Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática e Estatística - IME
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Dissertação de Mestrado

# Coerência e Compatibilidade das Sequências de Ideais de Operadores Múltiplo Cohen Fortemente Somantes

Gideone Oliveira Ribeiro

**Salvador-Bahia**

Abril de 2017

# Coerência e Compatibilidade das Sequências de Ideais de Opeadores Múltiplo Cohen Fortemente Somantes

Gideone Oliveira Ribeiro

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 20 de abril de 2017.

**Orientador:** Prof. Dr. Joilson Oliveira Ribeiro.

**Salvador-Bahia**

Abril de 2017

Sistema de Bibliotecas da UFBA

Ribeiro, Gideone Oliveira.

Coerência e Compatibilidade das Sequências de Ideais de Operadores Múltiplo Cohen Fortemente Somantes / Gideone Oliveira Ribeiro. – 2017.

101 f. : il

Orientador: Prof. Dr. Joilson Oliveira Ribeiro.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática e Estatística, Salvador, 2017.

1. Análise Funcional. 2. Operadores Cohen fortemente somantes. 3. Sequência de ideais coerente e compatível. I. Ribeiro, Joilson Oliveira. II. Universidade Federal da Bahia. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDD - 510

CDU - 517.98

# Coerência e Compatibilidade das Sequências de Ideais de Opeadores Múltiplo Cohen Fortemente Somantes

Gideone Oliveira Ribeiro

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 20 de abril de 2017.

## Banca examinadora:

Prof. Dr. Joilson Oliveira Ribeio (Orientador)
UFBA

Prof. Dr. Ewerton Ribeiro Torres
UFBA

Prof. Dr. Jamilson Ramos Campos
UFPB

*Aos meus parentes, namorada, amigos e professores.*

# Agradecimentos

A Deus, pela vida, pelas oportunidades e graça a me outorgadas.

A minha mãe Adnailza e minha irmã Gislane pelo conforto e orações. A minha namorada e grande companheira, Tanira, pelo amor, compreensão, pelas palavras de consolo e pelos inúmeros sermões. Sou mais que grato a tia Raquel pelos conselhos e incentivo que me levaram ao nível superior. Louvo a Deus pela vida de cada uma de vocês.

Ao meu orientador Joilson Ribeiro por ser fonte de inspiração, pela confiança, amizade, profissionalismo, pelas disciplinas cursadas e pela inestimável ajuda na construção deste trabalho. Tive a bênção de ter um orientador humano e muito compreensivo.

Sou muito grato ao professor Ewerton Torres pelas valiosas sugestões durante a confecção deste trabalho e por aceitar fazer parte da banca de dissertação. Obrigado por ser tão atencioso e prestativo. Gostaria também de agradecer ao professor Jamilson Campos por aceitar fazer parte da banca de dissertação e pelas sugestões de melhorias, a fim de atenuar as imperfeições deste texto.

A Fabrício, por de forma indireta, me coorientar neste trabalho e aos amigos da sala 18, em especial a Edvan, Vinícius, Harlen, Alfredo, Diego, Diogo, Carlos, Pedro Morais, Isabela, Clesio, Raiana, Vanderlei e Genildo. Todos vocês são especiais.

Por fim, agradeço a UFBA pela oportunidade e a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado da Bahia (FAPESB) pela concessão da bolsa de estudos.

*"A persistência é o menor caminho do êxito."*

(Charles Chaplin)

# Resumo

O objetivo deste trabalho foi estudar operadores Cohen fortemente somantes com foco principal em coerência e compatibilidade das sequências de ideais Cohen fortemente $p$-somantes e múltiplo Cohen fortemente $p$-somantes. Iniciaremos estudando os casos linear e multilinear destes operadores. Em seguida, estudaremos o conceito de ideal de operadores e mostraremos que a classe dos operadores Cohen, tanto no contexto linear quanto no multilinear, é um exemplo de ideal. Posteriormente, mostramos que a extensão obtida para o caso multilinear, por J. Campos [Ca13] é coerente e compatível segundo os critérios estabelecidos por J. Ribeiro e D. Pellegrino [PR14].

**Palavras-chave:** Espaços de Banach; Espaços de sequências; Operadores Cohen fortemente somantes; Ideais de operadores e polinômios; Sequência de ideais coerente e compatível.

# Abstract

The aim of this work, was to study Cohen strongly summing operators with focus in coherence and compatibility of sequences of Cohen strongly p-summing ideals and Cohen strongly p-summing multiple. The beginning of the work was studying the linear and multilinear cases of these operators. Then, the concept of ideal operator and the Cohen operator class, in both linear and multilinear context, which are ideal examples, was studied. Subsequently, we shown that the extension obtained for the multilinear case, by J. Campos [Ca13] is coherent and compatible according to the criterias estableds by J. Ribeiro and D. Pellegrino [PR14].

**Keywords:** Banach space; Sequence spaces; Cohen strongly summing operators; Operators and polynomials ideals; Coherent and compatible sequence of ideals.

# Lista de Símbolos

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | $\{1, 2, \ldots\}$ |
| $\mathbb{R}$ | conjunto dos números reais |
| $\mathbb{C}$ | conjunto dos números complexos |
| $\mathbb{K}$ | $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ |
| $E, F, G, H$ | espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$ |
| $\ell_p(E)$ | espaço das sequências absolutamente $p$-somáveis que tomam seus valores em $E$ |
| $\ell_\infty(E)$ | espaço das sequências limitadas de $E$ |
| $\ell_p^w(E)$ | espaço das sequências fracamente $p$-somáveis que tomam seus valores em $E$ |
| $\ell_p\langle E\rangle$ | espaço das sequências Cohen fortemente $p$-somáveis que tomam seus valores em $E$ |
| $c_0$ | espaço das sequências de escalares que convergem para zero |
| $I_n$ | forma $n$-linear contínua de $\mathbb{K}^n$ em $\mathbb{K}$ dada por $I_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ |
| $J_E : E \to E''$ | mergulho canônico de $E$ em $E''$ |
| $\check{P}$ | aplicação multilinear simétrica associada ao polinômio homogêneo $P$ |
| $\hat{A}$ | polinômio homogêneo associado a aplicação multilinear $A$, definido por $\hat{A}(x) = A(x, \ldots, x)$ |
| $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ | espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ das aplicações multilineares contínuas de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em $F$ |
| $\mathcal{L}_f(E_1, \ldots, E_n; F)$ | subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ formado pelas aplicações $n$-lineares de tipo finito |

| | |
|---|---|
| $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}(E_1,\ldots,E_n;F)$ | subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F)$ formado pelas aplicações $n$-lineares de posto finito |
| $\mathcal{L}(^nE;F)$ | $\mathcal{L}(E,\overset{(n)}{\ldots},E;F)$ |
| $\mathcal{L}^s(^nE;F)$ | subespaço vetorial de $\mathcal{L}(^nE;F)$ das aplicações multilineares simétricas contínuas |
| $\Pi_p(E;F)$ | espaço de todos os operadores absolutamente $p$-somáveis entre os espaços de Banach $E$ e $F$ |
| $\mathcal{D}_p(E;F)$ | Espaço de todos os operadores Cohen fortemente $p$-somantes entre os espaços de Banach $E$ e $F$ |
| $\mathcal{P}(^nE;F)$ | espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ dos polinômios $n$-homogêneos contínuos de $E$ em $F$ |
| $\mathcal{P}$ | classe de todos os polinômios homogêneos contínuos entre espaços de Banach |
| $\mathcal{L}_{Coh,p}(E_1,\ldots,E_n;F)$ | classe de todas as aplicações $n$-lineares Cohen fortemente $p$-somantes de $E_1\times\cdots\times E_n$ em $F$ |
| $\mathcal{L}_{mCoh,p}(E_1,\ldots,E_n;F)$ | classe de todas as aplicações multilineares múltiplo Cohen fortemente $p$-somantes de $E_1\times\cdots\times E_n$ em $F$ |
| $\mathcal{P}_{Coh,p}(^nE;F)$ | espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ dos polinômios $n$-homogêneos Cohen fortemente $p$-somantes de $E$ em $F$ |
| $\mathcal{P}^n_{mCoh,p}(E;F)$ | espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ dos polinômios $n$-homogêneos múltiplo Cohen fortemente $p$-somantes de $E$ em $F$ |
| $\mathcal{I},\mathcal{U}$ | ideais de operadores lineares |
| $\mathcal{I}(E;F)$ | $\mathcal{I}\cap\mathcal{L}(E;F)$, componente de $\mathcal{I}$ |
| $(\mathcal{I},\|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ | ideal normado de operadores |
| $\mathcal{M}$ | ideal de aplicações multilineares ou multi-ideais |
| $\mathcal{M}(E_1,\ldots,E_n;F)$ | $\mathcal{M}\cap\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F)$, componente de $\mathcal{M}$ |
| $(\mathcal{M},\|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ | ideal normado de aplicações multilineares |

# Sumário

**Lista de Símbolos** **ix**

**1 Espaços de Sequências Vetoriais** **3**

1.1 Sequências fortemente $p$-somáveis . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3

1.2 Sequências fracamente $p$-somáveis . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6

1.3 Sequências Cohen fortemente $p$-somáveis . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 11

**2 Operadores Entre Espaços de Sequências** **18**

2.1 Operadores absolutamente $p$-somantes . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 18

2.2 Operadores Cohen fortemente $p$-somantes . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 21

**3 Aplicações Multilineares e Polinômios Cohen Fortemente Somantes** **32**

3.1 Aplicações multilineares . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 32

3.1.1 Operadores multilineares Cohen fortemente $p$-somantes . . . . . . . 36

3.1.2 O Teorema da Dominação de Pietsch . . . . . . . . . . . . . . . . . 39

3.2 Polinômios homogêneos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 41

3.2.1 Polinômios homogêneos Cohen fortemente $p$-somantes . . . . . . . . 44

3.3 Operadores múltiplo Cohen fortemente $p$-somantes . . . . . . . . . . . . . 46

**4 Ideais de Operadores Cohen Fortemente Somantes** **52**

4.1 Ideais de operadores - caso linear . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 52

4.1.1 Ideal de operadores lineares Cohen fortemente $p$-somantes . . . . . 54

4.2 Ideais de operadores - caso multilinear . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 57

4.2.1 Ideal de operadores multilineares Cohen fortemente $p$-somantes . . 59

4.2.2 Ideal de operadores múltiplo Cohen fortemente $p$-somantes . . . . . 62

4.3 Ideais de polinômios $n$-homogêneos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 63

**5 Coerência e Compatibilidade 67**

5.1 Sequências Cohen fortemente $p$-somantes . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 72

5.2 Sequências múltiplo Cohen fortemente $p$-somantes . . . . . . . . . . . . . . 74

**A Alguns resultados de Análise Funcional 80**

# Introdução

A Análise Funcional Linear tem como principal objetivo tratar de operadores lineares contínuos entre espaços normados, normalmente entre espaços de Banach. Em um trabalho notável, A. Grothendieck [Gr56] introduziu o conceito de operador absolutamente somante, teoria que foi exposta de forma mais acessível por Pietsch [Pi67], Mitjagin e Pełczyński [MP66] e Lindenstrauss e Pełczyński [LP68]. O conceito de operadores absolutamente $p$-somantes foi definido por A.Pietsch [Pi67] como generalização dos operadores absolutamente somantes.

Os operadores absolutamente $p$-somantes não são fechados para conjugação. Um exemplo disto é dado por Piestsch ([Pi67], p.338): o operador imersão $I : \ell_1 \to \ell_2$ é absolutamente 2-somante enquanto que o operador conjugado $I' : \ell_2 \to \ell_\infty$ não é absolutamente 2-somante, ou seja, o conjugado do operador $I$ não tem a mesma propriedade que $I$. Esta foi uma das motivações para J. S. Cohen definir o operador fortemente $p$-somante, $1 < p \leq \infty$, que possui a seguinte propriedade: se um operador é fortemente $p$-somante, seu operador conjugado é um operador absolutamente $q$-somante, com $1/p + 1/q = 1$. Com os estudos de D. Achour e L. Mezrag [AM07] e J. S. Campos [Ca13], esta teoria foi estendida para o contexto multilinear.

Com o avanço da Análise Funcional, várias classes de operadores com propriedades específicas foram estudadas. Pietsch [Pi78] percebeu que algumas dessas classes seguiam um mesmo comportamento, o que serviu de motivação para introduzir o conceito da teoria abstrata de ideais de operadores com a tentativa de dar um tratamento unificado para várias questões que foram estudadas separadamente. Foi o próprio Pietsch [Pi83], em 1983, que generalizou o conceito de ideais de operadores para aplicações multilineares, teoria esta que foi facilmente adaptada para polinômios, dando início, assim, a uma série de trabalhos nesta direção.

Dado um ideal de operadores lineares $\mathcal{I}$, podem existir vários ideais de aplicações multilineares e de polinômios associados ao ideal $\mathcal{I}$, como é o caso do ideal dos absolutamente somantes. Para este ideal, exitem, pelo menos, oito extensões possíveis para ideais multilineares (ver, por exemplo, [BPR07],[Di03],[Ma03] e [PS11]). Entre as maneiras abstratas de obter extensões de um ideal de operadores para ideais de polinômios e de aplicações multilineares, temos os métodos de fatoração e linearização ([Be08], pág.27). Algumas indagações surgem naturalmente: quais dessas extensões preservam o "espírito"do ideal $\mathcal{I}$? Quais as propriedades conhecidas dos ideais de operadores lineares se estendem ao contexto não linear? Nesta direção, destacamos os trabalhos de Carando et al [CDM09] e de D. Pellegrino e J. Ribeiro [PR14], que buscam estabelecer critérios que qualifiquem as extensões multilineares e polinômiais desses ideais lineares

O presente trabalho é essencialmente dedicado à teoria dos operadores Cohen fortemente somantes com foco principal em coerência e compatibilidade das sequências de ideais Cohen fortemente $p$-somantes e múltiplo Cohen fortemente $p$-somantes e está baseado nos artigos [Co73] e [Ca13].

Passamos agora a descrever a organização da dissertação. No primeiro capítulo, introduziremos alguns espaços de sequências. Serão estudados os espaços das sequências Cohen fortemente $p$-somáveis, absolutamente $p$-somáveis e incondicionalmente $p$-somáveis.

O capítulo 2 é dedicado ao estudo dos operadores lineares Cohen fortemente $p$-somantes. Também será apresentado os operadores absolutamente $p$-somantes devido à estreita relação desses operadores com os Cohen fortemente $p$-somantes.

No capítulo 3 estudaremos o caso multilinear dos operadores Cohen fortemente $p$-somantes e apresentaremos alguns resultados clássicos desta classe.

No capítulo 4 abordaremos a teoria abstrata de ideais de operadores Cohen fortemente $p$-somantes no contexto linear e multilinear.

O capítulo 5 é dedicado ao estudo do bom comportamento das extensões dos ideais dos operadores Cohen fortemente $p$-somantes para multi-ideal. O capítulo culminará com a demostração de que a sequência de pares composta por o ideal das aplicações múltiplo Cohen fortemente $p$-somantes e o ideal dos polinômios Cohen fortemente $p$-somantes é coerente e compatível com o ideal $\mathcal{D}_p$ dos operadores lineares Cohen fortemente $p$-somantes, segundo os critérios de bom comportamento estabelecidos por D. Pellegrino e J. Ribeiro [PR14].

# CAPÍTULO 1

## Espaços de Sequências Vetoriais

Neste capítulo, vamos fazer um breve estudo da teoria de alguns espaços especiais de sequências somantes, a saber, as sequências fortemente $p$-somáveis, fracamente $p$-somáveis e Cohen fortemente $p$-somáveis, que serão usados para definir tipos especiais de operadores, os quais serão alvo de nosso estudo.

## 1.1 Sequências fortemente $p$-somáveis

Ao longo deste trabalho $E, E_1, \ldots, E_n$ e $F$ denotarão espaços normados sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, o dual topológico de $E$ será denotado por $E'$ e $B_E$ a bola unitária fechada de $E$, mais precisamente, $B_E := \{x \in E : \|x\|_E \leq 1\}$.

O espaço de sequências $\ell_p$ é um exemplo clássico de espaço de Banach de dimensão infinita. Nesta seção estudaremos o espaço $\ell_p(E)$ e mostraremos alguns resultados básicos.

**Definição 1.1.1.** Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $E$ um espaço de Banach. Uma sequência $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ em $E$ é *fortemente $p$-somável* se a sequência de escalares correspondente $(\|x_i\|)_{i=1}^{\infty}$ estiver em $\ell_p$, isto é, $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^p < \infty$ quando $1 \leq p < \infty$ e $\sup_{i \in \mathbb{N}} \|x_i\| < \infty$ para $p = \infty$. Quando $p = 1$, dizemos que $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ é *absolutamente somável.*

Denotaremos por $\ell_p(E)$ o conjunto das sequências fortemente $p$-somáveis em $E$, que é um espaço vetorial com a adição e o produto por escalar usuais de sequências, ou seja, para quaisquer $(x_i)_{i=1}^{\infty}, (y_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$(x_i)_{i=1}^{\infty} + (y_i)_{i=1}^{\infty} = (x_i + y_i)_{i=1}^{\infty};$$

$$\lambda (x_i)_{i=1}^{\infty} = (\lambda x_i)_{i=1}^{\infty}.$$

Enunciaremos as desigualdades de Hölder e Minkowski para sequências, que serão valiosas no decorrer do texto.

**Proposição 1.1.2** (Desigualdade de Hölder para sequências)**.** *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $p, p' > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Então*

$$\sum_{i=1}^{n} \|a_i b_i\| \leq \left( \sum_{i=1}^{n} \|a_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^{n} \|b_i\|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

*para quaisquer escalares $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$.*

*Demonstração.* Veja ([BPT15], Proposição 1.4.1). □

**Proposição 1.1.3** (Desigualdade de Minkowski para sequências)**.** *Para $p \geq 1$, temos*

$$\left( \sum_{i=1}^{n} \|a_i + b_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{i=1}^{n} \|a_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{i=1}^{n} \|b_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

*para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e escalares $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$.*

*Demonstração.* Veja ([BPT15], Proposição 1.4.2). □

**Proposição 1.1.4.** *Para $1 \leq p \leq \infty$, a função $\| \cdot \|_p : \ell_p(E) \to \mathbb{R}$ que a cada $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$ associa o número real*

$$\|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_p := \begin{cases} \left( \sum_{i=1}^{\infty} \|(x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & se \quad 1 \leq p < \infty \\ \sup_i \|(x_i)\|, & se \quad p = \infty \end{cases},$$

*é uma norma.*

*Demonstração.* É claro que $\| \cdot \|_p$ está bem definida, pois a sequência $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$. Mostraremos primeiro o caso $1 \leq p < \infty$. Dadas $(x_i)_{i=1}^{\infty}, (y_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$ e $n \in \mathbb{N}$, pela desigualdade de Minkowiski para sequências,

$$\left( \sum_{i=1}^{n} \|x_i + y_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{i=1}^{n} \|y_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$\left( \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i + y_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{i=1}^{\infty} \|y_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

ou seja,

$$\|(x_i)_{i=1}^{\infty} + (y_i)_{i=1}^{\infty}\|_p \leq \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_p + ||(y_i)_{i=1}^{\infty}\|_p.$$

As outras propriedades de norma são imediatas.

Para $p=\infty$, dadas $(x_i)_{i=1}^{\infty}, (y_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_\infty(E)$, então

$$\begin{aligned}\|(x_i)_{i=1}^{\infty}+(y_i)_{i=1}^{\infty}\|_\infty &= \sup_{i\in\mathbb{N}}\|x_i+y_i\| \le \sup_{i\in\mathbb{N}}\|x_i\| + \sup_{i\in\mathbb{N}}\|y_i\| \\ &= \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_\infty + \|(y_i)_{i=1}^{\infty}\|_\infty.\end{aligned}$$

As outras condições da norma seguem diretamente das propriedades do supremo. □

**Proposição 1.1.5.** *Se $E$ é Banach e $1 \le p \le \infty$, então $(\ell_p(E), \|\cdot\|_p)$ é um espaço de Banach.*

*Demonstração.* Pela Proposição 1.1.4, temos que $\|\cdot\|_p$ está bem definida. Verifiquemos a completude: seja $\left(\left(x_i^{(n)}\right)_{i=1}^{\infty}\right)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $\ell_p(E)$. Assim, para todo $\varepsilon>0$ dado, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que se $m,n\ge N$, então

$$\left\|\left(x_i^{(m)}\right)_{i=1}^{\infty}-\left(x_i^{(n)}\right)_{i=1}^{\infty}\right\|_p<\varepsilon.$$

Para $p<\infty$, como

$$m,n\ge N \Rightarrow \left\|x_i^{(m)}-x_i^{(n)}\right\|_E \le \left(\sum_{i=1}^{\infty}\left\|x_i^{(m)}-x_i^{(n)}\right\|_E^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left\|\left(x_i^{(n)}\right)_{i=1}^{\infty}-\left(x_i^{(m)}\right)_{i=1}^{\infty}\right\|_p<\varepsilon,$$

para cada $i\in\mathbb{N}$, temos que $\left(x_i^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $E$. Como $E$ é um espaço de Banach, para todo $i\in\mathbb{N}$, existe $x_i$ em $E$ tal que $\left(x_i^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ converge para $x_i$. Vamos mostrar que $(x_i)_{i=1}^{\infty}\in\ell_p(E)$ e que $\left(\left(x_i^{(n)}\right)_{i=1}^{\infty}\right)_{n=1}^{\infty}$ converge para $(x_i)_{i=1}^{\infty}$. Para cada $k\in\mathbb{N}$, temos que se $m,n\ge N$, então

$$\left(\sum_{i=1}^{k}\left\|x_i^{(m)}-x_i^{(n)}\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon.$$

Fazendo $n\to\infty$, para $m\ge N$,

$$\left(\sum_{i=1}^{k}\left\|x_i^{(m)}-x_i\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\le\varepsilon$$

e fazendo $k\to\infty$, obtemos:

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left\|x_i^{(m)}-x_i\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left\|\left(x_i^{(m)}-x_i\right)_{i=1}^{\infty}\right\|_p\le\varepsilon, \tag{1.1}$$

o que mostra que $\left(x_i^{(m)}-x_i\right)_{i=1}^{\infty}\in\ell_p(E)$ para todo $m\ge N$. Como $\ell_p(E)$ é um espaço vetorial e $\left(x_i^{(N)}\right)_{i=1}^{\infty}\in\ell_p(E)$, então

$$(x_i)_{i=1}^{\infty} = \left(x_i^{N}\right)_{i=1}^{\infty}-\left(x_i^{(N)}-x_i\right)_{i=1}^{\infty}\in\ell_p(E),$$

e por (1.1), obtemos que $\lim\limits_{m\to\infty}\left(x_i^{(m)}\right)_{i=1}^{\infty}=(x_i)_{i=1}^{\infty}$. Para $p=\infty$, a demostração é análoga. Portanto, $\ell_p(E)$ com a norma $\|\cdot\|_p$ é um espaço de Banach. □

## 1.2 Sequências fracamente $p$-somáveis

**Definição 1.2.1.** Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $E$ um espaço de Banach. Uma sequência $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ de elementos de $E$ é dita *fracamente $p$-somável* se a sequência de escalares $(\varphi(x_i))_{i=1}^{\infty}$ estiver em $\ell_p$, para todo $\varphi \in E'$.

Denotaremos por $\ell_p^w(E)$ o conjunto de todas as sequências em $E$ que são fracamente $p$-somáveis. Com as operações usuais de sequências, temos que $\ell_p^w(E)$ é um espaço vetorial.

**Proposição 1.2.2.** *Para $1 \leq p < \infty$, a função $\|\cdot\|_{w,p} : \ell_p^w(E) \to \mathbb{R}$ que a cada $(x_i)_i^{\infty} \in \ell_p^w(E)$ associa ao número real*

$$\|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p} := \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left( \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

*é uma norma.*

*Demonstração.* Não é imediato que $\sup_{\varphi \in B_{E'}} \left( \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ é finito. Para garantirmos isso, precisamos mostrar que a função $\|\cdot\|_{w,p}$ está bem definida. Para cada $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$, consideremos a aplicação linear

$$\begin{aligned} u : \ & E' & \to\ & \ell_p \\ & \varphi & \mapsto\ & u(\varphi) = (\varphi(x_i))_{i=1}^{\infty} \end{aligned}$$

A aplicação $u$ está bem definida, pois $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$ e por definição, $(\varphi(x_i)_{i=1}^{\infty}) \in \ell_p$. Isto posto, vamos mostrar que $u$ é contínua usando o Teorema do Gráfico Fechado (Teorema A.0.8). Supondo que ocorrem

$$\begin{cases} \varphi_k & \to \varphi \ \text{ em } \ E' \\ u(\varphi_k) & \to z_0 \ \text{ em } \ \ell_p \end{cases},$$

então $u(\varphi) = z_0$. De fato, como $u(\varphi_k) \to z_0$, então

$$\lim_{k \to \infty} u(\varphi_k) = \lim_{k \to \infty} (\varphi_k(x_n))_{n=1}^{\infty} = z_0 = (z_n)_{n=1}^{\infty}$$

e consequentemente

$$\lim_{k \to \infty} (\varphi_k(x_n)) = z_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, pois $\|\cdot\|_E \leq \|\cdot\|_p$. Por outro lado, como $\varphi_k \to \varphi$, obtemos que

$$\lim_{k \to \infty} \varphi_k(x_n) = \varphi(x_n)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, e pela unicidade do limite, temos que $z_n = \varphi(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, $z_0 = u(\varphi)$ o que mostra que $u$ tem gráfico fechado. Portanto, a aplicação $u$ é contínua e, pela Proposição A.0.3, temos que $u$ é limitada, ou seja,

$$\|u\| = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left( \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Verifiquemos as propriedades da norma:

$(N1)$ Seja $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$. Por definição, $\|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p} \geq 0$. É imediato verificar que a norma fraca da sequência nula é zero. Se $\|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p} = 0$, então $(x_i)_{i=1}^{\infty} = 0$, pois, caso contrário, existiria $i_0 \in \mathbb{N}$ com $x_{i_0} \neq 0$. Daí, pelo Teorema de Hahn-Banach, existe um funcional linear $\psi \in E'$ tal que $\|\psi\| = 1$ e $\psi(x_{i_0}) = \|x_{i_0}\|$, o que mostra que $\|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p} > 0$.

$(N2)$ Sejam $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então,

$$\begin{aligned}
\|(\lambda x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p} &= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left( \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(\lambda x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left( \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda|^p \cdot |\varphi(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |\lambda| \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left( \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |\lambda| \cdot \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p}.
\end{aligned}$$

$(N3)$ Sejam $(x_i)_{i=1}^{\infty}, (y_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$ e $\varphi \in B_{E'}$. Pela Proposição 1.1.4, temos que $\|\cdot\|_p$ é uma norma. Logo, vale a desigualdade:

$$\left( \sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi(x_i) + \varphi(y_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi(x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi(y_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Tomando o supremos das $\varphi \in B_{E'}$, obtemos

$$\sup_{\varphi \in B_{E'}} \left( \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(x_i + y_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left( \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left( \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(y_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$\square$

**Observação 1.2.3.** *Para $p = \infty$, definindo $\|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{w,\infty} := \sup_i \left\{ \sup_{\|\varphi\| \leq 1} |\varphi(x_i)| \right\}$, temos a coincidência $\ell_{\infty}^w(E) = \ell_{\infty}(E)$. De fato, tomando $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{\infty}(E)$, então*

$$\begin{aligned}
\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\infty} &= \sup_n \|x_n\|_E = \sup_n \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x_n)| \\
&= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sup_n |\varphi(x_n)|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \|(\varphi(x_n))_{n=1}^{\infty}\|_{\infty} \\
&= \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{w,\infty}.
\end{aligned}
$$

O espaço das sequências fracamente $p$-somáveis é normado e completo como mostra a proposição a seguir.

