilineares na seguinte observação.

**Observação 1.48.** *Seja $A$ uma álgebra e $B$ uma base de $A$. Se um polinômio multilinear se anula ao ser avaliado pelos elementos de $B$ então $f$ é uma identidade polinomial para*

*A. De fato, considere* $a_1 = \sum \alpha_{1_i} v_i, \ldots, a_n = \sum \alpha_{n_i} v_i$ *elementos de* $A$*, onde os* $v_i's$ *são os elementos de* $B$*, como* $f$ *é linear em cada uma de suas variáveis, obtemos:*

$$f(a_1, ..., a_n) = \sum \alpha_{1i_1} \cdots \alpha_{ni_n} f(v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}) = 0$$

Assim, para verificar que uma identidade multilinear $f$ é uma identidade para uma álgebra $A$ é suficiente mostrar que $f$ se anula para os elementos de uma base de $A$.

**Teorema 1.49.** *Seja* $K$ *um corpo infinito. Se* $f \in K\{X\}$ *é uma identidade polinomial para a álgebra* $A$*, então cada componente multihomogênea de* $f$ *é ainda uma identidade polinomial para* $A$*.*

*Demonstração.* Análoga ao caso associativo encontrado em [5], p. 6, Teorema 1.3.2. □

O estudo de identidades polinomiais usa alguns recursos padrões. Um deles é o processo de multilinearização, parte essencial do seguinte teorema.

**Teorema 1.50.** *Se a álgebra* $A$ *satisfaz uma identidade polinomial de grau* $k$*, então satisfaz uma identidade multilinear de grau* $\geq k$*.*

*Demonstração.* Análoga ao caso associativo encontrada em [5], p. 7, Teorema 1.3.7. □

Vejamos no seguinte exemplo como o processo de multilinearização ocorre.

**Exemplo 1.51.** *Vamos encontrar a identidade multilinear que é equivalente a identidade* $f(x_1) = x_1^3 \in K\langle X \rangle$*.*

***Passo 1.*** *Vamos aplicar o processo de multilinearização na variável* $x_1$*. Substituímos* $x_1$ *por* $y_1 + y_2$*, ou seja,*

$$\begin{aligned} f(y_1 + y_2) &= (y_1 + y_2)^3 \\ &= y_1^3 + y_1 y_2 y_1 + y_1^2 y_2 + y_1 y_2^2 + y_2 y_1^2 + y_2^2 y_1 + y_2 y_1 y_2 + y_2^3 \\ &= y_1^3 + y_1 y_2 y_1 + y_1^2 y_2 + y_1 y_2^2 + y_2 y_1^2 + y_2^2 y_1 + y_2 y_1 y_2 + y_2^3 \\ &= f(y_1) + y_1 y_2 y_1 + y_1^2 y_2 + y_1 y_2^2 + y_2 y_1^2 + y_2^2 y_1 + y_2 y_1 y_2 + f(y_2). \end{aligned}$$

*Assim,* $f(y_1 + y_2) - f(y_1) - f(y_2) = y_1 y_2 y_1 + y_1^2 y_2 + y_1 y_2^2 + y_2 y_1^2 + y_2^2 y_1 + y_2 y_1 y_2$*. Isso implica que*

$$g = g(y_1, y_2) = y_1 y_2 y_1 + y_1^2 y_2 + y_1 y_2^2 + y_2 y_1^2 + y_2^2 y_1 + y_2 y_1 y_2$$

*é uma consequência de* $f$*.*

***Passo 2.*** *Agora vamos fazer a multilinearização em* $g$*. Em* $g$ *temos duas variáveis de grau diferente de zero,* $y_1$ *e* $y_2$*. Vamos aplicar o processo, primeiro em* $y_1$*.*

*Substituímos* $y_1$ *por* $y_3 + y_4$*, ou seja,*

$$\begin{aligned}
g(y_3+y_4, y_2) &= (y_3+y_4)y_2(y_3+y_4) + (y_3+y_4)^2 y_2 + (y_3+y_4)y_2^2 \\
&+ y_2(y_3+y_4)^2 + y_2^2(y_3+y_4) + y_2(y_3+y_4)y_2 \\
&= y_3y_2y_3 + y_3^2y_2 + y_2y_3^2 + y_2^2y_3 + y_2y_3y_2 \\
&+ y_4y_2y_4 + y_4^2y_2 + y_2y_4^2 + y_2^2y_4 + y_2y_4y_2 \\
&+ y_2y_4y_3 + y_2y_3y_4 + y_3y_2y_4 + y_3y_4y_2 + y_4y_3y_2 + y_4y_2y_3 \\
&= g(y_2, y_3) + g(y_2, y_4) \\
&+ y_2y_4y_3 + y_2y_3y_4 + y_3y_2y_4 + y_3y_4y_2 + y_4y_3y_2 + y_4y_2y_3.
\end{aligned}$$

*Obtemos que*

$$g(y_3+y_4, y_2) - g(y_2, y_3) - g(y_2, y_4) = y_2y_4y_3 + y_2y_3y_4 + y_3y_2y_4 + y_3y_4y_2 + y_4y_3y_2 + y_4y_2y_3.$$

*Isso implica que*

$$h = h(y_2, y_3, y_4) = y_2y_4y_3 + y_2y_3y_4 + y_3y_2y_4 + y_3y_4y_2 + y_4y_3y_2 + y_4y_2y_3$$

*é uma consequência de* $f$*. Como* $h$ *é multilinear, encerramos o processo no passo 2. Portanto, encontramos uma consequência multilinear de* $f$*.*

Tomando $y_2 = y_3 = y_4 = x_1$ obtemos $h(x_1) = 6x_1^3$. Assim, podemos sair de $h$ e chegar em $f$, comprovando que $f$ é equivalente a $h$.

**Teorema 1.52.** *Se a característica de* $K$ *é igual zero, o* $T$*-ideal de uma álgebra é gerado por suas identidades multilineares.*

*Demonstração.* Análoga ao caso associativo encontrado em [5], p. 8, Teorema 1.3.8. □

De forma análoga, se $K$ é de característica zero, então cada $T_G$-ideal é gerado por suas identidades multilineares. São esses resultados que justificam o fato de podermos reduzir o estudo das identidades polinomiais graduadas para o estudo das identidades multilineares graduadas.

A próxima proposição afirma que podemos escrever qualquer monômio multilinear de Lie como uma combinação linear de monômios de Lie multilineares, fixando a primeira variável. Esse resultado será importante para o próximo capítulo.

Antes, precisamos da seguinte observação, ressaltando que a mesma será usada diversas vezes no próximo capítulo.

**Observação 1.53.** *Para* $n \geq 3$

$$[x_1, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] = [x_1, \ldots, x_{n-2}, [x_{n-1}, x_n]] + [x_1, \ldots, x_{n-2}, x_n, x_{n-1}].$$

*De fato, para $n = 3$ temos, pela Identidade de Jacobi, que*

$$[x_1, x_2, x_3] + [x_2, x_3, x_1] + [x_3, x_1, x_2] = 0.$$

*Isso implica, pela anticomutatividade que*

$$[x_1, x_2, x_3] - [x_1, [x_2, x_3]] - [x_1, x_3, x_2] = 0.$$

*Assim,*

$$[x_1, x_2, x_3] = [x_1, [x_2, x_3]] + [x_1, x_3, x_2].$$

*Como*

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] = [[x_1, x_2], \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n],$$

*o resultado segue por indução.*

Usando a observação e procedendo por indução, podemos concluir que qualquer comutador $[x_1, x_2, [x_3, \ldots, x_n]]$ pode ser escrito como combinação linear de comutadores do tipo

$$[x_1, x_2, x_{\sigma(3)}, \ldots, x_{\sigma(n)}]$$

com $\sigma$ permutação de $\{3, \ldots, n\}$. Vejamos o seguinte exemplo.

**Exemplo 1.54.** *Considere o comutador $m = [x_1, x_2, [x_3, x_4, x_5]]$. Notemos que*

$$[x_1, x_2, [x_3, x_4, x_5]] = [x_1, x_2, [[x_3, x_4], x_5]].$$

*Vendo $[x_3, x_4]$ como uma variável, pela Observação 1.53, temos que*

$$[x_1, x_2, [x_3, x_4], x_5] = [x_1, x_2, [[x_3, x_4], x_5]] + [x_1, x_2, x_5, [x_3, x_4]],$$

*ou seja,*

$$[x_1, x_2, [[x_3, x_4], x_5]] = [x_1, x_2, [x_3, x_4], x_5] - [x_1, x_2, x_5, [x_3, x_4]].$$

*Usando novamente a Observação 1.53, obtemos*

$$\begin{aligned}[x_1, x_2, [[x_3, x_4], x_5]] = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] - [x_1, x_2, x_4, x_3, x_5] - [x_1, x_2, x_5, x_3, x_4] \\ + [x_1, x_2, x_5, x_4, x_3].\end{aligned}$$

**Proposição 1.55.** *Seja $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ um comutador de Lie. Se $f$ é multilinear, então $f$ é combinação linear dos comutadores normados à esquerda*

$$[x_1, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}],$$

*onde $\sigma$ é uma permutação de $\{2, 3, \ldots, n\}$.*

*Demonstração.* Seja $f = [x_{i_1}, \dots, x_{i_n}] \in \mathcal{L}(X)$, onde $i_l \in \{1, 2, \dots, n\}$. Vamos mostrar que independente da posição da variável $x_1$, podemos escrever $f$ como uma combinação de comutadores multilineares com primeira variável igual a $x_1$. Se $i_1 = 1$ então temo o resultado. Vamos supor $i_1 \geq 2$. Se $n = 2$, então pela anticomutatividade, temos o resultado. Agora, para $n \geq 3$, faremos por indução em $n$.

Vejamos o caso em que $n = 3$. Se $i_2 = 1$, pela anticomutatividade, temos

$$f = -[x_1, x_{i_1}, x_{i_3}]$$

com $x_l \in \{2, 3\}$. Logo, temos o resultado. Agora, caso $i_3 = 1$, temos pela identidade de Jacobi que

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, x_1] = -[x_{i_2}, x_1, x_{i_1}] - [x_1, x_{i_1}, x_{i_2}].$$

Assim, novamente pela anticomutatividade, temos

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, x_1] = [x_1, x_{i_2}, x_{i_1}] - [x_1, x_{i_1}, x_{i_2}],$$

com $x_l \in \{2, 3\}$. Assim, obtemos o requerido.

Agora, se $n = 4$ então $f = [x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}]$, onde $i_l \in \{1, 2, 3, 4\}$. Se $i_2, i_3 = 1$ então, pelo caso $n = 3$ já temos o resultado. Suponha que $i_4 = 1$. Pela Observação 1.53 e usando a anticomutatividade temos que

$$\begin{aligned} f &= [x_{i_1}, x_{i_2}, [x_{i_3}, x_1]] + [x_{i_1}, x_{i_2}, x_1, x_{i_3}] \\ &= [x_1, x_{i_3}, [x_{i_1}, x_{i_2}]] + [x_{i_1}, x_{i_2}, x_1, x_{i_3}] \\ &= [x_1, x_{i_3}, x_{i_1}, x_{i_2}] - [x_1, x_{i_3}, x_{i_2}, x_{i_1}] + [x_{i_1}, x_{i_2}, x_1, x_{i_3}]. \end{aligned}$$

Pelo caso $n = 3$ , temos que

$$[[x_{i_1}, x_{i_2}, x_1], x_{i_3}] = [x_1, x_{i_2}, x_{i_1}, x_{i_3}] - [x_1, x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}].$$

Assim,

$$f = [x_1, x_{i_3}, x_{i_1}, x_{i_2}] - [x_1, x_{i_3}, x_{i_2}, x_{i_1}] + [x_1, x_{i_2}, x_{i_1}, x_{i_3}] - [x_1, x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}].$$

Suponhamos a proposição válida para todo $f$ de comprimento $\leq n-1$. Basta analisarmos o caso em que $i_n = 1$. Pela observação 1.53 e a anticomutatividade, temos

$$\begin{aligned} f &= [x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, \dots, x_{i_{n-2}}, [x_{i_{n-1}}, x_1]] + [x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-2}}, x_1, x_{i_{n-1}}] \\ &= [x_1, x_{i_{n-1}}, [x_{i_3}, \dots, x_{i_{n-2}}]] + [x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-2}}, x_1, x_{i_{n-1}}]. \end{aligned}$$

Como vimos no Exemplo 1.54, podemos reescrever o comutador $[x_1, x_{i_{n-1}}, [x_{i_3}, \dots, x_{i_{n-2}}]]$

na forma requerida. E, por hipótese de indução, temos que $[x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-2}}, x_1]$ é escrito como combinação linear de $[x_1, x_{\sigma(i_1)}, \ldots, x_{\sigma(i_{n-2})}]$, com $\sigma$ permutação de $\{i_1, \ldots, i_{n-2}\}$. Logo, temos o resultado. Dessa forma, concluímos a prova da proposição. $\square$

# 1.7 Representações do grupo simétrico

Nesta seção vamos apresentar a teoria de representações sobre o grupo simétrico $S_n$ das permutações de $n$ elementos e sua relação com as identidades polinomiais de uma álgebra. Usamos essa teoria apenas no Capítulo 3.

## 1.7.1 Representações de grupos finitos

**Definição 1.56.** *Sejam $G$ um grupo e $V$ um $K$-espaço vetorial. Uma **representação linear** de $G$ em $V$ é um homomorfismo de grupos*

$$\begin{array}{rcccl} \varphi & : & G & \longrightarrow & GL(V) \\ & & g & \longmapsto & \varphi(g) = \varphi_g \end{array}$$

*onde $GL(V)$ é o grupo dos operadores lineares invertíveis de $V$.*

Definimos o grau de uma representação $\varphi$ como sendo a dimensão de $V$. Se a representação $\varphi$ é injetiva, dizemos que $\varphi$ é uma representação **fiel**.

**Exemplo 1.57.** *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, e $V$ um espaço vetorial sobre $K$ de dimensão $n$. Fixada uma base $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de $V$, consideremos, para cada $\sigma \in S_n$, uma transformação linear $T_\sigma : V \longrightarrow V$ definida por $T_\sigma(v_i) = v_{\sigma(i)}$. Temos que*

$$\begin{array}{rcccl} \varphi & : & S_n & \longrightarrow & GL(V) \\ & & \sigma & \longmapsto & \varphi(\sigma) = T_\sigma \end{array}$$

*é uma representação linear.*

No caso em que $V$ tem dimensão finita $n$, podemos identificar o grupo $GL(V)$ com o grupo $GL_n(K)$ das matrizes $n \times n$ invertíveis com entradas em $K$, uma vez que esses grupos são isomorfos. E nesse caso, podemos escrever uma representação linear como um homomorfismo $\varphi : G \longrightarrow GL_n(K)$. É esse caso que nos interessa, por isso vamos estudar as representações em espaços vetoriais de dimensão finita.

**Definição 1.58.** *Sejam $G$ um grupo, $V$ um espaço vetorial e $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ um representação linear de $G$ em $V$. Se $W$ é um subespaço de $V$ tal que $\varphi_g(W) \subseteq W$ para todo $g \in G$, então dizemos que $W$ é um subespaço de $V$ **$\varphi$-invariante**. Dizemos que $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ é **irredutível** se os únicos subespaço de $V$ $\varphi$-invariantes são $\{0\}$ e o próprio $V$. A restrição de $\varphi$ a $W$ é chamada **subrepresentação**.*

**Definição 1.59.** *Duas representações $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ e $\psi : GL(V')$ são ditas **equivalentes** se existe uma transformação linear bijetora $T : V \longrightarrow V'$ entre os espaços vetoriais $V$ e $V'$ tal que $T\varphi_g = \psi_g T$ para todo $g \in G$.*

**Definição 1.60.** *Sejam $\varphi' : G \longrightarrow GL(V')$ e $\varphi'' : G \longrightarrow GL(V'')$ duas representações de $G$. Temos que*

*(a) a representação linear $\varphi = \varphi' \oplus \varphi'' : G \longrightarrow GL(V' \oplus V'')$ definida por*

$$\varphi_g(v', v'') = (\varphi'_g(v'), \varphi''_g(v'')),\ g \in G,\ (v', v'') \in V' \oplus V''$$

*é chamada de **soma direta** de $\varphi'$ e $\varphi''$. Similarmente definimos a soma direta de um número qualquer de representações.*

*(b) a representação linear $\varphi = \varphi' \otimes \varphi'' : G \longrightarrow GL(V' \otimes V'')$ definida por*

$$\varphi_g(v' \otimes v'') = \varphi'_g(v') \otimes \varphi''_g(v''),\ g \in G,\ v' \otimes v'' \in V' \otimes V''$$

*é chamado **produto tensorial** de $\varphi'$ e $\varphi''$.*

**Definição 1.61.** *Sejam $G$ um grupo e $V$ um espaço vetorial. A representação $\varphi$ é dita **completamente redutível** (ou **semissimples**) se $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$ onde as restrições de $\varphi$ aos $W_i^{\prime}s$ são todas irredutíveis.*

Considere $KG$ a álgebra de grupo. Existe uma estreita relação entre os $KG$-módulos e as representações lineares de um grupo $G$, afim de mostrar essa relação, vejamos algumas definições a respeito dos módulos sobre uma álgebra.

**Definição 1.62.** *Seja $A$ uma álgebra. Um $K$-espaço vetorial $M$ é dito $A$-**módulo** (à esquerda) quando munido de um produto*

$$\begin{array}{rccc} \cdot\ : & A \times M & \longrightarrow & M \\ & (a, m) & \longmapsto & a \cdot m \end{array}$$

*tal que, para quaisquer $a, a_1, a_2 \in A$, $m, m_1, m_2 \in M$ e $\alpha \in K$, satisfaz:*

*(i)* $(a_1 + a_2) \cdot m = (a_1 \cdot m) + (a_2 \cdot m)$;

*(ii)* $a \cdot (m_1 + m_2) = (a \cdot m_1) + (a \cdot m_2)$;

*(iii)* $(\alpha a) \cdot m = a \cdot (\alpha m) = \alpha(a \cdot m)$;

*(iv)* $a_1 \cdot (a_2 \cdot m) = (a_1 a_2) \cdot m$;

*(v)* $1_A \cdot m = m$.

Por simplicidade, escreveremos apenas $am$ para representar o produto $a \cdot m$, definido acima.

**Exemplo 1.63.** *Se $A$ é uma álgebra então $A$ é naturalmente um $A$-módulo sobre si mesma, cujo o produto é o da álgebra $A$.*

**Definição 1.64.** *Sejam $A$ uma álgebra e $M$ um $A$-módulo. Dizemos que um subespaço vetorial $N$ é um **submódulo** de $M$ se $an \in N$ para quaisquer $a \in A$ e $n \in N$. Um submódulo $N$ de $M$ é **minimal** se não existe submódulo $N_1$ de $M$ tal que $0 \neq N_1 \subsetneq N$ e $M$ é um $A$-módulo **irredutível** (ou **simples**) se seus únicos submódulos são $\{0\}$ e $M$.*

**Definição 1.65.** *Sejam $A$ uma álgebra, $M_1$ e $M_2$ $A$-módulos. Dizemos que uma transformação linear $\phi : M_1 \longrightarrow M_2$ é um homomorfismo de $A$-módulos se $\phi(am) = a\phi(m)$ para quaisquer $a \in A$ e $m \in M_1$. Se $\phi$ é bijetiva, dizemos que $M_1$ e $M_2$ são isomorfos.*

**Definição 1.66.** *Um $A$-módulo é dito **semissimples** se existe $\{N_i\}_{i\in I}$ uma família de $A$-módulos irredutíveis tais que*

$$M = \bigoplus_{i\in I} N_i.$$

Vejamos agora a relação entre os $KG$-módulos e as representações lineares de um grupo $G$. Considere $G$ um grupo e $V$ um $K$-espaço vetorial. Seja $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação linear de $G$ em $V$. Considerando o produto $\cdot : KG \times V \longrightarrow V$, definido por

$$(\sum_{g\in G} \lambda_g g) \cdot v = \sum_{g\in G} \lambda_g \varphi_g(v),$$

temos que esse produto faz de $V$ um $KG$-módulo. Por outro lado, considere $V$ um $KG$-módulo, defina

$$\begin{array}{rcccc} \varphi & : & G & \longrightarrow & GL(V) \\ & & g & \longmapsto & \varphi_g \end{array}$$

tal que $\varphi_g$ é uma transformação linear de $V$ em $V$, onde $\varphi_g(v) = g \cdot v$, $v \in V$. Com essa definição, $\varphi$ é uma representação linear de $G$ em $V$.

Assim, dados $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ e $\psi : G \longrightarrow GL(V)$ representações lineares de $G$, podemos dizer que $\varphi$ e $\psi$ são equivalentes, se os respectivos $KG$-módulos $V$ e $W$ são isomorfos. Além disso, $\varphi$ é irredutível se o respectivo $KG$-módulo $V$ é irredutível e completamente redutível se o respectivo $KG$-módulo $V$ é semissimples.

Por abuso de notação, escrevemos em alguns casos, $G$-módulo em vez de $KG$-módulo.

Uma ferramenta básica para o estudo de representações lineares de um grupo finito é o seguinte teorema.

**Teorema 1.67** (Teorema de Maschke)**.** *Seja $G$ um grupo finito e $K$ um corpo cuja característica não divide a ordem de $G$. Então a álgebra de grupo $KG$ é semissimples.*

*Demonstração.* Veja [11], p. 209. □

Note que, sobre um corpo de característica zero, toda álgebra de grupo $KG$ é semissimples.

Sendo $K$ um corpo algebricamente fechado, nas mesmas hipóteses do teorema de Maschke, temos como consequência do Teorema de Wedderburn-Artin (veja [5], p.29) que

$$KG \cong M_{n_1}(K) \oplus \cdots \oplus M_{n_r}(K). \tag{1.2}$$

Temos que dado um grupo finito $G$ e $K$ um corpo de característica 0, toda representação de $G$ é semissimples e o número de representações não equivalentes de $G$ é igual ao número de componentes irredutíveis na decomposição de $KG$ dada em (1.2).

Podemos escrever (1.2) como segue

$$KG = n_1 J_1 \oplus \cdots \oplus n_k J_k,$$

onde $n_i J_i = J_i \oplus \cdots \oplus J_i$ ($n_i$-vezes), $n_i$ é chamado multiplicidade de $J_i$ em $KG$ e $J_i \cong \sum_{l=1}^{n_i} Ke_{li}$ é um ideal minimal à esquerda de $M_{n_i}(K)$. Temos que $n_i = dim\ J_i$.

Recordemos que um elemento $e \in KG$ é um idempotente se $e^2 = e$. Como $KG$ é semissimples, todo ideal à esquerda de $KG$ é gerado por um idempotente. Dizemos que um idempotente é minimal se gera um ideal à esquerda minimal.

**Proposição 1.68.** *Se $M$ é um $KG$-módulo simples então $M \cong J_i$, em que $J_i$ é um ideal minimal de $M_{n_i}(K)$, para algum $i \in \{1, \ldots, k\}$. Consequentemente, existe um idempotente minimal $e \in KG$ tal que $M \cong KGe$.*

*Demonstração.* Veja [6], Lema 4.3.2, p. 98 e p. 29, Teorema 1.4.2. □

**Proposição 1.69.** *Seja $K$ um corpo algebricamente fechado para um grupo finito $G$. Então o número de representações irredutíveis de $G$, a menos de equivalência, é igual ao número de classes de conjugações de $G$.*

*Demonstração.* Veja [11], p. 216. □

**Definição 1.70.** *Sejam $K$ um corpo, $G = G_1 \times G_2$, $\psi_1$ e $\psi_2$ representações de $G_1$ e $G_2$ respectivamente. Suponha que $\psi_1$ e $\psi_2$ induzem um $KG_1$-módulo $M$ e um $KG_2$-módulo $N$, respectivamente. Considere o produto tensorial $T = M \otimes_K N$ como um $KG$-módulo à esquerda definido por*

$$(a, b)(g_1 \otimes g_2) = (ag_1) \otimes (bg_2),$$

*$a \in M$,$g_1 \in G_1$, $b \in N$ e $g_2 \in G_2$. Segue que $T$ dá origem a uma representação $\rho = \psi_1 \# \psi_2$, chamado produto de Kronecker (ou produto tensorial exterior) de $\psi_1$ e $\psi_2$. O grau de $\rho$ é igual ao produto dos graus de $\psi_1$ e $\psi_2$.*

Essa definição, é generalizada para o caso em que $G$ é um produto direto finito de grupos, ou seja, para $G = G_1 \times \cdots \times G_n$ obtemos uma representação $\rho = \psi_1 \# \cdots \# \psi_n$, em que $\psi_i$ é uma representação de $G_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

**Teorema 1.71.** *Sejam $K$ um corpo algebricamente fechado e $G = G_1 \times \cdots \times G_n$.*

*(i) Se $\psi_1, \ldots, \psi_n$ são representações irredutíveis de $G_1, \ldots, G_n$, respectivamente, então $\rho = \psi_1 \# \cdots \# \psi_n$ é uma representação irredutível de $G$;*

*(ii) Cada representação irredutível de $G_1 \times \cdots \times G_n$ é isomorfa a uma representação $\rho = \psi_1 \# \cdots \# \psi_n$, onde $\psi_i$ é a representação irredutível de $G_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.*

*Demonstração.* Veja, p. 27, Teorema 10. □

### 1.7.2 Caracteres e $S_n$-representações

**Definição 1.72.** *Sejam $V$ um espaço vetorial de dimensão finita e $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação linear. A função $\chi_\varphi : G \longrightarrow K$ definida por*

$$\chi_\varphi(g) = tr\varphi_g, \ g \in G$$

*é chamada **caracter** de $\varphi$. Dizemos que a dimensão de $V$ é o grau do caracacter $\chi_\varphi$.*

Se $V$ é um $KG$-módulo simples, então $\chi_\varphi$ é chamado **caracter irredutível**.

Muitas vezes, escrevemos $G$-caracter para dizer que o caracter é referente a uma representação linear sobre o grupo $G$.

**Proposição 1.73.** *Sejam $\phi$ e $\psi$ duas representações de dimensão finita de $G$. Então*

$$\chi_{\phi \oplus \psi} = \chi_\phi + \chi_\psi \quad e \quad \chi_{\phi \otimes \psi} = \chi_\phi \cdot \chi_\psi.$$

*Demonstração.* Veja [15], p. 611 e [11], p. 228. □

**Teorema 1.74.** *Seja $G$ um grupo finito.*

*(i) Todo caracter de $G$ é uma soma de caracteres irredutíveis.*

*(ii) O número de caracteres irredutíveis de $G$ é finito.*

*Demonstração.* Veja [15], p. 612, Proposição 8.124. □

Sendo $\chi_1, ..., \chi_m$ os caracteres irredutíveis de um grupo finito $G$, segue do teorema anterior que dado $\chi$ um caracter de $G$, existem $n_1, ..., n_m$ inteiros não negativos tais que

$$\chi = n_1\chi + \cdots + n_m\chi,$$

em que pelo menos um dos $n_j'$s deve ser estritamente positivo.

O teorema a seguir fornece um critério para verificar se dois $KG$-módulos são isomorfos.

**Teorema 1.75.** *Sejam $G$ um grupo finito e $K$ um corpo algebricamente fechado.Toda representação de dimensão finita de $G$ é determinado, a menos de isomorfismo, por seu caracter.*

*Demonstração.* Veja [15], p. 614, Teorema 8.127. □

Agora vamos introduzir as representações lineares do grupo $S_n$. Para isso, precisamos introduzir a Teoria de Young.

**Definição 1.76.** *Seja $n \geq 1$ um inteiro. Uma **partição** $\lambda$ de $n$ é uma $k$-upla de inteiros $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ tais que $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_k > 0$ e $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = n$. Denotamos por $\lambda \vdash n$.*

**Proposição 1.77.** *Seja $K$ um corpo de característica 0 e $n \geq 1$. Então existe uma correspondência biunívoca entre os $S_n$-módulos irredutíveis e as partições de $n$. Além disso, se $\{\chi_\lambda \mid \lambda \vdash n\}$ é o conjunto de todos caracteres irredutíveis de $S_n$ e $d_\lambda$ é o grau de $\chi_\lambda$, então*

$$KS_n = \bigoplus_{\lambda \vdash n} I_\lambda \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} M_{d_\lambda}(K),$$

*onde $I_\lambda = e_\lambda KS_n$ e $e_\lambda = \sum_{\sigma \in S_n} \chi_\lambda(\sigma)\sigma$ é, a menos de um escalar, a unidade de $I_\lambda$.*

*Demonstração.* Veja [7], p. 109, Teorema 3.24. □

**Definição 1.78.** *Seja $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \vdash n$. Definimos o **diagrama de Young** $D_\lambda$ da partição $\lambda$ como sendo o conjunto*

$$D_\lambda = \{(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} |\ 1 \leq i \leq k,\ 1 \leq j \leq \lambda_i\}.$$

Em outras palavras, o diagrama de Young $D_\lambda$ consiste de $n$ quadrados distribuídos em $k$ linhas, de modo que a primeira coordenada $i$ (linha indexada) aumenta de cima para baixo e a segunda coordenada $j$ (coluna indexada) aumenta da esquerda para a direita e o número de quadrados na $i$-ésima linha é exatamente $\lambda_i$.

**Exemplo 1.79.** *Seja $\lambda = (4, 3, 2) \vdash 9$. O diagrama de Young da partição $\lambda$ é dado por*

$$D_\lambda = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$$

*ou*

$$D_\lambda = \begin{array}{llll} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \\ \square & \square & & \end{array}.$$

**Definição 1.80.** *Seja a partição $\lambda \vdash n$. A partição $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_s)$ tal que $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n$ são os comprimentos das colunas de $D_\lambda$ é dita* ***partição conjugada*** *de $\lambda$.*

Assim, para obtermos o diagrama de $\lambda'$ basta trocarmos as linhas de $D_\lambda$ pelas colunas de $D_\lambda$.

**Exemplo 1.81.** *Considere a partição $\lambda \vdash 9$ dado no Exemplo 1.79, temos que a partição conjugada de $\lambda$ é $\lambda' = (3, 3, 2, 1)$, cujo diagrama de Young é dado por*

$$D_{\lambda'} = \begin{array}{lll} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \\ \square & & \end{array}.$$

**Definição 1.82.** *Seja $\lambda \vdash n$. Uma* ***tabela de Young*** *$T_\lambda$ do diagrama $D_\lambda$ consiste em preencher os quadrados do diagrama com os números de $1, \ldots, n$. Dizemos que $T_\lambda$ é uma tabela de forma $\lambda$. Uma tabela de Young $T_\lambda$ é dita* ***standard****, se os inteiros aumentam em cada linha da esquerda para direita, e em cada coluna de cima para baixo.*

Sendo $\lambda$ uma partição de $n$, existem exatamente $n!$ tabelas de Young distintas do diagrama $D_\lambda$ .

**Exemplo 1.83.** *Considere a partição $\lambda = (4, 3, 2) \vdash 9$. Temos, por exemplo, as seguintes tabelas de Young*

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 7 & 8 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-3} 6 & 9 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-2} \end{array}$$

$$T_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 3 & 5 \\ \hline 9 & 7 & 8 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-3} 6 & 2 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-2} \end{array}.$$

*Note que a primeira tabela é standard, mas a segunda não.*

Considerando $\sigma \in S_n$, temos que $\sigma T_\lambda$, a tabela obtida através de permutações das entradas de $T_\lambda$, também é uma tabela de Young do diagrama $D_\lambda$.

**Exemplo 1.84.** *Considere a tabela de Young $T_1$ dada no exemplo anterior e a permutação $\sigma = (1\ 5\ 7) \in S_9$ temos*

$$\sigma T_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 5 & 3 & 4 & 7 \\ \hline 2 & 1 & 8 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-3} 6 & 9 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-2} \end{array}.$$

Existe uma relação entre as tabelas standard e os graus dos $S_n$-caracteres irredutíveis. Essa relação é descrita no seguinte teorema.

**Teorema 1.85.** *Dada uma partição $\lambda \vdash n$, o número de tabelas standard de forma $\lambda$ é igual a $d_\lambda$, o grau do caracter irredutível correspondente a $\lambda$.*

*Demonstração.* Veja [7], p. 107, Corolário 3.1.13. □

A seguir apresentaremos uma fórmula que calcula o número de tabelas standard de alguma forma $\lambda$, ou seja, calcula o grau $d_\lambda$ do caracter $\chi_\lambda$, denominada fórmula do Gancho. Antes, vejamos a definição de gancho.