**Proposição 1.2.4.** *Se $E$ é Banach e $1 \leq p < \infty$, então $\left(\ell_p^w(E), \|\cdot\|_{w,p}\right)$, onde*

$$
\|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p} := \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left( \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}}
$$

*é um espaço de Banach.*

*Demonstração.* Pela Proposição 1.2.2, temos que $\|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p}$ é uma norma. Mostraremos agora a completude: seja $\left(\left(x_n^{(k)}\right)_{n=1}^{\infty}\right)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $\ell_p^w(E)$. Assim, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $k, k' \geq N$, então

$$
\left\| \left(x_n^{(k)}\right)_{n=1}^{\infty} - \left(x_n^{(k')}\right)_{n=1}^{\infty} \right\|_{w,p} < \varepsilon
$$

e, por definição, dado $\varphi \in B_{E'}$

$$
\left| \varphi\left(x_n^{(k)}\right) - \varphi\left(x_n^{(k')}\right) \right|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \varphi\left(x_n^{(k)} - x_n^{(k')}\right) \right|^p < \varepsilon^p.
$$

Como cada termo desta série é majorado por $\varepsilon^p$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $k, k' \geq N$, temos que

$$
\left\| x_n^{(k)} - x_n^{(k')} \right\|^p = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left| \varphi\left(x_n^{(k)} - x_n^{(k')}\right) \right|^p \leq \varepsilon^p,
$$

o que mostra que $\left(x_n^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $E$, e consequentemente convergente, pois $E$ é Banach. Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in E$ tal que $\left(x_n^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ converge para $x_n$. Mostraremos que $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$ e é o limite de $\left(x_n^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$. De fato, para cada $m \in \mathbb{N}, \varphi \in B_{E'}$ e $k, k' \geq N$, então

$$
\sum_{n=1}^{m} \left| \varphi\left(x_n^{(k)} - x_n^{(k')}\right) \right|^p < \varepsilon^p.
$$

Fazendo $k' \to \infty$, para $k \geq N$,

$$
\sum_{n=1}^{m} \left| \varphi\left(x_n^{(k)} - x_n\right) \right|^p < \varepsilon^p
$$

e fazendo $m \to \infty$, obtemos que

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \left| \varphi\left(x_n^{(k)} - x_n\right) \right|^p \leq \varepsilon^p,
$$

para toda $\varphi \in B_{E'}$. Dado $\psi \in E'$, com $\psi \neq 0$, então $\frac{\psi}{\|\psi\|} \in B_{E'}$. Logo, se $k \geq N$, então

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\psi}{\|\psi\|} \left( x_n^{(k)} - x_n \right) \right|^p \leq \varepsilon^p,$$

ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \psi \left( x_n^{(k)} - x_n \right) \right|^p \leq \|\psi\|^p \varepsilon^p,$$

o que mostra que $\left( x_n^{(k)} - x_n \right)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$. Como $\ell_p^w(E)$ é um espaço vetorial, concluímos que

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} = \left( x_n^{(N)} \right)_{n=1}^{\infty} - \left( x_n^{(N)} - x_n \right)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E).$$

Além disso, se $k \geq N$, temos que $\left\| \left( x_n^{(k)} - x_n \right)_{n=1}^{\infty} \right\|_{w,p} \leq \varepsilon$, ou seja,

$$\lim_{k \to \infty} \left( x_n^{(k)} \right)_{n=1}^{\infty} = (x_n)_{n=1}^{\infty},$$

o que mostra que, para $1 \leq p < \infty$, o espaço $\ell_p^w(E)$ é de Banach. $\square$

**Proposição 1.2.5.** *Seja $E$ um espaço de Banach. Se $1 \leq p \leq \infty$, então*

$$\ell_p(E) \subseteq \ell_p^w(E).$$

*Demonstração.* Dado $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$, para $1 \leq p < \infty$, temos:

$$\begin{aligned}
\|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p} &= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left( \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left( \sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi\|^p \cdot \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left[ \|\varphi\| \left( \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] \\
&= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \|\varphi\| \left( \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_p .
\end{aligned}$$

Para $p = \infty$, na Observação 1.2.3 foi mostrado que $\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\infty} = \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{w,\infty}$, o que implica $\ell_\infty(E) = \ell_\infty^w(E)$. $\square$

**Proposição 1.2.6.** *Seja $E$ um espaço vetorial normado. Se a dimensão de $E$ é finita, então $\ell_p(E) = \ell_p^w(E)$.*

*Demonstração.* Basta mostrar que quando $\dim(E) < \infty$, então $\ell_p^w(E) \subset \ell_p(E)$. A outra inclusão segue da Proposição 1.2.5.

Todo espaço vetorial normado $E$ de dimensão finita é isomorfo a $\mathbb{K}^m$, onde $m = \dim(E)$. Assim, é suficiente mostrar o caso em que $E = \mathbb{K}^m$. Seja $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$. Iremos fazer a identificação $x_i = (x_{i,1}, \ldots, x_{i,m})$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Consideremos a aplicação:

$$\begin{array}{rcl} \pi_j : & E = \mathbb{K}^m & \longrightarrow \mathbb{K} \\ & x_i = (x_{i,1}, \ldots, x_{i,m}) & \longmapsto x_{i,j} \end{array}$$

para todo $j = 1, \ldots, m$. É fácil ver que $\pi_j$ é linear e como $\dim(E) < \infty$, então $\pi_j$ é limitado. Daí, tomando a norma $\|(x_1, \ldots, x_m)\|_p = \left(\sum_{j=1}^m |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ em $\mathbb{K}^m$, segue que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|_p^p &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} |x_{i,j}|^p = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{\infty} |\pi_j(x_i)|^p \\ &\leq \sum_{j=1}^{m} \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(x_i)|^p \\ &= \sum_{j=1}^{m} \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p}^p \\ &= m\|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p}^p < \infty, \end{aligned}$$

evidenciando que $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$, o que conclui a demostração. $\square$

Considerando que $E$ tem dimensão infinita, apresentaremos um exemplo de uma sequência fracamente $p$-somável que não é absolutamente $p$-somável, ou seja, que a inclusão do enunciado da Proposição 1.2.5 é própria.

**Exemplo 1.2.7.** Denotaremos por $c_0$ o conjunto de todas as sequências de escalares que convergem para zero, ou seja:

$$c_0 = \{(a_i)_{i=1}^{\infty}; a_i \in \mathbb{K} \text{ para todo } i \in \mathbb{N} \text{ e } a_i \to 0\}$$

Com as operações usuais de sequências, temos que $c_0$ é um espaço vetorial, que, por sua vez, é um espaço de Banach quando consideramos a norma

$$\|(a_i)_{i=1}^{\infty}\|_{\infty} = \sup\{|a_i|; i \in \mathbb{N}\}.$$

Digamos que $E = c_0$ e considere a sequência $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ onde $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots) \in c_0$ com 1 na $i$-ésima coordenada. Note que para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $e_n \in c_0$. Porém,

$$\|(e_n)_{n=1}^{\infty}\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \|e_n\|_{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty,$$

o que resulta em $(e_n)_{n=1}^{\infty} \notin \ell_1(c_0)$. Vamos mostrar que $(e_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1^w(c_0)$. Como $(c_0)' = \ell_1$ (veja Proposição A.0.14), iremos verificar que $(\varphi(e_n))_{n=1}^{\infty} \in \ell_1$ para todo $\varphi \in (c_0)' = \ell_1$. Dado $\varphi \in (c_0)'$, existe $y = (y_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_1$ tal que $J(y) = \varphi$, onde $J$ é a isometria linear

$$\begin{array}{llllll} J: & \ell_1(E') & \to & (c_0(E))' & & \\ & (S_i)_{i=1}^{\infty} & \mapsto & J((S_i)_{i=1}^{\infty}) & : & c_0(E) \to \mathbb{K} \\ & & & & & (x_i)_{i=1}^{\infty} \mapsto J((S_i)_{i=1}^{\infty})((x_i)_{i=1}^{\infty}) := \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} S_i(x_i) \end{array}$$

para toda $(S_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_1(E')$ e $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in c_0(E)$. Daí,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(e_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} |J(y)(e_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| < \infty,$$

o que mostra que $(e_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1^w(c_0)$.

Em espaços de Banach de dimensão infinita, sempre existem sequências fracamente $p$-somáveis que não são absolutamente $p$-somáveis. Resultados com esta caracterização são conhecidos como Teoremas do tipo Dvoretzky-Rogers.

**Proposição 1.2.8** (Dvoretzky-Rogers, versão fraca). *Seja $E$ um espaço de Banach e $1 \leq p < \infty$. Então $\ell_p(E) = \ell_p^w(E)$ se, e somente se, $E$ tem dimensão finita.*

*Demonstração.* Uma demostração deste teorema é encontrada em [Pe05, Teorema 3.3]. □

## 1.3 Sequências Cohen fortemente $p$-somáveis

Nesta seção estudaremos o espaço das sequências Cohen fortemente $p$-somáveis em um espaço de Banach $E$. Este espaço foi introduzido por Joel S. Cohen [Co73] e inicialmente era chamado de fortemente $p$-somáveis. Este espaço de sequência é completo e é um subconjunto próprio do espaço $\ell_p(E)$ quando $E$ tem dimensão infinita, como se verá a seguir.

Sejam $E$ um espaço de Banach, $1 \leq p < \infty$ e $p'$ o conjugado de $p$, isto é, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1$. Para $p = 1$ tomaremos $p' = \infty$.

**Definição 1.3.1.** Uma sequência $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ em um espaço de Banach $E$ é *Cohen fortemente $p$-somável* se a série $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x_i)$ convergir para toda sequência $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{p'}^w(E')$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Denotaremos por $\ell_p\langle E\rangle$ o conjunto de todas as sequências Cohen fortemente $p$-somáveis em $E$. Este conjunto é um espaço vetorial com as operações usuais de sequências. De fato, a sequência identicamente nula é Cohen fortemente $p$-somável e portanto $\ell_p\langle E\rangle$ é não vazio. Dados $(x_i)_{i=1}^{\infty}, (y_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p\langle E\rangle$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, então

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(\lambda x_i + y_i) &= \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda\varphi_i(x_i) + \varphi_i(y_i)) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x_i) + \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(y_i) < \infty\end{aligned}$$

para toda sequência $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{p'}^w(E')$. Portanto, $\lambda(x_i)_{i=1}^{\infty} + (y_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p\langle E\rangle$.

**Proposição 1.3.2.** *Seja* $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ *uma sequência em* $E$. *Então a série* $\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(x_i)$ *converge para toda* $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\in\ell_{p'}^{w}(E')$ *se, e somente se, a série* $\sum_{i=1}^{\infty}|\varphi_i(x_i)|$ *converge para toda* $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\in\ell_{p'}^{w}(E')$.

*Demonstração.* Suponhamos que a série $\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(x_i)$ converge sempre que $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\in\ell_{p'}^{w}(E)$. Para o caso real, defina

$$\psi_j=\begin{cases}\varphi_j, & \text{se} \quad \varphi_j(x_j)\geq 0\\ -\varphi_j, & \text{se} \quad \varphi_j(x_j)<0\end{cases}.$$

Dado $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}\in\ell_{p'}^{w}(E')$, por definição, $\sum_{j=1}^{\infty}|\xi(\varphi_j)|^{p'}<\infty$ para toda $\xi\in B_{E''}$. Pela linearidade de $\xi$, resulta que

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\xi(\varphi_j)|^{p'}=\sum_{j=1}^{\infty}|\xi(\psi_j)|^{p'}$$

o que mostra que $(\psi_j)_{j=1}^{\infty}\in\ell_{p'}^{w}(E')$. Para o caso complexo, tome $\psi_j=\varphi_j e^{-i\theta_j}$, onde $\theta_j$ é o argumento de $\varphi_j(x_j)$. Daí,

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\xi(\psi_j)|^{p'}=\sum_{j=1}^{\infty}\left|\xi\left(\varphi_j e^{-i\theta_j}\right)\right|^{p'}=\sum_{i=1}^{\infty}|\xi(\varphi_j)|^{p'}.$$

Em ambos os casos, temos que

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\varphi_j(x_j)|=\sum_{j=1}^{\infty}\psi_j(x_j)<\infty.$$

A volta é imediata, pois, em um espaço de Banach, toda série absolutamente convergente é convergente. □

Em seu artigo, Cohen [Co73] define uma norma neste espaço pondo

$$\sigma_p((x_i)_{i=1}^{\infty})=\sup_{\left\|(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\right\|_{w,p'}\leq 1}\left|\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(x_i)\right|.$$

Campos [Ca13] define a seguinte norma em $\ell_p\langle E\rangle$:

$$\|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{C,p}=\sup_{\left\|(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\right\|_{w,p'}\leq 1}\sum_{i=1}^{\infty}|\varphi_i(x_i)|.$$

Estas normas são iguais. De fato, pela desigualdade triangular, temos

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(x_i)\right|\leq\sum_{i=1}^{\infty}|\varphi_i(x_i)|$$

e consequentemente

$$\sup_{\left\|(\varphi_i)_{i=1}^\infty\right\|_{w,p'}\le 1}\left|\sum_{i=1}^\infty \varphi_i(x_i)\right| \le \sup_{\left\|(\varphi_i)_{i=1}^\infty\right\|_{w,p'}\le 1}\sum_{i=1}^\infty |\varphi_i(x_i)|\,.$$

Por outro lado, definindo as sequências $(\varphi_i)_{i=1}^\infty, (\psi_i)_{i=1}^\infty \in \ell_{p'}^w(E')$ como na Proposição 1.3.2, então

$$\sup_{\left\|(\varphi_i)_{i=1}^\infty\right\|_{w,p'}\le 1}\sum_{i=1}^\infty |\varphi_i(x_i)| = \sup_{\left\|(\psi_i)_{i=1}^\infty\right\|_{w,p'}\le 1}\sum_{i=1}^\infty \psi_i(x_i) \le \sup_{\left\|(\psi_i)_{i=1}^\infty\right\|_{w,p'}\le 1}\left|\sum_{i=1}^\infty \psi_i(x_i)\right|$$

obtendo a desigualdade contrária.

**Proposição 1.3.3.** *Sejam $1 \le p < \infty$ e $E$ um espaço de Banach. Então $\left(\ell_p\langle E\rangle, \|\cdot\|_{C,p}\right)$ é um espaço de Banach.*

*Demonstração.* Seja $p = 1$. Note que, neste caso, $p' = \infty$. Daí, dado $(x_i)_{i=1}^\infty \in \ell_1\langle E\rangle$ então

$$\|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{C,1} = \sup_{\left\|(\varphi_i)_{i=1}^\infty\right\|_{w,\infty}\le 1}\sum_{i=1}^\infty |\varphi_i(x_i)| = \sup_{\left\|(\varphi_i)_{i=1}^\infty\right\|_{\infty}\le 1}\sum_{i=1}^\infty |\varphi_i(x_i)|\,.$$

Agora, note que

$$\begin{aligned}
\|(x_i)_{i=1}^\infty\|_1 &\overset{\text{Hahn-Banach}}{=} \sup_{\varphi\in B_{\ell_1(E)'}} |\varphi((x_i)_{i=1}^\infty)| \\
&\overset{\text{Prop. } A.0.13}{=} \sup_{(\varphi_i)_{i=1}^\infty\in B_{\ell_\infty(E')}}\left|\sum_{i=1}^\infty \varphi_i(x_i)\right| \\
&= \sup_{(\varphi_i)_{i=1}^\infty\in B_{\ell_\infty(E')}}\sum_{i=1}^\infty |\varphi_i(x_i)|\,.
\end{aligned}$$

Portanto, se $(x_i)_{i=1}^\infty \in \ell_p\langle E\rangle$, então

$$\|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{C,1} = \|(x_i)_{i=1}^\infty\|_1$$

(isto é, $\ell_1\langle\cdot\rangle \overset{1}{=} \ell_1(\cdot)$).

Analisaremos agora o caso $1 < p < \infty$. Para mostrar que $\|\cdot\|_{C,p}$ está bem definida, para cada $x = (x_i)_{i=1}^\infty \in \ell_p\langle E\rangle$, considere a aplicação

$$\begin{aligned}
u_x :\ \ell_{p'}^w(E') &\to \ell_1 \\
(\varphi_i)_{i=1}^\infty &\mapsto u_x((\varphi_i)_{i=1}^\infty) := (\varphi_i(x_i))_{i=1}^\infty.
\end{aligned}$$

A aplicação $u_x$ está bem definida e é linear. Vamos mostrar que $u_x$ é contínua usando o Teorema do Gráfico Fechado. Suponha que

$$\begin{cases} \left(\varphi_i^{(k)}\right)_{i=1}^\infty & \to (\varphi_i)_{i=1}^\infty \text{ em } \ell_{p'}^w(E) \\ u_x\left(\left(\varphi_i^{(k)}\right)_{i=1}^\infty\right) & \to (y_i)_{i=1}^\infty \text{ em } \ell_1 \end{cases}. \tag{1.2}$$

Mostraremos que $(y_i)_{i=1}^{\infty} = (\varphi_i(x_i))_{i=1}^{\infty} = u_x((\varphi_i)_{i=1}^{\infty})$.

Uma vez que

$$u_x\left(\left(\varphi_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty}\right) \to (y_i)_{i=1}^{\infty}$$

em $\ell_1$, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $k \geq N$, então

$$\left\| u_x\left(\left(\varphi_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty}\right) - (y_i)_{i=1}^{\infty} \right\|_1 = \left\| (\varphi_i^{(k)}(x_i))_{i=1}^{\infty} - (y_i)_{i=1}^{\infty} \right\|_1 < \varepsilon,$$

ou ainda, $\sum_{i=1}^{\infty} \left|\varphi_i^{(k)}(x_i) - y_i\right| < \varepsilon$. Como

$$\left|\varphi_i^{(k)}(x_i) - y_i\right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left|\varphi_i^{(k)}(x_i) - y_i\right| < \varepsilon,$$

para todo $i \in \mathbb{N}$, temos

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_i^{(k)}(x_i) = y_i. \tag{1.3}$$

Por outro lado, como $\left(\varphi_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty} \to (\varphi_i)_{i=1}^{\infty}$ em $\ell_{p'}^{w}(E)$, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $k \geq N$, então

$$\left\| \left(\varphi_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty} - (\varphi_i)_{i=1}^{\infty} \right\|_{w,p'} = \left\| \left(\varphi_i^{(k)} - \varphi_i\right)_{i=1}^{\infty} \right\|_{w,p'} < \varepsilon.$$

Assim, considerando o operador linear

$$J_E : E \to E'',\ J_E(x)(\varphi) = \varphi(x) \text{ para todo } x \in E \text{ e } \varphi \in E',$$

e que $E$ e $J_E(E)$ são isometricamente isomorfos (veja [BPT15], Proposição 4.3.1), então

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in B_E} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left|\left(\varphi_i^{(k)} - \varphi_i\right)(x)\right|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} &= \sup_{J_E(x)\in B_{J_E(E)}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left|J_E(x)\left(\varphi_i^{(k)} - \varphi_i\right)\right|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\leq \sup_{\psi\in B_{E''}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left|\psi\left(\varphi_i^{(k)} - \varphi_i\right)\right|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \left\| \left(\varphi_i^{(k)} - \varphi_i\right)_{i=1}^{\infty} \right\|_{w,p'} \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}$$

e, consequentemente, $\varphi_i^{(k)}(x) \to \varphi_i(x)$, para todo $x \in E$ com $\|x\| \leq 1$. Como

$$\varphi_i^{(k)}\left(\frac{x_i}{\|x_i\|}\right) \to \varphi_i\left(\frac{x_i}{\|x_i\|}\right),$$

então

$$\left|\varphi_i^{(k)}\left(\frac{x_i}{\|x_i\|}\right) - \varphi_i\left(\frac{x_i}{\|x_i\|}\right)\right| = \frac{1}{\|x_i\|}\left|\varphi_i^{(k)}(x_i) - \varphi_i(x_i)\right| < \varepsilon$$

e, consequentemente, para todo $i \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_i^{(k)}(x_i) = \varphi_i(x_i). \tag{1.4}$$

Assim, por (1.3) e (1.4) e pela unicidade do limite, temos que $y_i = \varphi_i(x_i)$, para todo $i \in \mathbb{N}$, o que mostra que $(y_i)_{i=1}^{\infty} = u_x\left((\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\right)$. Portanto, $u_x$ tem gráfico fechado, e consequentemente é contínua (ver Proposição A.0.3). Assim, $\|u_x\| < \infty$ e segue que:

$$\begin{aligned}
\|u_x\| &= \sup_{\|(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p'}\leq 1} \|u_x((\varphi_i)_{i=1}^{\infty})\|_1 \\
&= \sup_{\|(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p'}\leq 1} \|(\varphi_i(x_i))_{i=1}^{\infty}\|_1 \\
&= \sup_{\|(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p'}\leq 1} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i(x_i)|\right) \\
&= \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{C,p},
\end{aligned}$$

ou seja, $\|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{C,p} < \infty$.

Verifiquemos as propriedades da norma:

$(N1)$ Por definição, temos que $\|\cdot\|_{C,p} \geq 0$. Se a sequência é nula, então $\|0\|_{C,p} = 0$. Por outro lado, quando $\|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{C,p} = 0$, temos que $(x_i)_{i=1}^{\infty} = 0$, pois, caso contrário, existiria um $x_j \neq 0$ para algum $j \in \mathbb{N}$ e tomando a sequência $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty} = (e_j\gamma_i)_{i=1}^{\infty}$ em $E'$ com $\|\gamma_i\| = 1$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e $\|x_j\| = |\gamma_j(x_j)|$, então

$$0 < \|x_j\| = |\gamma_j(x_j)| = \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i(x_i)| \leq \sup_{\|(\psi_i)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p'}\leq 1} \sum_{i=1}^{\infty} |\psi_i(x_i)| = \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{C,p},$$

o que nos levaria a um absurdo.

$(N2)$ Dados $\lambda \in \mathbb{K}$ e $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p\langle E\rangle$, temos

$$\begin{aligned}
\|(\lambda x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{C,p} &= \sup_{\|(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p'}\leq 1} \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i(\lambda x_i)| \\
&= |\lambda| \sup_{\|(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p'}\leq 1} \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i(x_i)| \\
&= |\lambda| \cdot \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{C,p}.
\end{aligned}$$

$(N3)$ Para provar a desigualdade triangular, dadas $(x_i)_{i=1}^{\infty}, (y_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p\langle E\rangle$, como $\|\cdot\|_1$ é norma em $\ell_1$, então

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i(x_i + y_i)| &= \|(\varphi_i(x_i + y_i))_{i=1}^{\infty}\|_1 \\
&\leq \|(\varphi_i(x_i))_{i=1}^{\infty}\|_1 + \|(\varphi_i(y_i))_{i=1}^{\infty}\|_1 \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i(x_i)| + \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i(y_i)|.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\|(x_i)_{i=1}^{\infty} + (y_i)_{i=1}^{\infty}\|_{C,p} = \sup_{\|(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p'}\leq 1} \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i(x_i + y_i)|$$

$$\begin{aligned} &\leq \sup_{\|(\varphi_i)_{i=1}^\infty\|_{w,p'}\leq 1} \sum_{i=1}^\infty |\varphi_i(x_i)| + \sup_{\|(\varphi_i)_{i=1}^\infty\|_{w,p'}\leq 1} \sum_{i=1}^\infty |\varphi_i(y_i)| \\ &= \|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{C,p} + \|(y_i)_{i=1}^\infty\|_{C,p}. \end{aligned}$$

Portanto, $\|\cdot\|_{C,p}$ é uma norma em $\ell_p\langle E\rangle$.

Agora, só nos resta mostrar a completude. Seja $\left(\left(x_i^{(k)}\right)_{i=1}^\infty\right)_{k=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em $\ell_p\langle E\rangle$. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $k, k' \geq N$, temos que

$$\left\|\left(x_i^{(k)}\right)_{i=1}^\infty - \left(x_i^{(k')}\right)_{i=1}^\infty\right\|_{C,p} < \varepsilon.$$

Observe ainda que para todo $x_i \in E$, temos

$$\|x_i\|_E = \sup_{\varphi\in B_{E'}} |\varphi(x_i)| \leq \sup_{\|(\varphi_i)_{i=1}^\infty\|_{w,p'}\leq 1} \sum_{i=1}^\infty |\varphi_i(x_i)| = \|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{C,p}.$$

Daí, se $k, k' \geq N$, então

$$\left\|x_i^{(k)} - x_i^{(k')}\right\|_E \leq \left\|\left(x_i^{(k)}\right)_{i=1}^\infty - \left(x_i^{(k')}\right)_{i=1}^\infty\right\|_{C,p} < \varepsilon.$$

Desta maneira, para cada $i \in \mathbb{N}$, temos que $\left(x_i^{(k)}\right)_{k=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy em $E$ e consequentemente converge. Digamos que, para cada $i \in \mathbb{N}$, $\left(x_i^{(k)}\right)_{k=1}^\infty$ convirja para $x_i$. Vamos mostrar que $(x_i)_{i=1}^\infty \in \ell_p\langle E\rangle$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, temos que para $k, k' \geq N$

$$\sum_{i=1}^m \left|\varphi_i\left(x_i^{(k)}\right) - \varphi_i\left(x_i^{(k')}\right)\right| < \varepsilon$$

para cada $(\varphi_i)_{i=1}^\infty \in \ell_{p'}^w(E')$. Fazendo $k' \to \infty$, obtemos

$$\sum_{i=1}^m \left|\varphi_i\left(x_i^{(k)}\right) - \varphi_i(x_i)\right| \leq \varepsilon$$

e fazendo $m \to \infty$, temos que

$$\sum_{i=1}^\infty \left|\varphi_i\left(x_i^{(k)}\right) - \varphi_i(x_i)\right| \leq \varepsilon, \tag{1.5}$$

para todo $(\varphi_i)_{i=1}^\infty \in \ell_{p'}^w(E')$. Concluímos que, para todo $k \geq N$, a sequência $\left(x_i^{(k)} - x_i\right)_{i=1}^\infty$ pertence a $\ell_p\langle E\rangle$. Logo,

$$(x_i)_{i=1}^\infty = \left(x_i^{(N)}\right)_{i=1}^\infty - \left(x_i^{(N)} - x_i\right)_{i=1}^\infty \in \ell_p\langle E\rangle.$$

Mais ainda, de (1.5), segue que $\left(x_i^{(k)}\right)_{i=1}^\infty$ converge para $(x_i)_{i=1}^\infty$ na norma $\|\cdot\|_{C,p}$. Portanto, $\ell_p\langle E\rangle$ é um espaço de Banach. $\square$

**Proposição 1.3.4.** *Seja $E$ um espaço de Banach. Se $1 \leq p \leq \infty$, então $\ell_p\langle E\rangle \subseteq \ell_p(E)$. Mais ainda, $\ell_1\langle E\rangle = \ell_1(E)$.*

*Demonstração.* Dado $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p\langle E\rangle$, então

$$\begin{aligned}
\|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_p &\overset{\text{Hahn-Banach}}{=} \sup_{\varphi \in B_{\ell_p(E)'}} |\varphi((x_i)_{i=1}^{\infty})| \\
&= \sup_{(\varphi_i)_{i=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p'}(E')}} \left|\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x_i)\right| \\
&\leq \sup_{(\varphi_i)_{i=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p'}(E')}} \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i(x_i)|.
\end{aligned}$$

Pela Proposição 1.2.5,

$$\sup_{(\varphi_i)_{i=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p'}(E')}} \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i(x_i)| \leq \sup_{(\varphi_i)_{i=1}^{\infty} \in B_{\ell^w_{p'}(E')}} \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i(x_i)| = \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{C,p},$$

Portanto, segue que $\|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_p \leq \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{C,p}$.

Consideremos o caso $p = \infty$. Tome $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_\infty\langle E\rangle$. Sendo que

$$\|x_i\|_E \leq \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{C,\infty}$$

para todo $i \in \mathbb{N}$, temos que $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ é limitada e portanto $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_\infty(E)$. Como $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ foi escolhida de forma arbitrária, segue que $\ell_\infty\langle E\rangle \subset \ell_\infty(E)$.

Verifiquemos agora que $\ell_1\langle E\rangle = \ell_1(E)$. Se $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell^w_\infty(E)$, uma vez que $\ell^w_\infty(E) = \ell_\infty(E')$, então $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}$ é limitada. Logo, existe $M \geq 0$ tal que $\|\varphi_i\| \leq M$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Daí, para todas as sequências $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_1(E)$ e $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell^w_\infty(E)$, então

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i(x_i)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi_i\| \cdot \|x_i\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} M\|x_i\| \leq M \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| < \infty.$$

$\square$

# CAPÍTULO 2

## Operadores Entre Espaços de Sequências

Já sabemos que a inclusão $\ell_p(E) \subset \ell_p^w(E)$ sempre é válida (Proposição 1.2.5) e que quando o espaço de Banach $E$ tem dimensão infinita, esta inclusão é estrita (Exemplo 1.2.7). Isto motiva introduzir a noção de operador que melhora a convergência de séries no sentido de transformar sequências fracamente $p$-somáveis em absolutamente $p$-somáveis [1]. Com raciocínio similar, podemos falar de operadores que levam uma sequência absolutamente $p$-somável em Cohen fortemente $p$-somável, uma vez que $\ell_p\langle E\rangle \subseteq \ell_p(E)$.

O objetivo central deste capítulo é estudar os operadores (lineares) Cohen fortemente $p$-somantes - que operam entre os espaços $\ell_p(E)$ e $\ell_p\langle E\rangle$. Devido à relação existente entre o operador Cohen fortemente $p$-somante e o seu operador adjunto, aqui também serão apresentados os operadores absolutamente $p$-somantes (que operam entre os espaços $\ell_p^w(E)$ e $\ell_p(E)$) e alguns resultados clássicos desta teoria.

## 2.1 Operadores absolutamente $p$-somantes

Todo operador linear contínuo $T$ entre os espaços de Banach $E$ e $F$ transforma uma sequência $(x_i)_{i=1}^\infty \in \ell_p^w(E)$ em uma sequência $(T(x_i))_{i=1}^\infty \in \ell_p^w(F)$. Em outras palavras, existe um operador induzido

$$\begin{aligned} \widehat{T}^w : \quad \ell_p^w(E) &\to \ell_p^w(F) \\ (x_i)_{i=1}^\infty &\mapsto \widehat{T}^w((x_i)_{i=1}^\infty) := (T(x_i))_{i=1}^\infty \end{aligned}$$

[1] Um estudo detalhado desta teoria é dado por Pietsch [Pi67].

e $\left\|\widehat{T}^w\right\| = \|T\|$. Verificaremos que $\widehat{T}^w$ está bem definido: dado $(x_i)_{i=1}^\infty \in \ell_p^w(E)$, note que

$$\begin{aligned}
\left\|\widehat{T}^w\left((x_i)_{i=1}^\infty\right)\right\|_{w,p}^p &= \|(T(x_i))_{i=1}^\infty\|_{w,p}^p = \sup_{\varphi\in B_{F'}} \sum_{i=1}^\infty \|\varphi(T(x_i))\|^p \\
&= \sup_{\varphi\in B_{F'}} \sum_{i=1}^\infty \|\varphi(T(x_i))\|^p \cdot \frac{\|T\|^p}{\|T\|^p} \\
&= \|T\|^p \sup_{\varphi\in B_{F'}} \sum_{i=1}^\infty \left\|\varphi\left(\frac{T(x_i)}{\|T\|}\right)\right\|^p.
\end{aligned}$$

Agora note que $\varphi\frac{T}{\|T\|}$ pertence a $B_{E'}$, pois

$$\left\|\varphi\frac{T}{\|T\|}\right\| \le \left\|\frac{T}{\|T\|}\right\| = 1,$$

já que $\|\varphi\| \le 1$. Daí,

$$\sup_{\varphi\in B_{F'}} \sum_{i=1}^\infty \left\|\varphi\left(\frac{T(x_i)}{\|T\|}\right)\right\|^p \le \sup_{\psi\in B_{E'}} \|\psi(x_i)\|^p = \|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{w,p}^p < \infty,$$

o que mostra que $\widehat{T}^w$ está bem definido. Disso, temos que

$$\left\|\widehat{T}^w(x_i)_{i=1}^\infty\right\|_{w,p} \le \|T\| \cdot \|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{w,p},$$

e, consequentemente, $\left\|\widehat{T}^w\right\| \le \|T\|$. Por outro lado,

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|T(x)\| = \sup_{\|(y_i)_{i=1}^\infty=(x,0,0,\dots)\|_{w,p}\le 1} \left\|\widehat{T}^w((y_i)_{i=1}^\infty)\right\|_{w,p} \le \left\|\widehat{T}^w\right\|.$$

Portanto, $\left\|\widehat{T}^w\right\| = \|T\|$.

**Definição 2.1.1.** Seja $1 \le p < \infty$. Um operador $T \in \mathcal{L}(E;F)$ entre espaços de Banach é dito *absolutamente $p$-somante* se $T$ transforma sequências fracamente $p$-somáveis em $E$ em sequências absolutamente $p$-somáveis em $F$, isto é, o operador

$$\begin{aligned}
\widehat{T}: \ \ell_p^w(E) &\to \ell_p(F) \\
(x_i)_{i=1}^\infty &\mapsto (T(x_i))_{i=1}^\infty
\end{aligned}$$

está bem definido.

O espaço de todos os operadores absolutamente $p$-somantes entre os espaços de Banach $E$ e $F$ será denotado por $\Pi_p(E;F)$.

Dados um espaço vetorial $E$ e $x_1,\dots,x_m \in E$, as sequências $(x_1,\dots,x_m,0,0,\dots)$ serão identificadas como as sequências finitas $(x_1,\dots,x_m) = (x_i)_{i=1}^m$.

É possível caracterizar os operadores absolutamente $p$-somantes através de desigualdades. A fim de precisar melhor esta ideia, consideremos a seguinte

**Proposição 2.1.2.** *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $T \in \mathcal{L}(E; F)$. As seguintes condições são equivalentes:*

*(i) $T$ é absolutamente $p$-somante;*

*(ii) Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} \|T(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.1}$$

*sempre que $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$;*

*(iii) Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \|T(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{i=1}^{m} |\varphi(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.2}$$

*para toda sequência finita $x_1, \ldots, x_m$ em $E$.*

*Denotando por $\pi_p(T)$ o ínfimo das constantes $C$ que satisfazem a desigualdade (2.2), temos que $\pi_p(T) = \left\|\widehat{T}\right\|$.*

*Demonstração.* Veja [Si10, Proposição 2.1.7] (fazendo $p = q$). □

A proposição a seguir afirma que $\pi_p(\cdot)$ é uma norma em $\Pi_p(E; F)$.

**Proposição 2.1.3.** $(\Pi_p(E; F), \pi_p(\cdot))$ *é um espaço vetorial normado.*

*Demonstração.* Veja [Sa08, Proposição 2.3.15] (fazendo $p = q$). □

A classe dos operadores absolutamente $p$-somantes satisfaz a seguinte ordem de inclusão baseada no parâmetro $p$:

**Proposição 2.1.4** (Teorema de Inclusão)**.** *Sejam $E$ e $F$ espaços de Banach e $1 \leq p_1 \leq p_2 < \infty$. Então*

$$\Pi_{p_1}(E; F) \subset \Pi_{p_2}(E; F).$$

*Demonstração.* Sejam $T \in \Pi_{p_1}(E; F)$, $m \in \mathbb{N}$ e $x_1, \ldots, x_m \in E$. Sendo $p_1 < p_2$ e fazendo $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}$ e $\lambda_i = \|T(x_i)\|^{\frac{p_2}{p}}$, para $i = 1, \ldots, m$, temos

$$\begin{aligned} \|T(\lambda_i x_i)\|^{p_1} &= \left\|T\left(\|T(x_i)\|^{\frac{p_2}{p}} x_i\right)\right\|^{p_1} = \|T(x_i)\|^{\frac{p_1 p_2}{p}} \cdot \|T(x_i)\|^{p_1} \\ &= \|T(x_i)\|^{\frac{p_1 p_2}{p} + p_1} = \|T(x_i)\|^{p_2}. \end{aligned}$$

Note que, como $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}$, então $\frac{1}{\frac{p}{p_1}} + \frac{1}{\frac{p_2}{p_1}} = 1$. Daí,

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \|T(x_i)\|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_1}} = \left(\sum_{i=1}^{m} \|T(\lambda_i x_i)\|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left( \sum_{i=1}^{m} |\varphi(\lambda_i x_i)|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \\
&= C \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left( \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{p_1} |\varphi(x_i)|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} C \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left[ \left( \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{p} \right)^{\frac{p_1}{p}} \left( \sum_{i=1}^{m} |\varphi(x_i)|^{p_2} \right)^{\frac{p_1}{p_2}} \right]^{\frac{1}{p_1}} \\
&= C \left( \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{p} \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left( \sum_{i=1}^{m} |\varphi(x_i)|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \\
&= C \left( \sum_{i=1}^{m} \|T(x_i)\|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left( \sum_{i=1}^{m} |\varphi(x_i)|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}}.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\left( \sum_{i=1}^{m} \|T(x_i)\|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} &= \left( \sum_{i=1}^{m} \|T(x_i)\|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_1}} \left( \sum_{i=1}^{m} \|T(x_i)\|^{p_2} \right)^{-\frac{1}{p}} \\
&\leq C \left( \sum_{i=1}^{m} \|T(x_i)\|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left( \sum_{i=1}^{m} |\varphi(x_i)|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \left( \sum_{i=1}^{m} \|T(x_i)\|^{p_2} \right)^{-\frac{1}{p}} \\
&= C \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left( \sum_{i=1}^{m} |\varphi(x_i)|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}},
\end{aligned}
$$

o que mostra que $T \in \Pi_{p_2}(E; F)$. $\square$

O teorema a seguir é um resultado central da teoria dos operadores absolutamente somantes e pode ser encontrado em ([PS11], Theorem 2.1).

**Teorema 2.1.5** (Dvoretzky-Rogers)**.** *Sejam $E$ um espaço de Banach e $1 \leq p < \infty$. Então $\Pi_p(E; E) = \mathcal{L}(E; E)$ se, e somente se, $\dim E < \infty$.*

Do que foi dito no teorema acima, em particular, o operador identidade em $E$ é absolutamente $p$-somante se, e somente se, a dimensão de $E$ for finita.

## 2.2 Operadores Cohen fortemente $p$-somantes

Dados $E$ e $F$ espaços de Banach e um operador linear $T \in \mathcal{L}(E; F)$, então o operador induzido

$$
\begin{aligned}
\widehat{T}^s : \quad \ell_p(E) &\to \ell_p(F) \\
(x_i)_{i=1}^{\infty} &\mapsto \widehat{T}^s\left((x_i)_{i=1}^{\infty}\right) = (T(x_i))_{i=1}^{\infty}
\end{aligned}
$$

está bem definido e é contínuo. De fato, a linearidade de $\widehat{T}^s$ segue de $T$ ser linear e, para toda $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$, temos que

$$\left\| \widehat{T}^s\left((x_i)_{i=1}^{\infty}\right) \right\|_p = \|(T(x_i))_{i=1}^{\infty}\|_p \leq \|T\| \cdot \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_p.$$

Destarte, obtemos que $\widehat{T}^s$ é contínua e $(T(x_i))_{i=1}^{\infty} \in \ell_p(F)$. Mais ainda, temos que $\left\|\widehat{T}^s\right\| = \|T\|$. De fato,

$$\left\|\widehat{T}^s\right\| = \sup_{\|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_p \leq 1} \left( \sum_{i=1}^{\infty} \|T(x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \sup_{\|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_p \leq 1} \|T\| \left( \sum_{i=1}^{\infty} \|(x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|T\|,$$

e

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\| = \sup_{\|(y_i)_{i=1}^{\infty} = (x,0,0,\dots)\|_p \leq 1} \left( \sum_{i=1}^{\infty} \|T(y_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sup_{(y_i)_{i=1}^{\infty} \in B_{\ell_p(E)}} \left( \sum_{i=1}^{\infty} \|T(y_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left\|\widehat{T}^s\right\|. \end{aligned}$$

Um caso interessante é quando existe um operador $T \in \mathcal{L}(E;F)$ tal que o operador induzido $\widehat{T}$ tenha como contradomínio o espaço das sequências Cohen fortemente $p$-somantes, o que faz certo sentido, já que $\ell_p\langle E\rangle \subset \ell_p(E)$, e motiva a definição a seguir.

**Definição 2.2.1.** Seja $1 < p \leq \infty$. Um operador $T \in \mathcal{L}(E;F)$, onde $E$ e $F$ são espaços de Banach, é dito *Cohen fortemente $p$-somante* se $(T(x_i))_{i=1}^{\infty} \in \ell_p\langle F\rangle$ sempre que $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$, isto é, se o operador induzido

$$\begin{aligned} \widehat{T}: \quad \ell_p(E) &\to \ell_p\langle F\rangle \\ (x_i)_{i=1}^{\infty} &\mapsto (T(x_i))_{i=1}^{\infty} \end{aligned}$$

está bem definido.

O conjunto de todos os operadores Cohen fortemente $p$-somantes de $E$ em $F$ será denotado por $\mathcal{D}_p(E;F)$.

**Observação 2.2.2.** Na Proposição 1.3.4, foi mostrado que $\ell_1\langle E\rangle = \ell_1(E)$, o que motiva na Definição 2.2.1 tomar $1 < p \leq \infty$.

Temos a seguinte formulação de equivalências para os operadores Cohen fortemente $p$-somantes:

**Proposição 2.2.3.** *Seja $T \in \mathcal{L}(E;F)$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. As seguintes condições são equivalentes:*

*(i) $T$ é Cohen fortemente $p$-somante;*

*(ii) Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i(T(x_i))| \leq C\|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_p \cdot \|(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p'}, \tag{2.3}$$

*sempre que $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$ e $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{p'}^w(F')$;*

*(iii) Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\sum_{i=1}^{m} |\varphi_i(T(x_i))| \leq C\|(x_i)_{i=1}^{m}\|_p \cdot \|(\varphi_i)_{i=1}^{m}\|_{w,p'}, \tag{2.4}$$

*para quaisquer $m \in \mathbb{N}$, $x_i \in E$ e $\varphi_i \in F'$, com $i = 1, \ldots, m$.*

*Demonstração.* $(i) \Rightarrow (ii)$ Definamos o operador

$$\begin{aligned} \widetilde{T}: \quad \ell_{p'}^w(F') \times \ell_p(E) &\to \ell_1 \\ ((\varphi_i)_{i=1}^{\infty}, (x_i)_{i=1}^{\infty}) &\mapsto \widetilde{T}\left((\varphi_i)_{i=1}^{\infty}, (x_i)_{i=1}^{\infty}\right) = (\varphi_i(T(x_i)))_{i=1}^{\infty}. \end{aligned}$$

O operador $\widetilde{T}$ está bem definido. De fato, como $T$ é Cohen fortemente $p$-somante, por definição $(T(x_i))_{i=1}^{\infty} \in \ell_p\langle F\rangle$ e, portanto, $(\varphi_i(T(x_i)))_{i=1}^{\infty} \in \ell_1$. Mostremos que $\widetilde{T}$ é bilinear. Sejam $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}, (\alpha_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{p'}^w(F')$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Logo,

$$\begin{aligned} \widetilde{T}\left((\varphi_i)_{i=1}^{\infty} + \lambda(\alpha_i)_{i=1}^{\infty}, (x_i)_{i=1}^{\infty}\right) &= ((\varphi_i + \lambda\alpha_i)(T(x_i)))_{i=1}^{\infty} \\ &= (\varphi_i(T(x_i)) + \lambda\alpha_i(T(x_i)))_{i=1}^{\infty} \\ &= (\varphi_i(T(x_i)))_{i=1}^{\infty} + \lambda(\alpha_i(T(x_i)))_{i=1}^{\infty} \\ &= \widetilde{T}\left((\varphi_i)_{i=1}^{\infty}, (x_i)_{i=1}^{\infty}\right) + \lambda\widetilde{T}\left((\alpha_i)_{i=1}^{\infty}, (x_i)_{i=1}^{\infty}\right). \end{aligned}$$

Assim, $\widetilde{T}$ é linear com relação à primeira variável. Como é fácil ver que $\widetilde{T}$ é linear com relação à segunda variável, concluímos que $\widetilde{T}$ é bilinear. Vamos mostrar que $\widetilde{T}$ é contínua. Para isto, verificaremos que $\widetilde{T}$ é contínua em cada variável. Fixando $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$, o operador

$$\begin{aligned} \widetilde{T}_{(x_i)_{i=1}^{\infty}}: \quad \ell_{p'}^w(F') &\to \ell_1 \\ (\varphi_i)_{i=1}^{\infty} &\mapsto \widetilde{T}_{(x_i)_{i=1}^{\infty}}\left((\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\right) = (\varphi_i(T(x_i)))_{i=1}^{\infty} \end{aligned}$$

está bem definido e é linear. Usando o Teorema do Gráfico Fechado, suponha que

$$\begin{cases} \left(\varphi_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty} & \xrightarrow{k} (\varphi_i)_{i=1}^{\infty} \text{ em } \ell_{p'}^w(F') \\ \widetilde{T}_{(x_i)_{i=1}^{\infty}}\left(\left(\varphi_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty}\right) & \xrightarrow{k} (y_i)_{i=1}^{\infty} \text{ em } \ell_1 \end{cases}.$$

Vamos mostrar que $(y_i)_{i=1}^{\infty} = \widetilde{T}_{(x_i)_{i=1}^{\infty}}\left((\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\right)$. Como $\left(\varphi_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty}$ converge para $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}$ em $\ell_{p'}^{w}(F')$, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $k \geq N$, então

$$\left\|\left(\varphi_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty} - (\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\right\|_{w,p'} = \sup_{\psi \in B_{F''}} \left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|\psi\left(\varphi_i^{(k)} - \varphi_i\right)\right|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} < \varepsilon.$$

Como

$$\begin{aligned}\left\|\varphi_i^{(k)} - \varphi_i\right\|_{F'} &= \sup_{\psi \in E''}\left|\psi\left(\varphi_i^{(k)} - \varphi_i\right)\right| \\ &\leq \sup_{\psi \in F''}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|\psi\left(\varphi_i^{(k)} - \varphi_i\right)\right|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} = \left\|\left(\varphi_i^{(k)} - \varphi_i\right)_{i=1}^{\infty}\right\|_{w,p'},\end{aligned}$$

então, para $\|T(x_i)\| \neq 0$,

$$\begin{aligned}\left|\varphi_i^{(k)}\left(T(x_i)\right) - \varphi_i\left(T(x_i)\right)\right| &= \|T(x_i)\| \cdot \left|\varphi_i^{(k)}\left(\frac{T(x_i)}{\|T(x_i)\|}\right) - \varphi_i\left(\frac{T(x_i)}{\|T(x_i)\|}\right)\right| \\ &\leq \|T(x_i)\| \sup_{x \in B_F}\left|\varphi_i^{(k)}(x) - \varphi_i(x)\right| \\ &= \|T(x_i)\| \cdot \|\varphi_i^{(k)} - \varphi\|_{F'} \\ &\leq \varepsilon\|T(x_i)\|.\end{aligned}$$

Assim, para todo $i \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_i^{(k)}\left(T(x_i)\right) = \varphi_i\left(T(x_i)\right). \tag{2.5}$$

Por outro lado, como supomos que $\widetilde{T}_{(x_i)_{i=1}^{\infty}}\left(\left(\varphi_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty}\right) \to (y_i)_{i=1}^{\infty}$ em $\ell_1$, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N' \in \mathbb{N}$ tal que se $k \geq N'$, então

$$\left\|\left(\varphi_i^{(k)}\left(T(x_i)\right)\right)_{i=1}^{\infty} - (y_i)_{i=1}^{\infty}\right\|_1 = \left\|\widetilde{T}_{(x_i)_{i=1}^{\infty}}\left(\left(\varphi_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty}\right) - (y_i)_{i=1}^{\infty}\right\|_1 < \varepsilon.$$

Assim, para cada $i \in \mathbb{N}$, de

$$\left|\varphi_i^{(k)}\left(T(x_i)\right) - y_i\right| \leq \sum_{i=1}^{\infty}\left|\varphi_i^{(k)}\left(T(x_i)\right) - y_i\right| < \varepsilon,$$

segue que

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_i^{(k)}\left(T(x_i)\right) = y_i. \tag{2.6}$$

Da unicidade do limite, de (2.5) e (2.6), concluímos que $y_i = \varphi_i\left(T(x_i)\right)$, o que mostra que $\widetilde{T}_{(x_i)_{i=1}^{\infty}}$ tem gráfico fechado e, deste modo, é contínua.

Fixando agora $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{p'}^{w}(F')$, temos que o operador

$$\begin{aligned}\widetilde{T}_{(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}}: \quad & \ell_p(E) \to \ell_1 \\ & (x_i)_{i=1}^{\infty} \mapsto \widetilde{T}_{(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}}\left((x_i)_{i=1}^{\infty}\right) = \left(\varphi_i(T(x_i))\right)_{i=1}^{\infty}.\end{aligned}$$

está bem definido e é linear. Vamos mostrar que $\widetilde{T}_{(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}}$ é contínuo. Suponha que

$$\begin{cases} \left(x_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty} & \xrightarrow{k} (x_i)_{i=1}^{\infty} \text{ em } \ell_p(E) \\ \widetilde{T}_{(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}}\left(\left(x_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty}\right) & \xrightarrow{k} (z_i)_{i=1}^{\infty} \text{ em } \ell_1 \end{cases}.$$

Como $\left(x_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty} \xrightarrow{k} (x_i)_{i=1}^{\infty}$ em $\ell_p(E)$, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $k \geq N$, então

$$\left\|x_i^{(k)} - x_i\right\|_E \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty}\left\|x_i^{(k)} - x_i\right\|_E^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left\|\left(x_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty} - (x_i)_{i=1}^{\infty}\right\|_p < \varepsilon$$

para todo $i \in \mathbb{N}$. Logo, para todo $i \in \mathbb{N}$, temos que $\left(x_i^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ converge para $x_i$ em $E$ e da continuidade de $\varphi_i \circ T$, segue que

$$\lim_{k\to\infty}(\varphi_i \circ T)\left(x_i^{(k)}\right) = (\varphi_i \circ T)(x_i). \tag{2.7}$$

Por outro lado, como supomos que $\widetilde{T}_{(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}}\left(\left(x_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty}\right)$ converge para $(z_i)_{i=1}^{\infty}$ em $\ell_1$, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N' \in \mathbb{N}$ tal que se $k \geq N'$, então para todo $i \in \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned} \left|\varphi_i\left(T\left(x_i^{(k)}\right)\right) - z_i\right| &\leq \sum_{i=1}^{\infty}\left|\varphi_i \circ T\left(x_i^{(k)}\right) - z_i\right| \\ &= \left\|\left(\varphi_i\left(T\left(x_i^{(k)}\right)\right)\right)_{i=1}^{\infty} - (z_i)_{i=1}^{\infty}\right\|_1 = \left\|\widetilde{T}_{(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}}\left(\left(x_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty}\right) - (z_i)_{i=1}^{\infty}\right\|_1 < \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo, para todo $i \in \mathbb{N}$, segue que

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_i\left(T\left(x_i^{(k)}\right)\right) = z_i. \tag{2.8}$$

Assim, de (2.7) e (2.8), segue que $\widetilde{T}_{(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}}$ tem gráfico fechado e, portanto, é contínua.

Como $\widetilde{T}$ é contínua em cada variável e os espaços $\ell_{p'}^w(F')$ e $\ell_p(E)$ são de Banach, a Proposição A.0.9 garante sua continuidade. Daí,

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\varphi_i(T(x_i))| = \left\|\widetilde{T}\left((\varphi_i)_{i=1}^{\infty}, (x_i)_{i=1}^{\infty}\right)\right\|_1 \leq \left\|\widetilde{T}\right\| \cdot \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_p \cdot \|(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p'}.$$

*(ii)* $\Rightarrow$ *(iii)* Tomando de forma arbitrária $x_1, \ldots, x_m \in E$ e $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in F'$, as sequências $(x_i)_{i=1}^{\infty} = (x_1, \ldots, x_m, 0, 0, \ldots)$ e $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m, 0, 0, \ldots)$ pertencem a $\ell_p(E)$ e $\ell_{p'}^w(F')$, respectivamente. Basta notar que

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\varphi_i(T(x_i))| = \sum_{i=1}^{m}|\varphi_i(T(x_i))| \text{ e } \left(\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{m}\|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

e temos o desejado.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Sejam $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$ e $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{p'}^w(F')$. Usando que a soma da série é o supremo das somas parciais, então:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i(T(x_i))| &= \sup_m \left( \sum_{i=1}^{m} |\varphi_i(T(x_i))| \right) \\
&\leq \sup_m \left( C \|(x_i)_{i=1}^m\|_p \cdot \|(\varphi_i)_{i=1}^m\|_{w,p'} \right) \\
&\leq C \sup_m (\|(x_i)_{i=1}^m\|_p) \sup_m \left( \|(\varphi_i)_{i=1}^m\|_{w,p'} \right) \\
&= C \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_p \cdot \|(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p'}.
\end{aligned}$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ A sequência $(T(x_i))_{i=1}^{\infty} \in \ell_p\langle E\rangle$ sempre que $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$. De fato, dados $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{p'}^w(F')$ e $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$, por hipótese, temos

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i(T(x_i))| \leq C \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_p \cdot \|(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p'} < \infty.$$

Portanto, $T$ é um operador Cohen fortemente $p$-somante. $\square$

**Observação 2.2.4.** Tomando o supremo sobre a bola unitária de $\ell_{p'}^w(F')$ em (2.4), obtemos:

$$\begin{aligned}
\|(T(x_i))_{i=1}^m\|_{C,p} &= \sup_{\|(\varphi_i)_{i=1}^m\|_{w,p'} \leq 1} \sum_{i=1}^{m} |\varphi_i(T(x_i))| \\
&\leq C \|(x_i)_{i=1}^m\|_p \sup_{\|(\varphi_i)_{i=1}^m\|_{w,p'} \leq 1} \|(\varphi_i)_{i=1}^m\|_{w,p'} \\
&\leq C \|(x_i)_{i=1}^m\|_p.
\end{aligned}$$

Assim, se um operador é fortemente $p$-somante, temos que

$$\|(T(x_i))_{i=1}^m\|_{C,p} \leq C \|(x_i)_{i=1}^m\|_p. \tag{2.9}$$

Cohen [Co73], define os operadores fortemente $p$-somantes, que posteriormente passaram a ser chamado de Cohen fortemente $p$-somantes, usando a desigualdade (2.9).