**Definição 1.86.** *Sejam $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_k) \vdash n$ e $(i, j) \in D_\lambda$. Definimos o* ***gancho*** *$(i, j)$ de $D_\lambda$ como sendo o conjunto dos quadrados da linha $i$ que estão à direita do quadrado $(i, j)$ (incluindo o próprio quadrado $(i, j)$) e dos quadrados da coluna $j$ que estão abaixo do quadrado $(i, j)$. O* ***comprimento do gancho****, é dado por:*

$$h_{ij} = \lambda_i + \lambda'_j - i - j + 1$$

*onde $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_s)$ é a partição conjugada de $\lambda$.*

**Exemplo 1.87.** *Considere a partição $\lambda = (4, 3, 3, 2) \vdash 12$. Representamos o gancho (1,2) do diagrama $D_\lambda$ na figura abaixo.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $X$ | $X$ | $X$ |
| | $X$ | | |
| | $X$ | | |
| | $X$ | | |
| | | | |

Note que o comprimento do gancho $h_{12} = 6$, exatamente o número de quadrados sinalizados com o $X$.

**Proposição 1.88** (Fórmula do Gancho)**.** *Sejam $\lambda \vdash n$ e $d_\lambda$ é o grau do $S_n$-caracter irredutível correspondentes a $\lambda$. Então*

$$d_\lambda = \frac{n!}{\prod\limits_{i,j} h_{ij}},$$

*onde o produto percorre todos os quadrados do diagrama $D_\lambda$.*

*Demonstração.* Veja [7], p . 56, Teorema 2.3.21. □

Afim de descrever os ideais minimais à esquerda de $KS_n$, vejamos as definições de estabilizador linha e estabilizador coluna.

**Definição 1.89.** *Considere uma tabela de Young $T_\lambda$. O* ***estabilizador de linhas*** $R_{T_\lambda}$ *de $T_\lambda$ é o subgrupo de $S_n$ consistindo de todas as permutações que estabilizam as entradas das linhas de $T_\lambda$. E o* ***estabilizador de colunas*** $C_{T_\lambda}$ *de $T_\lambda$ é o subgrupo de $S_n$ consistindo de todas as permutações que estabilizam as colunas de $T_\lambda$.*

**Definição 1.90.** *Dada uma tabela $T_\lambda$, defina o seguinte elemento de $KS_n$*

$$e_{T_\lambda} = \sum_{\sigma \in R_{T_\lambda}} \sum_{\tau \in C_{T_\lambda}} (sgn\tau)\sigma\tau$$

*onde $(sgn\tau)$ é o sinal da permutação $\tau$.*

Para toda tabela $T_\lambda$ de forma $\lambda \vdash n$, o elemento $e_{T_\lambda}$ é múltiplo escalar de um idempotente minimal de $KS_n$ e é chamado **idempotente essencial**.

**Exemplo 1.91.** *Considere a partição $\lambda = (2,1) \vdash 3$ e a tabela de Young*

$$T_\lambda = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}.$$

*Temos que $R_{T_\lambda} = \{(1),(13)\}$, $C_{T_\lambda} = \{(1),(12)\}$ e*

$$e_{T_\lambda} = (1)(1) - (1)(12) + (13)(1) - (13)(12) = (1) + (12) - (13) - (123).$$

Por meio do seguinte teorema descrevemos, a menos de isomorfismos, os ideais minimais à esquerda de $KS_n$, ou seja, os $S_n$-módulos irredutíveis.

**Teorema 1.92.** *Para toda tabela $T_\lambda$ de forma $\lambda \vdash n$, $KS_n e_{T_\lambda}$ é o ideal minimal à esquerda com caracter $\chi_\lambda$. Além disso, se $\mu$ é uma partição de $n$, então $KS_n e_{T_\lambda}$ é isomorfo a $KS_n e_{T_\mu}$ se, e somente se, $\lambda = \mu$.*

*Demonstração.* Veja [7], p. 106, Teorema 3.1.10. □

Para cada $\lambda \vdash n$, denotamos por $M_\lambda$ o $S_n$-módulo irredutível associado a $\lambda$.

**Proposição 1.93.** *Se $T_1, \ldots, T_{d_\lambda}$ são todas tabelas standard de forma $\lambda$, então $I_\lambda$, o ideal minimal de $KS_n$ associado a $\lambda$, tem a seguinte decomposição*

$$I_\lambda = \bigoplus_{i=1}^{d_\lambda} KS_n e_{T_i}.$$

*Demonstração.* Veja [7], p. 109, Teorema 3.1.24. □

### 1.7.3 $S_n$-representações sobre os polinômios multilineares

Nesta seção vamos apresentar uma ação do grupo $S_n$ no espaço dos polinômios multilineares em $n$ variáveis. Além disso, apresentaremos ferramentas que auxiliam no cálculo dos cocaracteres de uma álgebra.

Começamos com um resultado sobre $S_n$-módulos irredutíveis.

**Lema 1.94.** *Seja $M$ um $S_n$-módulo irredutível com caracter $\chi(M) = \chi_\lambda$, $\lambda \vdash n$. Então $M$ pode ser gerado como um $S_n$-módulo por um elemento da forma $e_{T_\lambda} f$ para algum $f \in M$ e alguma tabela de Young $T_\lambda$ de forma $\lambda$. Além disso, para qualquer tabela de Young $T_\lambda^*$ de forma $\lambda$ existe $f' \in M$ tal que $M = KS_n e_{T_\lambda^*} f'$.*

*Demonstração.* Veja [5], p. 52, Lema 2.4.1. □

Por definição de $R_{T_\lambda}$, para todo $\sigma \in R_{T_\lambda}$ temos que $\sigma e_{T_\lambda} f = e_{T_\lambda} f$, ou seja, $e_{T_\lambda} f$ é estável sobre $R_{T_\lambda}$-ação. Dessa forma, o número de elementos $R_{T_\lambda}$-estáveis de um $S_n$-módulo irredutível está diretamente relacionado ao número de $S_n$-submódulos de $M$ com caracter $\chi_\lambda$.

Vamos considerar agora uma $PI$-álgebra $A$ e $T(A)$ seu $T$-ideal de identidades. Lembremos que, pelo Teorema 1.52, em característica zero, $T(A)$ é determinado pelas identidades multilineares. Vamos denotar por $P_n$, o espaço vetorial dos polinômios multilineares em $x_1, \ldots, x_n$ na álgebra livre $\mathfrak{L}(X)$.

A $S_n$-ação à esquerda sobre um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_n$, é dado por

$$\sigma f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}),$$

para todo $\sigma \in S_n$.

Vamos estudar o espaço $P_n \cap T(A)$. Como $T$-ideais são invariantes sobre permutações de variáveis, obtemos que $P_n \cap T(A)$ é um $S_n$-submódulo de $P_n$. Portanto,

$$P_n(A) = \frac{P_n}{P_n \cap T(A)}$$

tem uma estrutura de $S_n$-módulo induzida pela ação definida anteriormente.

**Definição 1.95.** *Para todo $n \geq 1$, o $S_n$-caracter de $P_n(A)$ é chamado $n$-**cocaracter** de $A$ denotado por $\chi_n(A)$.*

Decompondo o $n$-cocaracter em caracteres irredutíveis , obtemos que

$$\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda, \tag{1.3}$$

onde $\chi_\lambda$ é o $S_n$-caracter associado a partição $\lambda \vdash n$ e $m_\lambda \geq 0$ é a multiplicidade correspondente.

Uma ferramenta útil para calcular o $n$-cocaracter de uma álgebra é descrito no seguinte teorema.

**Teorema 1.96.** *Seja $A$ uma PI-álgebra com $n$-cocaracter $\chi_n(A)$ dado em (1.3). Para uma partição $\mu \vdash n$, a multiplicidade $m_\mu$ é igual a zero se, e somente se, para qualquer tabela de Young $T_\mu$ de forma $\mu$ e qualquer polinômio $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in P_n$, a álgebra $A$ satisfaz a identidade $e_{T_\mu} f \equiv 0$.*

*Demonstração.* Veja [5], p. 55, Teorema 2.4.5. □

# Capítulo 2

# Uma base para as identidades $\mathbb{Z}$-graduadas de $W_1$

Neste capítulo mostramos uma base para as identidades $\mathbb{Z}$-graduadas da álgebra de Lie $W_1$. Além disso, provamos que as identidades $\mathbb{Z}$-graduadas de $W_1$ não admitem qualquer base finita. Esses resultados foram provados em [4], artigo base do nosso trabalho. Aqui, estamos considerando $\mathfrak{L}(X)$ e $W_1$ $\mathbb{Z}$-graduadas.

## 2.1 Teorema principal

Recordamos que como estamos trabalhando com álgebras sobre um corpo de característica zero temos que cada $T_{\mathbb{Z}}$-ideal é gerado por seus elementos multilineares. Assim, vamos trabalhar apenas com os polinômios multilineares.

Considere as seguintes identidades $\mathbb{Z}$-graduadas em $\mathfrak{L}(X)$:

$$[x_1^{(i)}, x_2^{(i)}] \equiv 0,\ i \geq -1 \tag{2.1}$$

$$\alpha[x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(c)}] - \beta[x_1^{(a)}, x_3^{(c)}, x_2^{(b)}] \equiv 0 \tag{2.2}$$

$$x^{(d)} \equiv 0,\ d \leq -2, \tag{2.3}$$

em que $\alpha = (c-a)(b-c-a)$, $\beta = (b-a)(c-b-a)$.

Vamos denotar por $I$ o $T_{\mathbb{Z}}$-ideal gerado por essas identidades graduadas. O resultado principal do nosso trabalho é mostrar que tais identidades formam uma base para identidades $\mathbb{Z}$-graduadas de $W_1$, ou seja, que $I = T_{\mathbb{Z}}(W_1)$. Para isso precisaremos explorar uma série de resultados chaves e auxiliares para chegarmos ao teorema principal com o suporte necessário para demonstrá-lo. É o que faremos na sequência.

Lembremos que o produto em $W_1$, apresentado em (1.1) é dado por:

$$[e_i, e_j] = (j - i)e_{i+j},$$

para quaisquer $i, j \leq -1$ e que $e_d = 0$ para todo $d \leq -2$, por definição.

Seja $a_1, \ldots, a_n \geq -1$ tal que $a_1 + \cdots + a_k \geq -1$ para todo $k$, $2 \leq k \leq n$. Podemos deduzir de $[e_{a_1}, e_{a_2}] = (a_2 - a_1)e_{a_1+a_2}$ que

- $[e_{a_1}, e_{a_2}, e_{a_3}] = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1 - a_2)e_{a_1+a_2+a_3}$,
- $[e_{a_1}, e_{a_2}, e_{a_3}, e_{a_4}] = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1 - a_2)(a_4 - a_3 - a_2 - a_1)e_{a_1+a_2+a_3+a_4}$.

E seguindo por indução, deduzimos que

$$[e_{a_1}, e_{a_2}, \ldots, e_{a_n}] = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1 - a_2) \cdots (a_n - a_1 - a_2 - \cdots - a_{n_1})e_{a_1+\cdots+a_n}.$$

Note que se $a_l \leq -2$ para algum $l$ então a equação acima é falsa em geral, por exemplo, $[e_{-2}, e_1, e_2] = 0 \neq 3e_1$. Provamos no seguinte lema que $[e_{a_1}, \ldots, e_{a_n}]$ é um múltiplo de $e_{a_1+\cdots+a_n}$ para todo $a_1, \ldots, a_n \geq -1$, ainda que tenhamos $a_1 + \cdots + a_k \leq -2$ para algum $k$. Isso facilitará a realização de algumas contas com os elementos da base de $W_1$.

**Lema 2.1.** *Sejam $a_1, \ldots, a_n$ inteiros. Para todo $a_1, \ldots, a_n \geq -1$ $(n \geq 2)$ vale a seguinte igualdade:*

$$[e_{a_1}, \ldots, e_{a_n}] = \alpha_n e_{a_1+\cdots+a_n}, \tag{2.4}$$

*em que $\alpha_n = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1 - a_2) \cdots (a_n - a_1 - \cdots - a_{n-1})$.*

*Demonstração.* Vamos provar por indução em $n$. Se $n = 2$ então, por (1.1), o lema é válido. Suponha $n > 2$. Pela hipótese de indução, para todo $k < n$ temos

$$[e_{a_1}, e_{a_2}, \ldots, e_{a_k}] = \alpha_k e_{a_1+a_2+\cdots+a_k}$$

onde $\alpha_k = (a_2-a_1)(a_3-a_2-a_1)\cdots(a_k-a_1-a_2-\cdots-a_{k-1})$. Assim, se $a_1+\cdots+a_{n-1} \geq -1$ então, por (1.1),

$$\begin{aligned}
[e_{a_1}, \ldots, e_{a_n}] &= \alpha_{n-1}[e_{a_1+\cdots+a_{n-1}}, e_{a_n}] \\
&= \alpha_{n-1}(a_n - a_1 - a_2 - \cdots - a_{n-1})e_{a_1+\cdots+a_n} \\
&= \alpha_n e_{a_1+\cdots+a_n}.
\end{aligned}$$

Agora suponha que $a_1 + \cdots + a_{n-1} \leqslant -2$. Tome $k$ mínimo com $2 \leq k < n$ tal que $a_1 + \cdots + a_k \leq -2$. Isso implica que $a_1 + \cdots + a_{k-1} \geq -1$. Logo,

$$a_1 + \cdots + a_{k-1} = -1$$

e $a_k = -1$ já que $a_i \geq -1$, para todo $i$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}[][e_{a_1}, \ldots, e_{a_{k-1}}, e_k] &= \alpha_{k-1}[e_{a_1+\cdots a_{k-2}}, e_{a_k}] \\ &= \alpha_{k-1}[e_{-1}, e_{-1}] \\ &= 0.\end{aligned}$$

Isso implica que $[e_{a_1}, \ldots, e_{a_n}] = 0$. Mas, $a_k - a_1 - \cdots - a_{k-1} = -1 + 1 = 0$, implicando em $\alpha_n = 0$. Portanto, $[e_{a_1}, \ldots, e_{a_n}] = 0 = \alpha_n e_{a_1+\cdots+a_n}$. Assim, completamos a prova. $\square$

No lema a seguir, provamos que as identidades graduadas dadas no início deste capítulo são identidades graduadas para $W_1$. Dessa forma, concluímos que $I$ está contido no conjunto das identidades graduadas de $W_1$, o que prova parte do resultado principal.

**Lema 2.2.** *As identidades (2.1), (2.2) e (2.3), ou seja,*

- $[x_1^{(i)}, x_2^{(i)}] \equiv 0, \ i \geq -1;$
- $\alpha[x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(c)}] - \beta[x_1^{(a)}, x_3^{(c)}, x_2^{(b)}] \equiv 0;$
- $x^{(d)} \equiv 0, \ d \leq -2,$

*em que $\alpha = (c-a)(b-c-a)$, $\beta = (b-a)(c-b-a)$ são identidades $\mathbb{Z}$-graduadas da álgebra de Lie $W_1$ sobre $K$.*

*Demonstração.* Como esses polinômios são multilineares, ou seja, são lineares em cada uma de suas variáveis é suficiente mostrar que cada uma se anula na avaliação dos elementos da base de $W_1$.

Já mostramos, no Exemplo 1.42 que (2.1) são identidades graduadas de $W_1$. Temos pela graduação de $W_1$ que para todo $d \leq -2$, $L_d = \{0\}$. Assim, (2.3) são trivialmente, identidades graduadas para $W_1$. Resta mostrar que (2.2) são identidades graduadas para $W_1$.

Se $a \leq -2$ (analogamente se $b \leq -2$ ou $c \leq -2$) então $x_1^{(a)} \equiv 0$ e $[x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(c)}] \equiv [x_1^{(a)}, x_3^{(c)}, x_2^{(b)}] \equiv 0$. Assim, (2.2) são identidade graduadas para $W_1$. Suponhamos que $a, b, c \geq -1$. Neste caso, para mostrar que as identidades (2.2) são satisfeitas em $W_1$, basta provar que

$$\alpha[e_a, e_b, e_c] - \beta[e_a, e_c, e_b] = 0.$$

Pela relação (2.4) descrita no Lema 2.1 temos

$$[e_a, e_b, e_c] = (b-a)(c-a-b)e_{a+b+c} = \beta e_{a+b+c},$$

$$[e_a, e_c, e_b] = (c-a)(b-a-c)e_{a+b+c} = \alpha e_{a+b+c}.$$

Substituindo essas equações em $\alpha[e_a, e_b, e_c] - \beta[e_a, e_c, e_b]$ obtemos

$$\alpha\beta e_{a+b+c} - \beta\alpha e_{a+b+c} = 0.$$

Logo, (2.2) são identidades graduadas para $W_1$. □

Diante desse lema, para provarmos nosso resultado principal resta garantir que $T_{\mathbb{Z}}(W_1)$ está contido em $I$. A partir daqui, todos os resultados que antecedem o teorema principal, tem como objetivo garantir a prova dessa continência. O próximo lema será usado diretamente na prova desse fato.

**Lema 2.3.** *Seja* $m = [x_{i_1}^{(a_1)}, \ldots, x_{i_n}^{(a_n)}] \in \mathfrak{L}(X)$ *um comutador multilinear. Se* $m \in T_{\mathbb{Z}}(W_1)$, *então* $m \in I$.

*Demonstração.* Se existe $l$ com $1 \leq l \leq n$ tal que $a_l \leq -2$, então $m$ pertence ao $T_{\mathbb{Z}}$-ideal gerado por $\{x^{(d)} \mid d \leq -2\}$. Isso implica que $m \in I$. Suponha agora que $a_l \geq -1$ para todo $l$, $1 \leq l \leq n$. Como $m \in T_{\mathbb{Z}}(W_1)$ temos $[e_{a_1}, \ldots, e_{a_n}] = 0$. Por (2.4), temos:

$$\alpha_n e_{a_1+\cdots+a_n} = 0.$$

Isso implica que $\alpha_n = 0$ ou $e_{a_1+\cdots+a_n} = 0$. Assim, se $\alpha_n = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1 - a_2)\cdots(a_n - a_1 - \cdots - a_{n-1}) = 0$ então $(a_l - a_1 - \cdots - a_{l-1}) = 0$ para algum $l$, $2 \leq l \leq n$. Logo, $a_l = a_1 + a_2 + \cdots + a_{l-1}$. Isso implica que $[x_{i_1}^{(a_1)}, \ldots, x_{i_{l-1}}^{a_{(l-1)}}, x_{i_l}^{(a_l)}]$ pertence ao $T_{\mathbb{Z}}$-ideal gerado por $\{[x_1^{(i)}, x_2^{(i)}] \mid i \geq -1\}$. Portanto, $[x_{i_1}^{(a_1)}, \ldots, x_{i_l}^{(a_l)}] \in I$ e $m \in I$. Agora, se $e_{a_1+\cdots+a_n} = 0$ então $a_1 + \cdots + a_n \leq -2$. Isso implica que $m$ pertence ao $T_{\mathbb{Z}}$- ideal graduado gerado por $\{x^{(d)} \mid d \leq -2\}$ e $m \in I$. Em todo caso $m \in I$, provando o lema. □

Agora vamos definir 5 tipos de comutadores multilineares de comprimento maior que 2 que não pertencem a $I$ e para cada tipo definimos um comutador da forma canônica. Os comutadores da forma canônica vão nos permitir provar resultados gerais acerca dos comutadores multilineares que não pertencem a $I$. Dessa forma, esses comutadores são fundamentais na prova do resultado principal. Lembrando que $I$ é o $T_{\mathbb{Z}}$-ideal gerado pelas identidades graduadas (2.1), (2.2) e (2.3).

Escrevemos $x_i^{(a)} > x_j^{(b)}$ se $a > b$ ou $a = b$ e $i > j$. Sabemos que, pela Proposição 1.55, cada comutador multilinear $m = [x_{j_1}^{(b_1)}, \ldots, x_{j_n}^{(b_n)}] \in \mathfrak{L}(X)$ pode ser escrito como uma combinação linear de comutadores normados à esquerda com a primeira variável fixada. Portanto, podemos supor sem perda de generalidade que cada elemento multilinear de $\mathfrak{L}(X)$ é uma combinação linear de comutadores $[x_{i_1}^{(a_1)}, \ldots, x_{i_n}^{(a_n)}]$ onde $x_{i_1}^{(a_1)} > x_{i_l}^{(a_l)}$ para todo $l > 1$. Assim, podemos trabalhar apenas com os comutadores multilineares que satisfazem essa ordem.

Seja $m = [x_{i_1}^{(a_1)}, \ldots, x_{i_n}^{(a_n)}]$ $(n \geq 3)$ um comutador multilinear tal que $m \notin I$ e $x_{i_1}^{(a_1)} > x_{i_l}^{(a_l)}$ para todo $l > 1$, temos que $m$ é de um dos tipos a seguir.

**Tipo 1.** Dizemos que $m$ é um comutador do tipo 1 se $a_1 > 1$ e existe $l$, $2 \leq l \leq n$, tal que $0 < a_l < a_1$. Por exemplo,

$$m_1 = [x_1^{(3)}, x_2^{(-1)}, x_3^{(1)}, x_4^{(0)}].$$

**Tipo 2.** Dizemos que $m$ é um comutador do tipo 2 se $a_1 > 1$, $a_l \in \{-1, 0, a_1\}$ para todo $l > 1$ e existe $l'$ tal que $a_{l'} = a_1$. Por exemplo,

$$m_2 = [x_3^{(2)}, x_2^{(-1)}, x_1^{(2)}, x_4^{(0)}].$$

**Tipo 3.** Dizemos que $m$ é um comutador do tipo 3 se $a_1 > 1$ e $a_l \in \{-1, 0\}$ para todo $l > 1$. Por exemplo,

$$m_3 = [x_1^{(2)}, x_2^{(-1)}, x_3^{(-1)}, x_4^{(-1)}].$$

**Tipo 4.** Dizemos que $m$ é um comutador do tipo 4 se $a_1 = 1$. Notemos que neste caso, $a_l \in \{1, 0, -1\}$ para todo $l > 1$. Por exemplo,

$$m_4 = [x_3^{(1)}, x_2^{(-1)}, x_1^{(1)}, x_4^{(-1)}].$$

**Tipo 5.** Dizemos que $m$ é um comutador do tipo 5 se $a_1 = 0$. Notemos que neste caso, $a_l \in \{0, -1\}$ para todo $l > 1$. Por exemplo,

$$m_5 = [x_4^{(0)}, x_2^{(-1)}, x_3^{(0)}, x_1^{(0)}].$$

Logo, cada comutador multilinear de comprimento $n \geq 3$ em $\mathfrak{L}(X)$ tal que $m \notin I$ é escrito como combinação linear de comutadores desses tipos. Para cada um dos tipos descritos, definimos a seguir seus respectivos comutadores da forma canônica.

**Tipo 1 (forma canônica).** Um comutador $m$ do tipo 1 é da forma canônica se

$$m = [x_{i_1}^{(a_1)}, x_{i_2}^{(a_2)}, \ldots, x_{i_r}^{(a_r)}, x_{i_{r+1}}^{(-1)}, \ldots, x_{i_n}^{(-1)}],$$

onde $a_2 \geq 0$, $2 \leq r \leq n$, $x_{i_2}^{(a_2)} < x_{i_3}^{(a_3)} < \cdots < x_{i_r}^{(a_r)} < x_{i_1}^{(a_1)}$, $i_{r+1} < \cdots < i_n$ e $0 < a_l < a_1$ para algum l, $2 \leq l \leq r$. Neste caso, pode acontecer $r = n$, ou seja, $m$ pode não conter variáveis com $\mathbb{Z}$-grau $-1$.

**Tipo 2 (forma canônica).**Um comutador $m$ do tipo 2 é da forma canônica se

$$m = [x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_r}^{(0)}, x_{i_{r+1}}^{(-1)}, x_{i_{r+2}}^{(a)}, \ldots, x_{i_s}^{(a)}, x_{i_{s+1}}^{(-1)}, \ldots, x_{i_n}^{(-1)}],$$

onde $a = a_1$, $r \geq 1$, $r + 2 \leq s \leq n$, $i_2 < \cdots < i_r$, $i_{r+1} < i_{s+1} < \cdots < i_n$, $i_{r+2} < \cdots < i_s < i_1$. Notemos que pode acontecer $r = 1$ e neste caso $m$ não conteria variáveis com $\mathbb{Z}$-grau 0. Notemos também que é necessário a variável $x_{i_{r+1}}$ com $\mathbb{Z}$-grau $-1$, pois caso contrário, $m$ pertenceria a $I$.

**Tipo 3 (forma canônica).** Um comutador $m$ do tipo 3 é da forma canônica se

$$m = [x_{i_1}^{(a_1)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_r}^{(0)}, x_{i_{r+1}}^{(-1)}, \ldots, x_{i_n}^{(-1)}],$$

onde $1 \leq r \leq n$, $i_2 < \cdots < i_r$ e $i_{r+1} < \cdots < i_n$. Notemos que neste caso, pode acontecer $r = 1$, ou seja, $m$ não conter variáveis com $\mathbb{Z}$-grau 0. Pode ocorrer também $r = n$, ou seja, $m$ não conter variáveis de $\mathbb{Z}$-grau $-1$.

**Tipo 4 (forma canônica).** Um comutador $m = [x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(a_2)}, x_{i_3}^{(a_3)}]$ do tipo 4 e de comprimento 3 é da forma canônica se

$$(a_2, a_3) = \begin{cases} (0,-1); & & \\ (-1,1) & \text{e} & i_3 < i_1; \\ (0,0) & \text{ou} & (-1,-1), \quad i_2 < i_3. \end{cases}$$

Um comutador $m$ do tipo 4 e de comprimento $n \geq 4$ é da forma canônica se

$$m = [x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_r}^{(0)}, x_{i_{r+1}}^{(-1)}, x_{i_{r+2}}^{(1)}, x_{i_{r+3}}^{(-1)}, x_{i_{r+4}}^{(1)}, \ldots, x_{i_{n-2}}^{(a_{n-2})}, x_{i_{n-1}}^{(a_{n-1})}, x_{i_n}^{(a_n)}],$$

onde $1 \leq r \leq n$, $i_2 < \cdots < i_r$,

$$(a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}) = \begin{cases} (1,-1,-1) & \text{ou} & (1,-1,1) & \text{se } r \leq n-3 \text{ e } (n-r) \text{ é par;} \\ (-1,1,-1) & & & \text{se } r \leq n-3 \text{ e } (n-r) \text{ é ímpar;} \\ (0,-1,-1) & \text{ou} & (0,-1,1) & \text{se } r = n-2; \\ (0,0,-1) & & & \text{se } r = n-1; \\ (0,0,0) & & & \text{se } r = n. \end{cases}$$

e temos o seguinte:

- se $(a_{n-2}, a_{n-1}, a_n) = (1,-1,-1)$ então $i_{r+1} < i_{r+3} \cdots < i_{n-3} < i_{n-1} < i_n$ e $i_{r+2} < i_{r+4} < \cdots < i_{n-2} < i_1$;

- se $(a_{n-2}, a_{n-1}, a_n) = (1,-1,1)$ então $i_{r+1} < i_{r+3} < \cdots < i_{n-3} < i_{n-1}$ e $i_{r+2} < i_{r+4} < \cdots < i_{n-2} < i_n < i_1$;

- se $(a_{n-2}, a_{n-1}, a_n) = (1,1,-1)$ então $i_{r+1} < i_{r+3} < \cdots < i_{n-2} < i_n$ e $i_{r+2} < i_{r+4} < \cdots < i_{n-1} < i_1$;

- se $(a_{n-2}, a_{n-1}, a_n) = (0, -1, -1)$ então $i_{n-1} < i_n$;

- se $(a_{n-2}, a_{n-1}, a_n) = (0, -1, 1)$ então $i_n < i_1$.

**Tipo 5 (forma canônica).** Um comutador $m$ do tipo 5 é da forma canônica se

$$m = [x_{i_1}^{(0)}, x_{i_2}^{(-1)}, x_{i_3}^{(0)}, \ldots, x_{i_n}^{(0)}],$$

onde $i_3 < i_4 < \cdots < i_1$.

Resumimos na seguinte tabela os tipos de comutadores e seus respectivos comutadores na forma canônica.

| Tipos | Forma canônica |
|---|---|
| **Tipo 1**<br>$a_1 > 1$ e existe $l$, $2 \leq l \leq n$,<br>tal que $0 < a_l < a_1$ | $m = [x_{i_1}^{(a_1)}, x_{i_2}^{(a_2)}, \ldots, x_{i_r}^{(a_r)}, x_{i_{r+1}}^{(-1)}, \ldots, x_{i_n}^{(-1)}]$ |
| **Tipo 2**<br>$a_1 > 1$, $a_l \in \{-1, 0, a_1\}$ para todo $l > 1$<br>e existe $l'$ tal que $a_{l'} = a_1$ | $m = [x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_r}^{(0)}, x_{i_{r+1}}^{(-1)}, x_{i_{r+2}}^{(a)}, \ldots, x_{i_s}^{(a)}, x_{i_{s+1}}^{(-1)}, \ldots, x_{i_n}^{(-1)}]$ |
| **Tipo 3**<br>$a_1 > 1$ e $a_l \in \{-1, 0\}$ para todo $l > 1$ | $m = [x_{i_1}^{(a_1)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_r}^{(0)}, x_{i_{r+1}}^{(-1)}, \ldots, x_{i_n}^{(-1)}]$ |
| **Tipo 4**<br>$a_1 = 1$ | $m = [x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(a_2)}, x_{i_3}^{(a_3)}]$ $(n = 3)$,<br>$(a_2, a_3) = (0, -1), (-1, 1), (0, 0)$ ou $(-1, -1)$<br><br>$m = [x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_r}^{(0)}, x_{i_{r+1}}^{(-1)}, x_{i_{r+2}}^{(1)}, \ldots, x_{i_{n-2}}^{(a_{n-2})}, x_{i_{n-1}}^{(a_{n-1})}, x_{i_n}^{(a_n)}]$ $(n \geq 4)$<br>$(a_{n-2}, a_{n-1}, a_n) = (1, -1, -1), (1, -1, 1), (-1, 1, -1), (0, -1, -1),$<br>$(0, -1, 1), (0, 0, -1)$ ou $(0, 0, 0)$ |
| **Tipo 5**<br>$a_1 = 0$ | $m = [x_{i_1}^{(0)}, x_{i_2}^{(-1)}, x_{i_3}^{(0)}, \ldots, x_{i_n}^{(0)}]$ |

Tabela 2.1: Tipos de comutadores e suas respectivas formas canônicas

**Lema 2.4.** $(i)$ *Cada comutador multilinear* $m = [x_{i_1}^{(a_1)}, \ldots, x_{i_n}^{(a_n)}]$ $(n \geq 3)$ *tal que* $m \notin I$ *e* $x_{i_1}^{(a_1)} > x_{i_l}^{(a_l)}$ *para todo* $l > 1$ *é de um certo tipo* $i$*,* $1 \leq i \leq 5$*;*

$(ii)$ *Para cada tipo de comutador* $m$*, existe exatamente um comutador multilinear* $m_1$ *da forma canônica no mesmo conjunto de variáveis* $\{x_{i_1}^{(a_1)}, \ldots, x_{i_n}^{(a_n)}\}$.

*Demonstração.* $(i)$ De fato, temos que $a_1 \geq 0$, pois caso contrário $a_1 = -1$ e $a_l = -1$ para todo $l$, $2 \leq l \leq n$. Isso implicaria em $m \in I$, uma contradição. Logo, $m$ é exatamente de um dos tipos definidos.

$(ii)$ Se $m$ é do tipo 1 ou tipo 3 então permutamos as variáveis de forma adequada e obtemos um comutador da forma canônica.

Se $m$ é do tipo 2 então deve existir $l > 1$ tal que $a_l = -1$, pois caso contrário $a_l \in \{0, a_1\}$ para todo $l$ e $m \in I$.

Se $m$ é do tipo 5 então $a_1 = 0$ isso implica que $a_2 = -1$ (pois caso contrário $a_2 = 0$ e $m \in I$). Dessa forma $a_l = 0$ para todo $l$, $3 \leq l \leq n$, pois caso contrário $m \in I$.

Por fim, se $m$ é um comutador do tipo 4 então $a_1 = 1$. Note que se, para algum $l$ o comutador $m' = [x_{i_1}^{(a_1)}, \ldots, x_{i_l}^{(a_l)}]$ é de $\mathbb{Z}$-grau 1 então $a_{l+1} \neq 1$ (pois, caso contrário $m \in I$). Nessa situação temos $a_{l+1} \leq 0$. Similarmente se $m'$ tem $\mathbb{Z}$-grau $-1$ então $a_{l+1} \geq 0$. Logo, $m$ é de $\mathbb{Z}$- grau 1, 0 ou $-1$ de modo que a diferença entre o número de entradas $x_{i_l}^{(a_l)}$ em $m$ de $\mathbb{Z}$-grau 1 e o número de entradas de $\mathbb{Z}$-grau $-1$ é no máximo 1.

Portanto, para cada tipo de comutador $m$ existe um comutador da forma canônica no mesmo conjunto de variáveis. □

Vejamos alguns exemplos em que encontraremos o comutador da forma canônica nas mesmas variáveis de um determinado comutador multilinear não pertencente a $I$.

**Exemplo 2.5.** *Considere os seguintes comutadores pertencentes a $\mathfrak{L}(X)$*

$$m_1 = [x_1^{(2)}, x_2^{(1)}, x_3^{(-1)}, x_4^{(1)}, x_5^{(0)}],\ m_2 = [x_4^{(3)}, x_2^{(-1)}, x_3^{(-1)}, x_1^{(3)}, x_5^{(0)}],$$

$$m_3 = [x_5^{(4)}, x_4^{(-1)}, x_3^{(-1)}, x_2^{(0)}, x_1^{(0)}],\ m_4 = [x_3^{(1)}, x_2^{(-1)}, x_1^{(1)}, x_4^{(-1)}, x_5^{(0)}],$$

*dos tipos 1,2,5 e 4, respectivamente. Temos que:*

- $m_1' = [x_1^{(2)}, x_2^{(1)}, x_4^{(1)}, x_5^{(0)}, x_3^{(-1)}]$ *é um comutador da forma canônica do tipo 1 nas mesmas variáveis de $m_1$.*
- $m_2' = [x_4^{(3)}, x_5^{(0)}, x_2^{(-1)}, x_1^{(3)}, x_3^{(-1)}]$ *é um comutador da forma canônica do tipo 2 nas mesmas variáveis de $m_2$.*
- $m_3' = [x_5^{(4)}, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(-1)}, x_4^{(-1)}]$ *é um comutador da forma canônica do tipo 3 nas mesmas variáveis de $m_3$.*
- $m_4' = [x_3^{(1)}, x_5^{(0)}, x_2^{(-1)}, x_1^{(1)}, x_4^{(-1)}]$ *é um comutador da forma canônica do tipo 4 nas mesmas variáveis de $m_4$.*

Observamos que em $m_1$, para escrevermos o comutador na forma canônica bastou organizar as variáveis em ordem decrescente de $\mathbb{Z}$-graus e depois em ordem crescente de índices para as variáveis de mesmo $\mathbb{Z}$-grau. Mas não podemos proceder da mesma forma sempre, pois eventualmente podemos encontrar um comutador nas mesmas variáveis de $m$ pertencente a $I$. Por isso, devemos estar atentos as condições dadas em cada tipo específico.

Vamos apresentar alguns lemas que oferecem técnicas para trabalharmos com os comutadores multilineares por meio da congruência módulo o conjunto $I$. Muitas das técnicas refere-se a como permutar (módulo $I$) variáveis de $\mathbb{Z}$-graus específicos em determinados comutadores multilineares. Essas técnicas vão permitir relacionar, também através da congruência módulo $I$, comutadores multilineares não pertencentes a $I$ com os comutadores da forma canônica. Por enquanto, vamos nos limitar ao estudo dessas técnicas.

No que segue, $u \equiv v$ significa que $u \equiv v$ $(mod\ I)$, isto é, $u - v \in I$.

A seguinte observação é usada com frequência na prova de alguns lemas.

**Observação 2.6.** *Seja $m = [x_1^{(a_1)}, \ldots, x_n^{(a_n)}]$ $(n \geq 3)$ um comutador multilinear. Se*

$$m = [x_1^{(a_1)}, \ldots, x_r^{(a_r)}, x_{r+1}^{(a_{r+1})}, \ldots, x_n^{(a_n)}] \equiv [x_1^{(a_1)}, \ldots, x_{r+1}^{(a_{r+1})}, x_r^{(a_r)}, \ldots, x_n^{(a_n)}],$$

*$2 \leq r \leq n$ então $m \equiv [x_1^{(a_1)}, x_{\sigma(2)}^{(a_{\sigma(2)})}, \ldots, x_{\sigma(r)}^{(a_{\sigma(r)})}, x_{\sigma(r+1)}^{(a_{\sigma(r+1)})}, \ldots, x_{\sigma(n)}^{(a_{\sigma(n)})}]$, para toda permutação $\sigma$ de $\{2, ..., n\}$.*

De fato, sabemos que toda permutação de $\{2, ..., n\}$ pode ser escrita como produto de transposições que por sua vez podem ser escritos como um produto de transposições do tipo $(i\ (i+1))$, $3 \leq i \leq n$. Isso justifica a validade da Observação 2.6. Vejamos um exemplo.

**Exemplo 2.7.** *Seja $m = [x_1^{(a_1)}, x_2^{(a_2)}, x_3^{(a_3)}, x_4^{(a_4)}]$ e $\sigma = (24)$, então*

$$\begin{aligned} m = [x_1^{(a_1)}, x_2^{(a_2)}, x_3^{(a_3)}, x_4^{(a_4)}] &\equiv [x_1^{(a_1)}, x_2^{(a_2)}, x_4^{(a_4)}, x_3^{(a_3)}] \\ &\equiv [x_1^{(a_1)}, x_4^{(a_4)}, x_2^{(a_2)}, x_3^{(a_3)}] \\ &\equiv [x_1^{(a_1)}, x_4^{(a_4)}, x_3^{(a_3)}, x_2^{(a_2)}]. \end{aligned}$$

*Veja que a transposição (24) que permuta a segunda e a quarta variável em $m$ é igual ao produto de transposições que permutam duas variáveis sucessivas.*

O lema subsequente permite permutarmos (módulo $I$) as últimas variáveis de um comutador multilinear, desde que essas variáveis tenham o mesmo $\mathbb{Z}$-grau.

**Lema 2.8.** *Temos que*

$$[x_1^{(a_1)}, x_2^{(a_2)}, x_3^{(a_3)}] \equiv [x_3^{(a_3)}, x_2^{(a_2)}, x_1^{(a_1)}] \text{ e } [x_2^{(a_2)}, x_3^{(a_3)}, x_1^{(a_1)}] \equiv [x_2^{(a_2)}, x_1^{(a_1)}, x_3^{(a_3)}] \tag{2.5}$$

*sempre que $a_1 = a_3$ ou $a_2 = a_1 + a_3$.*
*E, para cada $n \geq 3$,*

$$[x_1^{(a_1)}, x_{\sigma(2)}^{(a)}, \ldots, x_{\sigma(n)}^{(a)}] \equiv [x_1^{(a_1)}, x_2^{(a)}, \ldots, x_n^{(a)}] \tag{2.6}$$

*para toda permutação $\sigma$ de $\{2, 3, \ldots, n\}$.*

*Demonstração.* Vamos mostrar que vale (2.5). De fato, pela identidade de Jacobi,

$$[x_1^{(a_1)}, x_2^{(a_2)}, x_3^{(a_3)}] + [x_2^{(a_2)}, x_3^{(a_3)}, x_1^{(a_1)}] + [x_3^{(a_3)}, x_1^{(a_1)}, x_2^{(a_2)}] = 0.$$

Usando a anticomutatividade, temos:

$$[x_1^{(a_1)}, x_2^{(a_2)}, x_3^{(a_3)}] - [x_3^{(a_3)}, x_2^{(a_2)}, x_1^{(a_1)}] - [x_1^{(a_1)}, x_3^{(a_3)}, x_2^{(a_2)}] = 0.$$

Isso implica que

$$[x_1^{(a_1)}, x_2^{(a_2)}, x_3^{(a_3)}] - [x_3^{(a_3)}, x_2^{(a_2)}, x_1^{(a_1)}] = [x_1^{(a_1)}, x_3^{(a_3)}, x_2^{(a_2)}].$$

Assim, se $a_1 = a_3$ então $[x_1^{(a_1)}, x_3^{(a_3)}, x_2^{(a_2)}] = [x_1^{(a_1)}, x_3^{(a_1)}, x_2^{(a_2)}]$ pertence ao $T_{\mathbb{Z}}$-ideal gerado pelas identidades graduadas (2.1). Isso implica que $[x_1^{(a_1)}, x_3^{(a_3)}, x_2^{(a_2)}] \in I$. Logo, $[x_1^{(a_1)}, x_2^{(a_2)}, x_3^{(a_3)}] - [x_3^{(a_3)}, x_2^{(a_2)}, x_1^{(a_1)}] \in I$. Se $a_2 = a_1 + a_3$ então $[x_1^{(a_1)}, x_3^{(a_3)}]$ tem $\mathbb{Z}$-grau $a_2$. Isso implica que $[x_1^{(a_1)}, x_3^{(a_3)}, x_2^{(a_2)}]$ pertence ao $T_{\mathbb{Z}}$-ideal gerado pelas identidades graduadas (2.1). Logo, $[x_1^{(a_1)}, x_2^{(a_2)}, x_3^{(a_3)}] - [x_3^{(a_3)}, x_2^{(a_2)}, x_1^{(a_1)}] \in I$, ou seja,

$$[x_1^{(a_1)}, x_2^{(a_2)}, x_3^{(a_3)}] \equiv [x_3^{(a_3)}, x_2^{(a_2)}, x_1^{(a_1)}].$$

De forma análoga, pela identidade de Jacobi e anticomutatividade, temos

$$[x_2^{(a_2)}, x_3^{(a_3)}, x_1^{(a_1)}] - [x_2^{(a_2)}, x_1^{(a_1)}, x_3^{(a_3)}] = [x_1^{(a_1)}, x_3^{(a_3)}, x_2^{(a_2)}].$$

Já vimos que $[x_1^{(a_1)}, x_3^{(a_3)}, x_2^{(a_2)}] \in I$ sempre que $a_1 = a_3$ ou $a_2 = a_1 + a_3$. Logo, $[x_2^{(a_2)}, x_3^{(a_3)}, x_1^{(a_1)}] \equiv [x_2^{(a_2)}, x_1^{(a_1)}, x_3^{(a_3)}]$.

Agora mostremos que vale (2.6). Para isso, vamos mostrar que para cada $i \geq 3$ com $a_{i-1} = a_i$, tem-se

$$[x_1^{(a_1)}, \ldots, x_{i-2}^{(a_{i-2})}, x_{i-1}^{(a_{i-1})}, x_i^{(a_i)}] \equiv [x_1^{(a_1)}, \ldots, x_{i-2}^{(a_{i-2})}, x_i^{(a_i)}, x_{i-1}^{(a_{i-1})}]. \tag{2.7}$$

De fato, para $i = 3$ temos por (2.5) que $[x_1^{(a_1)}, x_2^{(a_2)}, x_3^{(a_3)}] \equiv [x_1^{(a_1)}, x_3^{(a_3)}, x_2^{(a_2)}]$, já que $a_3 = a_2$. Suponhamos, por hipótese de indução que vale (2.7) para todo comutador de tamanho $i - 1$. Assim, se $a_{i-1} = a_i$ então

$$[x_1^{(a_1)}, x_2^{(a_2)}, x_3^{(a_3)}, \ldots, x_{i-2}^{(a_{i-2})}, x_{i-1}^{(a_{i-1})}, x_i^{(a_i)}] - [x_1^{(a_1)}, x_2^{(a_2)}, x_3^{(a_3)}, \ldots, x_{i-2}^{(a_{i-2})}, x_i^{(a_i)}, x_{i-1}^{(a_{i-1})}] =$$

$$[[x_1^{(a_1)}, x_2^{(a_2)}], x_3^{(a_3)}, \ldots, x_{i-2}^{(a_{i-2})}, x_{i-1}^{(a_{i-1})}, x_i^{(a_i)}] - [[x_1^{(a_1)}, x_2^{(a_2)}], x_3^{(a_3)}, \ldots, x_{i-2}^{(a_{i-2})}, x_i^{(a_i)}, x_{i-1}^{(a_{i-1})}] \in I.$$

Logo, provamos (2.7). Assim, pela Observação 2.6, temos

$$[x_1^{(a_1)}, x_{\sigma(2)}^{(a)}, \ldots, x_{\sigma(n)}^{(a)}] \equiv [x_1^{(a_1)}, x_2^{(a)}, \ldots, x_n^{(a)}]$$

para cada permutação $\sigma$ de $\{2, 3, \ldots, n\}$, pois $\sigma$ pode ser escrito como um produto de transposições $((i-1)\ i)$, $3 \leq i \leq n$. Portanto, provamos o lema. $\square$

O lema seguinte mostra que podemos permutar (módulo $I$) primeira e última variável de mesmo $\mathbb{Z}$-grau de um comutador multilinear, em que as variáveis intermediárias possuem $\mathbb{Z}$-graus iguais. E ainda, podemos permutar (módulo $I$) essas variáveis intermediárias da forma que quisermos.

**Lema 2.9.** *Temos*

$$[x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(b)}, x_4^{(a)}] \equiv [x_4^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(b)}, x_1^{(a)}]. \tag{2.8}$$

*Em geral, para cada* $n \geq 4$

$$[x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, \ldots, x_{n-1}^{(b)}, x_n^{(a)}] \equiv [x_n^{(a)}, x_{\sigma(2)}^{(b)}, \ldots, x_{\sigma(n-1)}^{(b)}, x_1^{(a)}] \tag{2.9}$$

*para toda permutação* $\sigma$ *de* $\{2, 3, \ldots, n\}$.

*Demonstração.* Por (2.1) temos que

$$[x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, [x_3^{(b)}, x_4^{(a)}]] \equiv 0 \text{ e } [x_4^{(a)}, x_2^{(b)}, [x_1^{(a)}, x_3{}^{(b)}]] \equiv 0.$$

Pela Observação 1.53,

$$[x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(b)}, x_4^{(a)}] - [x_1^{(a)}, x_2{}^{(b)}, x_4^{(a)}, x_3^{(b)}] = [x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, [x_3^{(b)}, x_4^{(a)}]] \in I$$

e

$$[x_4^{(a)}, x_2^{(b)}, x_1^{(a)}, x_3^{(b)}] - [x_4^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(b)}, x_1^{(a)}] = [x_4^{(a)}, x_2^{(b)}, [x_1^{(a)}, x_3^{(b)}]] \in I.$$

Isso implica que

$$[x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(b)}, x_4^{(a)}] \equiv [x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, x_4^{(a)}, x_3^{(b)}] \text{ e } [x_4^{(a)}, x_2^{(b)}, x_1^{(a)}, x_3^{(b)}] \equiv [x_4^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(b)}, x_1^{(a)}].$$

Por outro lado, usando (2.5) temos que $[x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, x_4^{(a)}] \equiv [x_4^{(a)}, x_2^{(b)}, x_1^{(a)}]$. Assim,

$$[x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, x_4^{(a)}, x_3^{(b)}] \equiv [x_4^{(a)}, x_2^{(b)}, x_1^{(a)}, x_3^{(b)}].$$

Logo,

$$\begin{aligned} [x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(b)}, x_4^{(a)}] &\equiv [x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, x_4^{(a)}, x_3^{(b)}] \\ &\equiv [x_4^{(a)}, x_2^{(b)}, x_1^{(a)}, x_3^{(b)}] \\ &\equiv [x_4^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(b)}, x_1^{(a)}]. \end{aligned}$$

Agora, para $n \geq 4$, temos por (2.6), que

$$[x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, \ldots, x_{n-1}^{(b)}] \equiv [x_1^{(a)}, x_{\sigma(2)}^{(b)}, \ldots, x_{\sigma(n-1)}^{(b)}]$$

para toda permutação $\sigma$ de $\{2,3,\ldots,n-1\}$. Isso implica que

$$[x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, \ldots, x_{n-1}^{(b)}, x_n^{(a)}] \equiv [x_1^{(a)}, x_{\sigma(2)}^{(b)}, \ldots, x_{\sigma(n-1)}^{(b)}, x_n^{(a)}]$$

para toda permutação $\sigma$ de $\{2,\ldots,n-1\}$, em particular para $\sigma$ igual a identidade. Assim, para provarmos (2.9), basta mostrar que:

$$[x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, \ldots, x_{n-1}^{(b)}, x_n^{(a)}] \equiv [x_n^{(a)}, x_2^{(b)}, \ldots, x_{n-1}^{(b)}, x_1^{(a)}].$$

Vamos mostrar isso por indução em $n$. Por (2.8) temos que o resultado é válido para $n=4$. Se $n>4$, então, por hipótese de indução,

$$[x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, \ldots, x_{n-2}^{(b)}, x_n^{(a)}] \equiv [x_n^{(a)}, x_2^{(b)}, \ldots, x_{n-2}^{(b)}, x_1^{(a)}],$$

$$[x_1^{(a)}, x_{n-1}^{(b)}, x_3^{(b)}, \ldots, x_{n-2}^{(b)}, x_n^{(a)}] \equiv [x_n^{(a)}, x_{n-1}^{(b)}, x_3^{(b)}, \ldots, x_{n-2}^{(b)}, x_1^{(a)}],$$

já que $[x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, \ldots, x_{n-2}^{(b)}, x_n^{(a)}]$ e $[x_1^{(a)}, x_{n-1}^{(b)}, x_3^{(b)}, \ldots, x_{n-2}^{(b)}, x_n^{(a)}]$ são comutadores de tamanho $n-1$. Assim,

$$[x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, \ldots, x_{n-2}^{(b)}, x_n^{(a)}, x_{n-1}^{(b)}] \equiv [x_n^{(a)}, x_2^{(b)}, \ldots, x_{n-2}^{(b)}, x_1^{(a)}, x_{n-1}^{(b)}], \tag{2.10}$$

$$[x_1^{(a)}, x_{n-1}^{(b)}, x_3^{(b)}, \ldots, x_{n-2}^{(b)}, x_n^{(a)}, x_2^{(b)}] \equiv [x_n^{(a)}, x_{n-1}^{(b)}, x_3^{(b)}, \ldots, x_{n-2}^{(b)}, x_1^{(a)}, x_2^{(b)}] \tag{2.11}$$

Além disso, pela Observação 1.53, temos:

$$\begin{aligned}
[x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(b)}, \ldots, x_{n-2}^{(b)}, x_n^{(a)}, x_{n-1}^{(b)}] &= [x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(b)}, \ldots, x_{n-2}^{(b)}, x_{n-1}^{(b)}, x_n^{(a)}] \\
&+ [x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(b)}, \ldots, x_{n-2}^{(b)}, [x_n^{(a)}, x_{n-1}^{(b)}]],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[x_n^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(b)}, \ldots, x_{n-2}^{(b)}, x_1^{(a)}, x_{n-1}^{(b)}] &= [x_n^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(b)}, \ldots, x_{n-2}^{(b)}, x_{n-1}^{(b)}, x_1^{(a)}] \\
&+ [x_n^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(b)}, \ldots, x_{n-2}^{(b)}, [x_1^{(a)}, x_{n-1}^{(b)}]].
\end{aligned}$$

E por hipótese de indução,

$$[x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(b)}, \ldots, x_{n-2}^{(b)}, [x_n^{(a)}, x_{n-1}^{(b)}]] \equiv [x_n^{(a)}, x_{n-1}^{(b)}, x_3^{(b)}, \ldots, x_{n-2}^{(b)}, [x_1^{(a)}, x_2^{(b)}]].$$

Assim, podemos reescrever (2.10) da seguinte forma:

$$\begin{gathered}
[x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(b)}, \ldots, x_{n-2}^{(b)}, x_{n-1}^{(b)}, x_n^{(a)}] + [x_n^{(a)}, x_{n-1}^{(b)}, x_3^{(b)}, \ldots, x_{n-2}^{(b)}, [x_1^{(a)}, x_2^{(b)}]] \\
\equiv [x_n^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(b)}, \ldots, x_{n-2}^{(b)}, x_{n-1}^{(b)}, x_1^{(a)}] + [x_n^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(b)}, \ldots, x_{n-2}^{(b)}, [x_1^{(a)}, x_{n-1}^{(b)}]].
\end{gathered} \tag{2.12}$$

Similarmente, temos pela Observação 1.53 que:

$$\begin{aligned}[x_1^{(a)}, x_{n-1}^{(b)}, x_3^{(b)}, \ldots, x_{n-2}^{(b)}, x_n^{(a)}, x_2^{(b)}] &= [x_1^{(a)}, x_{n-1}^{(b)}, x_3^{(b)}, \ldots, x_{n-2}^{(b)}, x_2^{(b)}, x_n^{(a)}] \\ &+ [x_1^{(a)}, x_{n-1}^{(b)}, x_3^{(b)}, \ldots, x_{n-2}^{(b)}, [x_n^{(a)}, x_2^{(b)}]],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[x_n^{(a)}, x_{n-1}^{(b)}, x_3^{(b)}, \ldots, x_{n-2}^{(b)}, x_1^{(a)}, x_2^{(b)}] &= [x_n^{(a)}, x_{n-1}^{(b)}, x_3^{(b)}, \ldots, x_{n-2}^{(b)}, x_2^{(b)}, x_1^{(a)}] \\ &+ [x_n^{(a)}, x_{n-1}^{(b)}, x_3^{(b)}, \ldots, x_{n-2}^{(b)}, [x_1^{(a)}, x_2^{(b)}]].\end{aligned}$$

Usando (2.6) temos

$$[x_1^{(a)}, x_{n-1}^{(b)}, x_3^{(b)}, \ldots, x_{n-2}^{(b)}, x_2^{(b)}, x_n^{(a)}] \equiv [x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(b)}, \ldots, x_{n-2}^{(b)}, x_{n-1}^{(b)}, x_n^{(a)}],$$

$$[x_n^{(a)}, x_{n-1}^{(b)}, x_3^{(b)}, \ldots, x_{n-2}^{(b)}, x_2^{(b)}, x_1^{(a)}] \equiv [x_n^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(b)}, \ldots, x_{n-2}^{(b)}, x_{n-1}^{(b)}, x_1^{(a)}].$$

Novamente, por hipótese de indução,

$$[x_1^{(a)}, x_{n-1}^{(b)}, x_3^{(b)}, \ldots, x_{n-2}^{(b)}, [x_n^{(a)}, x_2^{(b)}]] \equiv [x_n^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(b)}, \ldots, x_{n-2}^{(b)}, [x_1^{(a)}, x_{n-1}^{(b)}]].$$

Assim, podemos reescrever (2.11), como

$$\begin{aligned}&[x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(b)}, \ldots, x_{n-2}^{(b)}, x_{n-1}^{(b)}, x_n^{(a)}] + [x_n^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(b)}, \ldots, x_{n-2}^{(b)}, [x_1^{(a)}, x_{n-1}^{(b)}]] \\ \equiv\ &[x_n^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(b)}, \ldots, x_{n-2}^{(b)}, x_{n-1}^{(b)}, x_1^{(a)}] + [x_n^{(a)}, x_{n-1}^{(b)}, x_3^{(b)}, \ldots, x_{n-2}^{(b)}, [x_1^{(a)}, x_2^{(b)}]]. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Como estamos trabalhando sobre um corpo de característica zero temos que as congruências $A + C \equiv B + D$ e $A + D \equiv B + C$ implicam em $A \equiv B$. Assim, por (2.12) e (2.13) concluímos que

$$[x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(b)}, \ldots, x_{n-2}^{(b)}, x_{n-1}^{(b)}, x_n^{(a)}] \equiv [x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(b)}, \cdots, x_{n-2}^{(b)}, x_{n-1}^{(b)}, x_n^{(a)}],$$

como requerido. □

O próximo lema, permite permutarmos (módulo $I$) a primeira variável e a última variável de um comutador multilinear, desde que as duas variáveis tenham $\mathbb{Z}$-grau $-1$ e as variáveis intermediárias tenham $\mathbb{Z}$-grau maiores ou iguais a 0.

**Lema 2.10.** *Sejam $n \geq 0$ e $a_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Então,*

$$[x^{(-1)}, z_1^{(a_1)}, \ldots, z_n^{(a_n)}, y^{(-1)}] \equiv [y^{(-1)}, z_1^{(a_1)}, \ldots, z_n^{(a_n)}, x^{(-1)}].$$

*Demonstração.* Para $n = 0$, por (2.1), temos

$$[x^{(-1)}, y^{(-1)}] \equiv 0 \equiv [y^{(-1)}, x^{(-1)}].$$

Assim, é suficiente provar o lema para $n \geq 1$. Primeiro, vamos assumir que

$$[x^{(-1)}, z_1^{(a_1)}, \ldots, z_n^{(a_n)}, y^{(-1)}] \in I.$$

Neste caso,

$$[e_{-1}, e_{a_1}, \ldots, e_{a_n}, e_{-1}] = 0.$$

Isso implica que $[y^{(-1)}, z_1^{(a_2)}, \ldots, z_n^{(a_n)}, x^{(-1)}] \in I$. Assim,

$$[x^{(-1)}, z_1^{(a_1)}, \ldots, z_n^{(a_n)}, y^{(-1)}] \equiv 0 \equiv [y^{(-1)}, z_1^{(a_2)}, \ldots, z_n^{(a_n)}, x^{(-1)}].$$

Vamos supor que $m = [x^{(-1)}, z_1^{(a_1)}, \ldots, z_n^{(a_n)}, y^{(-1)}] \notin I$. Provaremos isto por indução em $n$.

Para $n = 1$, por (2.5), obtemos que $[x^{(-1)}, z_1^{(a_1)}, y^{(-1)}] \equiv [y^{(-1)}, z_1^{(a_1)}, x^{(-1)}]$, como desejado.

Para $n = 2$, temos dois casos a analisar. Se $a_1 = a_2$, então, por (2.8) temos:

$$[x^{(-1)}, z_1^{(a_1)}, z_2^{(a_2)}, y^{(-1)}] \equiv [y^{(-1)}, z_1^{(a_1)}, z_2^{(a_2)}, x^{(-1)}].$$

Agora, para $a_1 \neq a_2$ note que $a_2 \neq a_1 - 1$, pois caso contrário, $[x^{(-1)}, z_1^{(a_1)}, z_2^{(a_2)}] \in I$, implicando em $[x^{(-1)}, z_1^{(a_1)}, z_2^{(a_2)}, y^{(-1)}] \in I$, o que é uma contradição já que supomos $m \notin I$. Por (2.2), temos

$$\alpha[z_1^{(a_1)}, x^{(-1)}, z_2^{(a_2)}] \equiv \beta[z_1^{(a_1)}, z_2^{(a_2)}, x^{(-1)}] \text{ e } \alpha[z_1^{(a_1)}, y^{(-1)}, z_2^{(a_2)}] \equiv \beta[z_1^{(a_1)}, z_2^{(a_2)}, y^{(-1)}]$$

onde $\alpha = -(a_2 - a_1)(1 + a_2 + a_1) = -(a_2 - a_1)(a_1 + a_2 + 1)$ e $\beta = -(1 + a_1)(a_2 + 1 - a_1) = -(a_1 + 1)(a_2 - a_1 + 1)$.

Note que se $\alpha = 0$ então $a_2 - a_1 = 0$ ou $a_1 + a_2 + 1 = 0$. No primeiro caso teríamos $a_2 = a_1$ , uma contradição, pois supomos $a_1 \neq a_2$. O outro caso é impossível já que $a_1, a_2 \geq 0$. Logo, $\alpha \neq 0$. Agora, se $\beta = 0$ então $a_1 + 1 = 0$ ou $a_2 - a_1 + 1 = 0$. Não pode ocorrer $a_1 + 1 = 0$ pois, por hipótese, $a_i \geq 0$ para todo $i$. Também não pode ocorrer $a_2 - a_1 + 1 = 0$, pois isso implicaria em $a_1 = 0$ e $a_2 = -1$ ou $a_1 = 1$ e $a_2 = 0$. E assim teríamos $a_2 = a_1 - 1$, uma contradição. Logo, $\beta \neq 0$.

Observe que, pelo provado para $n = 1$,

$$\begin{aligned} [z_1^{(a_1)}, z_2^{(a_2)}, x^{(-1)}, y^{(-1)}] &= -[x^{(-1)}, [z_1^{(a_1)}, z_2^{(a_2)}], y^{(-1)}] \\ \equiv -[y^{(-1)}, [z_1^{(a_1)}, z_2^{(a_2)}], x^{(-1)}] &= [z_1^{(a_1)}, z_2^{(a_2)}, y^{(-1)}, x^{(-1)}]. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
[x^{(-1)}, z_1^{(a_1)}, z_2^{(a_2)}, y^{(-1)}] &= -[z_1^{(a_1)}, x^{(-1)}, z_2^{(a_2)}, y^{(-1)}] \\
&\equiv -\beta\alpha^{-1}[z_1^{(a_1)}, z_2^{(a_2)}, x^{(-1)}, y^{(-1)}] \\
&\equiv -\beta\alpha^{-1}[z_1^{(a_1)}, z_2^{(a_2)}, y^{(-1)}, x^{(-1)}] \\
&\equiv -\beta\alpha^{-1}(\alpha\beta^{-1}[z_1^{(a_1)}, y^{(-1)}, z_2^{(a_2)}, x^{(-1)}]) \\
&= -[z_1^{(a_1)}, y^{(-1)}, z_2^{(a_2)}, x^{(-1)}] \\
&= [y^{(-1)}, z_1^{(a_1)}, z_2^{(a_2)}, x^{(-1)}].
\end{aligned}$$

Logo, temos o resultado para $n = 2$.

Agora, vejamos o caso geral. Suponha, o lema válido para comutadores de comprimento menor que $n + 2$. Considere,

$$m = [x^{(-1)}, z_1^{(a_1)}, \ldots, z_n^{(a_n)}, y^{(-1)}].$$

Seja

$$\begin{aligned}
M &= m - [y^{(-1)}, z_1^{(a_1)}, \ldots, z_n^{(a_n)}, x^{(-1)}] \\
&= [x^{(-1)}, z_1^{(a_1)}, \ldots, z_n^{(a_n)}, y^{(-1)}] - [y^{(-1)}, z_1^{(a_1)}, \ldots, z_n^{(a_n)}, x^{(-1)}].
\end{aligned}$$

Para mostrar o lema é suficiente provar que $M \equiv 0$. Note que, pela Observação 1.53 temos

$$\begin{aligned}
m &= [x^{(-1)}, z_1^{(a_1)}, \ldots, z_{i-1}^{(a_{i-1})}, [z_i^{(a_i)}, z_{i+1}^{(a_{i+1})}], z_{i+2}^{(a_{i+2})}, \ldots, z_n^{(a_n)}, y^{(-1)}] \\
&+ [x^{(-1)}, z_1^{(a_1)}, \ldots, z_{i-1}^{(a_{i-1})}, z_{i+1}^{(a_{i+1})}, z_i^{(a_i)}, z_{i+2}^{(a_{i+2})}, \ldots, z_n^{(a_n)}, y^{(-1)}].
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Também, pela Observação 1.53, podemos escrever:

$$\begin{gathered}
[[y^{(-1)}, z_1^{(a_1)}, \ldots, z_{i-1}^{(a_{i-1})}, z_i^{(a_i)}, z_{i+1}^{(a_{i+1})}], z_{i+2}^{(a_{i+2})}, \ldots, z_n^{(a_n)}, x^{(-1)}] = \\
[[y^{(-1)}, z_1^{(a_1)}, \ldots, z_{i-1}^{(a_{i-1})}, [z_i^{(a_i)}, z_{i+1}^{(a_{i+1})}]], z_{i+2}^{(a_{i+2})}, \ldots, z_n^{(a_n)}, x^{(-1)}] \\
+[[y^{(-1)}, z_1^{(a_1)}, \ldots, z_{i-1}^{(a_{i-1})}, z_{i+1}^{(a_{i+1})}, z_i^{(a_i)}], z_{i+2}^{(a_{i+2})}, \ldots, z_n^{(a_n)}, x^{(-1)}].
\end{gathered} \tag{2.15}$$

Assim, substituindo (2.14) e (2.15) em $M$, temos

$$\begin{aligned}
M &= [x^{(-1)}, z_1^{(a_1)}, \ldots, z_{i-1}^{(a_{i-1})}, [z_i^{(a_i)}, z_{i+1}^{(a_{i+1})}], z_{i+2}^{(a_{i+2})}, \ldots, z_n^{(a_n)}, y^{(-1)}] \\
&+ [x^{(-1)}, z_1^{(a_1)}, \ldots, z_{i-1}^{(a_{i-1})}, z_{i+1}^{(a_{i+1})}, z_i^{(a_i)}, z_{i+2}^{(a_{i+2})}, \ldots, z_n^{(a_n)}, y^{(-1)}] \\
&- [y^{(-1)}, z_1^{(a_1)}, \ldots, z_{i-1}^{(a_{i-1})}, [z_i^{(a_i)}, z_{i+1}^{(a_{i+1})}], z_{i+2}^{(a_{i+2})}, \ldots, z_n^{(a_n)}, x^{(-1)}] \\
&- [y^{(-1)}, z_1^{(a_1)}, \ldots, z_{i-1}^{(a_{i-1})}, z_{i+1}^{(a_{i+1})}, z_i^{(a_i)}, z_{i+2}^{(a_{i+2})}, \ldots, z_n^{(a_n)}, x^{(-1)}].
\end{aligned}$$

Por hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned}&[x^{(-1)}, z_1^{(a_1)}, \ldots, z_{i-1}^{(a_{i-1})}, [z_i^{(a_i)}, z_{i+1}^{(a_{i+1})}], z_{i+2}^{(a_{i+2})}, \ldots, z_n^{(a_n)}, y^{(-1)}]\\ -&[y^{(-1)}, z_1^{(a_1)}, \ldots, z_{i-1}^{(a_{i-1})}, [z_i^{(a_i)}, z_{i+1}^{(a_{i+1})}], z_{i+2}^{(a_{i+2})}, \ldots, z_n^{(a_n)}, x^{(-1)}] \equiv 0.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}M \equiv\ &[x^{(-1)}, z_1^{(a_1)}, \ldots, z_{i-1}^{(a_{i-1})}, z_{i+1}^{(a_{i+1})}, z_i^{(a_i)}, z_{i+2}^{(a_{i+2})}, \ldots, z_n^{(a_n)}, y^{(-1)}]\\ -&[y^{(-1)}, z_1^{(a_1)}, \ldots, z_{i-1}^{(a_{i-1})}, z_{i+1}^{(a_{i+1})}, z_i^{(a_i)}, z_{i+2}^{(a_{i+2})}, \ldots, z_n^{(a_n)}, x^{(-1)}].\end{aligned}$$

Assim, conseguimos permutar em $M$ duas variáveis sucessivas. Assim, pela Observação 2.6, para cada $\sigma \in S_n$ temos $M \equiv M_\sigma$, onde

$$M_\sigma = [x^{(-1)}, z_{\sigma(1)}^{(a_{\sigma(1)})}, \ldots, z_{\sigma(n)}^{(a_{\sigma(n)})}, y^{(-1)}] - [y^{(-1)}, z_{\sigma(1)}^{(a_{\sigma(1)})}, \ldots, z_{\sigma(n)}^{(a_{\sigma(n)})}, x^{(-1)}].$$

Assim, se $M_\sigma \equiv 0$ para alguma permutação $\sigma \in S_n$ então $M \equiv 0$.