**Proposição 2.2.5.** *$\mathcal{D}_p(E;F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E;F)$.*

*Demonstração.* Como o operador identicamente nulo é Cohen fortemente $p$-somante, o conjunto $\mathcal{D}_p(E;F)$ é não vazio. Dados $T_1, T_2 \in \mathcal{D}_p(E;F)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ e $m \in \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} |\varphi_i((T_1 + \lambda T_2)(x_i))| &\leq \sum_{i=1}^{m} |\varphi_i(T_1(x_i))| + \sum_{i=1}^{m} |\varphi_i(\lambda T_2(x_i))| \\
&= \sum_{i=1}^{m} |\varphi_i(T_1(x_i))| + |\lambda| \sum_{i=1}^{m} |\varphi_i(T_2(x_i))| \\
&\overset{(2.4)}{\leq} C_1 \|(x_i)_{i=1}^m\|_p \cdot \|(\varphi_i)_{i=1}^m\|_{w,p'} + |\lambda| C_2 \|(x_i)_{i=1}^m\|_p \cdot \|(\varphi_i)_{i=1}^m\|_{w,p'}
\end{aligned}$$

$$= \quad (C_1 + |\lambda| C_2) \|(x_i)_{i=1}^m\|_p \cdot \|(\varphi_i)_{i=1}^m\|_{w,p'}. \tag{2.10}$$

para quaisquer $x_i \in E$ e $\varphi_i \in F'$ com $i = 1, \ldots, m$, o que mostra que $\mathcal{D}_p(E;F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E;F)$. □

A seguir, veremos que a desigualdade (2.4) sugere uma forma de definir uma norma no espaço vetorial $\mathcal{D}_p(E;F)$.

**Proposição 2.2.6.** *O ínfimo das constantes $C$ que satisfazem a desigualdade (2.4) da Proposição 2.2.3 define uma norma em $\mathcal{D}_p(E;F)$, denotada por $d_p(\cdot)$.*

*Demonstração.* Dado $T \in \mathcal{D}_p(E;F)$ é claro que $d_p(T) \geq 0$. Se $d_p(T) = 0$, tomando $m = 1$ em (2.4), obtemos que $|\varphi(T(x))| = 0$ sempre que $\varphi \in F'$ e $x \in E$. Daí, por Hahn-Banach, para todo $x \in E, x \neq 0$, existe um funcional linear $\xi \in F'$ tal que $\|\xi\| = 1$ e $\xi(T(x)) = \|T(x)\| = 0$, e, portanto, $T = 0$. Dados $T_1, T_2 \in \mathcal{D}_p(E;F)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ e $m \in \mathbb{N}$, da desigualdade (2.10), fica claro que $d_p(T_1 + \lambda T_2) \leq d_p(T_1) + |\lambda| d_p(T_2)$ e

$$d_p(\lambda T) \leq |\lambda| d_p(T). \tag{2.11}$$

Como

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m |\varphi_i(T(x_i))| &= \frac{|\lambda|}{|\lambda|} \sum_{i=1}^m |\varphi_i(T(x_i))| \\
&= \frac{1}{|\lambda|} \sum_{i=1}^m |\varphi_i(\lambda T(x_i))| \\
&\leq \frac{1}{|\lambda|} d_p(\lambda T) \|(x_i)_{i=1}^m\|_p \cdot \|(\varphi_i)_{i=1}^m\|_{w,p'},
\end{aligned}$$

então

$$|\lambda| d_p(T) \leq d_p(\lambda T). \tag{2.12}$$

De (2.11) e (2.12), concluímos que $d_p(\lambda T) = |\lambda| d_p(T)$. □

**Observação 2.2.7.** Se $T \in \mathcal{D}_p(E;F)$, então $d_p(T) = \left\|\widetilde{T}\right\| = \left\|\widehat{T}\right\|$. De fato, já temos que

$$\sum_{i=1}^\infty |\varphi_i(T(x_i))| = \left\|\widetilde{T}\left((\varphi_i)_{i=1}^\infty, (x_i)_{i=1}^\infty\right)\right\|_1 \leq \left\|\widetilde{T}\right\| \cdot \|(x_i)_{i=1}^\infty\|_p \cdot \|(\varphi_i)_{i=1}^\infty\|_{w,p'},$$

e disso, $d_p(T) \leq \left\|\widetilde{T}\right\|$. Como

$$\begin{aligned}
\left\|\widetilde{T}\right\| &= \sup_{\left\|(x_i)_{i=1}^\infty\right\|_p, \left\|(\varphi_i)_{i=1}^\infty\right\|_{w,p'} \leq 1} \|(\varphi_i(T(x_i)))_{i=1}^\infty\|_1 \\
&= \sup_{\left\|(x_i)_{i=1}^\infty\right\|_p, \left\|(\varphi_i)_{i=1}^\infty\right\|_{w,p'} \leq 1} \sum_{i=1}^\infty |\varphi_i(T(x_i))|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sup_{\left\|(x_i)_{i=1}^{\infty}\right\|_p, \left\|(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\right\|_{w,p'} \leq 1} d_p(T) \left\|(x_i)_{i=1}^{\infty}\right\|_p \cdot \left\|(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\right\|_{w,p'} \\
&= d_p(T),
\end{aligned}
$$

obtemos que $d_p(T) = \left\|\widetilde{T}\right\|$. Note agora que

$$
\begin{aligned}
\left\|\widetilde{T}\right\| &= \sup_{\left\|(x_i)_{i=1}^{\infty}\right\|_p, \left\|(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\right\|_{w,p'} \leq 1} \left\|(\varphi_i(T(x_i)))_{i=1}^{\infty}\right\|_1 \\
&= \sup_{\left\|(x_i)_{i=1}^{\infty}\right\|_p, \left\|(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\right\|_{w,p'} \leq 1} \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i(T(x_i))| \\
&= \sup_{\left\|(x_i)_{i=1}^{\infty}\right\|_p \leq 1} \left( \sup_{\left\|(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\right\|_{w,p'} \leq 1} \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i(T(x_i))| \right) \\
&= \sup_{\left\|(x_i)_{i=1}^{\infty}\right\|_p \leq 1} \left\|(T(x_i))_{i=1}^{\infty}\right\|_{C,p} \\
&= \sup_{\left\|(x_i)_{i=1}^{\infty}\right\|_p \leq 1} \left\|\widehat{T}((x_i)_{i=1}^{\infty})\right\|_{C,p} \\
&= \left\|\widehat{T}\right\|
\end{aligned}
$$

o que mostra que $\left\|\widetilde{T}\right\| = \left\|\widehat{T}\right\|$.

**Lema 2.2.8.** *Se $T \in \mathcal{D}_p(E;F)$, então $\|T\| \leq d_p(T)$.*

*Demonstração.* Tomando o supremo sobre a bola unitária no conjunto $F'$ e $m = 1$ na expressão (2.4),

$$
\begin{aligned}
\|T(x)\| &\overset{\text{Hahn-Banach}}{=} \sup_{\varphi \in B_{F'}} |\varphi(T(x))| \\
&\leq \sup_{\varphi \in B_{F'}} \left\{ d_p(T)\|x\| \sup_{\psi \in B_{F''}} \|\psi(\varphi)\| \right\} \\
&\overset{\text{Hahn-Banach}}{\leq} d_p(T)\|x\| \sup_{\varphi \in B_{F'}} \|\varphi\| \\
&= d_p(T)\|x\|.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\|T\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \{d_p(T)\|x\|\} \\
&= d_p(T) \sup_{\|x\| \leq 1} \|x\| \\
&= d_p(T).
\end{aligned}
$$

Portanto, $\|T\| \leq d_p(T)$. $\square$

Este lema decorre de algo mais geral que é o fato da classe dos operadores Cohen fortemente $p$-somantes satisfazerem as propriedades de ideal (assunto que será estudado no Capítulo 4).

**Definição 2.2.9.** Sejam $E, F$ espaços vetoriais normados e $T \in \mathcal{L}(E;F)$ um operador linear contínuo. Definimos o operador $T' : F' \to E'$ por

$$T'(\varphi)(x) = \varphi(T(x))$$

para todo $x \in E$ e $\varphi \in F'$. O operador $T'$ é chamado *adjunto* de $T$.

Estabeleceremos agora uma relação entre o operador linear Cohen fortemente $p$-somante e seu operador adjunto.

**Teorema 2.2.10.** *Seja* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. *Então:*

*(a) Seja* $1 \leq p < \infty$. *Um operador* $T$ *pertence a* $\Pi_p(E;F)$ *se, e somente se, o operador adjunto de* $T$ *pertence à* $\mathcal{D}_{p'}(F';E')$. *Mais ainda,* $d_{p'}(T') = \pi_p(T)$*;*

*(b) Seja* $1 < p \leq \infty$. *Um operador* $T$ *pertence a* $\mathcal{D}_{p'}(E;F)$ *se, e somente se, o operador adjunto de* $T$ *pertence à* $\Pi_p(F';E')$. *Mais ainda,* $d_{p'}(T) = \pi_p(T')$.

*Demonstração.* $(a)$. Sejam $1 \leq p < \infty$ e $T \in \Pi_p(E;F)$. Queremos mostrar que $T' \in \mathcal{D}_{p'}(F';E')$. Tomando $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in F'$ e $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in E''$, então

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} |\varphi_i(T'(\lambda_i))| &= \sum_{i=1}^{n} |T''(\varphi_i)(\lambda_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} \|T''(\varphi_i)\| \cdot \|\lambda_i\| \\ &\overset{\text{Hölder}}{\leq} \|(T''(\varphi_i))_{i=1}^{n}\|_p \cdot \|(\lambda_i)_{i=1}^{n}\|_{p'}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Como consequência do fato que o operador $T''$ de cada operador absolutamente $p$-somante $T$ é também um operador absolutamente $p$-somante e que $\pi_p(T'') = \pi_p(T)$ (Proposição 18 em [Pi67], pág. 345), obtemos:

$$\left\|(T''(\varphi_i))_{i=1}^{n}\right\|_p \leq \pi_p(T)\|(\varphi_i)_{i=1}^{n}\|_{w,p}. \tag{2.14}$$

De (2.13) e (2.14), obtemos:

$$\sum_{i=1}^{n} |\varphi_i(T'(\lambda_i))| \leq \pi_p(T)\|(\lambda_i)_{i=1}^{n}\|_{p'} \cdot \|(\varphi_i)_{i=1}^{n}\|_{w,p} \tag{2.15}$$

o que mostra que $T'$ pertence à $\mathcal{D}_{p'}(F';E')$. Sendo $d_{p'}(T')$ o ínfimo das constantes $C$ que satisfazem a desigualdade $\|(T'(\lambda_i))_{i=1}^{n}\|_{C,p'} \leq C\|(\lambda_i)_{i=1}^{n}\|_{p'}$, segue que

$$d_{p'}(T') \leq \pi_p(T). \tag{2.16}$$

Reciprocamente, suponha que $T' \in \mathcal{D}_{p'}(F'; E')$. Queremos mostrar que $T \in \Pi_p(E; F)$. Sejam $x_1, \ldots, x_n \in E$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in F'$. Assim,

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(T(x_i)) \right| &\overset{\text{def}}{=} \left| \sum_{i=1}^{n} T'(\lambda_i)(x_i) \right| \\
&= \left| \sum_{i=1}^{n} T'(\lambda_i) \left( \frac{x_i}{\|(x_i)_{i=1}^n\|_{w,p}} \right) \right| \cdot \|(x_i)_{i=1}^n\|_{w,p} \\
&\leq \sup_{\|(\psi_i)_{i=1}^n\|_{w,p} \leq 1} \left| \sum_{i=1}^{n} \psi_i(T'(\lambda_i)) \right| \cdot \|(x_i)_{i=1}^n\|_{w,p} \\
&= \|(T'(\lambda_i))_{i=1}^{\infty}\|_{C,p'} \cdot \|(x_i)_{i=1}^n\|_{w,p} \\
&\leq d_{p'}(T') \|(\lambda_i)_{i=1}^n\|_{p'} \cdot \|(x_i)_{i=1}^n\|_{w,p}. \qquad (2.17)
\end{aligned}$$

Sabemos que $(\ell_p(F))'$ é isometricamente isomorfo a $(\ell_{p'}(F'))$ (Proposição A.0.15). Disto, tomando $\eta \in (\ell_p(F))'$, decorre que

$$\begin{aligned}
\eta : \quad \ell_p(F) &\longrightarrow \mathbb{K} \\
(g_i)_{i=1}^{\infty} &\longmapsto \eta((g_i)_{i=1}^{\infty}) := \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(g_i)
\end{aligned}$$

para $(\lambda_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{p'}(F')$ correspondente a $\eta \in (\ell_p(F))'$ está bem definida. Daí,

$$\sup_{(\lambda_i)_{i=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p'}(F')}} \left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(T(x_i)) \right| = \sup_{\eta \in B_{(\ell_p(F))'}} |(\eta(T(x_i))_{i=1}^n)| \overset{\text{Hanh-Banach}}{=} \|(T(x_i))_{i=1}^n\|_p.$$

Tomando o supremo sobre a bola unitária de $\ell_{p'}(F')$ em (2.17), temos:

$$\sup_{(\lambda_i)_{i=1}^{n} \in B_{l_{p'}(F')}} \left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(T(x_i)) \right| \leq d_{p'}(T') \sup_{(\lambda_i)_{i=1}^{n} \in B_{\ell_{p'}(F')}} \|(\lambda_i)_{i=1}^n\|_{p'} \cdot \|(x_i)_{i=1}^n\|_{w,p}$$

o que mostra que

$$\|(T(x_i))_{i=1}^n\|_p \leq d_{p'}(T') \|(x_i)_{i=1}^n\|_{w,p}.$$

Portanto, $T$ pertence a $\Pi_p(E; F)$. Como $\pi_p(T)$ é o ínfimo da constantes $C$ que satisfazem a desigualdade $\|(T(x_i))_{i=1}^n\|_p \leq C \|(x_i)_{i=1}^n\|_{w,p}$, temos que

$$\pi_p(T) \leq d_{p'}(T') \qquad (2.18)$$

De (2.16) e (2.18), concluímos que $\pi_p(T) = d_{p'}(T')$.

A demostração do item $(b)$ é feita de maneira análoga. $\square$

Um Teorema do tipo Dvoretzky-Rogers também é válido para os operadores lineares Cohen fortemente $p$-somantes, e que inclusive justifica sua definição.

**Teorema 2.2.11** (do tipo Dvoretzky-Rogers). *Se $E$ é um espaço de Banach, então o operador $id_E : E \to E$ é Cohen fortemente $p$-somante se, e somente se,* $\dim E < \infty$.

*Demonstração.* Supondo que o operador linear $id_E : E \to E$ é Cohen fortemente $p$-somante, pelo Teorema 2.2.10 temos que $id_E' : E' \to E'$ é absolutamente $p'$-somante. Daí, pelo Teorema 2.1.5 temos que $E'$ tem dimensão finita e consequentemente $E$ tem dimensão finita. Reciprocamente, se $\dim(E) < \infty$ então $id_E' : E' \to E'$ é absolutamente $p'$-somante e como resultado obtemos que $id_E : E \to E$ é Cohen fortemente $p$-somante. □

**Observação 2.2.12.** *A proposição anterior afirma, o que é natural de se esperar, que quando a dimensão de $E$ for finita, então $\ell_p\langle E\rangle = \ell_p(E)$. De fato, como $id_E : E \to E$ é Cohen fortemente $p$-somante, dado $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$, então*

$$(x_i)_{i=1}^{\infty} = (id_E(x_i))_{i=1}^{\infty} \in \ell_p\langle E\rangle.$$

As classes dos operadores Cohen fortemente $p$-somantes obedecem a seguinte ordenação de inclusão com relação ao parâmetro $p$:

**Proposição 2.2.13** (Teorema de Inclusão). *Sejam $E$ e $F$ espaços de Banach. Se $1 < p_1 \leq p_2 \leq \infty$, então*

$$\mathcal{D}_{p_2}(E;F) \subset \mathcal{D}_{p_1}(E;F).$$

*Demonstração.* Como $p_1 \leq p_2$ com $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1'} = 1$ e $\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2'} = 1$, então $p_1' \geq p_2'$. Daí, pelas Proposições 2.1.4 e 2.2.10, temos

$$\mathcal{D}_{p_2}(E;F) = \Pi_{p_2'}(F';E') \subset \Pi_{p_1'}(F';E') = \mathcal{D}_{p_1}(E;F).$$

□

# CAPÍTULO 3

## Aplicações Multilineares e Polinômios Cohen Fortemente Somantes

Uma extensão natural da teoria dos operadores lineares contínuos estre espaços de Banach é a multilinearidade, isto é, as aplicações definidas no produto cartesiano de espaços de Banach que são lineares em cada variável, quando as demais são mantidas constantes. Neste capítulo apresentaremos as aplicações multilineares e estudaremos os operadores e polinômios Cohen fortemente $p$-somantes no contexto multilinear. Para possibilitar uma boa leitura do texto, iremos apresentar os conceitos e resultados básicos sobre a teoria das aplicações multilineares e polinômios homogêneos indicando as referências para os interessados em uma análise mais detalhada.

## 3.1 Aplicações multilineares

Apresentaremos algumas definições e resultados básicos sobre aplicações multilineares contínuas entre espaços de Banach. Dentre os conceitos apresentados, destacaremos as aplicações $n$-lineares simétricas e de tipo finito.

**Definição 3.1.1.** Sejam $E_1, \ldots, E_n$ e $F$ espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$. Uma aplicação $A : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ é denominada *multilinear (ou n-linear)* se para cada $i = 1, \ldots, n$, temos que

$$A(x_1, \ldots, x_i + \lambda y_i, \ldots, x_n) = A(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) + \lambda A(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_n)$$

para todos $x_1 \in E_1, \ldots, x_i, y_i \in E_i, \ldots, x_n \in E_n$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

O conjunto das aplicações $n$-lineares de $E_1, \ldots, E_n$ em $F$ será denotado por $L(E_1, \ldots, E_n; F)$, que é um espaço vetorial com as operações usuais de espaços de funções.

O símbolo $L(E_1, \dots, E_n)$ representará $L(E_1, \dots, E_n; \mathbb{K})$. Quando $E_1 = \cdots = E_n = E$ escreveremos apenas $L(^nE; F)$. Por convenção, vamos considerar $L(^0E; F) = F$. Se $n = 1$, denotaremos $L(^1E; F)$ por $L(E; F)$.

Quando $E_1, \dots, E_n$ forem espaços normados sobre um corpo $\mathbb{K}$, então $E_1 \times \cdots \times E_n$ também é um espaço normado sobre $\mathbb{K}$ quando consideramos qualquer uma das normas

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \|x_i\|_{E_i};$$

$$\|x\|_p = \left(\|x_1\|_{E_1}^p + \|x_2\|_{E_2}^p + \cdots + \|x_n\|_{E_n}^p\right)^{\frac{1}{p}}, \ (1 \le p < \infty),$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$. A menos que se mencione algo contrário, usaremos a norma $\| \cdot \|_\infty$ como usual em $E_1 \times \cdots \times E_n$ e escreveremos somente $\| \cdot \|$.

Se $E_1, \dots, E_n$ e $F$ forem espaços normados, denotaremos por $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ o subespaço vetorial de $L(E_1, \dots, E_n; F)$ formado pelas aplicações $n$-lineares contínuas. Quando conveniente, escrevemos

$$\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F) = \mathcal{L}_n(E_1, \dots, E_n; F) \text{ e } \mathcal{L}(^nE; F) = \mathcal{L}_n(^nE; F).$$

Se $B \subset E_1 \times \cdots \times E_n$, dizemos que a aplicação $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ é limitada em $B$ se

$$\sup_{x \in B} \|A(x)\|_F < \infty.$$

As aplicações multilineares contínuas têm a seguinte caracterização:

**Proposição 3.1.2.** *As seguintes afirmações são equivalentes para uma aplicação $n$-linear $A \in L(E_1, \dots, E_n; F)$ :*

*(i)* $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$;

*(ii) $A$ é contínua na origem;*

*(iii) Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|A(x_1, \dots, x_n)\| \le C\|x_1\| \cdots \|x_n\| \tag{3.1}$$

*para quaisquer $(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$;*

*(iv)* $\sup\{\|A(x_1, \dots, x_n)\|;\ x_i \in B_{E_i}$ *para todo* $i = 1, \dots, n\} < \infty$.

*Demonstração.* Veja [Mu10, Proposition 1.2] e [Be08, Teorema 1.2.2]. □

A proposição, a seguir, mostra uma forma de normar o espaço $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ considerando a proposição anterior.

**Proposição 3.1.3.** *Para cada* $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$*, definindo a função*

$$\|A\| := \sup\{\|A(x_1, \ldots, x_n)\|; x_i \in B_{E_i} \text{ para todo } i = 1, \ldots, n\},$$

*então:*

*(a)* $\|\cdot\|$ *é uma norma em* $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$*;*

*(b)* $\|A(x_1, \ldots, x_n)\| \leq \|A\| \cdot \|x_1\| \cdots \|x_n\|$ *para quaisquer* $x_i \in E_i$ *com* $i = 1, \ldots, n$*;*

*(c)* $\|A\| = \inf\{C : \|A(x_1, \ldots, x_n)\| \leq C\|x_1\| \cdots \|x_n\| \text{ com } x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n\}$.

*Mais ainda, se* $F$ *é um espaço de Banach, então* $(\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F), \|\cdot\|)$ *também é um espaço de Banach.*

*Demonstração.* Veja [Mu10, Proposition 1.3] e [Be08, Proposição 1.2.4]. □

Ao contrário da multilinearidade, a continuidade de uma função multilinear não pode ser definida em termos de suas variáveis. O exemplo a seguir, de cujos detalhes podem ser encontrados em ([Be08, Exemplo 1.2.3]), apresenta uma função que é contínua em cada variável mas não é contínua.

**Exemplo:** Seja $E = \mathcal{C}([0,1])$ o espaço vetorial das funções contínuas de $[0,1]$ em $\mathbb{R}$, munido da norma $\|x\| = \int_0^1 |x(t)|dt$. A aplicação $B \in L(^2E)$ definida por

$$B(x, y) = \int_0^1 x(t)y(t)dt$$

é separadamente contínua. Porém, $B$ não é contínua.

Supondo apenas que o domínio seja espaço de Banach, é possível definir continuidade através de suas variáveis como mostra a Proposição A.0.9.

**Definição 3.1.4.** Sejam $E_1, \ldots, E_n$ espaços normados. A aplicação $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ é dita de *tipo finito* se existem $m \in \mathbb{N}$, funcionais lineares $\varphi_j^{(l)} \in E_l'$ e vetores $y_j \in F$, com $j = 1, \ldots, m$ e $l = 1, \ldots, n$ tais que

$$A(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j^{(1)}(x_1) \cdots \varphi_j^{(n)}(x_n) y_j,$$

para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$. Esta aplicação $n$-linear $A$ também é denotada por $\sum_{j=1}^m \varphi_j^{(1)} \otimes \cdots \otimes \varphi_j^{(n)} \otimes y_j$.

O subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ formados pelas aplicações $n$-lineares de tipo finito é denotado por $\mathcal{L}_f(E_1, \ldots, E_n; F)$.

**Definição 3.1.5.** Uma aplicação multilinear $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ é de *posto finito* se a dimensão do subespaço vetorial de $F$ gerado pela imagem de $A$ tem dimensão finita, ou equivalentemente, se existem $m \in \mathbb{N}$, formas $n$-lineares $T_j \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n)$ e vetores $y_j \in F$, para $j = 1, \ldots, m$, tais que

$$A(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{m} T_j(x_1, \ldots, x_n) y_j,$$

para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$. Esta aplicação linear também é denotada por $\sum_{j=1}^{m} T_j \otimes y_j$.

No caso linear, diremos simplesmente que um operador $A \in \mathcal{L}(E; F)$ é de posto finito se é uma combinação linear do tipo

$$A(x) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j \otimes y_j(x) := \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(x) y_j,$$

onde $\varphi_j : E \longrightarrow \mathbb{K}$ é um funcional linear e $y_j \in F$, para $j = 1, \ldots, m$.

O subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ formado pelas aplicações $n$-lineares de posto finito é denotado por $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}(E_1, \ldots, E_n; F)$.

Uma classe importante dentro da classe das aplicações multilineares são as aplicações multilineares simétricas.

**Definição 3.1.6.** Uma aplicação multilinear $A \in L(^nE; F)$ é dita *simétrica* se

$$A(x_1, \ldots, x_n) = A(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}),$$

para toda permutação $\sigma$ de $\{1, \ldots, n\}$ e todos $x_1, \ldots, x_n \in E$.

O subespaço vetorial de $L(^nE; F)$ formado pelas aplicações $n$-lineares simétricas será denotado por $L^s(^nE; F)$. Denotaremos por $\mathcal{L}^s(^nE; F)$ o subespaço das aplicações $n$-lineares simétricas contínuas. Por simplicidade, dados $A \in L(^nE; F)$ e $x \in E$, iremos denotar $A(x, \ldots, x)$ por $Ax^n$.

Se duas aplicações $n$-lineares simétricas coincidem na "diagonal", então elas coincidem em todo o domímio. É o que mostramos na seguinte

**Proposição 3.1.7.** *Se $A, B \in L^s(^nE; F)$ e $Ax^n = Bx^n$ para todo $x \in E$, então as aplicações $A$ e $B$ coincidem em todo domínio.*

*Demonstração.* Como $A, B \in L^s(^nE; F)$ e $Ax^n = Bx^n$ para todo $x \in E$, pela Fórmula da Polarização (Proposição A.0.10), temos

$$A(x_1, \ldots, x_n) \;=\; \frac{1}{n!2^n} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n A(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n)^n$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n!2^n} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n B(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n)^n \\
&= B(x_1, \ldots, x_n).
\end{aligned}
$$

□

### 3.1.1 Operadores multilineares Cohen fortemente $p$-somantes

A classe dos operadores multilineares Cohen fortemente $p$-somantes foi introduzida por D. Achour e L. Mezrag em [AM07] da seguinte forma:

**Definição 3.1.8.** Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $E_1, \ldots, E_n, F$ espaços de Banach. Um operador $T \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ é *Cohen fortemente $p$-somante* se, e somente se, existe uma constante $C > 0$ tal que para todos $m \in \mathbb{N}$, $x_1^{(j)}, \ldots, x_m^{(j)}$ em $E_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ e quaisquer $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in F'$, tem-se

$$
\sum_{i=1}^{m} \left| \varphi_i \left( T \left( x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(n)} \right) \right) \right| \leq C \left( \sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} \left\| x_i^{(j)} \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \|(\varphi_i)_{i=1}^m\|_{w,p'}.
$$

Porém, em Campos [Ca13] define-se os operadores multilineares Cohen fortemente $p$-somantes por:

**Definição 3.1.9.** Sejam $1 < p \leq \infty$ e $E_1, \ldots, E_n, F$ espaços de Banach. Dizemos que o operador $T \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ é *Cohen fortemente $p$-somante* se

$$
\left( T \left( x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(n)} \right) \right)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p \langle F \rangle
$$

sempre que $\left( x_i^{(j)} \right)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{np}(E_j)$, $j = 1, \ldots, n$, isto é, se o operador

$$
\begin{aligned}
\widehat{T} : \quad & \ell_{np}(E_1) \times \cdots \times \ell_{np}(E_n) && \to \ell_p \langle F \rangle \\
& \left( \left( x_i^{(1)} \right)_{i=1}^{\infty}, \ldots, \left( x_i^{(n)} \right)_{i=1}^{\infty} \right) && \mapsto \left( T \left( x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(n)} \right) \right)_{i=1}^{\infty}.
\end{aligned}
$$

está bem definido.

Iremos mostrar que estas definições são equivalentes, assim como alguns resultados considerados importantes. Neste texto, iremos considerar a definição dada por Campos.

Denotaremos por $\mathcal{L}_{Coh,p}(E_1, \ldots, E_n; F)$ o conjunto formado por todos os operadores $n$-lineares Cohen fortemente $p$-somantes.

A próxima proposição traz algumas caracterizações para os operadores $n$-lineares Cohen fortemente $p$-somantes. Assim como no caso linear, este resultado caracteriza estes operadores através de desigualdades.

**Proposição 3.1.10.** *Sejam* $T \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ *e* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. *As seguintes condições são equivalentes:*

*(i)* $T$ *é Cohen fortemente* $p$*-somante;*

*(ii) Existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \varphi_i \left( T \left( x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(n)} \right) \right) \right| \\ \leq C \left( \sum_{i=1}^{\infty} \left\| x_i^{(1)} \right\|^{np} \right)^{\frac{1}{np}} \cdots \left( \sum_{i=1}^{\infty} \left\| x_i^{(n)} \right\|^{np} \right)^{\frac{1}{np}} \|(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p'},$$

*sempre que* $\left(x_i^{(j)}\right)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{np}(E_j)$, $j = 1, \ldots, n$ *e* $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{p'}^{w}(F')$;

*(iii) Existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$\sum_{i=1}^{m} \left| \varphi_i \left( T \left( x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(n)} \right) \right) \right| \\ \leq C \left( \sum_{i=1}^{m} \left\| x_i^{(1)} \right\|^{np} \right)^{\frac{1}{np}} \cdots \left( \sum_{i=1}^{m} \left\| x_i^{(n)} \right\|^{np} \right)^{\frac{1}{np}} \|(\varphi_i)_{i=1}^{m}\|_{w,p'}, \tag{3.2}$$

*para todos* $m \in \mathbb{N}$, $x_i^{(j)} \in E_j$, $\varphi_i \in F'$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

*Demonstração.* $(i) \Rightarrow (ii)$ Definamos o operador

$$\begin{array}{rll} \widetilde{T}: & \ell_{p'}^{w}(F') \times \ell_{np}(E_1) \times \cdots \times \ell_{np}(E_n) & \to \ell_1 \\ & \left( (\varphi_i)_{i=1}^{\infty}, \left(x_i^{(1)}\right)_{i=1}^{\infty}, \ldots, \left(x_i^{(n)}\right)_{i=1}^{\infty} \right) & \mapsto \left( \varphi_i \left( T \left( x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(n)} \right) \right) \right)_{i=1}^{\infty}. \end{array}$$

Como $T$ é Cohen fortemente $p$-somante, então $\big(T\big(x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(n)}\big)\big)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p\langle F \rangle$ e, por conseguinte, $\big(\varphi_i\big(T\big(x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(n)}\big)\big)\big)_{i=1}^{\infty} \in \ell_1$, o que garante que a função está bem definida. Procedendo de modo semelhante ao caso linear, obtemos que $\widetilde{T}$ é $(n+1)$-linear (multilinear) e contínua em cada coordenada. Assim, como cada um dos espaços envolvidos no produto cartesiano do domínio é completo, pela Proposição A.0.9, temos que $\widetilde{T}$ é contínua e, pela Proposição 3.1.3,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \left| \varphi_i \left( T \left( x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(n)} \right) \right) \right| &= \left\| \widetilde{T} \left( (\varphi_i)_{i=1}^{\infty}, \left(x_i^{(1)}\right)_{i=1}^{\infty}, \ldots, \left(x_i^{(n)}\right)_{i=1}^{\infty} \right) \right\|_1 \\ &\leq \left\| \widetilde{T} \right\| \cdot \left\| \left(x_i^{(1)}\right)_{i=1}^{\infty} \right\|_{np} \cdots \left\| \left(x_i^{(n)}\right)_{i=1}^{\infty} \right\|_{np} \cdot \|(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p'}. \end{aligned}$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Para todos $m \in \mathbb{N}$, $x_i^{(j)} \in E_j$ e $\varphi_i \in F'$, com $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$, temos que $\left(x_i^{(j)}\right)_{i=1}^{\infty} = \left(x_1^{(j)}, \ldots, x_m^{(j)}, 0, 0, \ldots\right) \in \ell_{np}(E_j)$ e $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m, 0, 0, \ldots) \in \ell_{p'}^{w}(F')$. Agora, basta notar que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \varphi_i \left( T \left( x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(n)} \right) \right) \right| = \sum_{i=1}^{m} \left| \varphi_i \left( T \left( x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(n)} \right) \right) \right|$$

e

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left\|x_i^{(j)}\right\|^{np}\right)^{\frac{1}{np}}=\left(\sum_{i=1}^{m}\left\|x_i^{(j)}\right\|^{np}\right)^{\frac{1}{np}}$$

para todo $j=1,\ldots,n$, e chegamos a desigualdade (3.2).

$(iii)\Rightarrow(ii)$ Sejam $\left(x_i^{(j)}\right)_{i=1}^{\infty}\in\ell_{np}(E_j)$, $j=1,\ldots,n$ e $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\in\ell_{p'}^{w}(F')$. Então,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\left|\varphi_i\left(T\left(x_i^{(1)},\ldots,x_i^{(n)}\right)\right)\right| &= \sup_m\left\{\sum_{i=1}^{m}\left|\varphi_i\left(T\left(x_i^{(1)},\ldots,x_i^{(n)}\right)\right)\right|\right\}\\ &\overset{\text{hipótese}}{\leq} \sup_m\left\{C\left(\sum_{i=1}^{m}\left\|x_i^{(1)}\right\|^{np}\right)^{\frac{1}{np}}\cdots\left(\sum_{i=1}^{m}\left\|x_i^{(n)}\right\|^{np}\right)^{\frac{1}{np}}\|(\varphi_i)_{i=1}^{m}\|_{w,p'}\right\}\\ &= C\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left\|x_i^{(1)}\right\|^{np}\right)^{\frac{1}{np}}\cdots\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left\|x_i^{(n)}\right\|^{np}\right)^{\frac{1}{np}}\|(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p'}.\end{aligned}$$

$(ii)\Rightarrow(i)$ Por hipótese, temos que

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|\varphi_i\left(T\left(x_i^{(1)},\ldots,x_i^{(n)}\right)\right)\right|<\infty$$

sempre que $\left(x_i^{(j)}\right)_{i=1}^{\infty}\in\ell_{np}(E_j)$, $j=1,\ldots,n$ e $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\in\ell_{p'}^{w}(F')$. Assim, temos que

$$\left(T\left(x_i^{(1)},x_i^{(2)},\ldots,x_i^{(n)}\right)\right)_{i=1}^{\infty}\in\ell_p\langle F\rangle,$$

o que mostra que $T$ é Cohen fortemente $p$-somante. □

**Proposição 3.1.11.** *Munido com as operações usuais, o espaço $\mathcal{L}_{Coh,p}(E_1,\ldots,E_n;F)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F)$.*

*Demonstração.* Note que o operador identicamente nulo pertence a $\mathcal{L}_{Coh,p}(E_1,\ldots,E_n;F)$. Dados $T_1,T_2\in\mathcal{L}_{Coh,p}(E_1,\ldots,E_n;F)$ e $\lambda\in\mathbb{K}$, então

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{m}\left|\varphi_i\left((T_1+\lambda T_2)\left(x_i^{(1)},\ldots,x_i^{(n)}\right)\right)\right|\\ &\qquad\leq(C_1+|\lambda|C_2)\left(\sum_{i=1}^{m}\left\|x_i^{(1)}\right\|^{np}\right)^{\frac{1}{np}}\cdots\left(\sum_{i=1}^{m}\left\|x_i^{(n)}\right\|^{np}\right)^{\frac{1}{np}}\|(\varphi_i)_{i=1}^{m}\|_{w,p'},\end{aligned}$$

para todos $m\in\mathbb{N}$, $x_i^{(j)}\in E_j$ e $\varphi_i\in F'$, com $i=1,\ldots,m$ e $j=1,\ldots,n$. Portanto, $\mathcal{L}_{Coh,p}(E_1,\ldots,E_n;F)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F)$. □

Com o mesmo raciocínio do caso linear (veja Proposição 2.2.6 e Observação 2.2.7), demonstra-se a proposição a seguir.

**Proposição 3.1.12.** *O ínfimo das constantes $C$ que satisfazem a desigualdade (3.2) define uma norma em $\mathcal{L}_{Coh,p}(E_1, \ldots, E_n; F)$, denotada por $\|T\|_{Coh,p}$. Além disso,*

$$\left\|\widehat{T}\right\| = \|T\|_{Coh,p}.$$

**Lema 3.1.13.** *Seja $n \in \mathbb{N}$ e $T \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Se $T$ é Cohen fortemente $p$-somante, então*

$$\|T\| \leq \|T\|_{Coh,p}.$$

*Demonstração.* Tomando $m = 1$ na expressão (3.2), obtemos

$$|\varphi(T(x_1, \ldots, x_n))| \leq \|T\|_{Coh,p} \cdot \|(x_1, 0, 0, \ldots)\|_{np} \cdots \|(x_n, 0, 0, \ldots)\|_{np} \cdot \|(\varphi, 0, 0, \ldots)\|_{w,p'}.$$

Tomando o supremo sobre a bola unitária no conjunto $F'$, pelo Teorema de Hanh-Banach,

$$\begin{aligned} \|T(x_1, \ldots, x_n)\| &\leq \|T\|_{Coh,p} \cdot \|(x_1, 0, 0, \ldots)\|_{np} \cdots \|(x_n, 0, 0, \ldots)\|_{np} \quad (3.3) \\ &= \|T\|_{Coh,p} \cdot \|x_1\| \cdots \|x_n\|. \end{aligned}$$

Como $\|T\|$ é a menor das constantes que satisfazem a desigualdade (3.3), concluímos que $\|T\| \leq \|T\|_{Coh,p}$. □

### 3.1.2 O Teorema da Dominação de Pietsch

Um dos resultados centrais da teoria linear dos operadores absolutamente somantes é o Teorema da Dominação de Pietsch (TDP), que estabelece uma conexão entre essa teoria e a teoria da medida.

Iremos denotar por $C(X)$ o espaço real de Banach de todas as funções reais contínuas definidas no compacto $X$ com a norma

$$|f| = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

O resultado a seguir, que é uma versão do teorema de Riesz-Markov, estabelece uma relação entre os funcionais lineares contínuos e teoria da medida. Esta versão pode ser encontrada em [As72, Theorem 4.3.10].

**Proposição 3.1.14.** *Sejam $X$ um espaço topológico de Hausdorff compacto e $L$ um funcional linear positivo definido em $C(X)$ que satisfaz $L(1) = 1$ e $L(f) \geq 0$ para toda $f \geq 0$. Então, existe uma única medida de probabilidade $\mu$, definida na $\sigma$-álgebra de Borel de $X$, tal que*

$$L(f) = \int_X f d\mu$$

*para toda $f \in C(X)$.*

A prova do teorema a seguir pode ser encontrada em [Mo10, Teorema 1.2.9].

**Teorema 3.1.15** (Teorema da Dominação de Pietsch)**.** *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $T : E \to F$ um operador linear contínuo entre espaços de Banach. Então $T$ é absolutamente $p$-somante se, e somente se, existem uma constante $C > 0$ e uma medida regular de probabilidade $\mu$ na $\sigma$-álgebra dos borelianos da bola unitária fechada do dual de $E$ com a topologia fraca estrela, tal que*

$$\|T(x)\| \leq C \left( \int_{B_{E'}} |\varphi(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{3.4}$$

*para todo $x \in E$. Mais ainda, $\pi_p(T)$ é a menor das constantes $C$ tais que a desigualdade (3.4) continua válida.*

No mesmo trabalho em que D. Achour e L. Mezrag apresentam a Definição 3.1.8, é apresentado o seguinte teorema:

**Teorema 3.1.16** (Achour, Mezrag, 2007)**.** *Uma aplicação $n$-linear contínua $T : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ é Cohen fortemente $p$-somante se, e somente se, existem uma constante $C > 0$ e uma medida de probabilidade de Borel $\mu$ em $B_{F''}$ (com a topologia fraca estrela) tal que para todo $\left(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}, \varphi\right)$ em $E_1 \times \cdots \times E_n \times F'$ a desigualdade*

$$\left|\varphi\left(T\left(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}\right)\right)\right| \leq C \prod_{k=1}^{n} \left\|x^{(k)}\right\| \left( \int_{B_{F''}} |\psi(\varphi)|^{p'} d\mu(\psi) \right)^{\frac{1}{p'}} \tag{3.5}$$

*é satisfeita. Mais ainda, $\|T\|_{Coh,p}$ é a menor das constantes que satisfazem a desigualdade (3.5).*

**Observação 3.1.17.** *No Teorema 3.1.16, temos um Teorema da Dominação de Pietsch para a Definição 3.1.8.*

Em [Ca13, Theorem 3.8], Campos mostra um TDP para a Definição 3.1.9, ou seja, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} \left|\varphi_i\left(T\left(x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(n)}\right)\right)\right| \\ &\qquad \leq C \left( \sum_{i=1}^{m} \left\|x_i^{(1)}\right\|^{np} \right)^{\frac{1}{np}} \cdots \left( \sum_{i=1}^{m} \left\|x_i^{(n)}\right\|^{np} \right)^{\frac{1}{np}} \|(\varphi_i)_{i=1}^m\|_{w,p'}, \end{aligned}$$

para todos $m \in \mathbb{N}$, $x_i^{(j)} \in E_j$, $\varphi_i \in F'$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, se, e somente se, existem uma constante $C > 0$ e uma medida de probabilidade de Borel $\mu$ em $B_{F''}$ (com a topologia fraca estrela) tal que para todo $\left(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}, \varphi\right)$ em $E_1 \times \cdots \times E_n \times F'$ a desigualdade

$$\left|\varphi\left(T\left(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}\right)\right)\right| \leq C \prod_{k=1}^{n} \left\|x^{(k)}\right\| \left( \int_{B_{F''}} |\psi(\varphi)|^{p'} d\mu(\psi) \right)^{\frac{1}{p'}}$$

é satisfeita.

Como as Definições 3.1.8 e 3.1.9 tem TDP, obtemos o seguinte

**Teorema 3.1.18.** *Seja* $1 < p \leq \infty$*, com* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$*. Para* $T \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$*, temos as seguintes equivalências:*

*(i) Existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$\sum_{i=1}^{m} \left| \varphi_i \left( T \left( x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(n)} \right) \right) \right| \leq C \left( \sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} \left\| x_i^{(j)} \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \|(\varphi_i)_{i=1}^m\|_{w,p'},$$

*para todos* $m \in \mathbb{N}$*,* $x_i^{(j)} \in E_j$*,* $\varphi_i \in F'$*,* $i = 1, \ldots, m$*,* $j = 1, \ldots, n$*;*

*(ii) Existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$\sum_{i=1}^{m} \left| \varphi_i \left( T \left( x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(n)} \right) \right) \right| \leq C \prod_{j=1}^{n} \left( \sum_{i=1}^{m} \left\| x_i^{(j)} \right\|^{np} \right)^{\frac{1}{np}} \|(\varphi_i)_{i=1}^m\|_{w,p'},$$

*para todos* $m \in \mathbb{N}$*,* $x_i^{(j)} \in E_j$*,* $\varphi_i \in F'$*,* $i = 1, \ldots, m$*,* $j = 1, \ldots, n$*.*

## 3.2 Polinômios homogêneos

**Definição 3.2.1.** Sejam $E$ e $F$ espaços normados. Uma aplicação $P : E \to F$ é dita *polinômio* $n$*-homogêneo* se existe $A \in L(^nE; F)$ tal que $P(x) = A(x, \ldots, x)$ para todo $x \in E$. Neste caso, dizemos que $P$ é o polinômio $n$-homogêneo associado à aplicação $n$-linear $A$, e denotamos $P = \widehat{A}$.

Denotaremos por $P(^nE; F)$ o espaço vetorial dos polinômios $n$-homogêneos de $E$ em $F$ e por $\mathcal{P}(^nE; F)$ seu subespaço vetorial formado pelos polinômios $n$-homogêneos contínuos. Quando conveniente, assim como no caso multilinear, escrevemos

$$\mathcal{P}(^nE; F) = \mathcal{P}_n(^nE; F).$$

**Exemplo:** Fixado $a \in \mathbb{K}$, considere a função $P : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ definida por $P(x) = ax^n$. A função $P$ é um polinômio homogêneo de grau $n$. De fato, tomando $A \in L(^n\mathbb{K})$, onde $A(x_1, \ldots, x_n) = ax_1 \cdots x_n$, temos que $P(x) = Ax^n$. Esses são os únicos polinômios $n$-homogêneos de $\mathbb{K}$ em $\mathbb{K}$, pois se $A \in L(^n\mathbb{K})$ e $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$, temos que

$$A(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \cdots x_n A(1, \ldots, 1) = ax_1 \cdots x_n,$$

com $a = A(1, \ldots, 1)$.

Apresentaremos algumas equivalências sobre a continuidade dos polinômios $n$-homogêneos.

**Proposição 3.2.2.** *Sejam $E$ e $F$ espaços vetoriais normados e $P \in P(^nE;F)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

*(i)* $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$*;*

*(ii)* $P$ *é contínuo na origem;*

*(iii) Existe uma constante* $C > 0$ *tal que* $\|P(x)\| \leq C\|x\|^n$ *para todo* $x \in E$*;*

*(iv)* $P$ *é limitado em toda bola com raio finito;*

*(v) Existe* $A \in \mathcal{L}(^nE;F)$ *tal que* $P = \widehat{A}$*.*

*Demonstração.* Veja [Mu10, Proposition 2.4] e [Be08, Teorema 1.3.7]. □

A próxima proposição define uma norma em $\mathcal{P}(^nE;F)$.

**Proposição 3.2.3.** *Seja* $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$*. Definindo*

$$\|P\| := \sup_{x \in B_E} \|P(x)\|,$$

*então*

*(a)* $\|\cdot\|$ *é uma norma em* $\mathcal{P}(^nE;F)$*;*

*(b)* $\|P(x)\| \leq \|P\| \cdot \|x\|^n$ *para todo* $x \in E$*;*

*(c)* $\|P\| = \inf\{C; \|P(x)\| \leq C\|x\|^n \text{ para todo } x \in E\}$*.*

*Mais ainda, se $F$ é um espaço de Banach, então* $(\mathcal{P}(^nE;F), \|\cdot\|)$ *é um espaço de Banach.*

*Demonstração.* Veja [Mu10, Corolary 2.3] e [Be08, Proposição 1.3.8]. □

A proposição a seguir relaciona uma aplicação $n$-linear ao seu polinômio associado.

**Proposição 3.2.4.** *Para cada aplicação* $A \in L^s(^nE;F)$*, tome* $\widehat{A} \in P(^nE;F)$ *definida por* $\widehat{A}(x) = Ax^n$ *para todo* $x \in E$*. Esta aplicação é um isomorfismo de espaços vetoriais entre* $L^s(^nE;F)$ *e* $P(^nE;F)$*. Mais ainda, esse isomorfismo induz um isomorfismo topológico entre os espaços normados* $\mathcal{L}^s(^nE;F)$ *e* $\mathcal{P}(^nE;F)$*, no qual vale*

$$\left\|\widehat{A}\right\| \leq \|A\| \leq \frac{n^n}{n!}\left\|\widehat{A}\right\| \tag{3.6}$$

*para toda* $A \in \mathcal{L}^s(^nE;F)$*.*

*Demonstração.* Veja [Mu10, Theorem 2.2]. □

**Observação 3.2.5.** ($i$) *Dado um polinômio n-homogêneo $P$, pode existir muitas aplicações n-lineares $A \in L(^nE;F)$ tais que $P(x) = Ax^n$. Porém, apenas uma dessas aplicações é simétrica (Veja [Be08, Proposição 1.3.4]) . Esta aplicação n-linear simétrica denotaremos por $\check{P}$. Através da Fórmula de Polarização (Proposição A.0.10), podemos obter a seguinte relação para esta aplicação:*

$$\check{P}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\varepsilon=\pm 1} \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n P\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i\right). \tag{3.7}$$

($ii$) *As constantes fornecidas em (3.6) são as melhores possíveis* (Veja [Mu10, Exercises 2.H e 2.I])
($iii$) *Com este último resultado, podemos adicionar mais um item às equivalências da Proposição (3.2.2):*

*(iv) A aplicação n-linear simétrica $\check{P}$ é contínua.*

Usando os mesmos princípios através dos quais as aplicações multilineares de tipo finito e de posto finito foram definidos, temos as seguintes versões para polinômios:

**Definição 3.2.6.** Um polinômio $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$ é de *tipo finito* se podemos escrever

$$P(x) = \sum_{j=1}^{k} \varphi_j(x)^n y_j$$

para todo $x \in E$, onde $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_j \in E'$ e $y_j \in F$ para $j = 1, \ldots, k$. Este polinômio $P$ também é denotado por $\sum_{j=1}^{k} \varphi_j^n \otimes y_j$.

O subespaço vetorial de $\mathcal{P}(^nE;F)$ formado pelos polinômios de tipo finito é denotado por $\mathcal{P}_f(^nE;F)$.

**Definição 3.2.7.** *Um polinômio $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$ tem posto finito se podemos escrever*

$$P(x) = \sum_{j=1}^{k} Q_j(x) y_j$$

*para todo $x \in E$, onde $Q_j \in \mathcal{P}(^nE)$ e $y_j \in F$ para $j = 1, \ldots, k$. Este polinômio $P$ também é denotado por $\sum_{j=1}^{k} Q_j \otimes y_j$.*

O subespaço de $\mathcal{P}(^nE;F)$ formados pelos polinômios de posto finito é denotado por $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(^nE;F)$.

### 3.2.1 Polinômios homogêneos Cohen fortemente $p$-somantes

Nesta subseção, apresentaremos os polinômios $n$-homogêneos Cohen fortemente $p$-somantes.

A versão polinomial da Definição 3.1.9, apresentada em Campos [Ca13], é a seguinte:

**Definição 3.2.8.** Sejam $1 < p \leq \infty$, $n \in \mathbb{N}$ e $E, F$ espaços de Banach. Um polinômio $n$-homogêneo contínuo $P : E \to F$ é *Cohen fortemente p-somante* se

$$(P(x_i))_{i=1}^{\infty} \in \ell_p\langle F\rangle$$

para toda $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{np}(E)$.

Assim como acontece com as aplicações multilineares Cohen fortemente $p$-somantes, a classe de todos os polinômios $n$-homogêneos Cohen fortemente $p$-somantes, que será denotada por $\mathcal{P}_{Coh,p}(^nE; F)$, é um subespaço de $\mathcal{P}(^nE; F)$.

Lembre que, dado um polinômio $n$-homogêneo $P$, existe apenas uma aplicação $n$-linear simétrica, denotada por $\check{P}$, tal que $P(x) = \check{P}x^n$. Esta identificação ajuda a demostrar o seguinte resultado:

**Lema 3.2.9.** *Um polinômio $P \in \mathcal{P}(^nE; F)$ é Cohen fortemente p-somante se, e somente se, $\check{P} \in \mathcal{L}_s(^nE; F)$ é Cohen fortemente p-somante.*

*Demonstração.* Suponha que $\check{P}$ é Cohen fortemente $p$-somante. Daí, dado $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{np}(E)$, temos que $\left(\check{P}x_i^n\right)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p\langle E\rangle$. Como $P(x_i) = \check{P}(x_i, \ldots, x_i)$, então

$$(P(x_i))_{i=1}^{\infty} = \left(\check{P}(x_i, \ldots, x_i)\right)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p\langle F\rangle,$$

o que mostra que $P$ é Cohen fortemente $p$-somante. Suponha agora que $P \in \mathcal{P}_{Coh,p}(^nE; F)$. Dado $\left(x_i^{(j)}\right)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{np}(E)$, com $j = 1, \ldots, n$, temos, pela fórmula da polarização, que para todo $i \in \mathbb{N}$

$$2^n n! \check{P}\left(x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(n)}\right) = \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n P\left(\varepsilon_1 x_i^{(1)} + \cdots + \varepsilon_n x_i^{(n)}\right).$$

Como $P$ é Cohen fortemente $p$-somante e $\left(\varepsilon_1 x_i^{(1)} + \cdots + \varepsilon_n x_i^{(n)}\right)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{np}(E)$, então

$$\left(P\left(\varepsilon_1 x_i^{(1)} + \cdots + \varepsilon_n x_i^{(n)}\right)\right)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p\langle F\rangle$$

quaisquer que sejam os valores dos $\varepsilon_j$. Como $\ell_p\langle F\rangle$ é espaço vetorial,

$$\left(\check{P}\left(x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(n)}\right)\right)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p\langle F\rangle.$$

Portanto, $\check{P}$ é Cohen fortemente $p$-somante. $\square$

Este lema ajuda a mostrar algumas equivalências já esperadas sobre os polinômios Cohen fortemente $p$-somantes.

**Proposição 3.2.10.** *Sejam $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$ e $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. São equivalentes:*

*(i) $P$ é Cohen fortemente $p$-somante;*

*(ii) Existe uma constante $C>0$ tal que*

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\varphi_i(P(x_i))| \leq C\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|^{np}\right)^{\frac{1}{p}}\|(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p'},$$

*sempre que $(x_i)_{i=1}^{\infty}\in \ell_{np}(E)$ e $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\in \ell_{p'}^{w}(F')$;*

*(iii) Existe uma constante $C>0$ tal que*

$$\sum_{i=1}^{m}|\varphi_i(P(x_i))| \leq C\left(\sum_{i=1}^{m}\|x_i\|^{np}\right)^{\frac{1}{p}}\|(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p'}, \tag{3.8}$$

*para quaisquer $m\in\mathbb{N}$, $x_i\in E$ e $\varphi_i\in F'$, com $i=1,\ldots,m$.*

*Demonstração.* $(i)\Rightarrow(ii)$ Supondo $P$ um polinômio Cohen fortemente $p$-somante, pelo Lema 3.2.9, o operador multilinear $\check{P}$ é Cohen fortemente $p$-somante. Assim, pela Proposição 3.1.10, dados $(x_i)_{i=1}^{\infty}\in\ell_{np}(E)$ e $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\in\ell_{p'}^{w}(F')$, temos que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}|\varphi_i(P(x_i))| &= \sum_{i=1}^{\infty}\left|\varphi_i\left(\check{P}\left(x_i,\ldots,x_i\right)\right)\right| \\ &\leq C\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|^{np}\right)^{\frac{1}{np}}\cdots\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|^{np}\right)^{\frac{1}{np}}\|(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p'} \\ &= C\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|^{np}\right)^{\frac{1}{p}}\|(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p'}.\end{aligned}$$

$(ii)\Rightarrow(iii)$ Análogo ao feito para os operadores multilineares Cohen fortemente $p$-somantes.

$(iii)\Rightarrow(ii)$ Se $(x_i)_{i=1}^{\infty}\in\ell_{np}(E)$ e $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\in\ell_{p'}^{w}(F')$, então

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}|\varphi_i(P(x_i))| &= \sup_m\left\{\sum_{i=1}^{m}\left|\varphi_i\left(\check{P}\left(x_i,\ldots,x_i\right)\right)\right|\right\} \\ &\leq \sup_m\left\{C\left(\sum_{i=1}^{m}\|x_i\|^{np}\right)^{\frac{1}{p}}\|(\varphi_i)_{i=1}^{m}\|_{w,p'}\right\} \\ &= C\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|^{np}\right)^{\frac{1}{p}}\|(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p'}.\end{aligned}$$

$(ii)\Rightarrow(i)$ Análogo ao feito para os operadores multilineares Cohen fortemente $p$-somantes. $\square$

Como esperado, temos o seguinte resultado:

**Proposição 3.2.11.** *O ínfimo das constantes $C$ que satisfazem a desigualdade (3.8), denotado por $\|P\|_{Coh,p}$, define uma norma em $\mathcal{P}_{Coh,p}({}^nE;F)$.*

A demonstração pode ser feita de forma semelhante à que foi feito na Proposição 2.2.6.

## 3.3 Operadores múltiplo Cohen fortemente $p$-somantes

Nesta seção, apresentaremos os operadores múltiplos Cohen fortemente somantes. Estes operadores foram introduzidos por J. Campos [Ca13] e são uma generalização do conceito de operadores multilineares Cohen fortemente somantes.