Agora estamos em posição de completar a prova do lema. Se $a_1 = \cdots = a_n$ então, por (2.9) temos:

$$[x^{(-1)}, z_1^{(a_1)}, \ldots, z_n^{(a_n)}, y^{(-1)}] \equiv [y^{(-1)}, z_1^{(a_1)}, \ldots, z_n^{(a_n)}, x^{(-1)}],$$

como requerido.

Suponha, agora, que pelo menos dois dos $\mathbb{Z}$-graus $a_i$ são distintos, podemos assumir sem perda de generalidade que $a_1$ é o maior entre os $a_1, a_2, \ldots, a_n$ , em particular $a_1 > a_2$. Temos por (2.2) que:

$$\alpha[x^{(-1)}, z_1^{(a_1)}, z_2^{(a_2)}] \equiv \beta[x^{(-1)}, z_2^{(a_2)}, z_1^{(a_1)}],$$

onde, $\alpha = (a_2 + 1)(a_1 - a_2 + 1)$ e $\beta = (a_1 + 1)(a_2 - a_1 + 1)$.

Se $\beta = 0$ então $a_2 - a_1 + 1 = 0$, pois $a_1 + 1 \neq 0$, já que $a_1 \geq 0$. Assim, $a_2 = a_1 - 1$ e por (2.1),

$$[x^{(-1)}, z_1^{(a_1)}, z_2^{(a_2)}] \equiv 0 \text{ e } [y^{(-1)}, z_1^{(a_1)}, z_2^{(a_2)}] \equiv 0.$$

Logo, $M \equiv 0$ como requerido.

Suponhamos que $\beta \neq 0$ então

$$[x^{(-1)}, z_2^{(a_2)}, z_1^{(a_1)}] \equiv \rho[x^{(-1)}, z_1^{(a_1)}, z_2^{(a_2)}] \text{ e } [y^{(-1)}, z_2^{(a_2)}, z_1^{(a_1)}] \equiv \rho[y^{(-1)}, z_1^{(a_1)}, z_2^{(a_2)}], \quad (2.16)$$

onde $\rho = \alpha\beta^{-1}$.

Se $\rho = 1$ então $\alpha = \beta$. Assim,

$$(a_2+1)(a_1-a_2+1) = (a_1+1)(a_2-a_1+1),$$

ou seja,

$$\begin{aligned}(a_2+1)(a_1-a_2+1)-(a_1+1)(a_2-a_1+1) &= a_1^2-a_2^2+a_1-a_2\\ &= (a_1-a_2)(a_1+a_2+1)=0.\end{aligned}$$

Porém, se $a_1 - a_2 = 0$ então $a_1 = a_2$, um contradição, pois $a_1 > a_2$. E como $a_1, a_2 \geq 0$, não pode ocorrer $a_1 + a_2 + 1 = 0$. Logo, $\rho \neq 1$. Temos que

$$M_{(12)} = [x^{(-1)}, z_2^{(a_2)}, z_1^{(a_1)}, z_3^{(a_3)}, \ldots, z_n^{(a_n)}, y^{(-1)}] - [y^{(-1)}, z_2^{(a_2)}, z_1^{(a_1)}, z_3^{(a_3)}, \ldots, z_n^{(a_n)}, x^{(-1)}].$$

Escreva

$$M' = [x^{(-1)}, [z_1^{(a_1)}, z_2^{(a_2)}], z_3^{(a_3)}, \ldots, z_n^{(a_n)}, y^{(-1)}] - [y^{(-1)}, [z_1^{(a_1)}, z_2^{(a_2)}], z_3^{(a_3)}, \ldots, z_n^{(a_n)}, x^{(-1)}].$$

Por (2.16) temos que

$$\begin{aligned}M_{(12)} &= [x^{(-1)}, z_2^{(a_2)}, z_1^{(a_1)}, \ldots, z_n^{(a_n)}, y^{(-1)}] - [y^{(-1)}, z_2^{(a_2)}, z_1^{(a_1)}, \ldots, z_n^{(a_n)}, x^{(-1)}]\\ &\equiv \rho([x^{(-1)}, z_1^{(a_1)}, z_2^{(a_2)}, \ldots, z_n^{(a_n)}, y^{(-1)}] - [y^{(-1)}, z_1^{(a_1)}, z_2^{(a_2)}, \ldots, z_n^{(a_n)}, x^{(-1)}]) = \rho M.\end{aligned}$$

Assim, $\rho M \equiv M_{(12)}$. Por outro lado, pela Observação 1.53, temos

$$\begin{aligned}[x^{(-1)}, z_1^{(a_1)}, z_2^{(a_2)}, \ldots, z_n^{(a_n)}, y^{(-1)}] &= [x^{(-1)}, [z_1^{(a_1)}, z_2^{(a_2)}], \ldots, z_n^{(a_n)}, y^{(-1)}]\\ &+ [x^{(-1)}, z_2^{(a_2)}, z_1^{(a_1)}, z_3^{(a_3)}, \ldots, z_n^{(a_n)}, y^{(-1)}]\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}[y^{(-1)}, z_1^{(a_1)}, z_2^{(a_2)}, \ldots, z_n^{(a_n)}, x^{(-1)}] &= [y^{(-1)}, [z_1^{(a_1)}, z_2^{(a_2)}], \ldots, z_n^{(a_n)}, x^{(-1)}]\\ &+ [y^{(-1)}, z_2^{(a_2)}, z_1^{(a_1)}, z_3^{(a_3)}, \ldots, z_n^{(a_n)}, x^{(-1)}].\end{aligned}$$

Isso implica que:

$$\begin{aligned}M &= [x^{(-1)}, [z_1^{(a_1)}, z_2^{(a_2)}], \ldots, z_n^{(a_n)}, y^{(-1)}] - [y^{(-1)}, [z_1^{(a_1)}, z_2^{(a_2)}], z_3^{(a_3)}, \ldots, z_n^{(a_n)}, x^{(-1)}]\\ &+ [x^{(-1)}, z_2^{(a_2)}, z_1^{(a_1)}, z_3^{(a_3)}, \ldots, z_n^{(a_n)}, y^{(-1)}] - [y^{(-1)}, z_2^{(a_2)}, z_1^{(a_1)}, z_3^{(a_3)}, \ldots, z_n^{(a_n)}, x^{(-1)}]\\ &= M' + M_{(12)}.\end{aligned}$$

Disso, segue que $M_{(12)} = M - M'$. Assim,

$$\rho M \equiv M_{(12)} = M - M'.$$

Isso implica que $M - \rho M = M'$. Logo,

$$(1-\rho)M \equiv M'.$$

Por hipótese de indução, $M' \equiv 0$. Como $\rho \neq 1$ temos $M \equiv 0$, como requerido. $\square$

Nos lemas anteriores estávamos trabalhando com comutadores multilineares quaisquer. Agora vamos tratar de resultados que fornecem relações específicas para comutadores multilineares que não pertencem a $I$.

Observamos que se em um comutador multilinear conseguirmos permutar (módulo $I$) duas variáveis de $\mathbb{Z}$-grau $-1$ consecutivas, conseguimos permutar (módulo $I$) quaisquer variáveis de $\mathbb{Z}$-grau $-1$, pela mesma justificativa da Observação 2.6. Considere, por exemplo,

$$m' = [x_1^{(a_1)}, x_2^{(a_2)}, x_3^{(-1)}, x_4^{(a_4)}, x_5^{(-1)}, x_6^{(a_6)}, x_7^{(-1)}, x_8^{(a_8)}],$$

tal que $a_4, a_6 \geq 0$. Para permutarmos as variáveis $x_3^{(-1)}$ e $x_7^{(-1)}$, assumindo que é sempre possível a troca de duas variáveis de $\mathbb{Z}$-grau $-1$ consecutivas, fazemos

$$\begin{aligned}
&[x_1^{(a_1)}, x_2^{(a_2)}, x_3^{(-1)}, x_4^{(a_4)}, x_5^{(-1)}, x_6^{(a_6)}, x_7^{(-1)}, x_8^{(a_8)}] \\
\equiv\ &[x_1^{(a_1)}, x_2^{(a_2)}, x_5^{(-1)}, x_4^{(a_4)}, x_3^{(-1)}, x_6^{(a_6)}, x_7^{(-1)}, x_8^{(a_8)}] \\
\equiv\ &[x_1^{(a_1)}, x_2^{(a_2)}, x_5^{(-1)}, x_4^{(a_4)}, x_7^{(-1)}, x_6^{(a_6)}, x_3^{(-1)}, x_8^{(a_8)}] \\
\equiv\ &[x_1^{(a_1)}, x_2^{(a_2)}, x_7^{(-1)}, x_4^{(a_4)}, x_5^{(-1)}, x_6^{(a_6)}, x_3^{(-1)}, x_8^{(a_8)}],
\end{aligned}$$

e obtemos o desejado.

O corolário a seguir, afirma que isso é sempre possível em um comutador multilinear não pertencente a $I$.

**Corolário 2.11.** *Sejam $n \geq 3$ e $m = [x_1^{(a_1)}, \dots, x_n^{(a_n)}] \in \mathfrak{L}(X)$ um comutador multilinear tal que $m \notin I$ . Suponha $a_s = a_r = -1$ onde $1 \leq s < r \leq n$. Então,*

$$\begin{aligned}
m &= [x_1^{(a_1)}, \dots, x_{s-1}^{(a_{s-1})}, x_s^{(-1)}, x_{s+1}^{(a_{s+1})}, \dots, x_{r-1}^{(a_{r-1})}, x_r^{(-1)}, x_{r+1}^{(a_{r+1})}, \dots, x_n^{(a_n)}] \\
&\equiv [x_1^{(a_1)}, \dots, x_{s-1}^{(a_{s-1})}, x_r^{(-1)}, x_{s+1}^{(a_{s+1})}, \dots, x_{r-1}^{(a_{r-1})}, x_s^{(-1)}, x_{r+1}^{(a_{r+1})}, \dots, x_n^{(a_n)}].
\end{aligned}$$

*Demonstração.* Note que, pelo observado anteriormente, é suficiente provar o corolário assumindo que $a_i \geq 0$ para todo $i$ tal que $s < i < r$, isto é, provar que podemos permutar módulo $I$ quaisquer duas variáveis de $\mathbb{Z}$-grau $-1$ consecutivas. Seja

$$m' = [x_1^{(a_1)}, \dots, x_k^{(a_k)}, x^{(-1)}, y_1^{(b_1)}, \dots, y_t^{(b_t)}, y^{(-1)}],$$

onde $k = s-1 \geq 0$, $t = r-s-1 \geq 0$ para cada $i$, $1 \leq i \leq t$. Suponha $m' \notin I$. Se $k = 0$ então, pelo Lema 2.10 ( nesse caso $t > 0$, pois caso contrário $m' \in I$), temos

$$[x^{(-1)}, y_1^{(b_1)}, \ldots, y_t^{(b_t)}, y^{(-1)}] \equiv [y^{(-1)}, y_1^{(b_1)}, \ldots, y_t^{(b_t)}, x^{(-1)}].$$

Se $k \geq 1$ e $m' \notin I$ então $a_1 + \cdots + a_k \geq 0$. Denote por $d = [x_1^{(a_1)}, \ldots, x_k^{(a_k)}]$, assim,

$$[d, x^{(-1)}, y_1^{(b_1)}, \ldots, y_t^{(b_t)}, y^{(-1)}].$$

Pelo Lema 2.10,

$$\begin{aligned} m' = -[x^{(-1)}, d, y_1^{(b_1)}, \ldots, y_t^{(b_t)}, y^{(-1)}] &\equiv -[y^{(-1)}, d, y_1^{(b_1)}, \ldots, y_t^{b(t)}, x^{(-1)}] \\ &= [d, y^{(-1)}, y_1^{(b_1)}, \ldots, y_t^{(b_t)}, x^{(-1)}]. \end{aligned}$$

Assim, podemos permutar (módulo I) duas entradas de $\mathbb{Z}$-grau $-1$ consecutivas em $m'$ como requerido. $\square$

O lema seguinte, nos permite, sob algumas condições e a menos de uma constante, permutar as duas últimas variáveis de um comutador multilinear não pertencente a $I$, sendo a penúltima variável de $\mathbb{Z}$-grau $-1$ e a última de $\mathbb{Z}$-grau maior ou igual a 0.

**Lema 2.12.** *Sejam $n \geq 3$ e*

$$m = [x_{i_1}^{(a_1)}, \ldots, x_{i_{n-2}}^{(a_{n-2})}, x_{i_{n-1}}^{(-1)}, x_{i_n}^{(a_n)}],$$

*onde $m \notin I$ e $a_n \geq 0$. Suponha que $a_n \neq a_1 + \cdots + a_{n-2}$. Então*

$$m \equiv \mu[x_{i_1}^{(a_1)}, \ldots, x_{i_{n-2}}^{(a_{n-2})}, x_{i_n}^{(a_n)}, x_{i_{n-1}}^{(-1)}],$$

*onde $\mu \in K$.*

*Demonstração.* Temos, pela identidade (2.2), que

$$\alpha[[x_{i_1}^{(a_1)}, \ldots, x_{i_{n-2}}^{(a_{n-2})}], x_{i_{n-1}}^{(-1)}, x_{i_n}^{(a_n)}] \equiv \beta[[x_{i_1}^{(a_1)}, \ldots, x_{i_{n-2}}^{(a_{n-2})}], x_{i_n}^{(a_n)}, x_{i_{n-1}}^{(-1)}],$$

onde $\alpha = -(a_n - a_1 - \cdots - a_{n-2})(1 + a_n + a_1 + \cdots + a_{n-2})$ e $\beta = -(1 + a_1 + \cdots + a_{n-2})(a_n + 1 - a_1 - \cdots - a_{n-2})$.

Note que, como $m \notin I$ temos $[x_{i_1}^{(a_1)}, \ldots, x_{i_{n-2}}^{(a_{n-2})}, x_{n-1}^{(-1)}] \notin I$. Assim, $a_1 + \cdots + a_{n-2} - 1 \geq -1$, isto é, $a_1 + \cdots + a_{n-2} \geq 0$. Como $a_n \geq 0$, temos que $1 + (a_1 + \cdots + a_{n-2}) + a_n \geq 1$. Logo, $1 + a_1 + \cdots + a_{n-2} + a_n \neq 0$ e $\alpha \neq 0$, pois por hipótese $a_n \neq a_1 + \cdots + a_{n-2}$. Analogamente, temos $(1 + a_1 + \cdots + a_{n-2}) \neq 0$ e $(a_n + 1 - a_1 - \cdots - a_{n-2}) \neq 0$, já que

$-a_1 - \cdots - a_{n-2} + 1 \leq 1$, ou seja, $\beta \neq 0$. Portanto,

$$m \equiv \alpha^{-1}\beta[x_{i_1}^{(a_1)}, \ldots, x_{i_{n-2}}^{(a_{n-2})}, x_{i_n}^{(a_n)}, x_{i_{n-1}}^{(-1)}],$$

como queríamos. $\square$

O lema que segue, sob certas condições, afirma que podemos permutar (módulo $I$), a menos de uma constante, a antepenúltima variável e última variável, sendo a antepenúltima e a penúltima variável de $\mathbb{Z}$-graus $-1$ e a última de $\mathbb{Z}$-grau maior ou igual a 0. Neste caso, escrevemos (módulo $I$) um comutador multilinear com as duas últimas variáveis de $\mathbb{Z}$-graus $-1$.

**Lema 2.13.** *Sejam $n \geq 4$ e*

$$m = [x_{i_1}^{(a_1)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(a_{n-3})}, x_{i_{n-2}}^{(-1)}, x_{i_{n-1}}^{(-1)}, x_{i_n}^{(a_n)}],$$

*onde $m \notin I$ e $a_n \geq 0$. Suponha que $a_n = a_1 + \cdots + a_{n-3} - 1$. Então*

$$m \equiv \mu[x_{i_1}^{(a_1)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(a_{n-3})}, x_{i_n}^{(a_n)}, x_{i_{n-1}}^{(-1)}, x_{i_{n-2}}^{(-1)}],$$

*onde $\mu \in K$.*

*Demonstração.* Como $a_n = a_1 + \cdots + a_{n-3} - 1$, temos, por (2.1) que

$$[x_{i_1}^{(a_1)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(a_{n-3})}, x_{i_{n-2}}^{(-1)}, x_{i_n}^{(a_n)}, x_{i_{n-1}}^{(-1)}] \equiv 0.$$

Pela Observação 1.53 obtemos

$$\begin{aligned} [x_{i_1}^{(a_1)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(a_{n-3})}, x_{i_{n-1}}^{(-1)}, x_{i_{n-2}}^{(-1)}, x_{i_n}^{(a_n)}] &= [x_{i_1}^{(a_1)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(a_{n-3})}, x_{i_{n-1}}^{(-1)}, x_{i_n}^{(a_n)}, x_{i_{n-2}}^{(-1)}] \\ &+ [x_{i_1}^{(a_1)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(a_{n-3})}, x_{i_{n-1}}^{(-1)}, [x_{i_{n-2}}^{(-1)}, x_{i_n}^{(a_n)}]]. \end{aligned}$$

Isso implica que

$$[x_{i_1}^{(a_1)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(a_{n-3})}, x_{i_{n-2}}^{(-1)}, x_{i_{n-1}}^{(-1)}, x_{i_n}^{(a_n)}] \equiv [x_{i_1}^{(a_1)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(a_{n-3})}, x_{i_{n-2}}^{(-1)}, [x_{i_{n-1}}^{(-1)}, x_{i_n}^{(a_n)}]]. \tag{2.17}$$

Por (2.2), temos

$$\alpha[x_{i_1}^{(a_1)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(a_{n-3})}, x_{i_{n-2}}^{(-1)}, [x_{i_{n-1}}^{(-1)}, x_{i_n}^{(a_n)}]] \equiv \beta[x_{i_1}^{(a_1)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(a_{n-3})}, [x_{i_{n-1}}^{(-1)}, x_{i_n}^{(a_n)}], x_{i_{n-2}}^{(-1)}],$$

onde, $\alpha = -(a_n - 1 - a_1 - \cdots - a_{n-3})(a_n + a_1 + \cdots + a_{n-3})$ e $\beta = -(1 + a_1 + \cdots + a_{n-3})(a_n - a_1 - \cdots - a_{n-3})$. Note que

$$a_n - 1 - a_1 - \cdots - a_{n-3} = (a_n - a_1 - \cdots - a_{n-3} + 1) - 2 = a_n - a_n - 2 = -2$$

e

$$a_1+\cdots+a_{n-3}+a_n=(a_1+\cdots+a_{n-3}-1)+a_n+1=a_n+a_n+1=2a_n+1\geq 1.$$

Disso, segue que $\alpha\neq 0$ e que

$$\begin{aligned}&[x_{i_1}^{(a_1)},\ldots,x_{i_{n-3}}^{(a_{n-3})},x_{i_{n-2}}^{(-1)},[x_{i_{n-1}}^{(-1)},x_{i_n}^{(a_n)}]]\equiv\\ &\alpha^{-1}\beta[x_{i_1}^{(a_1)},\ldots,x_{i_{n-3}}^{(a_{n-3})},[x_{i_{n-1}}^{(-1)},x_{i_n}^{(a_n)}],x_{i_{n-2}}^{(-1)}].\end{aligned}\tag{2.18}$$

Como $a_n=a_1+\cdots+a_{n-3}-1$, temos

$$[x_{i_1}^{(a_1)},\ldots,x_{i_{n-3}}^{(a_{n-3})},x_{i_{n-1}}^{(-1)},x_{i_n}^{(a_n)},x_{i_{n-2}}^{(-1)}]\equiv 0.$$

Novamente, pela Observação 1.53, temos

$$\begin{aligned}[x_{i_1}^{(a_1)},\ldots,x_{i_{n-3}}^{(a_{n-3})},x_{i_n}^{(a_n)},x_{i_{n-1}}^{(-1)},x_{i_{n-2}}^{(-1)}] &= [x_{i_1}^{(a_1)},\ldots,x_{i_{n-3}}^{(a_{n-3})},[x_{i_n}^{(a_n)},x_{i_{n-1}}^{(-1)}],x_{i_{n-2}}^{(-1)}]\\ &+ [x_{i_1}^{(a_1)},\ldots,x_{i_{n-3}}^{(a_{n-3})},x_{i_{n-1}}^{(-1)},x_{i_n}^{(a_n)},x_{i_{n-2}}^{(-1)}]\\ &= -[x_{i_1}^{(a_1)},\ldots,x_{i_{n-3}}^{(a_{n-3})},[x_{i_{n-1}}^{(-1)},x_{i_n}^{(a_n)}],x_{i_{n-2}}^{(-1)}]\\ &+ [x_{i_1}^{(a_1)},\ldots,x_{i_{n-3}}^{(a_{n-3})},x_{i_{n-1}}^{(-1)},x_{i_n}^{(a_n)},x_{i_{n-2}}^{(-1)}].\end{aligned}$$

Isso implica que

$$[x_{i_1}^{(a_1)},\ldots,x_{i_{n-3}}^{(a_{n-3})},[x_{i_{n-1}}^{(-1)},x_{i_n}^{(a_n)}],x_{i_{n-2}}^{(-1)}]\equiv -[x_{i_1}^{(a_1)},\ldots,x_{i_{n-3}}^{(a_{n-3})},x_{i_n}^{(a_n)},x_{i_{n-1}}^{(-1)},x_{i_{n-2}}^{(-1)}].\tag{2.19}$$

Assim, usando (2.17), (2.18) e (2.19), obtemos

$$\begin{aligned}m &= [x_{i_1}^{(a_1)},\ldots,x_{i_{n-3}}^{(a_{n-3})},x_{n-2}^{(-1)},x_{n-1}^{(-1)},x_{i_n}^{(a_n)}]\\ &\equiv [x_{i_1}^{(a_1)},\ldots,x_{i_{n-3}}^{(a_{n-3})},x_{i_{n-2}}^{(-1)},[x_{i_{n-1}}^{(-1)},x_{i_n}^{(a_n)}]]\\ &\equiv \alpha^{-1}\beta[x_{i_1}^{(a_1)},\ldots,x_{i_{n-3}}^{(a_{n-3})},[x_{i_{n-1}}^{(-1)},x_{i_n}^{(a_n)}],x_{i_{n-2}}^{(-1)}]\\ &\equiv -\alpha^{-1}\beta[x_{i_1}^{(a_1)},\ldots,x_{i_{n-3}}^{(a_{n-3})},x_{i_n}^{(a_n)},x_{i_{n-1}}^{(-1)},x_{i_{n-2}}^{(-1)}].\end{aligned}$$

Portanto,

$$m\equiv[x_{i_1}^{(a_1)},\ldots,x_{i_{n-3}}^{(a_{n-3})},x_{i_n}^{(a_n)},x_{i_{n-1}}^{(-1)},x_{i_{n-2}}^{(-1)}],$$

onde $\mu=-\alpha^{-1}\beta\in K$, como requerido. □

Agora, vamos utilizar as técnicas descritas nos resultados anteriores para relacionar módulo $I$, os comutadores que não pertencem a $I$ e os comutadores multilineares da forma canônica . Mais especificamente, queremos mostrar que para cada comutador multilinear $m=[x_{i_1}^{(a_1)},\ldots,x_{i_n}^{(a_n)}]\notin I$ com $x_{i_2}^{(a_1)}>x_{i_l}^{(a_l)}$ para todo $l>1$, existem $\mu\in K$ e um comutador da forma canônica $m'$ tais que $m\equiv\mu m'$. Esse é o recurso essencial para a prova do resultado principal.

**Exemplo 2.14.** *Considere* $m = [x_1^{(2)}, x_2^{(-1)}, x_3^{(0)}]$ *um comutador multlilinear. Notemos que* $m$ *é um comutador do tipo 3. Assim, pelo Lema 2.3, existe um comutador da forma canônica nas mesmas variáveis de* $m$*. Neste caso,* $[x_1^{(2)}, x_3^{(0)}, x_2^{(-1)}]$ *é o comutador da forma canônica desejado. Por (2.2),*

$$6[x_1^{(2)}, x_2^{(-1)}, x_3^{(0)}] \equiv 3[x_1^{(2)}, x_3^{(0)}, x_2^{(-1)}].$$

*Assim,*

$$m = [x_1^{(2)}, x_2^{(-1)}, x_3^{(0)}] \equiv 2[x_1^{(2)}, x_3^{(0)}, x_2^{(-1)}].$$

Esse exemplo é generalizado para qualquer comutador de comprimento 3, como segue.

Considere $m = [x_{i_1}^{(a_1)}, x_{i_2}^{(a_2)}, x_{i_3}^{(a_3)}]$ tal que $x_{i_1}^{(a_1)} > x_{i_l}^{(a_l)}$ para todo $l > 1$ . Como $m \notin I$ implica que $a_2 < a_1$, pois se $a_2 = a_1$ então $m \in I$. Assim, $m$ ou $[x_{i_1}^{(a_1)}, x_{i_3}^{(a_3)}, x_{i_2}^{(a_2)}]$ é da forma canônica. De fato, se $[x_{j_1}^{(b_1)}, x_{j_2}^{(b_2)}, x_{j_3}^{(b_3)}]$ é o comutador da forma canônica tal que $\{x_{j_1}^{(b_1)}, x_{j_2}^{(b_2)}, x_{j_3}^{(b_3)}\} = \{x_{i_1}^{(a_1)}, x_{i_2}^{(a_2)}, x_{i_3}^{(a_3)}\}$ então $x_{j_1}^{(b_1)} > x_{j_l}^{(b_l)}$ $(l = 2, 3)$. Assim, $x_{j_1}^{(b_1)} = x_{i_1}^{(a_1)}$. Note também que, por (2.2):

$$(a_3 - a_1)(a_2 - a_1 - a_3)[x_{i_1}^{(a_1)}, x_{i_2}^{(a_2)}, x_{i_3}^{(a_3)}] \equiv (a_2 - a_1)(a_3 - a_1 - a_2)[x_{i_1}^{(a_1)}, x_{i_3}^{(a_3)}, x_{i_2}^{(a_2)}].$$

Suponha que $(a_3 - a_1)(a_2 - a_1 - a_3) \neq 0$ então $m$ é da forma canônica ou $m \equiv \mu m'$ onde $\mu = \dfrac{(a_2 - a_1)(a_3 - a_1 - a_2)}{(a_3 - a_1)(a_2 - a_1 - a_3)} \in K$ e o comutador $m' = [x_{i_1}^{(a_1)}, x_{i_3}^{(a_3)}, x_{i_2}^{(a_2)}]$ é da forma canônica, como ocorreu no Exemplo 2.14.

Agora suponha que $(a_3 - a_1)(a_2 - a_1 - a_3) = 0$. Se $a_3 - a_1 = 0$ então $a_3 = a_1$ isso implica que $m = [x_{i_1}^{(a_1)}, x_{i_2}^{(a_2)}, x_{i_1}^{(a_1)}]$ onde $a_2 < a_1$. Como $m \notin I$ temos $a_2 \neq 0$. Segue que $m$ é um comutador da forma canônica (do tipo 1, 2 ou 4). Por outro lado, se $a_2 - a_1 - a_3 = 0$ então $a_3 = a_2 - a_1 < 0$, pois $a_2 < a_1$. Isso implica que $a_3 = -1$ e $a_2 = a_1 + a_3 = a_1 - 1$. Consequentemente, $m = [x_{i_1}^{(a_1)}, x_{i_2}^{(a_1-1)}, x_{i_3}^{(-1)}]$ e como $m \notin I$, temos $a_1 + a_1 - 1 = 2a_1 - 1 \geq 0$. Disso, $a_1 \geq 1$ e $m$ é um comutador da forma canônica (do tipo 1 ou 4).

Veremos que isso pode ser generalizado para comutadores de tamanho qualquer, que é o que almejamos. Afim de obtermos tal generalização, vejamos os seguintes lemas, que nos dão resultados parciais dessa generalização.

**Lema 2.15.** *Seja* $m = [x_{i_1}^{(a_1)}, \ldots, x_{i_n}^{(a_n)}]$ $(n \geq 3)$ *um comutador multilinear do tipo 5. Então* $m \equiv m'$*, onde* $m'$ *é um comutador multilinear da forma canônica.*

*Demonstração.* Como $m$ é um comutador do tipo 5, recorrendo a Tabela 2.1 da página 40, temos que $m = [x_{i_1}^{(0)}, x_{i_2}^{(-1)}, x_{i_3}^{(0)}, \ldots, x_{i_n}^{(0)}]$ onde $i_1 > i_l$ para todo $l$, $3 \leq l \leq n$ . Seja $m'$ o comutador da forma canônica nas variáveis $x_{i_1}^{(0)}, x_{i_2}^{(-1)}, x_{i_3}^{(0)}, \ldots, x_{i_n}^{(0)}$ então $m' =$

$[x_{i_1}^{(0)}, x_{i_2}^{(-1)}, x_{j_3}^{(0)}, \ldots, x_{j_n}^{(0)}]$ onde $\{j_3, \ldots, j_n\} = \{i_3, \ldots, i_n\}$ e $j_3 < \cdots < j_n$. Por (2.6) temos para alguma permutação $\sigma$ de $\{i_3, \ldots, i_n\}$ que:

$$\begin{aligned} m = [x_{i_1}^{(0)}, x_{i_2}^{(-1)}, x_{i_3}^{(0)}, \ldots, x_{i_n}^{(0)}] &\equiv [[x_{i_1}^{(0)}, x_{i_2}^{(-1)}], x_{\sigma(i_3)}^{(0)}, \ldots, x_{\sigma(i_n)}^{(0)}] \\ &= [x_{i_1}^{(0)}, x_{i_2}^{(-1)}, x_{j_3}^{(0)}, \ldots, x_{j_n}^{(0)}] = m' \end{aligned}$$

escrevendo $\sigma(i_3) = j_3, \ldots, \sigma(i_n) = j_n$. Desta forma, $m \equiv m'$, onde $m'$ é da forma canônica, como queríamos. □

Com o lema anterior obtemos de forma rápida a relação (módulo I) de qualquer comutador do tipo 5 com os comutadores da forma canônica. Sendo assim, resta mostrar o mesmo para comutadores do tipo 1,2,3 e 4, os quais não são tão simples de provar. Os lemas que seguem provam exclusivamente afirmações sobre esses tipos.