**Definição 3.3.1.** Sejam $1 < p \leq \infty$ e $E_i, F$ espaços de Banach, $i = 1, \ldots, n$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Dizemos que um operador $T \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ é *múltiplo Cohen fortemente $p$-somante* se

$$\left(T\left(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_n}^{(n)}\right)\right)_{j_1,\ldots,j_n \in \mathbb{N}} \in \ell_p\langle F\rangle,$$

sempre que $\left(x_{j_i}^{(i)}\right)_{j_i=1}^{\infty} \in \ell_p(E_i),\ \ i = 1, \ldots, n.$

A classe de todas as aplicações multilineares múltiplo Cohen fortemente $p$-somantes de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em $F$ será denotada por $\mathcal{L}_{mCoh,p}(E_1, \ldots, E_n; F)$.

**Proposição 3.3.2.** *Sejam $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ e $T : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ uma aplicação $n$-linear contínua entre espaços de Banach. As seguintes afirmações são equivalentes:*

*(i) $T$ é múltiplo Cohen fortemente $p$-somante;*

*(ii) Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \left|\varphi_{j_1,\ldots,j_n}\left(T\left(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right|$$
$$\leq C\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left\|x_j^{(1)}\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdots \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left\|x_j^{(n)}\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left\|(\varphi_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n \in \mathbb{N}}\right\|_{w,p'},$$

*para quaisquer $(\varphi_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n \in \mathbb{N}} \in \ell_{p'}^{w}(F')$ e $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E_i),\ \ i = 1, \ldots, n;$*

*(iii) Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m} \left|\varphi_{j_1,\ldots,j_n}\left(T\left(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right|$$

$$\leq \ C\left(\sum_{j=1}^{m}\left\|x_j^{(1)}\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdots\left(\sum_{j=1}^{m}\left\|x_j^{(n)}\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left\|(\varphi_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m}\right\|_{w,p'}, \qquad (3.9)$$

*para todos* $m \in \mathbb{N}$, $\varphi_{j_1,\ldots,j_n} \in F'$ *e* $x_j^{(i)} \in E_i$, $i = 1,\ldots,n$, $j_i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,m$.

*Demonstração.* $(i) \Rightarrow (ii)$ Definamos o operador

$$\widetilde{T} : \ell_{p'}^{w}(F') \times \ell_p(E_1) \times \cdots \times \ell_p(E_n) \to \ell_1$$

que a cada

$$\left((\varphi_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}, \left(x_{j_1}^{(1)}\right)_{j_1=1}^{\infty}, \ldots, \left(x_{j_n}^{(n)}\right)_{j_n=1}^{\infty}\right) \in \ell_{p'}^{w}(F') \times \ell_p(E_1) \times \cdots \times \ell_p(E_n)$$

associa à sequência

$$\begin{aligned}\widetilde{T}&\left((\varphi_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}, \left(x_{j_1}^{(1)}\right)_{j_1=1}^{\infty}, \ldots, \left(x_{j_n}^{(n)}\right)_{j_n=1}^{\infty}\right)\\ &:= \left(\varphi_{j_1,\ldots,j_n}\left(T\left(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \in \ell_1.\end{aligned}$$

O operador $\widetilde{T}$ está bem definido, pois, por hipótese, $T$ é múltiplo Cohen fortemente $p$-somante. Vamos mostrar que $\widetilde{T}$ é contínuo e para isto, iremos mostrar que é contínuo em cada coordenada. De fato, fixando

$$\left(\left(x_{j_1}^{(1)}\right)_{j_1=1}^{\infty}, \ldots, \left(x_{j_n}^{(n)}\right)_{j_n=1}^{\infty}\right) \in \ell_p(E_1) \times \cdots \times \ell_p(E_n),$$

defina o operador

$$\widetilde{T}_{\left(x_{j_1}^{(1)}\right)_{j_1=1}^{\infty}, \ldots, \left(x_{j_n}^{(n)}\right)_{j_n=1}^{\infty}} : \ell_{p'}^{w}(F') \to \ell_1$$

dado por

$$\widetilde{T}_{\left(x_{j_1}^{(1)}\right)_{j_1=1}^{\infty}, \ldots, \left(x_{j_n}^{(n)}\right)_{j_n=1}^{\infty}}\left((\varphi_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\right) = \left(\varphi_{j_1,\ldots,j_n}\left(T\left(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}.$$

Supondo que

$$\begin{cases} \left(\varphi_{j_1,\ldots,j_n}^{(k)}\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \to (\varphi_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \text{ em } \ell_{p'}^{w}(F') \\ \widetilde{T}_{\left(x_{j_1}^{(1)}\right)_{j_1=1}^{\infty}, \ldots, \left(x_{j_n}^{(n)}\right)_{j_n=1}^{\infty}}\left(\left(\varphi_{j_1,\ldots,j_n}^{(k)}\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\right) \to (y_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \text{ em } \ell_1 \end{cases},$$

de forma análoga ao que foi feito na demostração da Proposição 2.2.3, mostra-se que

$$\widetilde{T}_{\left(x_{j_1}^{(1)}\right)_{j_1=1}^{\infty}, \ldots, \left(x_{j_n}^{(n)}\right)_{j_n=1}^{\infty}}\left((\varphi_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\right) = (y_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}$$

e portanto, $\widetilde{T}_{\left(x_{j_1}^{(1)}\right)_{j_1=1}^{\infty},\ldots,\left(x_{j_n}^{(n)}\right)_{j_n=1}^{\infty}}$ tem gráfico fechado.

Também de forma análoga ao que foi feito no caso linear, fixando agora

$$\left((\varphi_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}, \left(x_{j_2}^{(2)}\right)_{j_2=1}^{\infty}, \ldots, \left(x_{j_n}^{(n)}\right)_{j_n=1}^{\infty}\right) \in \ell_{p'}^{w}(F') \times \ell_p(E_2) \times \cdots \times \ell_p(E_n),$$

temos que o operador

$$\widetilde{T}_{(\varphi_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty},\left(x_{j_2}^{(2)}\right)_{j_2=1}^{\infty},\ldots,\left(x_{j_n}^{(n)}\right)_{j_n=1}^{\infty}} : \ell_p(E_1) \to \ell_1,$$

dado por

$$\begin{aligned}
&\widetilde{T}_{(\varphi_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty},\left(x_{j_2}^{(2)}\right)_{j_2=1}^{\infty},\ldots,\left(x_{j_n}^{(n)}\right)_{j_n=1}^{\infty}}\left(\left(x_{j_1}^{(1)}\right)_{j_1=1}^{\infty}\right) \\
&\quad := \left(\varphi_{j_1,\ldots,j_n}\left(T\left(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty},
\end{aligned}$$

tem gráfico fechado e portanto é contínuo. Prosseguindo desta forma, mostra-se que $\widetilde{T}$ é contínua em cada coordenada. Como os espaços de saída são completos, segue da Proposição A.0.9 e da continuidade em cada coordenada que o operador $\widetilde{T}$ é contínuo. Daí,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \left|\varphi_{j_1,\ldots,j_n}\left(T\left(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right| \\
&\quad = \left\|\left(\varphi_{j_1,\ldots,j_n}\left(T\left(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right)_{j_1,\ldots,j_n\in\mathbb{N}}\right\|_1 \\
&\quad = \left\|\widetilde{T}\left((\varphi_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}, \left(x_{j_1}^{(1)}\right)_{j_1=1}^{\infty}, \ldots, \left(x_{j_n}^{(n)}\right)_{j_n=1}^{\infty}\right)\right\|_1 \\
&\quad \leq \left\|\widetilde{T}\right\| \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left\|x_j^{(1)}\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdots \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left\|x_j^{(n)}\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left\|(\varphi_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n\in\mathbb{N}}\right\|_{w,p'}.
\end{aligned}$$

As demostrações das outras implicações são análogas ao que foi feito na Proposição 3.1.10. □

A demonstração da proposição a seguir é análoga à da Proposição 3.1.11 e será omitida.

**Proposição 3.3.3.** *O espaço $\mathcal{L}_{mCoh,p}(E_1, \ldots, E_n; F)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$.*

Denotaremos por $\|T\|_{mCoh,p}$ o ínfimo das constantes $C$ tais que a desigualdade (3.9) continua válida.

**Proposição 3.3.4.** *O ínfimo das constantes $C$ que satisfazem a desigualdade (3.9) da Proposição 3.3.2 define uma norma em $\mathcal{L}_{mCoh,p}(E_1, \ldots, E_n; F)$.*

*Demonstração.* Dado $T \in \mathcal{L}_{mCoh,p}(E_1, \ldots, E_n; F)$, temos que $\|T\|_{mCoh,p} \geq 0$. Se

$$\|T\|_{mCoh,p} = 0,$$

tomando $m = 1$ em (3.9), obtemos que $\left|\varphi\left(T\left(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}\right)\right)\right| = 0$ para todo $\varphi \in F'$ e $x^{(i)} \in E_i$, $i = 1, \ldots, n$, e por Hahn-Banach, $T = 0$.

Para qualquer $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$ (para $\lambda = 0$ é óbvio), temos

$$\begin{aligned}\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m} \left|\varphi_{j_1,\ldots,j_n}\left(\lambda T\left(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right| &= |\lambda| \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m} \left|\varphi_{j_1,\ldots,j_n}\left(T\left(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right| \\ &\leq |\lambda| \cdot \|T\|_{mCoh,p} \left(\sum_{j=1}^{m} \left\|x_j^{(1)}\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdots \left(\sum_{j=1}^{m} \left\|x_j^{(n)}\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left\|(\varphi_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m}\right\|_{w,p'}\end{aligned} \tag{3.10}$$

o que mostra que $\|\lambda T\|_{mCoh,p} \leq |\lambda| \cdot \|T\|_{mCoh,p}$, já que $\|\lambda T\|_{mCoh,p}$ é a menor das constantes que satisfazem a desigualdade (3.10). Por outro lado, note que

$$\begin{aligned}&\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m} \left|\varphi_{j_1,\ldots,j_n}\left(T\left(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right| \\ &\quad = \frac{1}{|\lambda|} \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m} \left|\varphi_{j_1,\ldots,j_n}\left(\lambda T\left(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right| \\ &\quad \leq \frac{1}{|\lambda|} \cdot \|\lambda T\|_{mCoh,p} \left(\sum_{j=1}^{m} \left\|x_j^{(1)}\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdots \left(\sum_{j=1}^{m} \left\|x_j^{(n)}\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left\|(\varphi_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m}\right\|_{w,p'},\end{aligned}$$

e disso,

$$|\lambda| \cdot \|T\|_{mCoh,p} \leq \|\lambda T\|_{mCoh,p}.$$

Portanto, $\|\lambda T\|_{mCoh,p} = |\lambda| \cdot \|T\|_{mCoh,p}$.

Para mostrar a desigualdade triangular, dados $T_1, T_2 \in \mathcal{L}_{mCoh,p}(E_1, \ldots, E_n; F)$, temos que

$$\begin{aligned}&\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m} \left|\varphi_{j_1,\ldots,j_n}\left((T_1 + T_2)\left(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right| \\ &\quad \leq \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m} \left|\varphi_{j_1,\ldots,j_n}\left(T_1\left(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right| + \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m} \left|\varphi_{j_1,\ldots,j_n}\left(T_2\left(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right| \\ &\quad \leq K \left(\sum_{j=1}^{m} \left\|x_j^{(1)}\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdots \left(\sum_{j=1}^{m} \left\|x_j^{(n)}\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left\|(\varphi_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m}\right\|_{w,p'},\end{aligned}$$

onde $K = \|T_1\|_{mCoh,p} + \|T_2\|_{mCoh,p}$, e daí,

$$\|T_1 + T_2\|_{mCoh,p} \leq \|T_1\|_{mCoh,p} + \|T_2\|_{mCoh,p}.$$

□

**Lema 3.3.5.** *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $T \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Se $T$ é múltiplo Cohen fortemente $p$-somante, então*

$$\|T\| \leq \|T\|_{mCoh,p}.$$

*Demonstração.* Tomando $m = 1$ na expressão (3.9), obtemos

$$|\varphi(T(x_1, \ldots, x_n))| \leq \|T\|_{mCoh,p} \cdot \|(x_1, 0, 0, \ldots)\|_p \cdots \|(x_n, 0, 0, \ldots)\|_p \|(\varphi, 0, 0, \ldots)\|_{w,p'},$$

e pelo Teorema de Hanh-Banach, obtemos $\|T\| \leq \|T\|_{mCoh,p}$. □

O próximo resultado garante que o conceito de operadores múltiplo Cohen fortemente $p$-somantes é uma generalização do conceito de operadores multilineares Cohen fortemente $p$-somantes.

**Proposição 3.3.6.** *Seja $T$ um operador multilinear contínuo. Se $T$ é Cohen fortemente $p$-somante, então $T$ é múltiplo Cohen fortemente $p$-somante e*

$$\|\cdot\|_{mCoh,p} \leq \|\cdot\|_{Coh,p}.$$

*Demonstração.* Suponha que $T \in \mathcal{L}_{Coh,p}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Pelo Teorema 3.1.16, existe uma constante $C > 0$ e uma medida de probabilidade de Borel $\mu$ em $B_{F''}$ (com a topologia fraca estrela) tal que, para todo $(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}, \varphi)$ em $E_1 \times \cdots \times E_n \times F'$, a desigualdade

$$\left|\varphi\left(T\left(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}\right)\right)\right| \leq \|T\|_{Coh,p} \cdot \left\|x^{(1)}\right\| \cdots \left\|x^{(n)}\right\| \left(\int_{B_{F''}} |\psi(\varphi)|^{p'} d\mu(\psi)\right)^{\frac{1}{p'}}$$

é satisfeita. Assim, dado $m \in \mathbb{N}$,

$$\left|\varphi_{j_1,\ldots,j_n}\left(T\left(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right| \leq \|T\|_{Coh,p} \cdot \left\|x_{j_1}^{(1)}\right\| \cdots \left\|x_{j_n}^{(n)}\right\| \left(\int_{B_{F''}} |\psi(\varphi_{j_1,\ldots,j_n})|^{p'} d\mu(\psi)\right)^{\frac{1}{p'}}$$

sempre que $\varphi_{j_1,\ldots,j_n} \in F'$ e $\left(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_n}^{(n)}\right) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ com $1 \leq j_1, \ldots, j_n \leq m$. Daí,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m} \left|\varphi_{j_1,\ldots,j_n}\left(T\left(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right| \\
&\leq \|T\|_{Coh,p} \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m} \left(\left\|x_{j_1}^{(1)}\right\| \cdots \left\|x_{j_n}^{(n)}\right\| \left(\int_{B_{F''}} |\psi(\varphi_{j_1,\ldots,j_n})|^{p'} d\mu(\psi)\right)^{\frac{1}{p'}}\right) \\
&\leq \|T\|_{Coh,p} \left(\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m} \left(\left\|x_{j_1}^{(1)}\right\| \cdots \left\|x_{j_n}^{(n)}\right\|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m} \int_{B_{F''}} |\psi(\varphi_{j_1,\ldots,j_n})|^{p'} d\mu(\psi)\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \|T\|_{Coh,p} \left(\sum_{j_1=1}^{m} \cdots \sum_{j_n=1}^{m} \left(\left\|x_{j_1}^{(1)}\right\| \cdots \left\|x_{j_n}^{(n)}\right\|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B_{F''}} \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m} |\psi(\varphi_{j_1,\ldots,j_n})|^{p'} d\mu(\psi)\right)^{\frac{1}{p'}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \|T\|_{Coh,p} \left( \sum_{j_1=1}^{m} \left\| x_{j_1}^{(1)} \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdots \left( \sum_{j_n=1}^{m} \left\| x_{j_n}^{(n)} \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{B_{F''}} \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m} |\psi(\varphi_{j_1,\ldots,j_n})|^{p'} d\mu(\psi) \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\leq \|T\|_{Coh,p} \left( \sum_{j_1=1}^{m} \left\| x_{j_1}^{(1)} \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdots \left( \sum_{j_n=1}^{m} \left\| x_{j_n}^{(n)} \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sup_{\psi \in B_{F''}} \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m} |\psi(\varphi_{j_1,\ldots,j_n})|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \|T\|_{Coh,p} \left( \sum_{j_1=1}^{m} \left\| x_{j_1}^{(1)} \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdots \left( \sum_{j_n=1}^{m} \left\| x_{j_n}^{(n)} \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left\| (\varphi_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m} \right\|_{w,p'}
\end{aligned}
$$

o que mostra que $T \in \mathcal{L}_{mCoh,p}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $\| \cdot \|_{mCoh,p} \leq \| \cdot \|_{Coh,p}$. $\square$

CAPÍTULO 4

---

Ideais de Operadores Cohen Fortemente Somantes

---

Por volta de 1969, A. Pietsch [Pi78] introduziu a teoria abstrata de ideais de operadores com o intuito de sistematizar algumas classes especiais de operadores lineares que surgiram naturalmente com o desenvolvimento da Análise Funcional Linear. Foi o próprio Pietsch [Pi83] que apresentou o conceito de ideais para aplicações multilineares da qual a adaptação para polinômios é imediata.

## 4.1 Ideais de operadores - caso linear

**Definição 4.1.1.** Um *ideal de operadores* $\mathcal{I}$ é uma subclasse da classe de todos os operadores lineares contínuos entre espaços de Banach tal que, para quaisquer espaços de Banach $E$ e $F$, suas componentes $\mathcal{I}(E;F) := \mathcal{L}(E;F) \cap \mathcal{I}$ satisfazem as seguintes condições:

(**Oa**) $\mathcal{I}(E;F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E;F)$ que contém os operadores lineares de posto finito;

(**Ob**) A propriedade de ideal: se $u \in \mathcal{L}(E;F)$, $v \in \mathcal{I}(F;G)$ e $t \in \mathcal{L}(G;H)$, então a composição $t \circ v \circ u$ pertence a $\mathcal{I}(E;H)$.

**Definição 4.1.2.** Um *ideal normado de operadores* $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é um ideal de operadores $\mathcal{I}$ munido da função $\|\cdot\|_{\mathcal{I}} : \mathcal{I} \to [0,+\infty)$ tal que:

(**O1**) A função $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ restrita à componente $\mathcal{I}(E;F)$ é uma norma para todos $E$ e $F$ espaços de Banach;

(**O2**) O funcional identidade $id_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ dado por $id_{\mathbb{K}}(\lambda) = \lambda$ é tal que $\|id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} = 1$;

(**O3**) Se $u \in \mathcal{L}(E;F)$, $v \in \mathcal{I}(F;G)$ e $t \in \mathcal{L}(G;H)$, então

$$\|t \circ v \circ u\|_{\mathcal{I}} \leq \|u\| \cdot \|v\|_{\mathcal{I}} \cdot \|t\|.$$

Mais ainda, se todas as componentes $\mathcal{I}(E;F)$ do ideal $\mathcal{I}$ são subespaços completos relativamente à norma $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ , dizemos que $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é um *ideal de Banach* (ou completo) de operadores.

**Observação 4.1.3.** *Alguns autores exigem na definição anterior que os operadores do item (**Oa**) sejam de tipo finito ao invés de posto finito. Na realidade, essas definições são equivalentes, pois, no caso linear, operadores de posto finito e tipo finito coincidem.*

**Proposição 4.1.4.** *Sejam $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ um ideal normado de operadores e $t \in \mathcal{I}$. Então*

$$\|t\| \leq \|t\|_{\mathcal{I}}.$$

*Demonstração.* Sejam $t \in \mathcal{I}(E;F)$, $\varphi \in F'$ e $x \in E$. Definindo a função $R : \mathbb{K} \to E$, dada por $R(\lambda) = \lambda x$, temos que

$$\|R\| = \sup_{\lambda \in B_{\mathbb{K}}} \|R(\lambda)\| = \sup_{\lambda \in B_{\mathbb{K}}} \|\lambda x\| = \|x\|.$$

Agora, note que para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, temos que

$$(\varphi \circ t)(x) id_{\mathbb{K}}(\lambda) = \lambda(\varphi \circ t)(x)$$

e

$$(\varphi \circ t \circ R)(\lambda) = (\varphi \circ t)(\lambda x) = \lambda(\varphi \circ t)(x)$$

o que mostra que

$$\varphi \circ t \circ R = (\varphi \circ t)(x) id_{\mathbb{K}}.$$

Como

$$|(\varphi \circ t)(x)| = |(\varphi \circ t)(x)| \cdot \|id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} = \|(\varphi \circ t)(x) id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} = \|\varphi \circ t \circ R\|_{\mathcal{I}} \leq \|\varphi\| \cdot \|t\|_{\mathcal{I}} \cdot \|R\|,$$

então

$$\|t(x)\| \overset{\text{Hahn-Banach}}{=} \sup_{\|\varphi\| \leq 1} |(\varphi \circ t)(x)| \leq \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \|\varphi\| \cdot \|t\|_{\mathcal{I}} \cdot \|R\| = \|t\|_{\mathcal{I}} \cdot \|x\|,$$

ou seja,

$$\|t(x)\| \leq \|t\|_{\mathcal{I}} \cdot \|x\|. \tag{4.1}$$

Como $\|t\|$ é a menor das constantes que satisfazem (4.1), concluímos que $\|t\| \leq \|t\|_{\mathcal{I}}$. $\square$

**Observação 4.1.5.** Se $\varphi \in E'$, então $\|\varphi\| = \|\varphi\|_{\mathcal{I}}$. De fato, como $\varphi$ é de posto finito, então $\varphi \in \mathcal{I}$ e

$$\|\varphi\|_{\mathcal{I}} = \|id_{\mathbb{K}} \circ \varphi\|_{\mathcal{I}} \leq \|id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} \cdot \|\varphi\| = \|\varphi\|.$$

Disto e de $\|t\| \leq \|t\|_{\mathcal{I}}$ (Proposição 4.1.4), a igualdade segue.

Entre os exemplos clássicos de ideais de operadores lineares, temos a classe dos operadores de posto finito e a classe dos operadores absolutamente $p$-somantes [1]. Vamos mostrar que $(\mathcal{D}_p, d_p)$ é um ideal de Banach de operadores lineares, onde $\mathcal{D}_p$ denota a subclasse da classe de todos os operadores lineares entre espaços de Banach que são Cohen fortemente $p$-somantes.

### 4.1.1 Ideal de operadores lineares Cohen fortemente $p$-somantes

O objetivo desta subseção é apresentar o ideal dos operadores lineares Cohen fortemente $p$-somantes. Mostraremos que este ideal, que é o resultado central desta subseção, é um ideal de Banach.

Primeiro, iremos mostrar que os operadores com posto finito são Cohen fortemente $p$-somantes.

**Proposição 4.1.6.** *Se $1 < p \leq \infty$ e $T \in \mathcal{L}(E; F)$ tem posto finito, então $T$ é Cohen fortemente $p$-somante.*

*Demonstração.* Sejam $y \in F$ e $\psi \in E'$, com $\psi \neq 0$ e $y \neq 0$. Para todo $m \in \mathbb{N}$, dados $x_i \in E$, $\varphi_i \in F'$, $i = 1, \ldots, m$, então

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} |\varphi_i(\psi \otimes y(x_i))| &= \sum_{i=1}^{m} |\varphi_i(\psi(x_i)y)| = \sum_{i=1}^{m} |\psi(x_i)\varphi_i(y)| \\
&\leq \sum_{i=1}^{m} \|\psi\| \cdot \|x_i\| \cdot |\varphi_i(y)| = \|\psi\| \sum_{i=1}^{m} \|x_i\| \cdot |\varphi_i(y)| \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \|\psi\| \left( \sum_{i=1}^{m} \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^{m} |\varphi_i(y)|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \|\psi\| \cdot \|y\| \cdot \|(x_i)_{i=1}^{m}\|_p \left( \sum_{i=1}^{m} \frac{|\varphi_i(y)|^{p'}}{\|y\|^{p'}} \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\leq \|\psi\| \cdot \|y\| \cdot \|(x_i)_{i=1}^{m}\|_p \sup_{w \in B_F} \left( \sum_{i=1}^{m} |\varphi_i(w)|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \|\psi\| \cdot \|y\| \cdot \|(x_i)_{i=1}^{m}\|_p \sup_{\psi \in B_{F''}} \left( \sum_{i=1}^{m} |\psi(\varphi_i)|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}
\end{aligned}$$

[1] Para mais detalhes veja [Pe12]).

$$= \quad C\|(x_i)_{i=1}^m\|_p \cdot \|(\varphi_i)_{i=1}^m\|_{w,p'},$$

o que mostra que $\psi \otimes y \in \mathcal{D}_p(E;F)$ e $d_p(\psi \otimes y) \leq \|\psi\| \cdot \|y\|$ para todo $\psi \in E'$ e $y \in F$. Dado um operador de posto finito $u : E \longrightarrow F$, temos que $u$ é da forma

$$u(x) = \sum_{i=1}^k \psi_i \otimes y_i(x) := \sum_{i=1}^k \psi_i(x) y_i,$$

onde $\psi_i : E \longrightarrow \mathbb{K}$ é um funcional linear e $y_i \in F$ para $i = 1, \ldots, k$. Sendo $\mathcal{D}_p(E;F)$ um espaço vetorial, temos que $u \in \mathcal{D}_p(E;F)$. Portanto, cada componente $\mathcal{D}_p(E;F)$ contém os operadores lineares contínuos de posto finito de $E$ em $F$. $\square$

A seguinte observação será útil para mostrar a próxima proposição.

**Observação 4.1.7.** Se um operador não nulo $u \in \mathcal{L}(E;F)$ e $\varphi_i \in F'$, $i = 1, \ldots, m$, então

$$\begin{aligned}
\|(\varphi_i \circ u)_{i=1}^m\|_{w,p'} &= \sup_{\psi \in B_{E''}} \left( \sum_{i=1}^m |\psi(\varphi_i \circ u)|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\overset{\text{Prop. } A.0.17}{=} \sup_{y \in B_E} \|((\varphi_i \circ u)(y))_{i=1}^m\|_{p'} \\
&= \|u\| \sup_{y \in B_E} \left\| \left( \varphi_i \left( \frac{u(y)}{\|u\|} \right) \right)_{i=1}^m \right\|_{p'} \\
&\leq \|u\| \sup_{w \in B_F} \|(\varphi_i(w))_{i=1}^m\|_{p'} \\
&\overset{\text{Prop. } A.0.17}{=} \|u\| \cdot \|(\varphi_i)_{i=1}^m\|_{w,p'}.
\end{aligned}$$

**Proposição 4.1.8.** *Se $1 < p \leq \infty$, então $(\mathcal{D}_p, d_p)$é um ideal normado de operadores lineares.*

*Demonstração.* (**Oa**) Já verificamos que para quaisquer espaços de Banach $E$ e $F$, $\mathcal{D}_p(E;F)$ é subespaço de $\mathcal{L}(E;F)$ (Proposição 2.2.5) e que $\mathcal{D}_p(E;F)$ contém os operadores de posto finito de $\mathcal{L}(E;F)$ (Proposição 4.1.6).

(**Ob**) Para provar a propriedade do ideal, sejam $u_1 \in \mathcal{L}(E_0;E)$, $T \in \mathcal{D}_p(E;F)$, $u_2 \in \mathcal{L}(F;F_0)$, $x_i \in E_0$ e $\varphi \in F_0'$, com $m \in \mathbb{N}$ e $i = 1, \ldots, m$. De

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m |\varphi_i((u_2 \circ T \circ u_1)(x_i))| &= \sum_{i=1}^m |(\varphi_i \circ u_2)(T(u_1(x_i))| \\
&\leq d_p(T)\|(u_1 x_i)_{i=1}^m\|_p \cdot \|(\varphi_i \circ u_2)_{i=1}^m\|_{w,p'} \\
&\overset{\text{Obs 4.1.7}}{\leq} d_p(T)\|u_1\| \cdot \|(x_i)_{i=1}^m\|_p \cdot \|u_2\| \cdot \|(\varphi_i)_{i=1}^m\|_{w,p'} \\
&= \|u_2\| d_p(T)\|u_1\| \cdot \|(x_i)_{i=1}^m\|_p \cdot \|(\varphi_i)_{i=1}^m\|_{w,p'} \\
&= C\|(x_i)_{i=1}^m\|_p \cdot \|(\varphi_i)_{i=1}^m\|_{w,p'},
\end{aligned}$$

segue que $u_2 \circ T \circ u_1 \in \mathcal{D}_p(E;F)$ e

$$d_p(u_2 \circ T \circ u_1) \leq \|u_2\| d_p(T) \|u_1\|. \tag{4.2}$$

(**O1**) Na Proposição 2.2.6, foi mostrado que $d_p$ restrita a $\mathcal{D}_p(E;F)$ é uma norma para quaisquer espaços de Banach $E$ e $F$.

(**O2**) Já mostramos que $d_p(\psi \otimes y) \leq \|\psi\| \cdot \|y\|$ para todo $\psi \in E'$ e $y \in F$ (Proposição 4.1.6). Agora, tomando $\psi = id_{\mathbb{K}}$ e $y = 1 \in \mathbb{K}$, então

$$d_p(id_{\mathbb{K}}) = d_p(id_{\mathbb{K}} \otimes 1) \leq \|id_{\mathbb{K}}\| \cdot |1| = 1.$$

Por outro lado, como $\|T\| \leq d_p(T)$ (veja Lema 2.2.8), então

$$1 = \|id_{\mathbb{K}}\| \leq d_p(id_{\mathbb{K}}).$$

Portanto, a igualdade segue.

(**O3**) Veja a desigualdade (4.2).

Portanto, temos que $(\mathcal{D}_p, d_p)$ é um ideal normado de operadores lineares. □

**Proposição 4.1.9.** *Para todo $1 < p \leq \infty$, $(\mathcal{D}_p, d_p)$ é um ideal de Banach de operadores lineares.*

*Demonstração.* Seja $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $(\mathcal{D}_p(E;F); d_p)$. Como $\|\cdot\| \leq d_p(\cdot)$, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, se $k, k' \geq N$, então

$$\|T_k - T_{k'}\| \leq d_p(T_k - T_{k'}) < \varepsilon,$$

o que mostra que $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(E;F)$. Como $F$ é Banach e $E$ é normado, temos que $\mathcal{L}(E;F)$ é Banach e portanto

$$\lim_{n\to\infty} T_n = T \in \mathcal{L}(E;F). \tag{4.3}$$

Vamos mostrar que $T \in \mathcal{D}_p(E;F)$. Sendo $T_n$ Cohen fortemente $p$-somante, então $\widehat{T_n} : \ell_p(E) \to \ell_p\langle F\rangle$ está bem definida para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\left\|\widehat{T}\right\| = d_p(T)$ e $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $(\mathcal{D}_p(E;F); d_p)$, então $\left(\widehat{T_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em $\mathcal{L}(\ell_p(E); \ell_p\langle F\rangle)$. Além disso, como $\mathcal{L}(\ell_p(E); \ell_p\langle F\rangle)$ é Banach, pois $\ell_p\langle F\rangle$ é Banach, então

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{T_n} = A \in \mathcal{L}(\ell_p(E); \ell_p\langle F\rangle).$$

Dado $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$, defina

$$(y_i)_{i=1}^{\infty} := A\left((x_i)_{i=1}^{\infty}\right) \in \ell_p\langle F\rangle.$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N$, tem-se

$$\|T_n(x_i) - y_i\| \leq \|(T_n(x_i))_{i=1}^{\infty} - (y_i)_{i=1}^{\infty}\|_{C,p}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\| \widehat{T}_n((x_i)_{i=1}^{\infty}) - A((x_i)_{i=1}^{\infty}) \right\|_{C,p} \\
&= \left\| \left( \widehat{T}_n - A \right) ((x_i)_{i=1}^{\infty}) \right\|_{C,p} \\
&\overset{\text{Obs }(2.2.4)}{\leq} \left\| \widehat{T}_n - A \right\| \cdot \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_p \\
&\leq \varepsilon \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_p,
\end{aligned}
$$

ou seja, $\lim_{n\to\infty} T_n(x_i) = y_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Disso, de (4.3) e pela unicidade do limite, obtemos que $T(x_i) = y_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$, onde

$$
(T(x_n))_{n=1}^{\infty} = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p\langle F\rangle,
$$

e, portanto, o operador $\widehat{T} : \ell_p(E) \to \ell_p\langle F\rangle$ está bem definido, o que mostra que $T$ é Cohen fortemente $p$-somante. Assim,

$$
\begin{aligned}
\|(T_n(x_i))_{i=1}^{\infty} - (T(x_i))_{i=1}^{\infty}\|_{C,p} &= \|((T_n - T)(x_i))_{i=1}^{\infty}\|_{C,p} \\
&\leq d_p(T_n - T)\|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_p \\
&= \left\| \widehat{T}_n - A \right\| \cdot \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_p \\
&\leq \varepsilon \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_p
\end{aligned}
$$

para todo $n > N$. Logo, $T_n \to T$ quando $n \to \infty$ na norma $d_p$. Portanto, $(\mathcal{D}_p, d_p)$ é um ideal de Banach de operadores lineares. $\square$

## 4.2 Ideais de operadores - caso multilinear

Nesta seção, veremos que tanto a classe dos operadores multilineares Cohen fortemente $p$-somantes quanto a dos operadores múltiplo Cohen fortemente $p$-somantes são ideais de Banach de operadores multilineares. Mostraremos, também, que as classes dos polinômios $n$-homogêneos Cohen fortemente $p$-somantes e múltiplo Cohen fortemente $p$-somantes são ideais de Banach de polinômios $n$-homogêneos.

**Definição 4.2.1.** Um *ideal de aplicações multilineares*, ou simplesmente *multi-ideal*, é uma subclasse $\mathcal{M}$ da classe das aplicações multilineares contínuas entre espaços de Banach tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$ e espaços de Banach $E_1, \ldots, E_n$ e $F$, as suas componentes

$$
\mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F) := \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F) \cap \mathcal{M},
$$

satisfazem as seguintes condições:

**(Ma)** $\mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ que contém as aplicações $n$-lineares de tipo finito;

**(Mb)** A propriedade de multi-ideal: se $A \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F)$, $u_j \in \mathcal{L}(G_j; E_j)$, $j = 1, \ldots, n$, e $t \in \mathcal{L}(F; H)$, então a composição

$$t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n) \in \mathcal{M}(G_1, \ldots, G_n; H).$$

$$\begin{tikzcd} G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n \arrow[d, "u_1"] \arrow[drr, "t\circ A\circ(u_1,u_2,\ldots,u_n)"] & & \\ E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \arrow[r, "A"] & F \arrow[r, "t"] & H \end{tikzcd}$$

Para cada $n$ fixo,

$$\mathcal{M}_n = \bigcup_{E_1,\ldots,E_n,F \text{ Banach}} \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F)$$

é chamado de ideal de aplicações $n$-lineares.

**Definição 4.2.2.** Um *ideal normado de aplicações multilineares* $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ é um ideal de aplicações multilineares $\mathcal{M}$ munido da função $\|\cdot\|_{\mathcal{M}} \colon \mathcal{M} \longrightarrow [0, \infty)$, tais que:

**(M1)** A função $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ restrita à componente $\mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F)$ é uma norma para todo $n \in \mathbb{N}$ e quaisquer espaços de Banach $E_1, \ldots, E_n$ e $F$;

**(M2)** A aplicação $n$-linear $I_n \colon \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$, dada por $I_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$, é tal que $\|I_n\|_{\mathcal{M}} = 1$;

**(M3)** Se $M \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F)$, $u_j \in \mathcal{L}(G_j; E_j)$, $j = 1, \ldots, n$ e $t \in \mathcal{L}(F; H)$, então a composta satisfaz

$$\|t \circ M \circ (u_1, \ldots, u_n)\|_{\mathcal{M}} \leq \|t\| \cdot \|M\|_{\mathcal{M}} \cdot \|u_1\| \cdots \|u_n\|.$$

Se $n$ for um inteiro positivo fixo, sob as mesmas condições acima, dizemos que $\mathcal{M}_n$ é um ideal normado de aplicações $n$-lineares. Mais ainda, se todas as componentes $\mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F)$ são subespaços completos relativamente à topologia gerada pela norma $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$, então dizemos que $(\mathcal{M}; \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ é um *multi-ideal de Banach.*

Na definição de multi-ideal, Pietsh considera composições de uma aplicação multilinear com operadores lineares. Isto é necessário, pois o intuito é partir de uma aplicação $n$-linear e chegar ao final com uma aplicação também $n$-linear, ou seja, manter o grau de linearidade [2].

Entre os exemplos clássicos de classes de operadores multilineares que são multi-ideais, temos as aplicações multilineares de tipo finito e de posto finito. Nesta seção, iremos mostrar que $(\mathcal{L}_{Coh,p}, \|\cdot\|_{Coh,p})$ e $(\mathcal{L}_{mCoh,p}, \|\cdot\|_{mCoh,p})$ são ideais de Banach de operadores

[2]Para mais detalhes veja [To15]

multilineares, onde $\mathcal{L}_{Coh,p}$ denota a classe de todos os operadores multilineares entre espaços de Banach que são Cohen fortemente $p$-somantes e $\mathcal{L}_{mCoh,p}$ denota a subclasse da classe de todos os operadores multilineares entre espaços de Banach que são múltiplo Cohen fortemente $p$-somantes. Para $n \in \mathbb{N}$ fixado, denotaremos por $\mathcal{L}^n_{Coh,p}$ a classe de todos os operadores $n$-lineares entre espaços de Banach que são Cohen fortemente $p$-somantes e por $\mathcal{L}^n_{mCoh,p}$ a classe de todos os operadores $n$-lineares entre espaços de Banach que são múltiplo Cohen fortemente $p$-somantes.

### 4.2.1 Ideal de operadores multilineares Cohen fortemente $p$-somantes

Nesta subseção veremos que a classe dos operadores multilineares Cohen fortemente $p$-somantes é um ideal de Banach de aplicações $n$-lineares.

Primeiro, iremos mostrar que os operadores de tipo finito são Cohen fortemente $p$-somantes.

**Proposição 4.2.3.** *Se $1 < p \leq \infty$, $n \in \mathbb{N}$ e $T \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ é de tipo finito, então $T$ é Cohen fortemente $p$-somante.*

*Demonstração.* Sejam $m \in \mathbb{N}$, $x_i^{(l)} \in E_l$, $\psi^{(l)} \in E_l'$, $\varphi_i \in F'$, $i = 1, \ldots, m$, $l = 1, \ldots, n$ e $y \in F$. Então,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m} \left|\varphi_i\left(\psi^{(1)} \otimes \cdots \otimes \psi^{(n)} \otimes y\left(x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(n)}\right)\right)\right| \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left|\varphi_i\left(\psi^{(1)}\left(x_i^{(1)}\right) \cdots \psi^{(n)}\left(x_i^{(n)}\right) y\right)\right| \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left|\psi^{(1)}\left(x_i^{(1)}\right) \cdots \psi^{(n)}\left(x_i^{(n)}\right) \varphi_i(y)\right| \\
&\leq \left\|\psi^{(1)}\right\| \cdots \left\|\psi^{(n)}\right\| \sum_{i=1}^{m} \left\|x_i^{(1)}\right\| \cdots \left\|x_i^{(n)}\right\| \cdot |\varphi_i(y)| \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \left\|\psi^{(1)}\right\| \cdots \left\|\psi^{(n)}\right\| \left(\sum_{i=1}^{m} \left(\left\|x_i^{(1)}\right\| \cdots \left\|x_i^{(n)}\right\|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{m} |\varphi_i(y)|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\overset{\text{Hölder generalizado}}{\leq} \left\|\psi^{(1)}\right\| \cdots \left\|\psi^{(n)}\right\| \left[\prod_{r=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \left\|x_i^{(r)}\right\|^{np}\right)^{\frac{1}{np}}\right] \left(\sum_{i=1}^{m} |\varphi_i(y)|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \left\|\psi^{(1)}\right\| \cdots \left\|\psi^{(n)}\right\| \cdot \|y\| \left[\prod_{r=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \left\|x_i^{(r)}\right\|^{np}\right)^{\frac{1}{np}}\right] \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{|\varphi_i(y)|^{p'}}{\|y\|^{p'}}\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\leq \left\|\psi^{(1)}\right\| \cdots \left\|\psi^{(n)}\right\| \cdot \|y\| \left[\prod_{r=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \left\|x_i^{(r)}\right\|^{np}\right)^{\frac{1}{np}}\right] \sup_{w \in B_F} \left(\sum_{i=1}^{m} |\varphi_i(w)|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \quad \left\|\psi^{(1)}\right\|\cdots\left\|\psi^{(n)}\right\|\cdot\|y\|\left[\prod_{r=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\left\|x_i^{(r)}\right\|^{np}\right)^{\frac{1}{np}}\right]\sup_{\psi\in B_{F''}}\left(\sum_{i=1}^{m}|\psi(\varphi_i)|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\\
&= \quad C\left[\prod_{r=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\left\|x_i^{(r)}\right\|^{np}\right)^{\frac{1}{np}}\right]\|(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p'},
\end{aligned}
$$

o que mostra que o operador $\psi^{(1)}\otimes\cdots\otimes\psi^{(n)}\otimes y$ é Cohen fortemente $p$-somante. Assim, dado um operador $A$ da forma

$$
A=\sum_{j=1}^{m}\psi^{(1)}\otimes\cdots\otimes\psi^{(n)}\otimes y,
$$

temos que $A$ é cohen fortemente $p$-somante, pois $\mathcal{L}_{Coh,p}(E_1,\ldots,E_n;F)$ é um espaço vetorial. $\square$

**Observação 4.2.4.** *Segue imediatamente da demostração do teorema acima que*

$$
\left\|\psi^{(1)}\otimes\cdots\otimes\psi^{(n)}\otimes y\right\|_{Coh,p}\leq\left\|\psi^{(1)}\right\|\cdots\left\|\psi^{(n)}\right\|\cdot\|y\|=\left\|\psi^{(1)}\otimes\cdots\otimes\psi^{(n)}\otimes y\right\|.
$$

*Por outro lado,* $\|\cdot\|\leq\|\cdot\|_{Coh,p}$ *e como*

$$
\left\|\psi^{(1)}\otimes\cdots\otimes\psi^{(n)}\otimes y\right\|=\left\|\psi^{(1)}\right\|\cdots\left\|\psi^{(n)}\right\|\cdot\|y\|,
$$

*a igualdade segue.*

**Proposição 4.2.5.** *Para todo* $1<p\leq\infty$ *e* $n\in\mathbb{N}$, $\left(\mathcal{L}^n_{Coh,p},\|\cdot\|_{Coh,p}\right)$ *é um ideal normado de operadores* $n$*-lineares.*

*Demonstração.* (**Ma**) Já sabemos que a componente $\mathcal{L}_{Coh,p}(E_1,\ldots,E_n;F)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F)$ (Proposição 3.1.11) que contém as aplicações $n$-lineares de tipo finito (Proposição 4.2.3).

(**Mb**) Para provar a propriedade do ideal, sejam $u_l\in\mathcal{L}(H_l;E_l)$, $l=1,\ldots,n$, $T\in\mathcal{L}_{Coh,p}(E_1,\ldots,E_n;F)$ e $u\in\mathcal{L}(F,F_0)$. Para cada $m\in\mathbb{N}$ e todos $x_i^{(l)}\in H_l$, $\varphi_i\in F_0'$, $i=1,\ldots,m$, então

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m}\left|\varphi_i\left(u\circ T\circ(u_1,\ldots,u_n)\right)\left(x_i^{(1)},\ldots,x_i^{(n)}\right)\right|\\
&\quad = \quad \sum_{i=1}^{m}\left|(\varphi_i\circ u)\left(T\left(u_1\left(x_i^{(1)}\right),\ldots,u_n\left(x_i^{(n)}\right)\right)\right)\right|\\
&\quad \leq \quad \|T\|_{Coh,p}\left(\sum_{i=1}^{m}\left\|u_1\left(x_i^{(1)}\right)\right\|^{np}\right)^{\frac{1}{np}}\cdots\left(\sum_{i=1}^{m}\left\|u_n\left(x_i^{(n)}\right)\right\|^{np}\right)^{\frac{1}{np}}\|(\varphi_i\circ u)_{i=1}^{m}\|_{w,p'}\\
&\quad \leq \quad \|T\|_{Coh,p}\cdot\|u_1\|\cdots\|u_n\|\cdot\left\|\left(x_i^{(1)}\right)_{i=1}^{m}\right\|_{np}\cdots\left\|\left(x_i^{(n)}\right)_{i=1}^{m}\right\|_{np}\cdot\|(\varphi_i\circ u)_{i=1}^{m}\|_{w,p'}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\overset{\text{Obs 4.1.7}}{\leq} && \|T\|_{Coh,p} \cdot \|u_1\| \cdots \|u_n\| \cdot \left\| \left( x_i^{(1)} \right)_{i=1}^m \right\|_{np} \cdots \left\| \left( x_i^{(n)} \right)_{i=1}^m \right\|_{np} \cdot \|u\| \cdot \|(\varphi_i)_{i=1}^m\|_{w,p'} \\
&= && \|u\| \cdot \|T\|_{Coh,p} \cdot \|u_1\| \cdots \|u_n\| \cdot \left\| \left( x_i^{(1)} \right)_{i=1}^m \right\|_{np} \cdots \left\| \left( x_i^{(n)} \right)_{i=1}^m \right\|_{np} \cdot \|(\varphi_i)_{i=1}^m\|_{w,p'} \\
&= && C \left\| \left( x_i^{(1)} \right)_{i=1}^m \right\|_{np} \cdots \left\| \left( x_i^{(n)} \right)_{i=1}^m \right\|_{np} \cdot \|(\varphi_i)_{i=1}^m\|_{w,p'}
\end{aligned}$$

mostrando que

$$u \circ T \circ (u_1, \ldots, u_n) \in \mathcal{L}(H_1, \ldots, H_n; F_0)$$

e que

$$\|u \circ T(u_1, \ldots, u_n)\|_{Coh,p} \leq \|u\| \cdot \|T\|_{Coh,p} \cdot \|u_1\| \cdots \|u_n\|. \tag{4.4}$$

(**M1**) Na Proposição 3.1.12 foi mostrado que $\|T\|_{Coh,p}$, quando restrita à componente $\mathcal{L}_{Coh,p}(E_1, \ldots, E_n; F)$, é uma norma para todo $n \in \mathbb{N}$ e quaisquer espaços de Banach $E_1, \ldots, E_n, F$.

(**M2**) Já sabemos que $\left\|\psi^{(1)} \otimes \cdots \otimes \psi^{(n)} \otimes y\right\|_{Coh,p} = \left\|\psi^{(1)}\right\| \cdots \left\|\psi^{(n)}\right\| \cdot \|y\|$ (veja Observação 4.2.4). Como $I_n = id_{\mathbb{K}} \otimes \cdots \otimes id_{\mathbb{K}} \otimes 1$, então

$$\|I_n\|_{Coh,p} = \|id_{\mathbb{K}} \otimes \cdots \otimes id_{\mathbb{K}} \otimes 1\|_{Coh,p} = \|id_{\mathbb{K}}\| \cdots \|id_{\mathbb{K}}\| \cdot \|1\| = 1.$$

(**M3**) Veja a desigualdade (4.4). □

**Proposição 4.2.6.** *Para todo $1 < p \leq \infty$ e $n \in \mathbb{N}$, $(\mathcal{L}^n_{Coh,p}, \|\cdot\|_{Coh,p})$ é um ideal de Banach de operadores $n$-lineares.*

*Demonstração.* Seja $(T_k)_{k=1}^\infty$ em $(\mathcal{L}_{Coh,p}(E_1, \ldots, E_n; F), \|\cdot\|_{Coh,p})$ uma sequência de Cauchy. Como $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_{Coh,p}$ (veja Lema 3.1.13), então $(T_k)_{k=1}^\infty$ é de Cauchy em $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Como $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ é Banach, então

$$\lim_{k \to \infty} T_k = T \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F). \tag{4.5}$$

Por outro lado, $T_k$ é um operador multilinear Cohen fortemente $p$-somante e o operador induzido $\widehat{T}_k$ está bem definido para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $\left\|\widehat{T}_k\right\| = \|T_k\|_{Coh,p}$ (veja Proposição 3.1.12), então $\left(\widehat{T}_k\right)_{k=1}^\infty$ é de Cauchy em $\mathcal{L}\left(\ell_{np}(E_1), \ldots, \ell_{np}(E_n); \ell_p\langle F\rangle\right)$ e, portanto,

$$\lim_{k \to \infty} \widehat{T}_k = A \in \mathcal{L}(\ell_{np}(E_1), \ldots, \ell_{np}(E_n); \ell_p\langle F\rangle).$$

Para todo $\left(\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^\infty, \ldots, \left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^\infty\right) \in \ell_{np}(E_1) \times \cdots \times \ell_{np}(E_n)$, defina

$$(y_j)_{j=1}^\infty := \left(A\left(x_j^{(1)}, \ldots, x_j^{(n)}\right)\right)_{j=1}^\infty \in \ell_p\langle F\rangle.$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $k > k_0$, então $\left\|\widehat{T}_k - A\right\| < \varepsilon$. Daí,

$$\left\|T_k\left(x_j^{(1)}, \ldots, x_j^{(n)}\right) - y_j\right\|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left\| \left( T_k \left( x_j^{(1)}, \ldots, x_j^{(n)} \right) \right)_{j=1}^{\infty} - (y_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{C,p} \\
&= \left\| \widehat{T_k} \left( \left( x_j^{(1)} \right)_{j=1}^{\infty}, \ldots, \left( x_j^{(n)} \right)_{j=1}^{\infty} \right) - A \left( \left( x_j^{(1)} \right)_{j=1}^{\infty}, \ldots, \left( x_j^{(n)} \right)_{j=1}^{\infty} \right) \right\|_{C,p} \\
&\leq \left\| \widehat{T_k} - A \right\| \cdot \left\| \left( x_j^{(1)} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{np} \cdots \left\| \left( x_j^{(n)} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{np} \\
&\leq \varepsilon \left\| \left( x_j^{(1)} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{np} \cdots \left\| \left( x_j^{(n)} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{np}
\end{aligned}
$$

ou seja, $\lim_{k\to\infty} T_k\big(x_j^{(1)}, \ldots, x_j^{(n)}\big) = y_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Disto e de (4.5), temos que

$$
T \left( x_j^{(1)}, \ldots, x_j^{(n)} \right) = y_j,
$$

para todo $j \in \mathbb{N}$, onde

$$
\left( T \left( x_j^{(1)}, \ldots, x_j^{(n)} \right) \right)_{j=1}^{\infty} = (y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p\langle F \rangle,
$$

e, portanto, o operador $\widehat{T} : \ell_{np}(E_1) \times \cdots \times \ell_{np}(E_n) \to \ell_p\langle F \rangle$ está bem definido o que mostra que $T \in \mathcal{L}_{Coh,p}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Basta notar que $\left\| \widehat{T_k} - A \right\| = \|T_k - T\|_{Coh,p}$ para mostrar que $T_k \to T$ na norma $\| \cdot \|_{Coh,p}$. $\square$

### 4.2.2 Ideal de operadores múltiplo Cohen fortemente $p$-somantes

**Proposição 4.2.7.** *Para todo $1 < p \leq \infty$ e $n \in \mathbb{N}$, $(\mathcal{L}^n_{mCoh,p}, \| \cdot \|_{mCoh,p})$ é um ideal de Banach de operadores $n$-lineares.*

*Demonstração.* (**Ma**) Pela Proposição 3.3.3, as componentes $\mathcal{L}_{mCoh,p}(E_1, \ldots, E_n; F)$ são espaços vetoriais quaisquer que sejam $n \in \mathbb{N}$ e espaços de Banach $E_1, \ldots, E_n$ e $F$. Já mostramos que todo operadoror de tipo finito é Cohen fortemente $p$-somante. Isto posto, pela Proposição 3.3.6, os operadores de tipo finito são múltiplo Cohen fortemente $p$-somantes.

(**Mb**) Para mostrar a propriedade do ideal, sejam $u_i \in \mathcal{L}(H_i, E_i)$, $i = 1, \ldots, n$, $T \in \mathcal{L}_{mCoh,p}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $u \in \mathcal{L}(F; G)$. Para todo $m \in \mathbb{N}$, se $\varphi_{j_1,\ldots,j_n} \in G'$ e $x_j^{(i)} \in H_i$, $i = 1, \ldots, n$, $j_i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, m$, então

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m} \left| \varphi_{j_1,\ldots,j_n} \left( u \circ T \circ (u_1, \ldots, u_n) \right) \left( x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_n}^{(n)} \right) \right| \\
&= \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m} \left| (\varphi_{j_1,\ldots,j_n} \circ u) \left( T \left( u_1 \left( x_{j_1}^{(1)} \right), \ldots, u_n \left( x_{j_n}^{(n)} \right) \right) \right) \right| \\
&\leq \|T\|_{mCoh,p} \left( \prod_{i=1}^{n} \left\| \left( u_i \left( x_j^{(i)} \right) \right)_{j=1}^{m} \right\|_p \right) \|(\varphi_{j_1,\ldots,j_n} \circ u)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m}\|_{w,p'}
\end{aligned}
$$

$$\leq \quad \|T\|_{mCoh,p} \cdot \|u\| \cdot \|u_1\| \cdots \|u_n\| \left( \prod_{i=1}^{n} \left\| \left( x_j^{(i)} \right)_{j=1}^{m} \right\|_p \right) \|(\varphi_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m}\|_{w,p'}.$$

Portanto, a composição $u \circ T \circ (u_1, \ldots, u_n)$ pertence a $\mathcal{L}_{mCoh,p}(H_1, \ldots, H_n; G)$ e

$$\|u \circ T \circ (u_1, \ldots, u_n)\|_{mCoh,p} \leq \|u\| \cdot \|T\|_{mCoh,p} \cdot \|u_1\| \cdots \|u_n\|. \tag{4.6}$$

(**M1**) Já mostramos na Proposição 3.3.4.

(**M2**) Como $\|I_n\| = 1$ e $\|T\| \leq \|T\|_{mCoh,p}$ (veja Lema 3.3.5), temos que

$$\|I_n\|_{mCoh,p} \geq 1.$$

Por outro lado, como $\mathcal{L}_{Coh,p}$ é um ideal, então $\|I_n\|_{Coh,p} = 1$ e como $\|\cdot\|_{mCoh,p} \leq \|\cdot\|_{Coh,p}$ (veja Proposição 3.3.6) resulta que $\|I_n\|_{mCoh,p} \leq 1$. Daí, a igualdade segue.

(**M3**) Veja a desigualdade (4.6). □

Mostrar que $\mathcal{L}^n_{mCoh,p}$ com a norma $\|\cdot\|_{mCoh,p}$ é um ideal de Banach é feito de forma análoga ao que foi feito na demonstração da Proposição 4.2.6 e por isto esta será omitida.

**Proposição 4.2.8.** *Seja $1 < p \leq \infty$ e $n \in \mathbb{N}$. Então $\mathcal{L}^n_{mCoh,p}$ com a norma $\|\cdot\|_{mCoh,p}$ é um ideal de Banach de operadores $n$-lineares.*

## 4.3 Ideais de polinômios $n$-homogêneos

Baseado na noção de ideais de aplicações multilineares temos como consequência natural a definição do conceito de ideais de polinômios.

**Definição 4.3.1.** Um *ideal de polinômios homogêneos*, ou simplesmente um *ideal de polinômios*, é uma subclasse $\mathcal{U}$ da classe de todos os polinômios homogêneos contínuos entre espaços de Banach tal que as suas componentes

$$\mathcal{U}(^nE; F) := \mathcal{P}(^nE; F) \cap \mathcal{U},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e todos os espaços de Banach $E$ e $F$, satisfazem:

(**Pa**) $\mathcal{U}(^nE; F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}(^nE; F)$ que contém os polinômios $n$-homogêneos de tipo finito;

(**Pb**) A propriedade de ideal: se $u \in \mathcal{L}(G; E)$, $P \in \mathcal{U}(^nE; F)$ e $t \in \mathcal{L}(F; H)$ então a composição $t \circ P \circ u$ pertence a $\mathcal{U}(^nG; H)$.