**Lema 2.16.** *Seja* $m = [x_{i_1}^{(a_1)}, \ldots, x_{i_{n-1}}^{(a_{n-1})}, x_{i_n}^{(a_n)}]$ $(n \geq 3)$ *um comutador multilinear dos tipos 1,2,3 ou 4. Se* $m_1 = [x_{i_1}^{(a_1)}, x_{i_2}^{(a_2)}, \ldots, x_{i_{n-1}}^{(a_{n-1})}]$ *é um comutador da forma canônica e* $a_n = -1$ *então* $m \equiv m'$*, onde* $m'$ *é um comutador multilinear da forma canônica.*

*Demonstração.* Provaremos que $m$ é da forma canônica ou $m \equiv m'$ onde $m'$ é o comutador da forma canônica obtido de $m$ por uma permutação de variáveis de $\mathbb{Z}$-grau $-1$. Para isso consideraremos cada tipo de comutador descrito no lema, separadamente. Temos que $m = [m_1, x_{i_n}^{(-1)}]$.

Seja $m$ comutador do tipo 1, então

$$m = [[x_{i_1}^{(a_1)}, x_{i_2}^{(a_2)}, \ldots, x_{i_r}^{(a_r)}, x_{i_{r+1}}^{(-1)}, \ldots, x_{i_{n-1}}^{(-1)}], x_{i_n}^{(-1)}]$$

onde $2 \leq r \leq n-1$, $a_2 \geq 0$, $x_{i_2}^{(a_2)} < x_{i_3}^{(a_3)} < \cdots < x_{i_r}^{(a_r)} < x_{i_1}^{(a_1)}$, $i_{r+1} < \cdots < i_{n-1}$. Se $r = n-1$ ou $r < n-1$ e $i_{n-1} < i_n$ então $m$ é da forma canônica. Por outro lado, se $r < n-1$ e $i_{n-1} > i_n$ então, por (2.6), temos $m \equiv m'$ onde

$$m' = [x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(a_2)}, \ldots, x_{i_r}^{(a_r)}, x_{j_{r+1}}^{(-1)}, \ldots, x_{j_n}^{(-1)}],$$

$\{j_{r+1}, \ldots, j_n\} = \{i_{r+1}, \ldots, i_n\}$ e $j_{r+1} < \cdots < j_n$. Logo, $m'$ é da forma canônica e $m \equiv m'$, como requerido.

Agora, suponha $m$ comutador do tipo 2, então

$$m = [[x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_r}^{(0)}, x_{i_{r+1}}^{(-1)}, x_{i_{r+2}}^{(a)}, \ldots, x_{i_s}^{(a)}, x_{i_{s+1}}^{(-1)}, \ldots, x_{i_{n-1}}^{(-1)}], x_{i_n}^{(-1)}],$$

onde $a = a_1 > 1$, $i_2 < \cdots < i_r$, $1 \geq r \geq n-3$, $i_{r+1} < \cdots < i_s < i_1$, $r+2 \geq s \geq n-1$, $i_{r+1} < i_{s+1} < i_{s+2} < \cdots < i_{n-1}$. Se $s = n-1$ e $i_{r+1} < i_n$ ou $s < n-1$ e $i_{n-1} > i_n$ então $m$ é da forma canônica. Por outro lado, se $s = n-1$ e $i_{r+1} > i_n$ ou $s < n-1$ e $i_{n-1} > i_n$

então, pelo Corolário 2.11, $m \equiv m'$ onde

$$m' = [x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_r}^{(0)}, x_{j_{r+1}}^{(-1)}, x_{i_{r+2}}^{(a)}, \ldots, x_{i_s}^{(a)}, x_{j_{s+1}}^{(-1)}, \ldots, x_{j_n}^{(-1)}],$$

$\{j_{r+1}, j_{s+1}, j_{s+2}, \ldots, j_n\} = \{i_{r+1}, i_{s+1}, i_{s+2}, \ldots, i_{n-1}, i_n\}$ e $j_{r+1} < j_{s+1} < j_{s+2} < \cdots < j_n$. Logo, $m'$ é da forma canônica e $m \equiv m'$, como requerido.

Se $m$ é do tipo 3 então

$$m = [[x_{i_1}^{(a_1)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_r}^{(0)}, x_{i_{r+1}}^{(-1)}, \ldots, x_{i_{n-1}}^{(-1)}], x_{i_n}^{(-1)}],$$

onde $1 \leq r \leq n-1$, $i_2 < \cdots < i_r$, $i_{r+1} < \cdots < i_{n-1}$. Se $r = n-1$ ou $r < n-1$ e $i_{n-1} < i_n$ então $m$ é da forma canônica. Por outro lado, se $r < n-1$ e $i_{n-1} > i_n$ então, por (2.6), $m \equiv m'$ onde

$$m' = [x_{i_1}^{(a_1)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_r}^{(0)}, x_{j_{r+1}}^{(-1)}, x_{j_{n-1}}^{(-1)}, x_{j_n}^{(-1)}],$$

$j_{r+1} < \cdots < j_n$. Logo, $m'$ é forma canônica e $m \equiv m'$, como requerido.

Finalmente, se $m$ é um comutador do tipo 4 então $m = [m_1, x_{i_n}^{(-1)}]$, onde $m_1$ é da forma canônica do tipo 4, ou seja,

$$m_1 = [x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_r}^{(0)}, x_{i_{r+1}}^{(-1)}, x_{i_{r+2}}^{(1)}, x_{i_{r+3}}^{(-1)}, x_{i_{r+4}}^{(1)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(a_{n-3})}, x_{i_{n-2}}^{(a_{n-2})}, x_{i_{n-1}}^{(a_{n-1})}].$$

Temos, pela definição de comutador da forma canônica do tipo 4 que $(a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1})$ é igual a: $(1,-1,-1)$, $(-1,1,-1)$,$(1,-1,1)$, $(0,-1,-1)$, $(0,-1,1)$, $(0,0,-1)$ ou $(0,0,0)$. Se $(a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}) = (1,-1,-1)$ então $m_1$ tem $\mathbb{Z}$-grau $-1$ isso implica que $m = [m_1, x_{i_n}^{(-1)}] \in I$. Assim, $(a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}) \neq (1,-1,-1)$. Similarmente, se $(a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}) = (0,-1,-1)$ então $r = n-3$ e $m_1$ tem $\mathbb{Z}$-grau $-1$ isso implica que $m \in I$. Logo, $(a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}) \neq (0,-1,-1)$.

Agora, se $(a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}) = (0,0,0)$ então $r = n-1$, ou seja, $a_l = 0$ para todo $2 \leq l \leq n-1$. Como $a_n = -1$, temos que $m$ é um comutador da forma canônica. Se $(a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}) = (-1,1,-1)$ e $i_{n-1} < i_n$ então

$$m = [x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_r}^{(0)}, x_{i_{r+1}}^{(-1)}, x_{i_{r+2}}^{(1)}, x_{i_{r+3}}^{(-1)}, x_{i_{r+4}}^{(1)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(-1)}, x_{i_{n-2}}^{(1)}, x_{i_{n-1}}^{(-1)}, x_{i_n}^{(-1)}],$$

onde $i_{r+1} < i_{r+3} < \cdots < i_{n-3} < i_{n-1}$, $i_{r+2} < \cdots < i_{r+4} < \cdots < i_{n-2} < i_1$. Assim, $m$ é um comutador da forma canônica. Similarmente se $(a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}) = (0,0,-1)$ e $i_{n-1} < i_n$ então

$$m = [x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(0)}, x_{i_{n-2}}^{(0)}, x_{i_{n-1}}^{(-1)}, x_{i_n}^{(-1)}].$$

Logo, $m$ é da forma canônica.

Se $(a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}) = (1,-1,1)$ e $i_{n-2} < i_n$ então

$$[x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_r}^{(0)}, x_{i_{r+1}}^{(-1)}, x_{i_{r+2}}^{(1)}, x_{i_{r+3}}^{(-1)}, x_{i_{r+4}}^{(1)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(1)}, x_{i_{n-2}}^{(-1)}, x_{i_{n-1}}^{(1)}, x_{i_n}^{(-1)}],$$

onde $i_{r+1} < i_{r+3} < \cdots < i_{n-4} < i_{n-2}$, $i_{r+2} < i_{r+4} < \cdots < i_{n-3} < i_{n-1} < i_1$. Assim, $m$ é da forma canônica. Analogamente, se $(a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}) = (0, -1, 1)$ e $i_{n-2} < i_n$ então $r = n-3$ e

$$[x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(0)}, x_{i_{n-2}}^{(-1)}, x_{i_{n-1}}^{(1)}, x_{i_n}^{(-1)}],$$

onde $i_{n-1} < i_1$. Logo, $m$ é da forma canônica.

Por fim, se $(a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1})$ é igual a $(-1, 1, -1)$ ou $(0, 0, -1)$ e $i_{n-1} > i_n$ ou se $(a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1})$ igual a $(1, -1, 1)$ ou $(0, -1, 1)$ e $i_{n-2} > i_n$ então, pelo Corolário 2.11, temos $m \equiv m'$ onde

$$m' = [x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_r}^{(0)}, x_{i_{r+1}}^{(-1)}, x_{i_{r+2}}^{(1)}, x_{i_{r+3}}^{(-1)}, x_{i_{r+4}}^{(1)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(a_{n-3})}, x_{i_{n-2}}^{(a_{n-2})}, x_{j_{n-1}}^{(-1)}, x_{j_n}^{(a_{n-1})}]$$

ou

$$m' = [x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_r}^{(0)}, x_{i_{r+1}}^{(-1)}, x_{i_{r+2}}^{(1)}, x_{i_{r+3}}^{(-1)}, x_{i_{r+4}}^{(1)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(a_{n-3})}, x_{j_{n-2}}^{(-1)}, x_{i_{n-1}}^{(-1)}, x_{j_n}^{(a_{n-2})}]$$

e $\{j_{n-1}, j_n\} = \{i_{n-1}, i_n\}$, no primeiro caso e $\{j_{n-2}, j_n\} = \{i_{n-2}, i_n\}$ no último. Assim, $m'$ é da forma canônica e temos o resultado. □

**Lema 2.17.** *Seja* $m = [x_{i_1}^{(a_1)}, x_{i_2}^{(a_2)}, \ldots, x_{i_{n-1}}^{(a_{n-1})}, x_{i_n}^{(a_n)}] \notin I$ $(n \geq 3)$ *um comutador multilinear tal que* $x_{i_{n-1}}^{(a_{n-1})} > x_{i_n}^{(a_n)}$. *Se* $a_n, a_{n-1} \geq 0$ *e* $m_1 = [x_{i_1}^{(a_1)}, x_{i_2}^{(a_2)}, \ldots, x_{i_{n-1}}^{(a_{n-1})}]$ *é um comutador da forma canônica do tipo 1 ou 3 então*

$$m \equiv \mu_1[x_{i_1}^{(a_1)}, x_{i_2}^{(a_2)}, \ldots, x_{i_{n-2}}^{(a_{n-2})}, x_{i_n}^{(a_n)}, x_{i_{n-1}}^{(a_{n-1})}],$$

*onde* $\mu \in K$.

*Demonstração.* Seja $m_1$ um comutador da forma canônica do tipo 1 ou 3. Note que como $a_{n-1} \geq 0$, pela definição de comutador da forma canônica do tipo 1 e 3, $m_1$ não possui variáveis de $\mathbb{Z}$-grau $-1$, ou seja, $a_l \geq 0$ para todo $l$. Temos por (2.2) que

$$\alpha[[x_{i_1}^{(a_1)}, \ldots, x_{i_{n-2}}^{(a_{n-2})}], x_{i_{n-1}}^{(a_{n-1})}, x_{i_n}^{(a_n)}] \equiv \beta[[x_{i_1}^{(a_1)}, \ldots, x_{i_{n-2}}^{(a_{n-2})}], x_{i_n}^{(a_n)}, x_{i_{n-1}}^{(a_{n-1})}],$$

onde $\alpha = (a_n - a_1 - \cdots - a_{n-2})(a_{n-1} - a_1 - \cdots - a_{n-2} - a_n)$ e $\beta = (a_{n-1} - a_1 - \cdots - a_{n-2})(a_n - a_1 - \cdots - a_{n-2} - a_{n-1})$. Note que $\alpha \neq 0$. De fato, $a_{n-1} \leq a_1 \leq a_1 + \cdots + a_{n-2}$ e como $m \notin I$, temos que $a_{n-1} \neq a_1 + \cdots + a_{n-2}$. Segue que $a_{n-1} < a_1 + \cdots + a_{n-2}$. Como $a_n \geq 0$ temos $a_{n-1} - a_1 - \cdots - a_{n-2} - a_n \leq a_{n-1} - a_1 - \cdots - a_{n-2} < 0$. Assim, $(a_{n-1} - a_1 - \cdots - a_{n-2} - a_n) \neq 0$. Temos também que $a_n \leq a_{n-1}$ (pois $x_{i_{n-1}}^{(a_{n-1})} > x_{i_n}^{(a_n)}$). Como $a_{n-1} < a_1 + \cdots + a_{n-2}$ temos que $a_n \leq a_{n-1} < a_1 + \cdots + a_{n-2}$. Assim, $a_n - a_1 - \cdots - a_{n-2} \neq 0$. Logo, $\alpha \neq 0$ e

$$m = [x_{i_1}^{(a_1)}, \ldots, x_{i_{n-2}}^{(a_{n-2})}, x_{i_{n-1}}^{(a_{n-1})}, x_{i_n}^{(a_n)}] \equiv \mu_1[x_{i_1}^{(a_1)}, \ldots, x_{i_{n-2}}^{(a_{n-2})}, x_{i_n}^{(a_n)}, x_{i_{n-1}}^{(a_{n-1})}],$$

onde $\mu_1 = \dfrac{\beta}{\alpha} \in K$, como queríamos. $\square$

**Lema 2.18.** *Seja* $m = [x_{i_1}^{(a_1)}, \ldots, x_+ i_{n-1}^{(a_{n-1})}, x_{i_n}^{(a_n)}] \notin I$ $(n \geq 3)$ *um comutador multilinear. Se* $a_n, a_{n-1} \geq 0$ *e* $m_1 = [x_{i_1}^{(a_1)}, x_{i_2}^{(a_2)}, \ldots, x_{i_{n-1}}^{(a_{n-1})}]$ *é um comutador da forma canônica do tipo 4 então* $m \equiv \mu m'$, *onde* $\mu \in K$ *e* $m'$ *é um comutador multilinear da forma canônica.*

*Demonstração.* Consideremos $m_1$ um comutador da forma canônica do tipo 4. Como $a_{n-1} \geq 0$ temos que $a_{n-1} = 0$ ou $a_{n-1} = 1$. Sendo assim, $(a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}) = (1, -1, 1)$, $(0, -1, 1)$ ou $(0, 0, 0)$. Note que $0 \leq a_n \leq a_1$ e $a_n \in \{0, 1\}$. Como $[m_1, x_{i_n}^{(1)}] \in I$ e $m = [m_1, x_{i_n}^{(a_n)}] \notin I$, temos $a_n = 0$. Se $a_{n-1} = 0$ então, pela definição de comutador da forma canônica do tipo 4, $a_2 = \cdots = a_{n-2}$ e $m_1 = [x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_{n-1}}^{(0)}]$. Assim,

$$m = [m_1, x_{i_n}^{(0)}] = [x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_{n-1}}^{(0)}, x_{i_n}^{(0)}].$$

Logo, por (2.6), $m \equiv m'$, onde

$$m' = [x_{i_1}^{(1)}, x_{j_2}^{(0)}, \ldots, x_{j_{n-1}}^{(0)}, x_{j_n}^{(0)}],$$

$\{j_2, \ldots, j_n\} = \{i_2, \ldots, i_n\}$ e $j_2 < j_3 < \cdots < j_n$. Portanto, $m'$ é um comutador da forma canônica e temos o resultado. Se $a_{n-1} = 1$ então

$$m_1 = [x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_r^{(0)}, x_{i_{r+1}}^{(-1)}, x_{i_{r+2}}^{(1)}, x_{i_{r+3}}^{(-1)}, x_{i_{r+4}}^{(1)}, \ldots, x_{i_{n-2}}^{(-1)}, x_{i_{n-1}}^{(1)}],$$

onde $1 \leq r \leq n-3$, $i_2 < \cdots < i_r$, $i_{r+1} < i_{r+3} < \cdots < i_{n-2}$, $i_{r+2} < i_{r+4} < \cdots < i_{n-1} < i_1$. Para cada $l$ vale

$$\begin{aligned} & [x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_r}^{(0)}, x_{i_{r+1}}^{(-1)}, x_{i_{r+2}}^{(1)}, x_{i_{r+3}}^{(-1)}, x_{i_{r+4}}^{(1)}, \ldots, x_{i_{l-2}}^{(1)}, x_{i_{l-1}}^{(-1)}, x_{i_l}^{(1)}] \\ \equiv & [x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_r}^{(0)}, x_{i_{r+1}}^{(-1)}, x_{i_{r+2}}^{(1)}, x_{i_{r+3}}^{(-1)}, x_{i_{r+4}}^{(1)}, \ldots, x_{i_{l-2}}^{(1)}, [x_{i_{l-1}}^{(-1)} x_{i_l}^{(1)}]]. \end{aligned}$$

Assim, usando esse fato e (2.6), temos:

$$\begin{aligned} m &= [x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_r^{(0)}, x_{i_{r+1}}^{(-1)}, x_{i_{r+2}}^{(1)}, x_{i_{r+3}}^{(-1)}, x_{i_{r+4}}^{(1)}, \ldots, x_{i_{n-2}}^{(-1)}, x_{i_{n-1}}^{(1)}, x_{i_n}^{(0)}] \\ &\equiv [x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_r^{(0)}, x_{i_{r+1}}^{(-1)}, x_{i_{r+2}}^{(1)}, x_{i_{r+3}}^{(-1)}, x_{i_{r+4}}^{(1)}, \ldots, [x_{i_{n-2}}^{(-1)}, x_{i_{n-1}}^{(1)}], x_{i_n}^{(0)}] \\ &\equiv [x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_r^{(0)}, [x_{i_{r+1}}^{(-1)}, x_{i_{r+2}}^{(1)}], [x_{i_{r+3}}^{(-1)}, x_{i_{r+4}}^{(1)}], \ldots, [x_{i_{n-2}}^{(-1)}, x_{i_{n-1}}^{(1)}], x_{i_n}^{(0)}] \\ &\equiv [x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_r}^{(0)}, x_{i_n}^{(0)}, [x_{i_{r+1}}^{(-1)}, x_{i_{r+2}}^{(1)}], [x_{i_{r+3}}^{(-1)}, x_{i_{r+4}}^{(1)}], \ldots, [x_{i_{n-2}}^{(-1)}, x_{i_{n-1}}^{(1)}]] \\ &\equiv [x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_r}^{(0)}, x_{i_n}^{(0)}, x_{i_{r+1}}^{(-1)}, x_{i_{r+2}}^{(1)}, x_{i_{r+3}}^{(-1)}, x_{i_{r+4}}^{(1)}, \ldots, x_{i_{n-2}}^{(-1)}, x_{i_{n-1}}^{(1)}]. \end{aligned}$$

Por (2.6), temos que:

$$[x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_r}^{(0)}, x_{i_n}^{(0)}] \equiv [x_{i_1}^{(1)}, x_{j_2}^{(0)}, \ldots, x_{j_r}^{(0)}, x_{j_{r+1}}^{(0)}],$$

onde $\{j_2, \ldots, j_{r+1}\} = \{i_2, \ldots, i_r, i_n\}$ e $j_2 < \cdots < j_{r+1}$. Segue que $m \equiv m'$ onde

$$m' = [x_{i_1}^{(1)}, x_{j_2}^{(0)}, \ldots, x_{j_r}^{(0)}, x_{j_{r+1}}^{(0)}, x_{i_{r+1}}^{(-1)}, x_{i_{r+2}}^{(1)}, x_{i_{r+3}}^{(-1)}, x_{i_{r+4}}^{(1)}, \ldots, x_{i_{n-2}}^{(-1)}, x_{i_{n-1}}^{(1)}]$$

é da forma canônica. □

**Lema 2.19.** *Seja $m = [x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(0)}, x_{i_{n-2}}^{(-1)}, x_{i_{n-1}}^{(a)}, x_n^{(b)}]$ um comutador multilinear tal que $a > b$. Se $b = 1$ ou $b = a - 1$ então $m \equiv \mu m'$, onde $\mu \in K$ e $m'$ é um comutador da forma canônica.*

*Demonstração.* Primeiro, considere $b = 1$. Por (2.1), temos

$$[x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(0)}, x_{i_{n-1}}^{(a)}, x_{i_{n-2}}^{(-1)}, x_n^{(1)}] \equiv 0,$$

$$[x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(0)}, x_{i_n}^{(1)}, x_{i_{n-2}}^{(-1)}, x_{i_{n-1}}^{(a)}] \equiv 0.$$

Usando a Observação 1.53, obtemos

$$\begin{aligned}
[x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(0)}, x_{i_{n-2}}^{(-1)}, x_{i_{n-1}}^{(a)}, x_{i_n}^{(1)}] &\equiv -[x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(0)}, [x_{i_{n-1}}^{(a)}, x_{i_{n-2}}^{(-1)}], x_{i_n}^{(1)}] \\
&= [x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(0)}, [x_{i_{n-2}}^{(-1)}, x_{i_{n-1}}^{(a)}], x_{i_n}^{(1)}]
\end{aligned}$$

e

$$[x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(0)}, x_{i_n}^{(1)}, [x_{i_{n-2}}^{(-1)}, x_{i_{n-1}}^{(a)}]] \equiv -[x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(0)}, x_{i_n}^{(1)}, x_{i_{n-1}}^{(a)}, x_{i_{n-2}}^{(-1)}].$$

Além disso, por (2.2):

$$[x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(0)}, [x_{i_{n-2}}^{(-1)}, x_{i_{n-1}}^{(a)}], x_{i_n}^{(1)}] \equiv k[x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(0)}, x_{i_n}^{(1)}, [x_{i_{n-2}}^{(-1)}, x_{i_{n-1}}^{(a)}]],$$

onde $k = \dfrac{(a-1-a)(1+1_a-a)}{(1-a)(-1+a-1-a)} = \dfrac{-(2-2a)}{-(1-a)2} = \dfrac{-2(1-a)}{-2(1-a)} = 1$. Portanto,

$$\begin{aligned}
m = [x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(0)}, x_{i_{n-2}}^{(-1)}, x_{i_{n-1}}^{(a)}, x_{i_n}^{(1)}] &\equiv [x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(0)}, [x_{i_{n-2}}^{(-1)}, x_{i_{n-1}}^{(a)}], x_{i_n}^{(1)}] \\
&\equiv [x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(0)}, x_{i_n}^{(1)}, [x_{i_{n-2}}^{(-1)}, x_{i_{n-1}}^{(a)}]] \\
&\equiv -[x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(0)}, x_{i_n}^{(1)}, x_{i_{n-1}}^{(a)}, x_{i_{n-2}}^{(-1)}].
\end{aligned}$$

Como $[x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(0)}, x_{i_n}^{(b)}, x_{i_{n-1}}^{(a)}, x_{i_{n-2}}^{(-1)}]$ é um comutador da forma canônica (do tipo 1), temos o resultado.

Agora, suponha $b = a - 1$. Por (2.1),

$$[x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(0)}, x_{i_{n-2}}^{(-1)}, x_{i_n}^{(b)}, x_{i_{n-1}}^{(a)}] \in I.$$

Pela Observação 1.53 temos:

$$[x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(0)}, x_{i_{n-2}}^{(-1)}, x_{i_n}^{(b)}, x_{i_{n-1}}^{(a)}] = [x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(0)}, x_{i_{n-2}}^{(-1)}, x_{i_{n-1}}^{(a)}, x_{i_n}^{(b)}]$$
$$+[x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(0)}, x_{i_{n-2}}^{(-1)}, [x_{i_n}^{(b)}, x_{i_{n-1}}^{(a)}]].$$

Assim,

$$\begin{aligned}[x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(0)}, x_{i_{n-2}}^{(-1)}, x_{i_{n-1}}^{(a)}, x_{i_n}^{(b)}] &\equiv -[x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(0)}, x_{i_{n-2}}^{(-1)}, [x_{i_n}^{(b)}, x_{i_{n-1}}^{(a)}]] \\ &= [x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(0)}, x_{i_{n-2}}^{(-1)}, [x_{i_{n-1}}^{(a)}, x_{i_n}^{(b)}]].\end{aligned}$$

Por (2.2) temos que

$$[x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(0)}, x_{i_{n-2}}^{(-1)}, [x_{i_{n-1}}^{(a)}, x_{i_n}^{(b)}]] \equiv \mu'[x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(0)}, [x_{i_{n-1}}^{(a)}, x_{i_n}^{(b)}], x_{i_{n-2}}^{(-1)}],$$

onde (lembrando que $b = a - 1$)

$$\mu' = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{(-1-a)(2a-1+1-a)}{(2a-1-a)(-1-2a+1-a)} = \frac{-(a+1)a}{-(a-1)3a} = \frac{a+1}{3(a-1)}$$

e $(a+1)a \neq 0$ e $(a-1)3a \neq 0$ pois, $a > 1$. Temos também, por (2.1) que

$$[x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(0)}, x_{i_{n-1}}^{(a)}, x_{i_n}^{(b)}] \in I.$$

Assim, novamente pela Observação 1.53, temos

$$[x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(0)}, [x_{i_{n-1}}^{(a)}, x_{i_n}^{(b)}]] \equiv -[x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(0)}, x_{i_n}^{(b)}, x_{i_{n-1}}^{(a)}].$$

Logo,

$$\begin{aligned} m = [x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(0)}, x_{i_{n-2}}^{(-1)}, x_{i_{n-1}}^{(a)}, x_{i_n}^{(b)}] &\equiv [x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(0)}, x_{i_{n-2}}^{(-1)}, [x_{i_{n-1}}^{(a)}, x_{i_n}^{(b)}]] \\ &\equiv \mu'[x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(0)}, [x_{i_{n-1}}^{(a)}, x_{i_n}^{(b)}], x_{i_{n-2}}^{(-1)}] \\ &\equiv -\mu'[x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(0)}, x_{i_n}^{(b)}, x_{i_{n-1}}^{(a)}, x_{i_{n-2}}^{(-1)}],\end{aligned}$$

onde $\mu' \in K$. Note que $[x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(0)}, x_{i_n}^{(b)}, x_{i_{n-1}}^{(a)}, x_{i_{n-2}}^{(-1)}]$ é um comutador da forma canônica (do tipo 1). Logo, temos o resultado. □

Finalmente, com o auxílio desses lemas conseguimos, de maneira geral, relacionar qualquer comutador multilinear não pertencente a $I$ a algum comutador multilinear da forma canônica. É o que concluímos na seguinte proposição.

**Proposição 2.20.** *Seja $m = [x_{i_1}^{(a_1)}, \ldots, x_{i_n}^{(a_n)}]$ $(n \geq 3)$ um comutador multilinear tal que $m \notin I$ e $x_{i_1}^{(a_1)} > x_{i_l}^{(a_l)}$ para todo $l > 1$. Então $m \equiv \mu m'$, onde $\mu \in K$ e $m'$ é um comutador multilinear da forma canônica.*

*Demonstração.* Sabemos que cada comutador multilinear $m$, tal que $m \notin I$ é de um dos 5 tipos apresentados. Assim, vamos provar a proposição em cada um desses tipos. Se $m$ é um comutador do tipo 5 então, pelo Lema 2.15, temos o resultado.

Assim, consideremos $m$ do tipo 1, 2, 3 ou 4. Afim de provar a Proposição 2.20 em cada um desses tipos, fazemos por indução em $n$. Já provamos que a proposição é válida para $n = 3$. Suponha a proposição válida para todo comutador de comprimento menor que $n$. Seja

$$m_1 = [x_{i_1}^{(a_1)}, x_{i_2}^{(a_2)}, \ldots, x_{i_{n-1}}^{(a_{n-1})}].$$

Por hipótese de indução, podemos assumir sem perda de generalidade que o comutador $m_1$ é da forma canônica. Notemos que $a_n \geq -1$, pois $m \notin I$. Assim, temos os seguintes casos.

(1) Se $a_n = -1$ então, pelo Lema 2.16, temos o resultado.

(2) Suponha $a_n \geq 0$ e $a_{n-1} = -1$. Vamos dividir esse caso em duas partes:

$(a)$ Se $a_n \neq a_1 + \cdots + a_{n-2}$ então, pelo Lema 2.12, $m \equiv \mu_1 m''$ onde $\mu_1 \in K$ e

$$m'' = [x_{i_1}^{(a_1)}, \ldots, x_{i_{n-2}}^{(a_{n-2})}, x_{i_n}^{(a_n)}, x_{i_{n-1}}^{(-1)}].$$

Seja $m_1'' = [x_{i_1}^{(a_1)}, \ldots, x_{i_{n-2}}^{(a_{n-2})}, x_{i_n}^{(a_n)}]$, por hipótese de indução, $m_1'' \equiv \mu_2 m_1'$ onde $\mu_2 \in K$ e $m_1'$ é um comutador da forma canônica. Logo, $m'' \equiv \mu_2[m_1', x_{i_{n-1}}^{(-1)}]$. Pelo Lema 2.16, temos $[m_1', x_{i_{n-1}}^{(-1)}] \equiv m'$, onde $m'$ é um comutador da forma canônica. Segue que $m \equiv \mu_1\mu_2 m'$ com $\mu_1\mu_2 \in K$ e $m'$ comutador da forma canônica como queríamos.

$(b)$ Agora, suponha que $a_n = a_1 + \cdots + a_{n-2}$.

Como $a_n \geq 0$ e $a_n = a_1 + \cdots + a_{n-2}$ temos que

$$a_2 + \cdots + a_{n-2} \leq 0. \tag{2.20}$$

Mostraremos esse caso, considerando $m_1$ como cada comutador da forma canônica, separadamente.

Primeiro, observamos que se $a_{n-2} = -1$ então temos o resultado. De fato, sendo $a_{n-2} = -1$ temos que $a_n = a_1 + \cdots + a_{n-3} - 1$. Isso implica, pelo Lema 2.13, que $m \equiv \mu m^{''}$, onde $\mu \in K$ e

$$m^{''} = [x_{i_1}^{(a_1)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(a_{n-3})}, x_{i_n}^{(a_n)}, x_{i_{n-1}}^{(-1)}, x_{i_{n-2}}^{(-1)}].$$

Por hipótese de indução, $[x_{i_1}^{(a_1)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(a_{n-3})}, x_{i_n}^{(a_n)}, x_{i_{n-1}}^{(-1)}]$ é um comutador da forma canônica. Assim, pelo Lema 2.16, $m^{''} \equiv m'$ onde $m'$ é um comutador da forma canônica, como requerido.

Notemos também que se $m_1$ tem comprimento igual 4 então

$$m = [x_{i_1}^{(a_1)}, x_{i_2}^{(a_2)}, x_{i_3}^{(-1)}, x_{i_4}^{(a_4)}].$$

Por (2.20), $a_2 \leq 0$, ou seja, $a_2 = 0$ ou $a_2 = -1$. Se ocorrer $a_2 = 0$ então $a_4 = a_1$, isso implica que $m$ é um comutador da forma canônica (do tipo 2). Caso, $a_2 = -1$, já temos o resultado, pelo observado anteriormente. Assim, consideremos $m_1$ com comprimento maior que 4.

Se $m_1$ é um comutador da forma canônica do tipo 1 então $a_l > 0$ para algum $l$, $2 \leq l \leq n-2$. Isso implica, por (2.20), que $a_{l'} < 0$ para algum $l'$, ou seja, $a_{l'} = -1$ para algum $l'$, $2 \leq l' \leq n-2$. Assim, pela definição de comutador da forma canônica do tipo 1 temos $a_{n-2} = -1$ e está provado o resultado.

Seja $m_1$ um comutador da forma canônica do tipo 2. Nesse tipo, temos $a_l > 1$ para algum $l$, $2 \leq l \leq n-2$. Assim, existem $l', l''$, $2 \leq l' \leq l'' \leq n-2$ tal que $a_{l'} = a_{l''} = -1$, pois $a_2 + \cdots + a_{n-2} \leq 0$. Logo, pela definição de comutador na forma canônica do tipo 2, temos $a_{n-2} = -1$ e está provado o resultado.

Seja $m_1$ comutador na forma canônica do tipo 3. Nesse tipo, temos que $a_2, \ldots, a_{n-1} \leq 0$. Por (2.20), temos que $a_2 = \cdots = a_{n-2} = 0$ ou $a_2 + \cdots + a_{n-2} < 0$. Se $a_2 = \cdots = a_{n-2} = 0$ então $a_n = a_1$. Isso implica que

$$m = [x_{i_1}^{(a_1)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_{n-2}}^{(0)}, x_{i_{n-1}}^{(-1)}, x_{i_n}^{(a_1)}],$$

onde $i_2 < \cdots < i_{n-1}$ e $i_1 > i_n$. Assim, $m$ é um comutador da forma canônica (do tipo 2). Agora, se $a_2 + \cdots + a_{n-2} < 0$ então existe $l$, $2 \leq l \leq n-2$ tal que $a_l = -1$. Isso implica, pela definição de comutador da forma canônica do tipo 3, que $a_{n-2} = -1$. Logo, temos o desejado.

Agora, se $m_1$ é um comutador na forma canônica do tipo 4 então $a_1 = 1$ e como $a_{n-1} = -1$ temos $(a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1})$ é igual a $(1, -1, -1)$, $(-1, 1, -1)$, $(0, -1, -1)$ ou $(0, 0, -1)$. Temos que $a_n = 1 + a_2 + \cdots + a_{n-2}$ e que $a_2 + \cdots + a_{n-2} \leq 0$. Assim, se $a_2 + \cdots + a_{n-2} < 0$ então $a_n = 0$. Isso implica que $(a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}) = (0, -1, -1)$. Logo, $a_{n-2} = -1$ e está provado o resultado. Agora, se $a_2 + \cdots + a_{n-2} = 0$ então $a_2 = \cdots = a_{n-2} = 0$ ou $a_l < 0$ (ou seja, $a_l = -1$) para algum $l$, $2 \leq l \leq n-2$. No primeiro caso, como $a_n = 1$, temos:

$$m = [x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_{n-2}}^{(0)}, x_{i_{n-1}}^{(-1)}, x_{i_n}^{(1)}],$$

onde $i_2 < \cdots < i_{n-2}$ e $i_1 > i_n$. Logo, $m$ é um comutador da forma canônica e temos o resultado. Se ocorre o outro caso ($a_l = -1$ para algum $l$, $2 \leq l \leq n-2$), como $a_n = 1 + a_2 + \cdots + a_{n-2} = 1$ então, pela definição de comutador da forma canônica do tipo 4, $(a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}) = (-1, 1, -1)$. Assim,

$$m_1 = [x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_r}^{(0)}, x_{i_{r+1}}^{(-1)}, x_{i_{r+2}}^{(1)}, x_{i_{r+3}}^{(-1)}, x_{i_{r+4}}^{(1)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(-1)}, x_{i_{n-2}}^{(1)}, x_{i_{n-1}}^{(-1)}],$$

onde $1 \leq r \leq n-4$, $i_2 < \cdots < i_r$, $i_{r+1} < i_{r+3} < \cdots < i_{n-1}$, $i_{r+2} < i_{r+4} < \cdots < i_{n-2} < i_1$. Portanto,

$$m = [x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_r}^{(0)}, x_{i_{r+1}}^{(-1)}, x_{i_{r+2}}^{(1)}, x_{i_{r+3}}^{(-1)}, x_{i_{r+4}}^{(1)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(-1)}, x_{i_{n-2}}^{(1)}, x_{i_{n-1}}^{(-1)}, x_{i_n}^{(1)}],$$

onde $i_1 > i_n$ pois $x_{i_1}^{(1)} > x_{i_n}^{(a_n)}$. Se $i_{n-2} < i_n$ então $m$ é da forma canônica e temos o resultado. Suponha que $i_{n-2} > i_n$. Como, para cada $l$

$$[x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_r}^{(0)}, x_{i_{r+1}}^{(-1)}, x_{i_{r+2}}^{(1)}, x_{i_{r+3}}^{(-1)}, x_{i_{r+4}}^{(1)}, \ldots, x_{i_{l-2}}^{(1)}, x_{i_l}^{(1)}, x_{i_{l-1}}^{(-1)}] \equiv 0,$$

temos, pela Observação 1.53, que

$$\begin{aligned} &[x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_r}^{(0)}, x_{i_{r+1}}^{(-1)}, x_{i_{r+2}}^{(1)}, x_{i_{r+3}}^{(-1)}, x_{i_{r+4}}^{(1)}, \ldots, x_{i_{l-2}}^{(1)}, x_{i_{l-1}}^{(-1)}, x_{i_l}^{(1)}] \\ &\equiv [x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_r}^{(0)}, x_{i_{r+1}}^{(-1)}, x_{i_{r+2}}^{(1)}, x_{i_{r+3}}^{(-1)}, x_{i_{r+4}}^{(1)}, \ldots, x_{i_{l-2}}^{(1)}, [x_{i_{l-1}}^{(-1)} x_{i_l}^{(1)}]]. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Usando (2.21) e (2.6) obtemos que:

$$\begin{aligned} m &= [x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_r}^{(0)}, x_{i_{r+1}}^{(-1)}, x_{i_{r+2}}^{(1)}, x_{i_{r+3}}^{(-1)}, x_{i_{r+4}}^{(1)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(-1)}, x_{i_{n-2}}^{(1)}, x_{i_{n-1}}^{(-1)}, x_{i_n}^{(1)}] \\ &\equiv [x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_r}^{(0)}, x_{i_{r+1}}^{(-1)}, x_{i_{r+2}}^{(1)}, x_{i_{r+3}}^{(-1)}, x_{i_{r+4}}^{(1)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(-1)}, x_{i_{n-2}}^{(1)}, [x_{i_{n-1}}^{(-1)}, x_{i_n}^{(1)}]] \\ &\equiv [x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_r}^{(0)}, x_{i_{r+1}}^{(-1)}, x_{i_{r+2}}^{(1)}, x_{i_{r+3}}^{(-1)}, x_{i_{r+4}}^{(1)}, \ldots, [x_{i_{n-3}}^{(-1)}, x_{i_{n-2}}^{(1)}], [x_{i_{n-1}}^{(-1)}, x_{i_n}^{(1)}]] \\ &\equiv [x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_r}^{(0)}, x_{i_{r+1}}^{(-1)}, x_{i_{r+2}}^{(1)}, x_{i_{r+3}}^{(-1)}, x_{i_{r+4}}^{(1)}, \ldots, [x_{i_{n-1}}^{(-1)}, x_{i_n}^{(1)}], [x_{i_{n-3}}^{(-1)}, x_{i_{n-2}}^{(1)}]] \\ &\equiv [x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_r}^{(0)}, x_{i_{r+1}}^{(-1)}, x_{i_{r+2}}^{(1)}, x_{i_{r+3}}^{(-1)}, x_{i_{r+4}}^{(1)}, \ldots, x_{i_{n-1}}^{(-1)}, x_{i_n}^{(1)}, x_{i_{n-3}}^{(-1)}, x_{i_{n-2}}^{(1)}]. \end{aligned}$$

E, por hipótese de indução, temos:

$$[x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_r}^{(0)}, x_{i_{r+1}}^{(-1)}, x_{i_{r+2}}^{(1)}, x_{i_{r+3}}^{(-1)}, x_{i_{r+4}}^{(1)}, \ldots, x_{i_{n-1}}^{(-1)}, x_{i_n}^{(1)}, x_{i_{n-3}}^{(-1)}] \equiv \mu m_1',$$

onde $\mu \in K$ e $m_1'$ é um comutador da forma canônica do tipo 4. Seja $m' = [m_1', x_{i_{n-2}}^{(1)}]$, então

$$m' = [x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_r}^{(0)}, x_{i_{r+1}}^{(-1)}, x_{j_{r+2}}^{(1)}, x_{i_{r+3}}^{(-1)}, x_{j_{r+4}}^{(1)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(-1)}, x_{j_{n-2}}^{(1)}, x_{i_{n-1}}^{(-1)}, x_{j_n}^{(1)}],$$

onde $\{j_{r+2}, j_{r+4}, \ldots, j_{n-2}\} = \{i_{r+2}, i_{r+4}, \ldots, i_n\}$ e $j_n = i_{n-2}$, $j_{r+2} < j_{r+4} < \cdots < j_{n-2} < j_n < i_1$. Logo, $m'$ é um comutador da forma canônica e

$$m \equiv \mu[m_1', x_{i_{n-2}}^{(1)}] = \mu m'.$$

(3) Suponha $a_{n-1}, a_n \geq 0$. Vamos mostrar este caso, considerando $m_1$ como cada um dos tipos de comutadores da forma canônica, separadamente, como fizemos no caso anterior.

Se $m_1$ é um comutador da forma canônica do tipo 1 ou 3 então $m = [m_1, x_{i_n}^{(a_n)}] = [x_{i_1}^{(a_1)}, \ldots, x_{a_n}^{(a_n)}]$, onde $a_2 \geq 0$, $x_{i_2}^{(a_2)} < x_{i_3}^{(a_3)} < \cdots < x_{i_{n-1}}^{(a_{n-1})} < x_{i_1}^{(a_1)}$ e $x_{i_n}^{(a_n)} < x_{i_1}^{(a_1)}$. Se $x_{i_{n-1}}^{(a_{n-1})} < x_{i_n}^{(a_n)}$ então $m$ é da forma canônica. Se $x_{i_{n-1}}^{(a_{n-1})} > x_{i_n}^{(a_n)}$ então, pelo Lema 2.17,

$$m \equiv \mu_1 [x_{i_1}^{(a_1)}, x_{i_2}^{(a_2)}, \ldots, x_{i_{n-2}}^{(a_{n-2})}, x_{i_n}^{(a_n)}, x_{i_{n-1}}^{(a_{n-1})}],$$

onde $\mu_1 \in K$. Seja $m_1'' = [x_{i_1}^{(a_1)}, \ldots, x_{i_{n-2}}^{(a_{n-2})}, x_{i_n}^{(a_n)}]$. Por hipótese de indução, temos $m_1'' \equiv \mu_2 m_1'$, onde $\mu_2 \in K$ e

$$m_1' = [x_{i_1}^{(a_1)}, x_{j_2}^{(b_2)}, \ldots, x_{j_{n-2}}^{(b_{n-2})}, x_{j_{n-1}}^{(b_{n-1})}, x_{i_{n-1}}^{(a_{n-1})}]$$

é um comutador da forma canônica do tipo 1 ou do tipo 3 com

$$\{x_{j_2}^{(b_2)}, \ldots, x_{j_{n-2}}^{(b_{n-2})}, x_{j_{n-1}}^{(b_{n-1})}\} = \{x_{i_2}^{(a_2)}, \ldots, x_{i_{n-2}}^{(a_{n-2})}, x_{i_n}^{(a_n)}\}$$

e $x_{j_2}^{(b_2)} < \cdots < x_{j_{n-1}}^{(b_{n-1})} < x_{i_1}^{(a_1)}$. Assim,

$$[x_{i_1}^{(a_1)}, x_{i_2}^{(a_2)}, \ldots, x_{i_{n-2}}^{(a_{n-2})}, x_{i_n}^{(a_n)}, x_{i_{n-1}}^{(a_{n-1})}] = [m_1'', x_{i_{n-1}}^{(a_{n-1})}] \equiv \mu_2 m',$$

onde $m' = [m_1', x_{i_{n-1}}^{(a_{n-1})}]$. Como $x_{i_n}^{(a_n)} < x_{i_{n-1}}^{(a_{n-1})}$ temos que $x_{j_2}^{(b_2)} < \cdots < x_{j_{n-1}}^{(b_{n-1})} < x_{i_{n-1}}^{(a_{n-1})} < x_{i_1}^{(a_1)}$. Assim, $m'$ é um comutador da forma canônica. Portanto, $m \equiv \mu m'$, onde $\mu = \mu_1\mu_2 \in K$ e $m'$ é um comutador da forma canônica, como requerido.

Se $m_1$ é um comutador da forma canônica do tipo 4 então, pelo Lema 2.18, temos o resultado.

Por fim, seja $m_1$ um comutador da forma canônica do tipo 2. Como $a_{n-1} \geq 0$ temos $a_{n-1} = a_1$ e

$$m = [x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_r}^{(0)}, x_{i_{r+1}}^{(-1)}, x_{i_{r+2}}^{(a)}, \ldots, x_{i_{n-1}}^{(a)}, x_{i_n}^{(a_n)}],$$

onde $a = a_1 > 1$, $1 \leq r \leq n-3$, $i_2 < \cdots < i_r$, $i_{r+2} < \cdots < i_{n-1} < i_1$, $0 \leq a_n \leq a$. Note que $n - r \geq 3$ já que $r \leq n-3$. Suponha $a_n = a$. Se $i_{n-1} < i_n$ então $m$ é um comutador da forma canônica (do tipo 2). Por outro lado, se $i_{n-1} > i_n$, então por (2.6), $m \equiv m'$ onde

$$m' = [x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_r}^{(0)}, x_{i_{r+1}}^{(-1)}, x_{j_{r+2}}^{(a)}, \ldots, x_{j_{n-1}}^{(a)}, x_{j_n}^{(a_n)}],$$

$\{j_{r+2}, \ldots, j_n\} = \{i_{r+2}, \ldots, i_n\}$ e $j_{r+2} < \cdots < j_n$. Assim, $m'$ é da forma canônica e

$m \equiv m'$, como queríamos. Se $a_n = 0$ então, por (2.2), temos

$$\begin{aligned}\alpha m &= \alpha[[x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_r}^{(0)}, x_{i_{r+1}}^{(-1)}, x_{i_{r+2}}^{(a)}, \ldots, x_{i_{n-2}}^{(a)}], x_{i_{n-1}}^{(a)}, x_{i_n}^{(0)}] \\ &\equiv \beta[[x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_r}^{(0)}, x_{i_{r+1}}^{(-1)}, x_{i_{r+2}}^{(a)}, \ldots, x_{i_{n-2}}^{(a)}], x_{i_n}^{(0)}, x_{i_{n-1}}^{(a)}],\end{aligned}$$

onde $\alpha = (-a+1-(n-r-3)a)(a-a+1-(n-r-3)a) = (-(n-r-2)a+1)(-(n-r-3)a+1)$ e $\beta = (a-a+1-(n-r-3)a)(-a-a+1-(n-r-3)a) = (-(n-r-3)a+1)(-(n-r-1)a+1)$. Temos que $-(n-r-3)a+1 \neq 0$, pois $a > 1$ e $-(n-r-2)a+1 = -((n-r-2)a-1) < 0$, $-(n-r-1)a+1 = -((n-r-1)a+1) < 0$, pois $n-r \geq 3$. Assim, $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$. Logo, $m \equiv \mu_1 m''$, onde $m'' = [x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_r}^{(0)}, x_{i_{r+1}}^{(-1)}, x_{i_{r+2}}^{(a)}, \ldots, x_{i_{n-2}}^{(a)}, x_{i_n}^{(0)}, x_{i_{n-1}}^{(a)}]$ e $\mu_1 = \frac{\beta}{\alpha}$. Seja

$$m_1'' = [x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_r}^{(0)}, x_{i_{r+1}}^{(-1)}, x_{i_{r+2}}^{(a)}, \ldots, x_{i_{n-2}}^{(a)}, x_{i_n}^{(0)}].$$

Por hipótese de indução, $m_1'' \equiv \mu_2 m_1'$, onde

$$m_1' = [x_{i_1}^{(a)}, x_{j_2}^{(0)}, \ldots, x_{j_r}^{(0)}, x_{j_{r+1}}^{(0)}, x_{i_{r+1}}^{(-1)}, x_{i_{r+2}}^{(a)}, \ldots, x_{i_{n-2}}^{(a)}],$$

$\{j_2, \ldots, j_{r+1}\} = \{i_2, \ldots, i_r, i_n\}$, $j_2 < \cdots < j_{r+1}$ e $\mu_2 \in K$. Como $i_{n-2} < i_{n-1}$ temos $m' = [m_1', x_{i_{n-1}}^{(a)}]$ é da forma canônica e $m \equiv \mu m'$, onde $\mu = \mu_1\mu_2 \in K$, como requerido.

Agora considere $0 < a_n < a$. Escreva $b = a_n$. Assim,

$$m = [x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_r}^{(0)}, x_{i_{r+1}}^{(-1)}, x_{i_{r+2}}^{(a)}, \ldots, x_{i_{n-1}}^{(a)}, x_{i_n}^{(b)}],$$

onde $a = a_1 > 1$, $1 \leq r \leq n-3$, $i_2 < \cdots < i_r$, $i_{r+2} < \cdots < i_{n-1} < i_1$, $0 < b = a_n < a$. Por (2.2), temos:

$$\begin{aligned}\alpha m &= \alpha[[x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_r}^{(0)}, x_{i_{r+1}}^{(-1)}, x_{i_{r+2}}^{(a)}, \ldots, x_{i_{n-2}}^{(a)}], x_{i_{n-1}}^{(a)}, x_{i_n}^{(b)}] \\ &\equiv \beta[[x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_r}^{(0)}, x_{i_{r+1}}^{(-1)}, x_{i_{r+2}}^{(a)}, \ldots, x_{i_{n-2}}^{(a)}], x_{i_n}^{(b)}, x_{i_{n-1}}^{(a)}],\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\alpha &= (b-a+1-(n-r-3)a)(a-b-a+1-(n-r-3)a) \\ &= (b-(n-r-2)a+1)(-(n-r-3)a-b+1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta &= (a-a+1-(n-r-3)a)(a-b-a+1-(n-r-3)a) \\ &= (-(n-r-3)a+1)(-(n-r-3)a-b+1).\end{aligned}$$

Se $\alpha \neq 0$ então

$$m \equiv \mu_1[x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \dots, x_{i_r}^{(0)}, x_{i_{r+1}}^{(-1)}, x_{i_{r+2}}^{(a)}, \dots, x_{i_{n-2}}^{(a)}, x_{i_n}^{(b)}, x_{i_{n-1}}^{(a)}],$$

onde $\mu_1 = \beta\alpha^{-1}$. Por hipótese de indução,

$$\begin{aligned} & [x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \dots, x_{i_r}^{(0)}, x_{i_{r+1}}^{(-1)}, x_{i_{r+2}}^{(a)}, \dots, x_{i_{n-2}}^{(a)}, x_{i_n}^{(b)}] \\ \equiv\ & \mu_2[x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \dots, x_{i_r}^{(0)}, x_{i_n}^{(b)}, x_{i_{r+2}}^{(a)}, \dots, x_{i_{n-2}}^{(a)}, x_{i_{r+1}}^{(-1)}], \end{aligned}$$

onde $\mu_2 \in K$. Assim,

$$m \equiv \mu_1\mu_2[x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \dots, x_{i_r}^{(0)}, x_{i_n}^{(b)}, x_{i_{r+2}}^{(a)}, \dots, x_{i_{n-2}}^{(a)}, x_{i_{r+1}}^{(-1)}, x_{i_{n-1}}^{(a)}].$$

Novamente por (2.2), temos

$$\begin{aligned} & \gamma[[x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \dots, x_{i_r}^{(0)}, x_{i_n}^{(b)}, x_{i_{r+2}}^{(a)}, \dots, x_{i_{n-2}}^{(a)}], x_{i_{r+1}}^{(-1)}, x_{i_{n-1}}^{(a)}] \\ \equiv\ & \delta[[x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \dots, x_{i_r}^{(0)}, x_{i_n}^{(b)}, x_{i_{r+2}}^{(a)}, \dots, x_{i_{n-2}}^{(a)}], x_{i_{n-1}}^{(a)}, x_{i_{r+1}}^{(-1)}], \end{aligned}$$

onde

$$\gamma = (a-(n-r-2)a-b)(-1-a-(n-r-2)a-b) = ((n-r-3)a+b)((n-r-1)a+b+1),$$

$$\delta = (-1-(n-r-2)a-b)(a+1-a-(n-r-3)a-b) = ((n-r-2)a+b+1)((n-r-3)a+b-1).$$

Temos que $((n-r-2)a+b+1)$, $((n-r-3)a+b)$, $((n-r-1)a+b+1) > 0$, pois $n-r \geq 3$ e $((n-r-3)a+b-1) \neq 0$, pois $\alpha = (b-(n-r-2)a+1)(-(n-r-3)a-b+1) \neq 0$. Isso implica que $\delta \neq 0$ e $\gamma \neq 0$. Assim,

$$\begin{aligned} & [x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \dots, x_{i_r}^{(0)}, x_{i_n}^{(b)}, x_{i_{r+2}}^{(a)}, \dots, x_{i_{n-2}}^{(a)}, x_{i_{r+1}}^{(-1)}, x_{i_{n-1}}^{(a)}] \\ \equiv\ & \mu_3[x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \dots, x_{i_r}^{(0)}, x_{i_n}^{(b)}, x_{i_{r+2}}^{(a)}, \dots, x_{i_{n-2}}^{(a)}, x_{i_{n-1}}^{(a)}, x_{i_{r+1}}^{(-1)}] \end{aligned}$$

onde $\mu_3 = \frac{\delta}{\gamma}$. Segue que

$$\begin{aligned} m &\equiv \mu_1\mu_2[x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \dots, x_{i_r}^{(0)}, x_{i_n}^{(b)}, x_{i_{r+2}}^{(a)}, \dots, x_{i_{n-2}}^{(a)}, x_{i_{r+1}}^{(-1)}, x_{i_{n-1}}^{(a)}] \\ &\equiv \mu_1\mu_2\mu_3[x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \dots, x_{i_r}^{(0)}, x_{i_n}^{(b)}, x_{i_{r+2}}^{(a)}, \dots, x_{i_{n-2}}^{(a)}, x_{i_{n-1}}^{(a)}, x_{i_{r+1}}^{(-1)}]. \end{aligned}$$

Logo, temos o resultado.

Se $\alpha = 0$ então $b-(n-r-2)a+1 = 0$ ou $(n-r-3)a+b-1 = 0$. Lembremos que $r \leq n-3$, $a > 1$ e $0 < b < a$. Assim, podemos verificar que se ocorre o primeiro caso, então $b = a-1$ e $r = n-3$ e que se ocorre o segundo caso, então $b = 1$ e

$r = n-3$. Assim,

$$m = [x_{i_1}^{(a)}, x_{i_2}^{(0)}, \ldots, x_{i_{n-3}}^{(0)}, x_{i_{n-2}}^{(a)}, x_{i_{n-1}}^{-1}, x_n^{(b)}],$$

onde $b = 1$ ou $b = a-1$. Logo, pelo Lema 2.19, obtemos o resultado. Isso completa a prova da proposição.

$\square$

Enfim, estamos em condições de provar o resultado principal, como segue.

**Teorema 2.21.** *Seja $K$ um corpo de característica $0$. As identidades $\mathbb{Z}$-graduadas (2.1),(2.2) e (2.3), isto é,*

$$[x_1^{(i)}, x_2^{(i)}] \equiv 0, \ i \geq -1;$$

$$\alpha[x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(c)}] - \beta[x_1^{(a)}, x_3^{(c)}, x_2^{(b)}] \equiv 0;$$

$$x^{(d)} \equiv 0, \ d \leq -2,$$

*em que $\alpha = (c-a)(b-c-a)$, $\beta = (b-a)(c-b-a)$ formam uma base para as identidades $\mathbb{Z}$-graduadas da álgebra de Lie $W_1$ sobre $K$.*

*Demonstração.* Precisamos mostrar que $T_{\mathbb{Z}}(W_1) \subseteq I$ e $I \subseteq T_{\mathbb{Z}}(W_1)$. Pelo Lema 2.2, já temos que $I \subseteq T_{\mathbb{Z}}(W_1)$. Resta mostrar que $T_{\mathbb{Z}}(W_1) \subseteq I$. Seja $f \in T_{\mathbb{Z}}(W_1)$ uma identidade multilinear graduada de grau $n$ para $W_1$. Suponha por absurdo que $f \notin I$. Temos que $f$ é uma combinação linear de comutadores multilineares e que pelo menos um desses comutadores não pertencem a $I$. Assim, pela Proposição 2.20, temos que

$$f \equiv \mu'[x_{i_1}^{(a_1)}, \ldots, x_{i_n}^{(a_n)}]$$

onde $\mu' \in K$ e $[x_{i_1}^{(a_1)}, \ldots, x_{i_n}^{(a_n)}]$ é um comutador da forma canônica. Assim,

$$f - \mu'[x_{i_1}^{(a_1)}, \ldots, x_{i_n}^{(a_n)}] \in I.$$

Como $f \in T_{\mathbb{Z}}(W_1)$ e $I \subseteq T_{\mathbb{Z}}(W_1)$ temos:

$$\mu'[x_{i_1}^{(a_1)}, \ldots, x_{i_n}^{(a_n)}] = -(f - \mu'[x_{i_1}^{(a_1)}, \ldots, x_{i_n}^{(a_n)}] - f) \in T_{\mathbb{Z}}(W_1).$$

Se $\mu' = 0$ então $f \in I$, um absurdo, pois supomos $f \notin I$. Se $\mu' \neq 0$ então

$$[x_{i_1}^{(a_1)}, \ldots, x_{i_n}^{(a_n)}] = \frac{-1}{\mu'}(f - \mu'[x_{i_1}^{(a_1)}, \ldots, x_{i_n}^{(a_n)}] - f) \in T_{\mathbb{Z}}(W_1).$$

Assim, pelo Lema 2.3, $[x_{i_1}^{(a_1)}, \ldots, x_{i_n}^{(a_n)}] \in I$ o que é um absurdo, pois os comutadores na forma canônica não pertencem a $I$. Já que supor $f \notin I$ gera uma contradição, temos que

$f \in I$. Logo, $T_{\mathbb{Z}}(W_1) \subseteq I$. Portanto, $T_{\mathbb{Z}}(W_1) = I$ e as identidades (2.1), (2.2) e (2.3) formam uma base para as identidades $\mathbb{Z}$-graduadas de $W_1$. $\square$

## 2.2 Independência das identidades graduadas de $W_1$

Dizemos que uma base $B$ de $T_{\mathbb{Z}}(W_1)$ é uma base minimal para $T_{\mathbb{Z}}(W_1)$ se $B$ não contém propriamente alguma base de $T_{\mathbb{Z}}(W_1)$. Em outras palavras, $B$ é uma base minimal para $T_{\mathbb{Z}}(W_1)$ se é composta por identidades independentes, ou seja, identidades que não são consequências de quaisquer identidades $\mathbb{Z}$-graduadas em $\mathfrak{L}(X)$. Nesta seção vamos mostrar que podemos reduzir o conjunto $I$ em um conjunto de identidades independentes, tornando-o uma base minimal para $T_{\mathbb{Z}}(W_1)$. Por fim, vamos concluir que $T_{\mathbb{Z}}(W_1)$ não admite qualquer base finita.

Para todo $i \geq -1$ denote por $f_i = [x_1^{(i)}, x_2^{(i)}] \in \mathfrak{L}(X)$ o polinômio graduado definido em (2.1). Note que $f_{-1} = [x_1^{(-1)}, x_2^{(-1)}]$ é uma consequência da identidade $x^{(-2)}$, pois $f_{-1}$ tem $\mathbb{Z}$-grau $-2$.

Lembremos que uma identidade graduada $f$ é consequência de um conjunto de identidades graduadas $S$ se $f$ pertence ao $T_G$-ideal gerado por $S$. Estamos interessados em mostrar que certas identidades graduadas não são consequências de determinados conjuntos de identidades graduadas.

Seja $S$ um conjunto de identidades graduadas. Para mostrar que uma identidade graduada $f$ não é uma consequência das identidades graduadas em $S$ é suficiente mostrar que existe uma álgebra $H$ graduada tal que $H$ satisfaz todas as identidades em $S$ e não satisfaz $f$. De fato, se $f$ fosse consequência de algumas identidades graduadas de $S$ isso implicaria imediatamente em $f$ ser identidade graduada para $H$. Usaremos isso, para mostrar o próximo lema.

Consideremos $H$, como a álgebra de Lie das matrizes $3 \times 3$ triangulares superior com diagonal nula sobre $K$. Para cada $i \geq 0$ vamos definir subespaços vetoriais $H_k$ ($k \in \mathbb{Z}$) em $H$ como segue: se $i = 0$ então $H_0 = H$ e $H_k = 0$ para $k \neq 0$; se $i > 0$ então $H_i$ é o espaço gerado por $E_{12}$ e $E_{23}$, $H_{2i}$ gerado por $E_{13}$ e $H_k = 0$ para todo $k \neq i, 2i$. Aqui, $E_{rs}$ é a matriz que tem 1 na posição $(r, s)$ e 0 nas demais posições. Temos que $H = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} H_k$ é uma álgebra de Lie $\mathbb{Z}$-graduada, pois para $i = 0$ temos que $H$ possui a $\mathbb{Z}$-graduação trivial. No caso em que $i > 0$, como $(E_{12}+E_{23}) \cdot E_{13} = E_{13} \cdot (E_{12}+E_{23}) = 0$, $(E_{12} + E_{23}) \cdot (E_{12} + E_{23}) = E_{13}$, $E_{13} \cdot E_{13} = 0$ temos que $H_i H_{2i} = H_{2i} H_i \subseteq H_{3i} = \{0\}$, $H_i H_i \subseteq H_{2i}$, $H_{2i} H_{2i} \subseteq H_{4i} = \{0\}$. Desse modo, para cada $i$ temos que $\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} H_k$ é uma $\mathbb{Z}$-graduação para $H$.

**Lema 2.22.** *Para cada $i \geq 0$, a identidade graduada $f_i$ não é uma consequência das identidades (2.2), (2.3) e todas $f_j$ onde $j \geq 0$, $j \neq i$.*

*Demonstração.* Sejam $i \geq 0$ e $H$ a álgebra de Lie das matrizes $3 \times 3$ triangulares superior com diagonal nula sobre $K$, com a graduação definida anteriormente. Já que $[E_{12}, E_{23}] = E_{12}E_{23} - E_{23}E_{12} = E_{13}$, a identidade graduada $f_i = [x_1^{(i)}, x_2^{(i)}]$ não é satisfeita em $H$ para todo $i \geq 0$. Por outro lado, temos que $H$ satisfaz todas identidades graduadas (2.3), pois $H_k = 0$ para $k \neq i, 2i$. E $H$ satisfaz todas as identidades $f_j$ onde $j \geq 0$ e $j \neq i$, pois pelas $\mathbb{Z}$-graduações definidas $H_j = 0$ para todo $j \neq i$. Por fim, temos também que $H$ satisfaz todas identidades graduadas (2.2), pois $[E_{12} + E_{23}, E_{13}, E_{12} + E_{23}] = [E_{13}, E_{12} + E_{23}, E_3] = [E_{12} + E_{23}, E_{13}, E_{13}] = [E_{13}, E_{12} + E_{23}, E_{12} + E_{13}] = [E_{13}, E_{13}, E_{13}] = [E_{12} + E_{23}, E_{12} + E_{23}, E_{12} + E_{23}] = [E_{12} + E_{23}, E_{12} + E_{23}, E_{13}] = [E_{13}, E_{13}, E_{12} + E_{23}] = 0$. Logo, temos o resultado. □

**Corolário 2.23.** *O conjunto de polinômios $\{f_i \mid i \geq 0\}$ é um conjunto independente de identidades graduadas em $\mathfrak{L}(X)$.*

*Demonstração.* Consequência imediata do Lema 2.22. □

Com isso, queremos ver quais das identidades graduadas da base de $T_{\mathbb{Z}}(W_1)$, provada no capítulo anterior, não podem ser dispensadas, com o intuito de reduzir ao máximo a base encontrada, ou seja, encontrar uma base minimal para $T_{\mathbb{Z}}(W_1)$.

A seguir vamos mostrar, agora que cada identidades graduada $x^{(d)}$ não é uma consequência das identidades graduadas (2.1), (2.2) e das identidades graduadas $x^{(c)}$ onde $c \neq d$. Para isso, procedemos como no lema anterior.

**Lema 2.24.** *Para cada $d \leq -2$, a identidade graduada $x^{(d)}$ não é uma consequência de todas as identidades graduadas (2.1), (2.2) e todas identidades $x^{(c)}$ onde $c \neq d$.*

*Demonstração.* Sejam $d \in \mathbb{Z}$ e $U$ a álgebra de Lie de dimensão 1 sobre $K$. A álgebra $U = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} U_i$ é $\mathbb{Z}$-graduada trivialmente, ou seja, $U_i = U$ se $i = d$ e zero caso contrário. Toda álgebra de Lie unidimensional é abeliana. Assim, $U$ satisfaz as identidades graduadas $\{[x_1^{(i)}, x_2^{(i)}], i \geq -1\}$. Em (2.2), se $a \neq d$, $b \neq d$ ou $c \neq d$ então são identidades graduadas de $U$, e se $a = b = c = d$ então $\alpha[x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(c)}] - \beta[x_1^{(a)}, x_3^{(c)}, x_2^{(b)}] = 0$, pois $U$ é abeliano. Temos também que $U$ satisfaz $x^{(c)}$, já que $U_c = 0$. Porém, $U$ não satisfaz a identidade graduada $x^{(d)}$, pois $x^{(d)} \neq 0$ para todo elemento não nulo de $U$. Portanto, temos o resultado. □

**Corolário 2.25.** *O conjunto de polinômios $\{x^{(d)} \mid d \leq -2\}$ é um conjunto independente de identidades graduadas em $\mathfrak{L}(X)$.*

*Demonstração.* Consequência imediata do Lema 2.11. □

Agora, denotemos por $f_{abc} = \alpha[x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(c)}] - \beta[x_1^{(a)}, x_3^{(c)}, x_2^{(b)}]$ as identidades graduadas definidas em (2.2). Recordemos que $\alpha = (c-a)(b-c-a)$ e $\beta = (b-a)(c-b-a)$. Primeiro, observamos que, sempre que $c = a$ temos $\alpha = 0$, mas o segundo comutador de

$f_{abc}$ desaparece, devido a identidade graduada (2.1) e analogamente para $b = a$. Assim, podemos supor $b \neq a$ e $c \neq a$. Além disso, se $b = a + c$ então $\alpha = 0$, mas o segundo comutador em $f_{abc}$ desaparece também devido a (2.1). Assim, podemos supor $b \neq a + c$ e analogamente $c \neq a + b$. Observe que se $c = b$ então,

$$
\begin{aligned}
f_{abb}(x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(c)}) &= -(b-a)a[x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(c)}] - (b-a)(-a)[x_1^{(a)}, x_3^{(c)}, x_2^{(b)}] \\
&= -(b-a)a([x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(b)}] - [x_1^{(a)}, x_3^{(b)}, x_2^{(b)}]) \\
&= -(b-a)a[x_1^{(a)}, [x_2^{(b)}, x_3^{(b)}]]
\end{aligned}
$$

pois, pela Observação 1.53, temos $[x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(b)}] = [x_1^{(a)}, x_3^{(b)}, x_2^{(b)}] + [x_1^{(a)}, [x_2^{(b)}, x_3^{(b)}]]$. Assim, $f_{abb}(x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(c)}) = -(b-a)a[x_1^{(a)}, [x_2^{(b)}, x_3^{(b)}]]$ pertence ao $T_{\mathbb{Z}}$-ideal gerado pelas identidades (2.1). Assim, podemos supor também que $b \neq c$. Similarmente, se $a = b + c$ obtemos:

$$
\begin{aligned}
f_{(b+c)bc}(x_1^{(b+c)}, x_2^{(b)}, x_3^{(c)}) &= 2bc[x_1^{(b+c)}, x_2^{(b)}, x_3^{(c)}] - 2bc[x_1^{(b+c)}, x_3^{(c)}, x_2^{(b)}] \\
&= 2bc([x_1^{(b+c)}, x_2^{(b)}, x_3^{(c)}] - [x_1^{(b+c)}, x_3^{(c)}, x_2^{(b)}]) \\
&= 2bc[x_1^{(b+c)}, [x_2^{(b)}, x_3^{(c)}]]
\end{aligned}
$$

pois, pela Observação 1.53, $[x_1^{(b+c)}, x_2^{(b)}, x_3^{(c)}] - [x_1^{(b+c)}, x_3^{(c)}, x_2^{(b)}] = [x_1^{(b+c)}, [x_2^{(b)}, x_3^{(c)}]]$. Assim, $f_{(b+c)bc}(x_1^{(b+c)}, x_2^{(b)}, x_3^{(c)})$ pertence ao $T_{\mathbb{Z}}$- ideal gerado por (2.1). Portanto, podemos supor $a \neq b + c$.

Essas condições nos permitem retirar algumas das identidades de (2.2) e reduzir a base descrita no Teorema 2.21. Esse fato, implica o seguinte lema.

**Lema 2.26.** *Os polinômios (2.1),(2.3) e o polinômio (2.2) com $a, b, c$ distintos e $a \neq b+c$, $b \neq a + c$, $c \neq a + b$, formam uma base para as identidades $\mathbb{Z}$-graduadas de $W_1$.*

A fim de diminuir ainda mais a base descrita no lema anterior, vamos impor mais restrições nas identidades graduadas (2.2). É o que faremos na sequência.

**Lema 2.27.** *Para todo $a, b, c \geq -1$,*

$$f_{acb}(x_1^{(a)}, x_3^{(c)}, x_2^{(b)}) = f_{bac}(x_2^{(b)}, x_1^{(a)}, x_3^{(c)}) = -f_{abc}(x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(c)}).$$

*Demonstração.* Note que $f_{acb}(x_1^{(a)}, x_3^{(c)}, x_2^{(b)}) = \gamma[x_1^{(a)}, x_3^{(c)}, x_2^{(b)}] - \delta[x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(c)}]$ onde $\gamma = (b-a)(c-b-a) = \beta$ e $\delta = (c-a)(b-c-a) = \alpha$. Consequentemente,

$$f_{acb}(x_1^{(a)}, x_3^{(c)}, x_2^{(b)}) = -f_{abc}(x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(c)}).$$

De fato,

$$\begin{aligned}
f_{acb}(x_1^{(a)}, x_3^{(c)}, x_2^{(b)}) &= (b-a)(c-b-a)[x_1^{(a)}, x_3^{(c)}, x_2^{(b)}] - (c-a)(b-c-a)[x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(c)}] \\
&= -((c-a)(b-c-a))[x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(c)}] - (c-b-a)[x_1^{(a)}, x_3^{(c)}, x_2^{(b)}] \\
&= -f_{abc}(x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(c)}).
\end{aligned}$$

Além disso, pela Identidade de Jacobi,

$$-[x_2^{(b)}, x_3^{(c)}, x_1^{(a)}] = [x_3^{(c)}, x_1^{(a)}, x_2^{(b)}] + [x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(c)}].$$

Assim,

$$\begin{aligned}
f_{bac}(x_2^{(b)}, x_1^{(a)}, x_3^{(c)}) &= \mu[x_2^{(b)}, x_1^{(a)}, x_3^{(c)}] - \nu[x_2^{(b)}, x_3^{(c)}, x_1^{(a)}] \\
&= -\mu[x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(c)}] + \nu[x_3^{(c)}, x_1^{(a)}, x_2^{(b)}] + \nu[x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(c)}] \\
&= (\nu-\mu)[x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(c)}] + \nu[x_3^{(c)}, x_1^{(a)}, x_2^{(b)}],
\end{aligned}$$

onde $\mu = (c-b)(a-c-b)$, $\nu = (a-b)(c-a-b)$. Temos que $\nu = -(b-a)(c-b-a) = -\beta$ e que:

$$\begin{aligned}
(\nu-\mu) &= -(b-a)(c-b-a) + (c-b)(a-c-b) \\
&= ((c-b-a)b - a(c-b-a) + c(a-c-b) - b(a-c-b)) \\
&= (bc - b^2 - ab - ac + ab + a^2 + ac - c^2 - bc - ba + bc + b^2) \\
&= -(a^2 - c^2 - ab + bc) \\
&= -(-(c-a)(c+a) + b(c-a)) \\
&= -((c-a)(b-c-a)) \\
&= -\alpha.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
f_{bac}(x_2^{(b)}, x_1^{(a)}, x_3^{(c)}) &= -\alpha[x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(c)}] - \beta[x_3^{(c)}, x_1^{(a)}, x_2^{(b)}] \\
&= -f_{abc}(x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(c)}).
\end{aligned}$$

Portanto, $f_{acb}(x_1^{(a)}, x_3^{(c)}, x_2^{(b)}) = f_{bac}(x_2^{(b)}, x_1^{(a)}, x_3^{(c)}) = -f_{abc}(x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(c)})$. □

**Corolário 2.28.** *Para todo $a, b, c \geq -1$,*

$$\begin{aligned}
f_{bca}(x_2^{(b)}, x_3^{(c)}, x_1^{(a)}) &= f_{cab}(x_3^{(c)}, x_1^{(a)}, x_2^{(b)}) = f_{abc}(x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(c)}), \\
f_{cba}(x_3^{(c)}, x_2^{(b)}, x_1^{(a)}) &= -f_{abc}(x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(c)}).
\end{aligned}$$

*Demonstração.* Usando o Lema 2.27, concluímos que:

$$\begin{aligned}
f_{bca}(x_2^{(b)}, x_3^{(c)}, x_1^{(a)}) &= (a-b)(c-a-b)[x_2^{(b)}, x_3^{(c)}, x_1^{(a)}] \\
&= -(c-b)(a-c-b)[x_2^{(b)}, x_1^{(a)}, x_3^{(c)}] \\
&= \nu[x_2^{(b)}, x_3^{(c)}, x_1^{(a)}] - \mu[x_2^{(b)}, x_1^{(a)}, x_3^{(c)}] \\
&= -(\mu[x_2^{(b)}, x_1^{(a)}, x_3^{(c)}] - \nu[x_2^{(b)}, x_3^{(c)}, x_1^{(a)}]) \\
&= -f_{bac}(x_1^{(b)}, x_2^{(a)}, x_3^{(c)}) \\
&= f_{abc}(x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(c)}).
\end{aligned}$$

Pela Identidade de Jacobi temos $-[x_3^{(c)}, x_2^{(b)}, x_1^{(a)}] = [x_2^{(b)}, x_1^{(a)}, x_3^{(c)}] + [x_1^{(a)}, x_3^{(c)}, x_2^{(b)}]$. Assim,

$$\begin{aligned}
f_{cab}(x_3^{(c)}, x_1^{(a)}, x_2^{(b)}) &= \gamma_1[x_3^{(c)}, x_1^{(a)}, x_2^{(b)}] - \delta_1[x_3^{(c)}, x_2^{(b)}, x_1^{(a)}] \\
&= \gamma_1[x_3^{(c)}, x_1^{(a)}, x_2^{(b)}] + \delta_1[x_2^{(b)}, x_1^{(a)}, x_3^{(c)}] + \delta_1[x_1^{(a)}, x_3^{(c)}, x_2^{(b)}] \\
&= -\gamma_1[x_1^{(a)}, x_3^{(c)}, x_2^{(b)}] - \delta_1[x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(c)}] + \delta_1[x_1^{(a)}, x_3^{(c)}, x_2^{(b)}] \\
&= (\delta_1 - \gamma_1)[x_3^{(c)}, x_1^{(a)}, x_2^{(b)}] - \delta_1[x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(c)}],
\end{aligned}$$

onde $\gamma_1 = (b-c)(a-b-c)$ e $\delta_1 = (a-c)(b-a-c)$. Como escrevemos no Lema 2.27, $f_{acb}(x_1^{(a)}, x_3^{(c)}, x_2^{(b)}) = \gamma[x_1^{(a)}, x_3^{(c)}, x_2^{(b)}] - \delta[x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(c)}]$ onde $\gamma = (b-a)(c-b-a)$ e $\delta = (c-a)(b-c-a)$. Notemos que $\delta_1 = -((c-a)(b-c-a)) = -\delta$ e que

$$\begin{aligned}
(\delta_1 - \gamma_1) &= (a-c)(b-a-c) - (b-c)(a-b-c) \\
&= ab - a^2 - ac - bc + ac + c^2 - ab + b^2 + bc + ac - bc - c^2 \\
&= -a^2 + b^2 + ac - bc \\
&= (b-a)(b+a) - c(b-a) \\
&= (b-a)(b+a-c) \\
&= -(b-a)(c-b-a) \\
&= -\gamma.
\end{aligned}$$

Isso implica, usando o Lema 2.27, que

$$\begin{aligned}
f_{cab}(x_3^{(c)}, x_1^{(a)}, x_2^{(b)}) &= -\gamma[x_1^{(a)}, x_3^{(c)}, x_2^{(b)}] + \delta[x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(c)}] \\
&= -(\gamma[x_1^{(a)}, x_3^{(c)}, x_2^{(b)}] - \delta[x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(c)}]) \\
&= -f_{acb}(x_1^{(a)}, x_3^{(c)}, x_2^{(b)}) \\
&= f_{abc}(x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(c)}).
\end{aligned}$$

Novamente, pelo Lema 2.27 temos

$$f_{bca}(x_2^{(b)}, x_3^{(c)}, x_1^{(a)}) = f_{cab}(x_3^{(c)}, x_1^{(a)}, x_2^{(b)}) = f_{abc}(x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(c)}).$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
f_{cba}(x_3^{(c)}, x_2^{(b)}, x_1^{(a)}) &= (a-c)(b-a-c)[x_3^{(c)}, x_2^{(b)}, x_1^{(a)}] - (b-c)(a-b-c)[x_3^{(c)}, x_1^{(a)}, x_2^{(b)}] \\
&= -((b-c)(a-b-c)[x_3^{(c)}, x_1^{(a)}, x_2^{(b)}] \\
&- (a-c)(b-a-c)[x_3^{(c)}, x_2^{(b)}, x_1^{(a)}]) \\
&= -f_{cab}(x_3^{(c)}, x_2^{(b)}, x_1^{(a)}) \\
&= -f_{abc}(x_1^{(a)}, x_2^{(b)}, x_3^{(c)}).
\end{aligned}$$

□

Assim, o Lema 2.26 pode ser reescrito como segue.

**Lema 2.29.** *Os polinômios (2.1), (2.3) e (2.2) com $a > b > c \geq -1$ e $a \neq b+c$, $b \neq a+c$, formam uma base para as identidades $\mathbb{Z}$-graduadas de $W_1$.*

Diante das restrições feitas para as identidades graduadas $f_{abc}$, vamos mostrar que não podemos impor mais restrições nessas identidades, ou seja, todas as identidades restantes do tipo $f_{abc}$ são indispensáveis para a base de $T_{\mathbb{Z}}(W_1)$. Provamos isso na próxima proposição.

**Proposição 2.30.** *Seja $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a > b > c \geq -1$, $a \neq b+c$, $b \neq a+c$. Então a identidade graduada $f_{abc}$ não é uma consequência de todas as identidades (2.1),(2.3) e todas as outras identidades $f_{a'b'c'}$ onde $a' > b' > c' \geq -1$, $(a', b', c') \neq (a, b, c)$.*

*Demonstração.* Vamos definir uma álgebra de Lie $\mathbb{Z}$-graduada $L^{(a,b,c)}$ tal que:
$(i)$ $L^{(a,b,c)}$ satisfaz todas identidades (2.1), (2.3) e todas identidades $f_{a'b'c'}$ onde $a' > b' > c' \geq -1$, $(a', b', c') \neq (a, b, c)$;
$(ii)$ $L^{(a,b,c)}$ não satisfaz a identidade $f_{abc}$.

Sabemos que a existência de uma álgebra $L^{(a,b,c)}$ satisfazendo tais condições prova a proposição. Consideremos $L^{(a,b,c)}$ a álgebra de Lie das matrizes triangulares superiores com diagonal nula $4 \times 4$ sobre $K$. Sejam $h_a = E_{12}$, $h_b = E_{23}$, $h_c = E_{34}$. Temos que $L^{(a,b,c)}$ é uma álgebra nilpotente de índice 3 e de dimensão 6, com $K$-base consistindo de $h_a$,$h_b$,$h_c$,$h'_{a+b} = [h_a, h_b] = [E_{12}, E_{23}] = E_{13}$, $h'_{b+c} = [h_b, h_c] = [E_{23}, E_{34}] = E_{24}$, $h''_{a+b+c} = [h_a, h_b, h_c] = E_{14}$. Note que $h'_{a+c} = [E_{12}, E_{34}] = 0$.

Para cada $i \in \mathbb{Z}$, seja $H_i$ espaço vetorial gerado pelos elementos $h_i$,$h'_i$, $h''_i$ se algum desses elementos existe e 0 caso contrário. Assim, $L^{(a,b,c)} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} H_i$ é uma álgebra $\mathbb{Z}$-graduada. Note que $H_i = 0$ se $i \notin \{a, b, c, a+b, b+c, a+b+c\}$; em particular, $H_i = 0$ se $i < -1$, pois $a > b > c \geq -1$. Dessa forma, álgebra $L^{(a,b,c)}$ satisfaz as identidades graduadas $x^{(d)} = 0$ para $d \leq -2$, que são as identidades (2.3).

Agora, vamos checar que a álgebra de Lie graduada $L^{(a,b,c)}$ satisfaz as identidades (2.1), que são as identidades $[x_1^{(i)}, x_2^{(i)}]$ $(i \geq -1)$. Se $i \in \{a, b, c, a+b, b+c, a+b+c\}$ e dimensão de $H_i = 1$, ou seja, se $H_i$ é gerado por apenas um desses elementos então $H_i$ é abeliano e $L^{(a,b,c)}$ satisfaz $[x_1^{(i)}, x_2^{(i)}]$.

Suponha que $i = a$. Como $b \neq a$, $c \neq a$ e $b + c \neq a$, temos que $h_b, h_c, h'_{b+c} \notin H_i$. Segue que $H_i$ está contido no espaço $K$-linear gerado por $h_a = E_{12}$, $h'_{a+b} = E_{13}$, $h''_{a+b+c} = E_{14}$. Como $[h_a, h'_{a+b}] = [E_{12}, E_{13}] = 0$, $[h_a, h''_{a+b+c}] = [E_{12}, E_{14}] = 0$ e $[h'_{a+b}, h''_{a+b+c}] = [E_{13}, E_{14}] = 0$ temos que o comutador de quaisquer dois desses elementos é igual a 0 e a identidade $[x_1^{(i)}, x_2^{(i)}]$ é satisfeita em $L^{(a,b,c)}$.

Suponha que $i = b$. Similarmente, temos $h_a, h_c \notin H_i$. Assim, $H_i$ está contido no espaço $K$-linear gerado por $h_b = E_{23}$,$h'_{a+b}$, $h'_{b+c} = E_{24}$ e $h''_{a+b+c} = E_{14}$. Como o comutador de quaisquer dois desses elementos é igual a 0 temos que a identidade $[x_1^{(i)}, x_2^{(i)}]$ é satisfeita em $L^{(a,b,c)}$.

Analogamente, se $i = c$ então $h_a, h_b, h'_{a+b} \notin H_i$. Assim $H_i$ está contido no espaço $K$-linear gerado por $h_c$, $h'_{b+c}$ e $h''_{a+b+c}$. Logo, as identidades $[x_1^{(i)}, x_2^{(i)}]$ também são satisfeitas em $L^{(a,b,c)}$.

Finalmente, suponha que $i \in \{a + b, b + c, a + b + c\}$ e $i \neq a, b, c$. Assim, $H_i$ está contida na subálgebra gerada por $h'_{a+b} = E_{13}$, $h'_{b+c} = E_{24}$ e $h''_{a+b+c} = E_{14}$. Como $[E_{13}, E_{24}] = 0$, $[E_{13}, E_{14}] = 0$ e $[E_{24}, E_{14}] = 0$ temos que as identidades $[x_1^{(i)}, x_2^{(i)}]$ são satisfeitas em $L^{(a,b,c)}$.

Logo, a álgebra $L^{(a,b,c)}$ satisfaz as identidades graduadas $[x_1^{(i)}, x_2^{(i)}]$.

Sejam $a', b', c' \in \mathbb{Z}$, $a' > b' > c' \geq -1$ e $(a', b', c') \neq (a, b, c)$. Afirmamos que as identidades graduadas $[x_1^{(a')}, x_2^{(b')}, x_3^{(c')}]$ e $[x_1^{(a')}, x_3^{(c')}, x_2^{(b')}]$ são satisfeitas em $L^{(a,b,c)}$.

De fato, se $a' \notin \{a, b, c, a+b, b+c, a+b+c\}$ então $H_{a'} = 0$. Assim, $[H_{a'}, H_{b'}, H_{c'}] = [H_{a'}, H_{c'}, H_{b'}] = 0$, isto é, as identidades graduadas $[x_1^{(a')}, x_2^{(b')}, x_3^{(c')}]$ e $[x_1^{(a')}, x_3^{(c')}, x_2^{(b')}]$ são identidades graduadas em $L^{(a,b,c)}$.

Agora, suponha que $a', b', c' \in \{a, b, c, a + b, b + c, a + b + c\}$. Como $(a', b', c') \neq (a, b, c)$, pelo menos um dos elementos $a', b', c'$ não pertencem ao conjunto $\{a, b, c\}$. Suponha que $a' \notin \{a, b, c\}$. Logo, $a' \in \{a + b, b + c, a + b + c\}$ e $H_{a'}$ está contido no espaço $K$-linear $V$ gerado por $h'_{a+b}, h'_{b+c}$ e $h''_{a+b+c}$, isto é, está contido no espaço gerado pelas matrizes $E_{13}, E_{24}, E_{14}$. Segue que $[H_{a'}, H_{b'}, H_{c'}] \subseteq [V, H_{b'}, H_{c'}]$.

Notemos que, para qualquer $H_{b'}$, temos $[V, H_{b'}] = 0$, $[V, H_{b'}] = E_{14}$ ou $[V, H_{b'}] = -E_{14}$. Como $E_{14} \cdot E_{lk} = E_{lk} \cdot E_{14} = 0$ para todo $E_{kl} \in \{E_{12}, E_{23}, E_{34}, E_{13}, E_{24}, E_{14}\}$, temos $[V, H_{b'}, H_{c'}] = 0$.

Podemos verificar de maneira similar que se $b'$ ou $c'$ não pertence ao conjunto $\{a, b, c\}$ então $[H_{a'}, H_{b'}, H_{c'}] = [H_{a'}, H_{c'}, H_{b'}] = 0$, isto é, $[x_1^{(a')}, x_2^{(b')}, x_3^{(c')}]$ e $[x_1^{(a')}, x_3^{(c')}, x_2^{(b')}]$ são identidades graduadas em $L^{(a,b,c)}$.

Assim, se $a', b', c' \in \mathbb{Z}$, $a' > b' > c' \geq -1$ e $(a', b', c') \neq (a, b, c)$ então $L^{(a,b,c)}$ satisfaz a identidade graduada

$$f_{a'b'c'} = \alpha[x_1^{(a')}, x_2^{(b')}, x_3^{(c')}] - \beta[x_1^{(a')}, x_3^{(c')}, x_2^{(b')}],$$

como requerido. Além disso, como $[h_a, h_c, h_b] = [E_{12}, E_{34}, E_{23}] = 0$, temos que

$$\begin{aligned} f_{abc}(h_a, h_b, h_c) &= (c-a)(b-c-a)[h_a, h_b, h_c] - (b-a)(c-b-a)[h_a, h_c, h_b] \\ &= (c-a)(b-c-a)[h_a, h_b, h_c] \\ &= (c-a)(b-c-a)h''_{a+b+c}. \end{aligned}$$

Note que $(c-a)(b-c-a) \neq 0$, pois $c < a$ e $b \neq a+c$. Assim, $f_{abc}$ não é uma identidade graduada em $L^{(a,b,c)}$.

Portanto, $L^{(a,b,c)}$ satisfaz todas identidades (2.1), (2.3) e $f_{a'b'c'}$ onde $a' > b' > c' \geq -1$, $(a', b', c') \neq (a, b, c)$, mas não satisfaz a identidade $f_{abc}$. Assim, a prova da proposição está completa. □

**Corolário 2.31.** *O conjunto de polinômios* $\{f_{abc} \mid a > b > c \geq -1, a \neq b+c, b \neq a+c\}$ *é um conjunto independente de identidades graduadas em* $\mathfrak{L}(X)$.

*Demonstração.* Consequência imediata da Proposição 2.30. □

Reunindo todos os resultados anteriores obtemos que o conjunto de polinômios $[x_1^{(i)}, x_2^{(i)}]$ $(i \geq 0)$, $x^{(d)}$ $(d \leq -2)$ e $f_{abc}$ com $a > b > c \geq -1$, $a \neq b+c$, $b \neq a+c$ é um conjunto mínimo de geradores para o $T_{\mathbb{Z}}(W_1)$. Assim, temos o seguinte teorema:

**Teorema 2.32.** *As identidades graduadas* $[x_1^{(i)}, x_2^{(i)}]$ $(i \geq 0)$, $x^{(d)}$ $(d \leq -2)$ *e* $f_{abc}$ *com* $a > b > c \geq -1$, $a \neq b+c$, $b \neq a+c$ *formam uma base minimal para as identidades* $\mathbb{Z}$*-graduadas de* $W_1$ *sobre um corpo de característica 0.*

**Corolário 2.33.** *As identidades* $\mathbb{Z}$*-graduadas da álgebra de Lie* $W_1$ *sobre o corpo de característica 0 não admitem qualquer base finita.*

*Demonstração.* Suponha que o conjunto das identidades $\mathbb{Z}$-graduadas de $W_1$ admita uma base finita $B$. Podemos supor sem perda de generalidade que $B$ é composto por polinômios mônicos. Temos que todas as identidades $x^{(d)}$ com $d \leq -2$ são consequências de identidades em $B$. Isso implica que $x^{(d)} \in B$ para todo $d \leq -2$. Mas isso é um absurdo, pois o conjunto de polinômios $\{x^{(d)} \mid d \leq -2\}$ é um conjunto infinito e independente de identidades graduadas em $\mathfrak{L}(X)$. Portanto, as identidades $\mathbb{Z}$-graduadas de $W_1$ não admitem qualquer base finita. □

# Capítulo 3

# Cocaracteres $\mathbb{Z}$-graduados de $W_1$

No capítulo 1 apresentamos uma $S_n$-ação sobre os polinômios multilineares em $n$ variáveis e definimos o $n$-cocaracter de uma álgebra. Neste capítulo veremos que de forma análoga, fixado $s$ um inteiro positivo, há uma $S_{n_1} \times \cdots \times S_{n_s}$-ação no espaço dos polinômios multilineares $G$-graduados com $n_1$-variáveis de $G$-grau $g_1$, $n_2$-variáveis de $G$-grau $g_2$ e assim por diante. Tal ação dará origem a definição de cocaracter $G$-graduado de uma álgebra. O objetivo principal é apresentar como resultado original a descrição dos cocaracteres $\mathbb{Z}$-graduados de $W_1$.

Considere $\mathfrak{L}(X)$ a álgebra de Lie relativamente livre $G$-graduada e $L$ uma álgebra de Lie $G$-graduada.

Supondo $Supp(L) = \{g_1, g_2, \ldots, g_s\}$, sejam $n \geq 0$ e $n_1, \ldots, n_s \geq 0$ tais que $n = n_1 + \cdots + n_s$. Denotamos por $P_{n_1,\ldots,n_s}$ o espaço dos polinômios multilineares de grau $n$ nas variáveis

$$x_1^{(g_1)}, \ldots, x_{n_1}^{(g_1)}, x_{n_1+1}^{(g_2)}, \ldots, x_{n_1+n_2}^{(g_2)}, \ldots, x_{n_1+\cdots+n_{s-1}}^{(g_s-1)}, x_{n_1+\cdots+n_{s-1}+1}^{(g_s)}, \ldots, x_n^{(g_s)}.$$

O espaço $P_{n_1,\ldots,n_s}$ é naturalmente equipado com uma estrutura de $S_{n_1} \times \cdots \times S_{n_s}$-módulo à esquerda munido da seguinte ação

$$\begin{aligned}&(\tau_1, \ldots, \tau_s) f(x_1^{(g_1)}, \ldots, x_{n_1}^{(g_1)}, x_{n_1+1}^{(g_2)}, \ldots, x_{n_1+n_2}^{(g_2)}, \ldots, x_{n_1+\ldots+n_{s-1}}^{(g_{s-1})}, \ldots, x_n^{(g_s)})\\ &= f(x_{\tau_1(1)}^{(g_1)}, \ldots, x_{\tau_1(n_1)}^{(g_1)}, x_{\tau_2(n_1+1)}^{(g_2)}, \ldots, x_{\tau_2(n_1+n_2)}^{(g_2)}, \ldots, x_{\tau_{s-1}(n_1+\cdots+n_{s-1})}^{(g_{s-1})}, \ldots, x_{\tau_s(n)}^{(g_s)}),\end{aligned}$$

em que $f(x_1^{(g_1)}, \ldots, x_{n_1}^{(g_1)}, x_{n_1+1}^{(g_2)}, \ldots, x_{n_1+n_2}^{(g_2)}, \ldots, x_n^{(g_s)}) \in P_{n_1,\ldots,n_s}$, $\tau_1 \in S_{n_1}\{1, \ldots, n_1\}$, $\tau_2 \in S_{n_2}\{n_1+1, \ldots, n_1+n_2\}$, $\ldots$, $\tau_s \in S_{n_s}\{n_1+\cdots+n_{s-1}+1, \ldots, n\}$, em que $S_{n_i}\{m_1, \ldots, m_{n_i}\}$ é o grupo de permutações do conjunto $\{m_1, \ldots, m_{n_i}\}$ com $n_i$ elementos. Para simplificar a notação iremos denotar $S_{n_i}\{m_1, \ldots, m_{n_i}\}$ apenas por $S_{n_i}$, para todo $i \in \{1, \ldots, s\}$.

Como $T_G$-ideais são invariantes pela permutação de variáveis de uma mesma componente homogênea temos que $P_{n_1,\ldots,n_s} \cap T^G(L)$ é um $S_{n_1} \times \cdots \times S_{n_s}$-submódulo de

$P_{n_1,\ldots,n_s}$, para toda álgebra de Lie $G$- graduada $L$. Assim,

$$P_{n_1,\ldots,n_s}(L) = \frac{P_{n_1,\ldots,n_s}}{P_{n_1,\ldots,n_s} \cap T^G(L)}$$

também tem uma estrutura induzida de $S_{n_1} \times \cdots \times S_{n_s}$-módulo à esquerda.

O $S_{n_1} \times \cdots \times S_{n_s}$-caracter de $P_{n_1,\ldots,n_s}(L)$ é chamado de $(n_1, \ldots, n_s)$-cocaracter de $L$, denotado por $\chi_{n_1,\ldots,n_s}(L)$. Decompondo o $(n_1, \ldots, n_s)$-cocaracter em soma de caracteres irredutíveis, obtemos

$$\chi_{n_1,\ldots,n_s}(L) = \sum_{\langle\sigma\rangle \vdash (n_1,\ldots,n_s)} m_{\langle\sigma\rangle} \chi_{\sigma_1} \otimes \cdots \otimes \chi_{\sigma_s}, \tag{3.1}$$

em que $\langle\sigma\rangle = (\sigma_1, \ldots, \sigma_s)$ é uma multipartição de $n$, isto é, $\sigma_1 \vdash n_1, \ldots, \sigma_s \vdash n_s$, $m_{\langle\sigma\rangle} \geq 0$ é um inteiro não negativo e $\chi_{\sigma_i}$ é o caracter correspondente a $\sigma_i$.

Temos uma versão análoga ao Teorema 1.96 que auxilia no cálculo do $(n_1, \ldots, n_s)$-cocaracter, como segue.

**Teorema 3.1.** *Seja $L$ uma $PI$-álgebra $G$-graduada com o $(n_1, \ldots, n_s)$-cocaracter dado por (3.1). Para uma multipartição $(\sigma_1, \ldots, \sigma_s)$ de $n = n_1 + \cdots + n_s$, a multiplicidade $m_{\langle\sigma\rangle}$ é igual a zero se, e somente se, para toda s-upla de tabela $T_1, \ldots, T_s$ de formas $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$, respectivamente, e para todo polinômio $f = f(x_1^{(g_1)}, \ldots, x_{n_1}^{(g_1)}, x_{n_1+1}^{(g_2)}, \ldots, x_n^{(g_s)}) \in P_{n_1,\ldots,n_s}$, a álgebra de Lie $L$ satisfaz a identidade $e_{T_{\langle\sigma\rangle}} f \equiv 0$, em que $e_{T_{\langle\sigma\rangle}} = e_{T_1} \cdots e_{T_s}$.*

Ainda que $supp(L)$ seja infinito, fixado um inteiro $s \geq 1$ e elementos $g_1, \ldots, g_s \in supp(L)$ tais que $g_i \neq g_j$ para $i \neq j$ é possível definir de forma análoga o espaço dos polinômios multilineares nas variáveis

$$x_1^{(g_1)}, \ldots, x_{n_1}^{(g_1)}, x_{n_1+1}^{(g_2)}, \ldots, x_{n_1+n_2}^{(g_2)}, \ldots, x_{n_1+\cdots+n_{s-1}}^{(g_s-1)}, x_{n_1+\cdots+n_{s-1}+1}^{(g_s)}, \ldots, x_n^{(g_s)}$$

denotado por $P_{n_1,\ldots,n_s}^{(g_1,\ldots g_s)}$. Como antes, temos que o espaço $P_{n_1,\ldots,n_s}^{(g_1,\ldots g_s)}$ tem uma estrutura de $S_{n_1} \times \cdots \times S_{n_s}$-módulo onde $S_{n_1} \times \cdots \times S_{n_s}$ age à esquerda em $P_{n_1,\ldots,n_s}^{(g_1,\ldots g_s)}$ permutando as variáveis homogêneas de $G$-grau $g_1$, ..., $g_s$ separadamente, isto é, $S_{n_i}$ permuta as variáveis homogêneas de $G$-grau $g_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, s\}$. O espaço

$$P_{n_1,\ldots,n_s}^{(g_1,\ldots g_s)}(L) = \frac{P_{n_1,\ldots,n_s}^{(g_1,\ldots g_s)}}{P_{n_1,\ldots,n_s}^{(g_1,\ldots g_s)} \cap T_G(L)}$$

herda uma estrutura de $S_{n_1} \times \cdots \times S_{n_s}$-módulo e denotamos por $\chi_{n_1,\ldots,n_s}^{(g_1,\ldots,g_s)}(L)$ seu caracter, o qual podemos escrever como

$$\chi_{n_1,\ldots,n_s}^{(g_1,\ldots,g_s)}(L) = \sum_{\langle\sigma\rangle \vdash (n_1,\ldots,n_s)} m_{\langle\sigma\rangle} \chi_{\sigma_1}^{(g_1)} \otimes \cdots \otimes \chi_{\sigma_s}^{(g_s)}, \tag{3.2}$$

onde $\langle\sigma\rangle = (\sigma_1, \ldots, \sigma_s)$ é uma multipartição de $n$, $m_{\langle\sigma\rangle}$ é um inteiro não negativo e $\chi_{\sigma_i}^{(g_i)}$ é o caracter correspondente a $\sigma_i$. Chamamos $\chi_{n_1,\ldots,n_s}^{(g_1,\ldots,g_s)}(L)$ o $(n_1^{(g_1)}, \ldots, n_s^{(g_s)})$-cocaracter de $L$. Quando necessário vamos escrever $n_i^{(g_i)}$ em vez de $n_i$ para evidenciar as componentes homogêneas.

Dizemos que os elementos da forma $\chi_{n_1,\ldots,n_s}^{(g_1,\ldots,g_s)}(L)$ para todo $s \geq 1$ e $g_1, g_2, \ldots, g_s \in Supp(L)$, $g_i \neq g_j$, $n_1, n_2, \ldots, n_s$ inteiros positivos são os cocaracteres $G$-graduados de $L$. Como nosso objetivo é calcular os cocaracteres $\mathbb{Z}$-graduados de $W_1$, vamos prosseguir considerando $L = W_1$ e $G = \mathbb{Z}$.

Sejam $X_i = \{x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots\}$, $i \in \mathbb{Z}$ uma família infinita enumerável de conjuntos infinitos enumeráveis disjuntos e $X = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{Z}} X_i$. Considere $\mathfrak{L}(X)$ a álgebra relativamente livre de Lie $\mathbb{Z}$-graduada. Recordemos que a $\mathbb{Z}$-graduação em $W_1$ é dada por

$$W_1 = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} L_i,$$

onde $L_i$ é gerado por $t^{i+1}\frac{d}{dt} = e_i$ se $i \geq -1$ e $L_i = 0$ caso contrário. Assim, o $supp(W_1) = \{g \in \mathbb{Z} \,|\, g \geq -1\}$ que é um conjunto infinito.

Para $g_1$, ..., $g_s \in \mathbb{Z}$ ($g_i \geq -1$ para todo $i$) com $g_1 > g_2 > \cdots > g_s$ e um inteiro positivo $n = n_1 + \cdots + n_s$, $n_i \geq 0$ fixos, sejam $P_{n_1,\ldots,n_s}^{(g_1,\ldots g_s)}(W_1)$ o espaço dos polinômios multilineares em $\dfrac{\mathfrak{L}(X)}{T_{\mathbb{Z}}(W_1)}$, ou seja,

$$P_{n_1,\ldots,n_s}^{(g_1,\ldots g_s)}(W_1) = \frac{P_{n_1,\ldots,n_s}^{(g_1,\ldots g_s)}}{P_{n_1,\ldots,n_s}^{(g_1,\ldots g_s)} \cap T_{\mathbb{Z}}(W_1)}$$

e seu caracter

$$\chi_{n_1,\ldots,n_s}^{(g_1,\ldots,g_s)}(W_1) = \sum_{\langle\sigma\rangle\vdash(n_1,\ldots,n_s)} m_{\langle\sigma\rangle}\chi_{\sigma_1}^{(g_1)} \otimes \cdots \otimes \chi_{\sigma_s}^{(g_s)},$$

o qual é chamado de $(n_1^{(g_1)}, \ldots, n_s^{(g_s)})$-cocaracter de $W_1$.

Vejamos em um caso particular, como funciona a ação do grupo $S_{n_1} \times S_{n_2} \times \cdots \times S_{n_s}$ sobre $P_{n_1,\ldots,n_s}^{(g_1,\ldots,g_s)}$.

**Exemplo 3.2.** *Considere o comutador multilinear $m = [x_1^{(2)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, x_5^{(0)}, x_6^{(0)}, x_4^{(1)}]$. Temos que $m \in P_{1,3,2}^{(2,1,0)}$, pois $m$ contém uma variável de $\mathbb{Z}$-grau 2, 3 variáveis de $\mathbb{Z}$-grau 1 e duas variáveis de $\mathbb{Z}$-grau 0. Para $(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \in S_1 \times S_3 \times S_2$, tal que $\tau_1 = (1)$,$\tau_2 = (34)$ e $\tau_3 = (56)$ temos que a ação de $(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ em $m$,*

$$((1), (34), (56))m = [x_1^{(2)}, x_2^{(1)}, x_4^{(1)}, x_6^{(0)}, x_5^{(0)}, x_3^{(1)}].$$

**Exemplo 3.3.** *Seja* $m = [x_1^{(1)}, x_2^{(0)}, x_4^{(0)}, x_3^{(0)}] \in P_{1,3}^{(1,3)}$ *e as tabelas*

$$T_1 = \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline \end{array} \quad e \quad T_2 = \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 4 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

*Temos que* $e_{T_1} = (1)$ *e* $e_{T_2} = (2) + (23) - (24) - (243)$. *Assim,*

$$\begin{aligned} e_{T_2} m = & ([x_1^{(1)}, x_2^{(0)}, x_4^{(0)}, x_3^{(0)}] - [x_1^{(1)}, x_4^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}]) \\ & +([x_1^{(1)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)}, x_2^{(0)}] - [x_1^{(1)}, x_4^{(0)}, x_3^{(0)}, x_2^{(0)}]). \end{aligned}$$

*E agindo* $e_{T_1}$ *em* $e_{T_2} m$ *obtemos*

$$\begin{aligned} e_{T_1} e_{T_2} m = & ([x_1^{(1)}, x_2^{(0)}, x_4^{(0)}, x_3^{(0)}] - [x_1^{(1)}, x_4^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}]) \\ & +([x_1^{(1)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)}, x_2^{(0)}] - [x_1^{(1)}, x_4^{(0)}, x_3^{(0)}, x_2^{(0)}]). \end{aligned}$$

O polinômio $e_{T_1} e_{T_2} m$ descrito acima é uma identidade polinomial graduada para $W_1$, já que fazendo a avaliação nos elementos da base de $W_1$ obtemos:

$$[e_1, e_0, e_0, e_0] - [e_1, e_0, e_0, e_0] + [e_1, e_0, e_0, e_0] - [e_1, e_0, e_0, e_0] = 0.$$

Note que cada par de comutadores alternados em alguma variável de mesmo $\mathbb{Z}$-grau sempre se anulará ao ser avaliado pelos elementos de $W_1$, pois a dimensão de cada uma das componentes da $\mathbb{Z}$-graduação de $W_1$ é 1.

Vejamos a seguinte proposição que generaliza o argumento do exemplo anterior e que facilitará no cálculo dos cocaracteres graduados de $W_1$.

**Proposição 3.4.** *Seja* $\langle\sigma\rangle = (\sigma_1, \ldots, \sigma_s)$ *uma multipartição de* $n = n_1 + \cdots + n_s$ *em que* $\sigma_1 \vdash n_1$,..., $\sigma_s \vdash n_s$. *Se o diagrama correspondente a qualquer uma dessas partições tem mais de uma linha então* $m_{\langle\sigma\rangle} = 0$.

*Demonstração.* Suponha que o comprimento da primeira coluna do diagrama correspondente a $\sigma_i$ para algum $i$ é maior que 1. Considere $f = e_{T_1} \cdots e_{T_s} g$ o gerador do módulo irredutível correspondente a $\langle\sigma\rangle$.

Temos que $R_{T_i} \cap C_{T_i} = 1$ para todo $i$ e todo elemento de $S_{n_i}$ pode ser unicamente escrito como um produto $r \cdot c$ em que $r \in R_{T_i}$ e $c \in C_{T_i}$. Assim, ao aplicarmos $e_{T_i}$ em $g$ nenhum de seus monômios se anulará. Logo, $f$ é uma combinação linear de termos que contém pelo menos duas variáveis antissimétricas pertencentes a cada um dos $X_i' s$, $X_i = \{x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots\}$, $i \in \mathbb{Z}$.

Para provar a proposição é suficiente mostrar que em $W_1$ qualquer polinômio que é antissimétrico em pelo menos duas variáveis de cada componente $X_i$ é identicamente nula. Mas, como a dimensão de cada uma das componentes da $\mathbb{Z}$-graduação de $W_1$ é 1, temos o resultado. □

Recordemos que no Capítulo 2 provamos que $I = T_{\mathbb{Z}}(W_1)$. Assim, $u \equiv v$ significa que $u \equiv v$ $(mod\ T_{\mathbb{Z}}(W_1))$.

**Exemplo 3.5.** *Seja* $m_1 = [x_1^{(2)}, x_5^{(-1)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)}]$. *Considere as seguintes tabelas*

$$T_1 = \boxed{1},$$

$$T_2 = \boxed{2\,|\,3\,|\,4},$$

$$T_3 = \boxed{5}.$$

*Temos que*

$$\begin{aligned} e_{T_1}e_{T_2}e_{T_3}m_1 = & [x_1^{(2)}, x_5^{(-1)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)}] + [x_1^{(2)}, x_5^{(-1)}, x_3^{(0)}, x_2^{(0)}, x_4^{(0)}] \\ & + [x_1^{(2)}, x_5^{(-1)}, x_4^{(0)}, x_3^{(0)}, x_2^{(0)}] + [x_1^{(2)}, x_5^{(-1)}, x_2^{(0)}, x_4^{(0)}, x_3^{(0)}] \\ & + [x_1^{(2)}, x_5^{(-1)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)}, x_2^{(0)}] + [x_1^{(2)}, x_5^{(-1)}, x_4^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}]. \end{aligned}$$

*Notemos que cada comutador que compõe o polinômio acima, a menos de reordenação dos índices das variáveis de mesmo* $\mathbb{Z}$*-grau, são todos iguais a* $m_1$. *Como* $[e_2, e_{-1}, e_0, e_0, e_0] = 3e_1$, *temos que cada um desses comutadores não são identidades* $\mathbb{Z}$*-graduadas para* $W_1$. *Assim, a avaliação em* $e_{T_1}e_{T_2}e_{T_3}m_1$ *é igual* $6 \cdot 3e_1 = 18e_1$. *Logo,* $e_{T_1}e_{T_2}e_{T_3}m_1$ *não é identidade* $\mathbb{Z}$*-graduada de* $W_1$.

Como $e_{T_1}e_{T_2}e_{T_3}m \notin T_{\mathbb{Z}}(W_1)$ temos que $e_{T_1}e_{T_2}e_{T_3}m$ é um gerador do módulo irredutível associado a $\langle\sigma\rangle$, quando consideramos as tabelas $T_1, T_2, T_3$.

**Proposição 3.6.** *Sejam* $m \in P_{n_1,\ldots,n_s}^{(g_1,\ldots,g_s)}$ *um comutador multilinear,* $\langle\sigma\rangle = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ *multipartição de* $n = n_1 + \cdots + n_s$ *e* $T_1, \ldots, T_s$ *tabelas correspondentes a* $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$ *respectivamente. Se* $\sigma_1 = (n_1), \ldots, \sigma_n = (n_s)$ *e* $m \notin T_{\mathbb{Z}}(W_1)$ *então* $e_{T_{\langle\sigma\rangle}}m \notin T_{\mathbb{Z}}(W_1)$, *onde* $e_{T_{\langle\sigma\rangle}} = e_{T_1} \cdots e_{T_s}$.

*Demonstração.* Sejam $m \in P_{n_1,\ldots,n_s}^{(g_1,\ldots,g_s)}$ tal que $m \notin T_{\mathbb{Z}}(W_1)$ e $\sigma_1 = (n_1), \ldots, \sigma_n = (n_s)$. Temos que as respectivas tabelas de $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ são tabelas que possuem apenas uma linha. Dessa forma, o elemento $e_{T_{\langle\sigma\rangle}}$ depende apenas do estabilizador de linhas e $e_{T_{\langle\sigma\rangle}}m = \sum_{i=1}^{k} m_i$ onde cada $m_i$, a menos de reordenação de índices de variáveis de mesmo $\mathbb{Z}$-grau, é igual ao comutador $m$, pois a ação em $P_{n_1,\ldots,n_s}^{(g_1,\ldots,g_s)}$ permuta apenas as variáveis de mesmo $\mathbb{Z}$-grau. Assim, a avaliação dos elementos da base de $W_1$ em cada um desses comutadores é igual a um mesmo valor $\alpha$ com $\alpha \neq 0$ já que $m \notin T_{\mathbb{Z}}(W_1)$. Logo, $e_{T_{\langle\sigma\rangle}}m = \sum_{i=1}^{k} m_i \equiv km \equiv k\alpha m'$, onde $m'$ é um comutador da forma canônica e $k\alpha \neq 0$. Portanto, $e_{T_{\langle\sigma\rangle}}m \notin T_{\mathbb{Z}}(W_1)$. $\square$

**Observação 3.7.** *Seja* $f = f(x_1^{(g_1)}, \ldots, x_{n_1}^{(g_1)}, x_{n_1+1}^{(g_2)}, \ldots, x_n^{(g_s)}) \in P_{n_1,\ldots n_s}^{(g_1,\ldots g_s)}$ *um polinômio multilinear. Recordemos que pela Proposição 1.55, independente da posição de uma variável* $x_i$ *em um comutador multilinear* $h(x_1, \ldots, x_n)$, *podemos escrever* $h$ *como combinação* *de comutadores multilineares com primeira variável igual a $x_i$. Assim, $f$ pode ser escrito como combinação linear de comutadores multilineares com primeira variável igual a $x_{n_1}^{(g_1)}$.*

A seguir, descrevemos os cocaracteres $\mathbb{Z}$-graduados de $W_1$, o principal resultado desse capítulo. Ressaltamos que este é um resultado original, não encontrado na literatura.

Lembremos que $x_i^{(a)} > x_j^{(b)}$ significa que ou $a > b$ ou $a = b$ e $i > j$.

**Teorema 3.8.** *Seja*

$$\chi_{n_1,\ldots,n_s}(W_1) = \sum_{\langle\sigma\rangle \vdash (n_1,\ldots,n_s)} m_{\langle\sigma\rangle} \chi_{\sigma_1}^{(g_1)} \otimes \cdots \otimes \chi_{\sigma_s}^{(g_s)}$$

*o $(n_1^{(g_1)}, \ldots, n_s^{(g_s)})$-cocaracter de $W_1$. Então $m_{\langle\sigma\rangle} \leq 1$ para cada $\sigma_1 \vdash n_1, \ldots, \sigma_s \vdash n_s$. Além disso, $m_{\langle\sigma\rangle} = 1$ se, e somente se, $\sigma_i = (n_i)$ para todo $i \in \{1, \ldots, s\}$ e ocorrem as seguintes condições:*

1. *$0 \leq n_i^{(g_i)} < n$ para todo $i \in \{1, \ldots, s\}$;*
2. *$\displaystyle\sum_{i=1}^{s} g_i n_i^{(g_i)} \geq -1$;*
3. *$n_j^{(0)} \neq n - n_i^{(g_i)}$ para todo $i \in \{1, \ldots, s\}$ tal que $n_i^{(g_i)} > 1$;*
4. *Se $n_i^{(g_i)} \neq 0$ apenas quando $g_i \in \{-1, 0, 1\}$ então $|n_j^{(1)} - n_k^{(-1)}| \leq 1$.*

*Demonstração.* Fixemos $g_1, \ldots, g_s \in \mathbb{Z}$, $g_1 > g_2 > \cdots > g_s$ e um inteiro positivo $n = n_1^{(g_1)} + \cdots + n_s^{(g_s)}$. Seja $\langle\sigma\rangle = (\sigma_1, \ldots, \sigma_s)$ multipartição de $n$. Pela Proposição 3.4 se o diagrama correspondente a qualquer uma dessas partições tem mais de uma linha então $m_{\langle\sigma\rangle} = 0$. Suponha $\sigma_1 = (n_1), \ldots, \sigma_s = (n_s)$.

Primeiro vamos mostrar que $m_{\langle\sigma\rangle} \leq 1$. Para isso, considere dois pares quaisquer de $s$-uplas de tabelas $T_1, \ldots, T_s$ e $\tilde{T}_1, \ldots, \tilde{T}_s$ correspondentes a mesma multipartição $\langle\sigma\rangle = (\sigma_1, \ldots, \sigma_s)$. Sejam $f = f(x_1^{(g_1)}, \ldots, x_{n_1}^{(g_1)}, x_{n_1+1}^{(g_2)}, \ldots, x_{n_1+n_2}^{(g_2)}, \ldots, x_n^{(g_s)})$ e $g = g(x_1^{(g_1)}, \ldots, x_{n_1}^{(g_1)}, x_{n_1+1}^{(g_2)}, \ldots, x_{n_1+n_2}^{(g_2)}, \ldots, x_n^{(g_s)})$ os geradores do módulo irredutível associado a $\langle\sigma\rangle$ quando consideramos a $s$-upla de tabelas $T_1, \ldots, T_s$ e $\tilde{T}_1, \ldots, \tilde{T}_s$, respectivamente. Para provarmos que $m_{\langle\sigma\rangle} \leq 1$, vamos mostrar que $f$ e $g$ são linearmente dependentes módulo $T_{\mathbb{Z}}(W_1)$.

De fato, temos que $f$ e $g$ são polinômios com o mesmo conjunto de variáveis que não são identidades graduadas de $W_1$, pois são geradores de módulos irredutíveis. Além disso, $x_l^{(g_1)} > x_k^{(g_i)}$ para todo $i > 1$ e pela Observação 3.7 podemos supor que a primeira variável de cada comutador que compõe $f$ e $g$ é $x_{n_1}^{(g_1)}$. Desse modo, pela Proposição 2.20, temos que $f \equiv \mu_1 m'$ e $g \equiv \mu_2 m'$, onde $\mu_1, \mu_2 \in K$, $\mu_1, \mu_2 \neq 0$ e $m'$ é um comutador da forma canônica. Assim, concluímos que $f$ e $g$ são linearmente dependentes módulo $T_{\mathbb{Z}}(W_1)$. Logo, $m_{\langle\sigma\rangle} \leq 1$.

Vamos mostrar que se não ocorre alguma das condições descritas então $m_{\langle\sigma\rangle} = 0$. Considere $f \in P_{n_1,\ldots,n_s}^{(g_1,\ldots,g_s)}$. Se $n_i^{(g_i)} = n$ para algum $i$ então todas as variáveis de $f$ possuem mesmo $\mathbb{Z}$-grau e portanto $f$ é uma consequência da identidade $[x_k^{(g_i)}, x_l^{(g_i)}] \equiv 0$. Se $\sum_{i=1}^{s} g_i n_i^{(g_i)} \leq -2$, ou seja, o $\mathbb{Z}$-grau total do polinômio é $\leq -2$, então $f$ é consequência de $x_i^{(d)} \equiv 0$. Se $n_j^{(0)} = n - n_i^{(g_i)}$ para algum $i$ tal que $n_i^{(g_i)} > 1$, isto é, se em $f$ só aparecem variáveis de $\mathbb{Z}$-grau 0 e pelo menos duas variáveis de $\mathbb{Z}$-grau $g_i$, então $f$ é uma consequência de $[x_k^{(g_i)}, x_l^{(g_i)}]$. Agora, suponha $n_i^{(g_i)} \neq 0$ apenas para $g_i \in \{-1, 0, 1\}$ e $|n_j^{(1)}, n_k^{(-1)}| \geq 2$ temos que se $n_j^{(1)} < n_k^{(-1)}$ então $f$ tem $\mathbb{Z}$-grau $\leq -2$ e é consequência de $x^{(d)} \equiv 0$. Por outro lado, se $n_j^{(1)} > n_k^{(-1)}$ então $f$ é consequência de $[x_k^{(g_i)}, x_l^{(g_i)}]$. Portanto, em qualquer umas dessas situações $f \equiv 0$ e $m_{\langle\sigma\rangle} = 0$, pelo Teorema 3.1.

Agora vamos encontrar um polinômio $f$ não nulo gerador do módulo irredutível associado a cada multipartição $(\sigma_1, \ldots, \sigma_s)$ que satisfaz as condições enunciadas para mostrar que $m_{\langle\sigma\rangle} = 1$. Fixemos $T_1, \ldots, T_s$ tabelas correspondentes as partições $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$. Considere o conjunto de variáveis $\{x_1^{(a_1)}, x_2^{(a_2)}, \ldots, x_n^{(a_n)}\}$ tal que $x_1^{(a_1)} > x_l^{(a_l)}$ para todo $l > 1$ e $a_i \in \{g_1, \ldots, g_s\}$. Suponha que as condições $1), 2), 3)$ e $4)$ são satisfeitas, temos os seguintes casos.

**1.** $n_i^{(a_i)} > 0$ para $a_i \geq 1$ e $n_i^{(a_i)} = 0$ caso contrário.
Como $a_i \geq 1$ para todo $1 \leq i \leq n$ então como há pelo menos duas variáveis com $\mathbb{Z}$-graus distintos existe $a_j > 1$ tal que $n_j^{(a_j)} \geq 1$. Considere

$$m = [x_1^{(a_1)}, x_2^{(a_2)}, \ldots, x_n^{(a_n)}],$$

onde $a_1 > 1$, $x_2^{(a_2)} < x_3^{(a_3)} < \cdots < x_n^{(a_n)}$ e existe $l$ , $2 \leq l \leq n$ tal que $0 < a_l < a_1$, ou seja, um comutador multilinear na forma canônica do tipo 1 (como descrito na Tabela 2.1, página 40). Assim, podemos tomar como gerador o polinômio $e_{T_{\langle\sigma\rangle}} m$.

**2.** Existe $n_i^{(a_i)} > 0$ para algum $a_i \in \{0, -1\}$. Aqui temos os seguintes subcasos:

**2.1.** $n_i^{(0)} = n - 1$
Temos que $n_i^{(a_i)} = 1$ para algum $a_i = a \neq 0$. Se $a \geq 1$, podemos tomar

$$m = [x_1^{(a)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}],$$

onde para $a = 1$ temos que $m$ é um comutador da forma canônica do tipo 4 e para $a > 1$ temos que $m$ é um comutador da forma canônica do tipo 3. Assim, consideramos $e_{T_{\langle\sigma\rangle}} m$ como o gerador.
Agora, se $a = -1$, então escrevemos

$$m = [x_1^{(0)}, x_2^{(-1)}, \ldots, x_n^{(0)}],$$

onde $m$ é um comutador da forma canônica do tipo 5. Assim, tomamos $e_{T_{\langle\sigma\rangle}}m$ como o gerador.

**2.2.** $1 \leq n_i^{(0)} \leq (n-1) - n_j^{(a_j)}$ para algum $i$ e $1 < n_j^{(a_j)} < n-1$, $n_k^{(-1)} = 0$, caso $k$ exista.

Nesse caso temos que $m$ tem pelo menos 3 variáveis de $\mathbb{Z}$-graus distintos. Como $n_k^{(-1)} = 0$ para todo $k$ temos que $a_l > 1$ para algum $l$. Assim, podemos escrever

$$m = [x_1^{(a_1)}, \ldots, x_r^{(a_r)}, x_{r+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}],$$

onde $a_1 > 1$, $x_2^{(a_2)} < \cdots < x_r^{(a_r)} < x_1^{(a_1)}$ e $r+1 < \cdots < n$. Notemos que existe $a_{l'} \neq a_1$ com $2 \leq l' \leq r$, ou seja, $m$ é um comutador da forma canônica do tipo 1. Assim, tomamos como gerador $e_{T_{\langle\sigma\rangle}}m$.

**2.3.** $n_i^{(0)} \leq n-1-n_j^{(a_j)}$ para algum $i$ e $1 < n_j^{(a_j)} < n-1$, $n_k^{(-1)} \geq 1$. Assim, se $n_j^{(a_j)} \geq 1$ apenas para $a_j \in \{-1,0,1\}$ e

- $n_i^{(1)} - n_j^{(-1)} = 0$, nesse caso, podemos escrever

$$m = [x_1^{(1)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_r^{(0)}, x_{r+1}^{(-1)}, x_{r+2}^{(1)}, x_{r+3}^{(-1)}, \ldots, x_{n-2}^{(-1)}, x_{n-1}^{(1)}, x_n^{(-1)}],$$

onde $(n-r)$ é ímpar, ou seja, $m$ é um comutador da forma canônica do tipo 4. Assim, podemos tomar como gerador $e_{T_{\langle\sigma\rangle}}m$.

- $|n_i^{(1)} - n_j^{(-1)}| = 1$. Se $n_i^{(1)} > n_j^{(-1)}$ então podemos escrever

$$m = [x_1^{(1)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_r^{(0)}, x_{r+1}^{(-1)}, x_{r+2}^{(1)}, x_{r+3}^{(-1)}, \ldots, x_{n-2}^{(1)}, x_{n-1}^{(-1)}, x_n^{(1)}],$$

onde $(n-r)$ é par e $m$ é um comutador na forma canônica do tipo 4. Logo, podemos tomar como gerador o $e_{T_{\langle\sigma\rangle}}m$. Por outro lado, se $n_i^{(1)} < n_j^{(-1)}$ então

$$m = [x_1^{(1)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_r^{(0)}, x_{r+1}^{(-1)}, x_{r+2}^{(1)}, x_{r+3}^{(-1)}, \ldots, x_{n-2}^{(1)}, x_{n-1}^{(-1)}, x_n^{(-1)}],$$

onde $(n-r)$ é par, $m$ um comutador da forma canônica do tipo 4. Assim, tomamos como gerador o $e_{T_{\langle\sigma\rangle}}m$.

Agora se $n_i^{(a_i)} \geq 1$ para algum $i$ tal que $a_i > 1$. Considere $n_j^{(-1)} = k$ ,$k \geq 1$. Seja $\{a_1, \ldots, a_r\}$, com $1 \leq r \leq n-1$ e $a_l \geq 0$ para todo $l$, $1 \leq l \leq r$. Se $a_1 + \cdots + a_r > k-2$ temos as seguintes opções:

- se existe $l'$, $2 \leq l' \leq r$ tal que $1 \leq a_{l'} < a_1$ então podemos considerar

$$m = [x_1^{(a_1)}, \cdots, x_r^{(a_r)}, x_{r+1}^{(-1)}, \ldots, x_n^{(-1)}],$$

onde $x_2^{(a_2)} < x_3^{(a_3)} < \cdots < x_r^{(a_r)} < x_1^{(a_1)}$. Temos que $m$ é um comutador da forma canônica do tipo 1. Assim, podemos tomar $e_{T_{\langle\sigma\rangle}}m$ como o gerador.

- se $a_i = 0$ para todo $2 \leq i \leq r$, então tomamos

$$m = [x_1^{(a_1)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_r^{(0)}, x_{r+1}^{(-1)}, \ldots, x_n^{(-1)}],$$

onde $m$ é um comutador da forma canônica do tipo 3. Logo, podemos considerar $e_{T_{\langle\sigma\rangle}}m$ como gerador.

- se $n_i^{(a_1)} > 1$ e $a_l \in \{0, a_1\}$ para todo $l$, $2 \leq l \leq r$. Então podemos tomar

$$m = [x_1^{(a_1)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_t^{(0)}, x_{r+1}^{(-1)}, x_{t+1}^{(a_1)}, \ldots, x_r^{(a_1)}, x_{r+2}^{(-1)}, \ldots, x_n^{(-1)}],$$

onde $m$ é um comutador da forma canônica do tipo 2. Assim, tomamos $e_{T_{\langle\sigma\rangle}}m$ como o gerador.

Note que se $a_1 + \cdots + a_r \leq k - 2$ e $k \geq 4$ então $m$ tem grau $a_1 + \cdots + a_r + k \leq k - 2 + k = -2$, não satisfazendo a condição 2) do teorema.

Pela Proposição 3.6, temos que cada $e_{T_{\langle\sigma\rangle}}m$ não é uma identidade $\mathbb{Z}$-graduada para $W_1$, pois em cada caso $m$ é um comutador multilinear da forma canônica. Logo, para qualquer situação em que as condições da proposição são satisfeitas conseguimos um comutador $m$ da forma canônica tal que $e_{T_{\langle\sigma\rangle}}m$ é o gerador do módulo irredutível associado a $\langle\sigma\rangle = (\sigma_1, \ldots, \sigma_s)$, como requerido. $\square$

# Referências Bibliográficas


[1] Bahturin, Yu. A., *Identical Relations in Lie Algebras.* Utrecht, VNU Science Press, 1987.

[2] Bahturin, Yu; Zaicev, M., *Graded algebras and graded identities*, in: Polynomial Identities and Combinatorial Methods, in: Lect. Notes Pure Appl. Math., vol.235, M. Dekker, 101-139, 2003.

[3] Drensky, V., *Free Algebras and PI-algebra.* Springer-Verlag, Singapore, 1999.

[4] Freitas, José A.; Koshlukov, Plamen ; Krassilnikov, Alexei, *Z-graded identities of the Lie algebra W1.* Journal of Algebra 427, p.226-251, 2015.

[5] Giambruno, A. and Zaicev, M., *Polynomial Identities and Asymptotic Methods Math.* Surveys and Monog. 122, 2005.

[6] Herstein, I. N., *Noncommutative rings.* Corus Monograph No. 15, MAA Utreck, 1968.

[7] James G. and Kerber A., *The Representation Theory of the Symmetric Group.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 16, Addison-Wesley, London, 1981.

[8] Kaplansky, I., *Rings with polynomial identity*, revised, Amer. Math. Soc. 54, 496-500, 1948.

[9] Kemer, A. R., *Finite basis property of identities of associative algebras.* Algebra and Logic 5, 362-397, 1987.

[10] Koshlukov, P., *Graded polynomial identities for Lie algebra $sl_2(K)$.* Internat. J. Algebra Comput, 18, 825-836, 2008.

[11] Robinson, D. J. S., *A course in the Theory of Groups*, Vol 80, segunda edição. Springer, New Youk, USA, 1996.

[12] Santos, Joselma Maia dos, *Cocaracteres e Identidades Graduadas da Álgebra de Lie $sl_2$*, 2015. Dissertação (Mestrado em Matemática) Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2015.

[13] Silva, Diogo Diniz Pereira da Silva e, *Identidades graduadas em álgebras não associativas* /Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva - Campinas, [S.P. : s.n.], Tese de Doutorado, Unicamp, 2010.

[14] Souza, Manuela da silva, *Propriedade de Specht e crescimento das identidades polinomiais graduadas de* $sl_2$/Manuela da Silva Souza - Campinas, [S.P. :s.n.], Tese de Doutorado, Unicamp, 2013.

[15] Rotman, Joseph J., *Advanced modern algebra.* Pretince Hall, 2002.

[16] Serre, Jean Pierre, *Linear Representations of Finite Groups.* Vol 42. Springer, New Yourk, 1977.

[17] Vasconcelos, A. da C., *Crescimento polinomial das codimensões e* $*$*-codimensões*, 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática) Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2013.

[18] Vasilovskii, S. Yu., *The basis of identities of a three-dimensional simple Lie algebra over an infinite field*, Algebra i Logika 28, No. 5, 534-554, 1989 (Russian); English transl. Algebra and Logic 28, No.5, 355-368, 1989.

[19] Razmyslov, Y., *Finite basing of the identities of a matrix algebra of second order over a field of characteristic zero*, Algebra i Logika 12, No. 1, 83-1113 ,1973 (in Russian); Algebra and Logic 12, 47-3, 1973 (Engl. transl.).

[20] Zhevlakov K. A. ; Slin'ko, A. M. ; Shestakov, I. P.; Shirshov, A. I., *Rings that are nearly associative.* Academic Press, Inc. 1982. J. London math Soc. (2) 11, 263-266, 1975.