Se $n \in \mathbb{N}$ for fixado,

$$\mathcal{U}_n := \bigcup_{E,F \text{ Banach}} \mathcal{U}(^nE;F)$$

é chamado de ideal de polinômios $n$-homogêneos.

**Definição 4.3.2.** Um *ideal normado de polinômios* $(\mathcal{U}, \|\cdot\|_{\mathcal{U}})$ é um ideal de polinômios $\mathcal{U}$ munido da função $\|\cdot\|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \longrightarrow [0,\infty)$, tal que:

(**P1**) $\|\cdot\|_{\mathcal{U}}$ restrita a $\mathcal{U}(^nE;F)$ é uma norma para todos espaços de Banach $E$ e $F$ e todo $n \in \mathbb{N}$;

(**P2**) $\|id_{\mathbb{K}}^n\|_{\mathcal{U}} = 1$, onde $id_{\mathbb{K}}^n : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ é dada por $id_{\mathbb{K}}^n(x) = x^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

(**P3**) Se $u \in \mathcal{L}(G,E)$, $P \in \mathcal{U}(^nE;F)$, e $t \in \mathcal{L}(F,H)$, então

$$\|t \circ P \circ u\|_{\mathcal{U}} \leq \|t\| \cdot \|P\|_{\mathcal{U}} \cdot \|u\|^n.$$

Além disso, se todas as componentes $\mathcal{U}(^nE;F)$ são subespaços completos relativamente à norma $\|\cdot\|_{\mathcal{U}}$, dizemos que $\mathcal{U}$ é ideal de Banach de polinômios. De modo análogo se procede para $\mathcal{U}_n$.

A classe de todos os polinômios $n$-homogêneos contínuos entre espaços de Banach será denotada por $\mathcal{P}^n$.

Existem formas de construir ideais de aplicações multilineares ou ideais de polinômios a partir de um ideal de operadores $\mathcal{I}$. A seguir, iremos mostrar uma maneira de gerar um ideal de polinômios através de um ideal de aplicações multilineares [3].

**Definição 4.3.3.** Seja $\mathcal{M}$ um ideal normado de aplicações multilineares. A classe

$$\mathcal{P}_{\mathcal{M}} = \left\{P \in \mathcal{P}^n; \check{P} \in \mathcal{M}, n \in \mathbb{N}\right\},$$

com $\|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} := \left\|\check{P}\right\|_{\mathcal{M}}$, é chamada de *ideal de polinômios gerado pelo ideal* $\mathcal{M}$.

A proposição a seguir mostra que $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ é de fato um ideal de polinômios.

**Proposição 4.3.4.** *Seja $\mathcal{M}$ um ideal de Banach de aplicações multilineares. Então $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ é um ideal de Banach de polinômios.*

*Demonstração.* Sejam $E, F$ espaços de Banach, $P_1, P_2 \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^nE;F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Como, por definição, $\check{P}_1, \check{P}_2 \in \mathcal{M}(^nE;F)$ que é um ideal, então

$$(P_1 + \lambda P_2)^{\vee} = \check{P}_1 + \lambda\check{P}_2 \in \mathcal{M}(^nE;F)$$

[3]Para mais detalhes veja [Be08].

e, portanto,

$$P_1 + \lambda P_2 \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^nE;F),$$

o que mostra que $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^nE;F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}(^nE;F)$.

Dado $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$ de tipo finito, usando a Fórmula de Polarização, obtemos que $\check{P}$ é de tipo finito e consequentemente está em $\mathcal{M}$. Assim, $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^nE;F)$ contém os operadores de tipo finito.

Para verificar a propriedade de ideal, sejam $u \in \mathcal{L}(G;E)$, $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^nE;F)$ e $t \in \mathcal{L}(F;H)$. Como $t \circ \check{P} \circ (u,\ldots,u)$ e $(t \circ P \circ u)^{\vee}$ são aplicações simétricas tais que

$$t \circ \check{P} \circ (u,\ldots,u)(x,\ldots,x) = t \circ \check{P}(u(x),\ldots,u(x)) = t \circ P \circ u(x) = (t \circ P \circ u)^{\vee}(x,\ldots,x),$$

então

$$(t \circ P \circ u)^{\vee} = t \circ \check{P} \circ (u,\ldots,u) \in \mathcal{M}(^nE;F), \tag{4.7}$$

pois $\mathcal{M}$ é multi-ideal, o que mostra que vale a propriedade de ideal, isto é,

$$t \circ P \circ u \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^nG;H).$$

Vamos verificar que $\|\cdot\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}}$ restrita a $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^nE;F)$ é uma norma:

$(N1)$ Seja $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^nE;F)$. Por definição, $\|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} = \left\|\check{P}\right\|_{\mathcal{M}}$. Como $\left\|\check{P}\right\|_{\mathcal{M}} \geq 0$ e $\left\|\check{P}\right\|_{\mathcal{M}} = 0$ se, e somente se, $P = 0$, a condição segue.

$(N2)$ Dados $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^nE;F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, então

$$\|\lambda P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} = \|(\lambda P)^{\vee}\|_{\mathcal{M}} = \left\|\lambda \check{P}\right\|_{\mathcal{M}} = |\lambda| \cdot \left\|\check{P}\right\|_{\mathcal{M}} = |\lambda| \cdot \|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}}.$$

$(N3)$ Dados $P, Q \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^nE;F)$, então

$$\|P+Q\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} = \|(P+Q)^{\vee}\|_{\mathcal{M}} = \left\|\check{P} + \check{Q}\right\|_{\mathcal{M}} \leq \left\|\check{P}\right\|_{\mathcal{M}} + \left\|\check{Q}\right\|_{\mathcal{M}} = \|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} + \|Q\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}}.$$

Portanto, $\|\cdot\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}}$ restrita a $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^nE;F)$ é uma norma.

Mostraremos agora que $\|id_{\mathbb{K}}^n\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} = 1$. Para isto, basta notar que $(id_{\mathbb{K}}^n)^{\vee} = I_n$ e disto,

$$\|id_{\mathbb{K}}^n\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} = \|I_n\|_{\mathcal{M}} = 1.$$

Sejam $u \in \mathcal{L}(G;E)$, $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^nE;F)$ e $t \in \mathcal{L}(F;H)$. Logo,

$$\begin{aligned}\|t \circ P \circ u\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} &= \|(t \circ P \circ u)^{\vee}\|_{\mathcal{M}} \\ &\overset{(4.7)}{=} \left\|t \circ \check{P} \circ (u,\ldots,u)\right\|_{\mathcal{M}} \leq \|t\| \cdot \left\|\check{P}\right\|_{\mathcal{M}} \cdot \|u\|^n = \|t\| \cdot \|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} \cdot \|u\|^n.\end{aligned}$$

Como $\mathcal{M}$ é um ideal de Banach e a função

$$^{\vee} : \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^nE;F) \to \mathcal{M}(^nE;F) \text{ dada por } ^{\vee}(P) = \check{P}$$

é uma isometria linear sobre a imagem, para mostrar que $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^nE;F)$ é um espaço de Banach, basta mostrar que $^{\vee}(\mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^nE;F))$ é fechado em $\mathcal{M}(^nE;F)$: se

$$\lim_{k\to\infty} {}^{\vee}(P_k) = A \in \mathcal{M}(^nE;F)$$

na norma de $\mathcal{M}$, então $\left\|\check{P}_k - A\right\|_{\mathcal{M}} \to 0$, e como $\|\cdot\| \le \|\cdot\|_{\mathcal{M}}$, segue que $\left\|\check{P}_k - A\right\| \to 0$. Sabendo que $\mathcal{L}_s(^nE;F)$ é fechado em $\mathcal{L}(^nE;F)$ ([Be08, pág, 24]), segue que $A \in \mathcal{L}_s(^nE;F)$. Logo, $\widehat{A} \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^nE;F)$, pois $\left(\widehat{A}\right)^{\vee} = A \in \mathcal{M}(^nE;F)$. Portanto, $A = {}^{\vee}\left(\widehat{A}\right) \in {}^{\vee}(\mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^nE;F))$ e segue que $^{\vee}(\mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^nE;F))$ é fechada. Portanto, $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ é um ideal de Banach de polinômios. □

**Proposição 4.3.5.** *Se $1 < p \le \infty$ e $n \in \mathbb{N}$, então $(\mathcal{P}^n_{Coh,p}, \|\cdot\|_{Coh,p})$ é um ideal de Banach de polinômios $n$-homogêneos.*

*Demonstração.* Já mostramos que um polinômio $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$ é Cohen fortemente $p$-somante se, e somente se, $\check{P} \in \mathcal{L}_s(^nE;F)$ é Cohen fortemente $p$-somante (Lema 3.2.9). Já mostramos também que para todo $1 < p \le \infty$ e $n \in \mathbb{N}$, $(\mathcal{L}^n_{Coh,p}, \|\cdot\|_{Coh,p})$ é um ideal de Banach de operadores $n$-lineares (Proposição 4.2.6). Daí, pela Proposição 4.3.4, $(\mathcal{P}^n_{Coh,p}, \|\cdot\|_{Coh,p})$ é um ideal de Banach de polinômios $n$-homogêneos. □

**Definição 4.3.6.** A classe dos polinômios $n$-homogêneos múltiplo Cohen fortemente $p$-somantes será dada por

$$\mathcal{P}^n_{mCoh,p} := \{P \in \mathcal{P}^n; \check{P} \in \mathcal{L}^n_{mCoh,p}\}.$$

A norma em $\mathcal{P}^n_{mCoh,p}$ será dada por

$$\|P\|_{\mathcal{P}_{mCoh,p}} = \|\check{P}\|_{mCoh,p}.$$

Pela Proposição (4.3.4), temos que $(\mathcal{P}^n_{mCoh,p}, \|\cdot\|_{\mathcal{P}_{mCoh,p}})$ é um ideal (de Banach) de polinômios gerado pelo ideal $\mathcal{L}_{mCoh,p}$.

# CAPÍTULO 5

## Coerência e Compatibilidade

Dado um ideal de operadores lineares $\mathcal{I}$, podem existir vários ideais de aplicações multilineares e de polinômios associados ao ideal $\mathcal{I}$. Uma pergunta natural é se o ideal multilinear é uma boa extensão do ideal de aplicações lineares. Neste capítulo, iremos apresentar o critério para pares de ideais segundo a abordagem apresentada por Pellegrino e Ribeiro [PR14] e mostrar que os ideais de polinômios e de aplicações multilineares Cohen fortemente $p$-somantes e múltiplo Cohen fortemente $p$-somantes atendem a este critério de bom comportamento.

Vejamos agora uma forma de obter uma aplicação $(n-1)$-linear contínua através de uma aplicação $n$-linear contínua.

**Definição 5.0.1.** Dados $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $a_k \in E_k$, o operador

$$A_{a_k} \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_{k-1}, E_{k+1}, \ldots, E_n; F)$$

é definido fixando-se o elemento $a_k$ na $k$-ésima coordenada. O operador $A_{a_1,\ldots,a_{k-1},a_{k+1},\ldots,a_n} \in \mathcal{L}(E_k; F)$ é definido por

$$A_{a_1,\ldots,a_{k-1},a_{k+1},\ldots,a_n}(x) = A(a_1, \ldots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \ldots, a_n).$$

**Lema 5.0.2.** *Seja $j \in \{1, \ldots, n+1\}$. Se $A \in \mathcal{L}_{n+1}(E_1, \ldots, E_{n+1}; F)$ e $a_j \in E_j$, então $A_{a_j}$ pertence a $\mathcal{L}_n(E_1, \ldots, E_{j-1}, E_{j+1}, \ldots, E_{n+1}; F)$ e*

$$\left\|A_{a_j}\right\|_{\mathcal{L}_n} \leq \|A\|_{\mathcal{L}_{n+1}} \cdot \|a_j\|.$$

*Demonstração.* Veja [Ri11, Lema 2.1.8]. □

O próximo resultado a ser apresentado mostra que dado um operador $n$-linear contínuo é possível, multiplicando este operador por um funcional linear, obter um operador $(n+1)$-linear contínuo.

**Definição 5.0.3.** Dados $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $\gamma \in E'_{n+1}$, o operador

$$\gamma A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n, E_{n+1}; F)$$

é definido como

$$\begin{array}{rccl} \gamma A: & E_1 \times \cdots \times E_{n+1} & \to & F \\ & (x_1, \ldots, x_{n+1}) & \mapsto & (\gamma A)(x_1, \ldots, x_{n+1}) := \gamma(x_{n+1}) A(x_1, \ldots, x_n) \end{array}.$$

**Lema 5.0.4.** *Se $A \in \mathcal{L}_n(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $\gamma \in E'_{n+1}$, então $\gamma A \in \mathcal{L}_{n+1}(E_1, \ldots, E_{n+1}; F)$ e*

$$\|\gamma A\|_{\mathcal{L}_{n+1}} \leq \|\gamma\| \cdot \|A\|_{\mathcal{L}_n}.$$

*Demonstração.* Veja [Ri11, Lema 2.1.10]. □

**Definição 5.0.5.** Dados $P \in \mathcal{P}(^n E; F)$, $a \in E$ e $0 < k < n$, definimos o polinômio $P_{a^k}(^{n-k}E; F)$ por

$$P_{a^k}(x) = \check{P}\left(a^k, x^{n-k}\right) = \check{P}\left(\overbrace{a, \ldots, a}^{k}, \overbrace{x, \ldots, x}^{n-k}\right),$$

e dizemos que o polinômio $P_{a^k}$ é obtido de $P$ fixando $k$ variáveis iguais a $a$. Para $k = 1$, escrevemos $P_a$ em vez de $P_{a^1}$.

**Lema 5.0.6.** *Para cada $P \in \mathcal{P}_{n+1}(^{n+1}E; F)$ e $a \in E$, $P_a$ pertence a $\mathcal{P}_n(^n E; F)$ e*

$$\|P_a\|_{\mathcal{P}_n} \leq \left\|\check{P}\right\|_{\mathcal{L}_{k+1}} \cdot \|a\|.$$

*Demonstração.* Veja [Ri11, Lema 2.1.7]. □

No lema anterior, temos um método de obter um polinômio $(n-1)$-homogêneo contínuo partindo de um polinômio $n$-homogêneo contínuo. É possível também obter um polinômio $(n+1)$-homogêneo através de um polinômio $n$-homogêneo contínuo e, para isto, basta multiplicar o polinômio por um funcional linear como mostra o próximo resultado.

**Lema 5.0.7.** *Se $P$ pertence a $\mathcal{P}_n(^n E; F)$ e $\gamma \in E'$, então $\gamma P$ pertence a $\mathcal{P}_{n+1}(^{n+1}E; F)$ e*

$$\|\gamma P\|_{\mathcal{P}_{n+1}} \leq \|\gamma\| \cdot \|P\|_{\mathcal{P}_n}.$$

*Demonstração.* Veja [Ri11, Lema 2.1.9]. □

O resultado a seguir é uma aplicação direta da Fórmula da Polarização.

**Lema 5.0.8.** *Se $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$ e $a \in E$, então $(P_a)^\vee = \check{P}_a$.*

*Demonstração.* Se $P, Q \in \mathcal{P}(^nE;F)$ e $\check{P}(x,\ldots,x) = \check{Q}(x,\ldots,x)$ para todo $x \in E$, então $\check{P} = \check{Q}$. De fato, por (3.7), temos que

$$\begin{aligned}
\check{P}(x_1,\ldots,x_n) &= \frac{1}{2^n n!}\sum_{\varepsilon=\pm 1}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n P\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i\right)\\
&= \frac{1}{2^n n!}\sum_{\varepsilon=\pm 1}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n Q\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i\right)\\
&= \check{Q}(x_1,\ldots,x_n).
\end{aligned}$$

Como

$$(P_a)^\vee(x,\ldots,x) = \check{P}(a,x,\ldots,x) = \check{P}_a(x,\ldots,x),$$

concluímos a demonstração. □

De agora em diante $(\mathcal{U}_n,\mathcal{M}_n)_{n=1}^N$ é uma $N$-upla de pares, onde cada $\mathcal{U}_n$ é um ideal normado de polinômios $n$-homogêneos e cada $\mathcal{M}_n$ é um ideal normado de aplicações $n$-lineares. O parâmetro $N$ pode ser eventualmente infinito.

**Definição 5.0.9** (Par de ideais compatíveis)**.** Sejam $\mathcal{I}$ um ideal normado de operadores e $N \in (\mathbb{N}\setminus\{1\})\cup\{\infty\}$. Uma sequência $(\mathcal{U}_n,\mathcal{M}_n)_{n=1}^N$, onde $\mathcal{U}_1 = \mathcal{M}_1 = \mathcal{I}$, é compatível com $\mathcal{I}$ se existem constantes positivas $\alpha_1, \alpha_2$ e $\alpha_3$ tais que para quaisquer espaços de Banach $E, E_1,\ldots,E_n$ e $F$, as seguintes condições são verdadeiras para todo $n \in \{2,\ldots,N\}$:

(**CP1**) Se $k \in \{1,\ldots,n\}$, $T \in \mathcal{M}_n(E_1,\ldots,E_n;F)$ e $a_j \in E_j$ para todo $j \in \{1,\ldots,n\}\setminus\{k\}$, então

$$T_{a_1,\ldots,a_{k-1},a_{k+1},\ldots,a_n} \in \mathcal{I}(E_k;F)$$

e

$$\|T_{a_1,\ldots,a_{k-1},a_{k+1},\ldots,a_n}\|_{\mathcal{I}} \le \alpha_1\|T\|_{\mathcal{M}_n}\cdot\|a_1\|\cdots\|a_{k-1}\|\cdot\|a_{k+1}\|\cdots\|a_n\|;$$

(**CP2**) Se $P \in \mathcal{U}_n(^nE;F)$ e $a \in E$, então $P_{a^{n-1}} \in \mathcal{I}(E;F)$ e

$$\|P_{a^{n-1}}\|_{\mathcal{I}} \le \alpha_2 \max\left\{\left\|\check{P}\right\|_{\mathcal{M}_n}, \|P\|_{\mathcal{U}_n}\right\}\|a\|^{n-1};$$

(**CP3**) Se $u \in \mathcal{I}(E_n;F)$ e $\gamma_j \in E_j'$ para todo $j = 1,\ldots,n-1$, então

$$\gamma_1\cdots\gamma_{n-1}u \in \mathcal{M}_n(E_1,\ldots,E_n;F)$$

e

$$\|\gamma_1\cdots\gamma_{n-1}u\|_{\mathcal{M}_n} \le \alpha_3\|\gamma_1\|\cdots\|\gamma_{n-1}\|\cdot\|u\|_{\mathcal{I}};$$

(**CP4**) Se $u \in \mathcal{I}(E;F)$ e $\gamma \in E'$, então

$$\gamma^{n-1}u \in \mathcal{U}_n\left({}^nE;F\right);$$

(**CP5**) $P$ pertence a $\mathcal{U}_n({}^nE;F)$ se, e somente se, $\check{P}$ pertence a $\mathcal{M}_n({}^nE;F)$.

Note que as constantes positivas $\alpha_1, \alpha_2$ e $\alpha_3$ não dependem do grau de linearidade dos ideais.

**Definição 5.0.10** (Par de ideais coerentes)**.** Sejam $\mathcal{I}$ um ideal normado de operadores e $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Uma sequência $(\mathcal{U}_n, \mathcal{M}_n)_{n=1}^N$, onde $\mathcal{U}_1 = \mathcal{M}_1 = \mathcal{I}$, é *coerente* se existem constantes positivas $\beta_1, \beta_2$ e $\beta_3$ tais que para quaisquer espaços de Banach $E_1, \ldots, E_n$ e $F$ as seguintes condições são satisfeitas para $n = 1, \ldots, N-1$:

(**CH1**) Se $T \in \mathcal{M}_{n+1}(E_1, \ldots, E_{n+1}; F)$ e $a_j \in E_j$ para $j = 1, \ldots, n+1$, então

$$T_{a_j} \in \mathcal{M}_n(E_1, \ldots, E_{j-1}, E_{j+1}, \ldots, E_{n+1}; F)$$

e

$$\|T_{a_j}\|_{\mathcal{M}_n} \leq \beta_1 \|T\|_{\mathcal{M}_{n+1}} \cdot \|a_j\|;$$

(**CH2**) Se $P \in \mathcal{U}_{n+1}\left({}^{n+1}E;F\right)$ e $a \in E$, então $P_a \in \mathcal{U}_n\left({}^nE;F\right)$ e

$$\|P_a\|_{\mathcal{U}_n} \leq \beta_2 \max\left\{\left\|\check{P}\right\|_{\mathcal{M}_{n+1}}, \|P\|_{\mathcal{U}_{n+1}}\right\} \|a\|;$$

(**CH3**) Se $T \in \mathcal{M}_n(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $\gamma \in E'_{n+1}$, então

$$\gamma T \in \mathcal{M}_{n+1}(E_1, \ldots, E_{n+1}; F) \text{ e } \|\gamma T\|_{\mathcal{M}_{n+1}} \leq \beta_3 \|\gamma\| \cdot \|T\|_{\mathcal{M}_n};$$

(**CH4**) Se $P \in \mathcal{U}_n\left({}^nE;F\right)$ e $\gamma \in E'$, então

$$\gamma P \in \mathcal{U}_{n+1}\left({}^{n+1}E;F\right);$$

(**CH5**) $P$ pertence a $\mathcal{U}_n\left({}^nE;F\right)$ se, e somente se, $\check{P}$ pertence a $\mathcal{M}_n\left({}^nE;F\right)$ para todo $n = 1, \ldots, N$.

Uma sequência coerente $(\mathcal{U}_n, \mathcal{M}_n)_{n=1}^N$ não é necessariamente compatível com o ideal $\mathcal{I}$. Porém, restringindo as constantes $\beta_1, \beta_2$ e $\beta_3$, coerência pode implicar compatibilidade. Um caso mais direto de quando isto acontece é quando $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$.

**Proposição 5.0.11.** *Se a sequência* $(\mathcal{U}_n, \mathcal{M}_n)_{n=1}^N$ *é coerente, com constantes* $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$*, então é compatível com o ideal* $\mathcal{U}_1 = \mathcal{M}_1 = \mathcal{I}$.

*Demonstração.* Seja $T \in \mathcal{M}_n(E_1, \ldots, E_n; F)$. Como $(\mathcal{U}_n, \mathcal{M}_n)_{n=1}^N$ é coerente, por (CH1), temos que

$$T_{a_1} \in \mathcal{M}_{n-1}(E_2, \ldots, E_n; F)$$

e

$$\|T_{a_1}\|_{\mathcal{M}_{n-1}} \leq \|T\|_{\mathcal{M}_n} \cdot \|a_1\|.$$

Pelo mesmo argumento, segue que

$$T_{a_1 a_2} \in \mathcal{M}_{n-2}(E_3, \ldots, E_n; F)$$

e

$$\|T_{a_1 a_2}\|_{\mathcal{M}_{n-2}} \leq \|T\|_{\mathcal{M}_{n-1}} \cdot \|a_2\| \leq \|T\|_{\mathcal{M}_n} \cdot \|a_1\| \cdot \|a_2\|.$$

Prosseguindo desta forma, obtemos a propriedade (CP1).

Obteremos agora a propriedade (CP2). Seja $P \in \mathcal{U}_n(^n E; F)$ e $a \in E$. Assim, pela propriedade (CH2), temos que $P_a \in \mathcal{U}_{n-1}\left(^{n-1}E; F\right)$ e

$$\|P_a\|_{\mathcal{U}_{n-1}} \leq \max\left\{\left\|\check{P}\right\|_{\mathcal{M}_n}, \|P\|_{\mathcal{U}_n}\right\} \|a\|.$$

Novamente pela propriedade (CH2), temos que $P_{a^2} = (P_a)_a \in \mathcal{U}_{n-2}\left(^{n-2}E; F\right)$ e

$$\|P_{a^2}\|_{\mathcal{U}_{n-2}} \leq \max\left\{\|(P_a)^\vee\|_{\mathcal{M}_{n-1}}, \|P_a\|_{\mathcal{U}_{n-1}}\right\} \|a\|.$$

Agora, note que

$$\begin{array}{rcl} \|(P_a)^\vee\|_{\mathcal{M}_{n-1}} & \overset{\text{Lema 5.0.8}}{=} & \left\|\check{P}_a\right\|_{\mathcal{M}_{n-1}} \\ & \overset{\text{(CH1)}}{\leq} & \left\|\check{P}\right\|_{\mathcal{M}_n} \cdot \|a\| \\ & \leq & \max\left\{\left\|\check{P}\right\|_{\mathcal{M}_n}, \|P\|_{\mathcal{U}_n}\right\} \|a\| \end{array}$$

e

$$\|P_a\|_{\mathcal{U}_{n-1}} \leq \max\left\{\left\|\check{P}\right\|_{\mathcal{M}_n}, \|P\|_{\mathcal{U}_n}\right\} \|a\|.$$

Daí,

$$\|P_{a^2}\|_{\mathcal{U}_{n-1}} \leq \max\left\{\left\|\check{P}\right\|_{\mathcal{M}_n}, \|P\|_{\mathcal{U}_n}\right\} \|a\|^2.$$

Prosseguindo desta maneira, concluímos que $P_{a^{n-1}} \in \mathcal{U}(E; F)$ e

$$\|P_{a^{n-1}}\|_{\mathcal{I}} \leq \max\left\{\left\|\check{P}\right\|_{\mathcal{M}_n}, \|P\|_{\mathcal{U}_n}\right\} \|a\|^{n-1}.$$

Para obtermos a propriedade (CP3), considere $u \in \mathcal{I}(E_n, F)$ e $\gamma_j \in E_j'$ para todo $j = 1, \ldots, n-1$. Assim, pela propriedade (CH3), obtemos

$$\gamma_1 u \in \mathcal{M}_2(E_1, E_n; F)$$

e

$$\|\gamma_1 u\|_{\mathcal{M}_2} \leq \|\gamma_1\| \cdot \|u\|_{\mathcal{I}}.$$

Analogamente,

$$\gamma_1\gamma_2 u \in \mathcal{M}_3(E_1, E_2, E_n; F)$$

e

$$\|\gamma_1\gamma_2 u\|_{\mathcal{M}_3} \leq \|\gamma_1\| \cdot \|\gamma_2\| \cdot \|u\|_{\mathcal{I}}.$$

Iterando este procedimento $(n-1)$-vezes, chegamos à propriedade (CP3).

Agora, considere $u \in \mathcal{I}(E; F)$ e $\gamma \in E'$. Pela propriedade (CH4), segue que

$$\gamma u \in \mathcal{U}_2\left({}^2E; F\right).$$

Analogamente,

$$\gamma^2 u \in \mathcal{U}_3\left({}^3E; F\right).$$

Repetindo este procedimento $(n-1)$-vezes, obtemos a propriedade (CP4). □

## 5.1 Sequências Cohen fortemente $p$-somantes

**Proposição 5.1.1.** *A sequência* $\left(\mathcal{P}^n_{Coh,p}, \mathcal{L}^n_{Coh,p}\right)_{n=1}^{\infty}$ *é coerente e compatível com o ideal* $\mathcal{D}_p$ *dos operadores lineares Cohen fortemente p-somantes.*

*Demonstração.* (**CH5**) Lema 3.2.9.

(**CH1**) Seja $T \in \mathcal{L}_{Coh,p}(E_1, \ldots, E_{n+1}; F)$. Logo, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^{m} \left|\varphi_i\left(T\left(x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(n+1)}\right)\right)\right| \leq C \left(\sum_{i=1}^{m} \left\|x_i^{(1)}\right\|^p \cdots \left\|x_i^{(n+1)}\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \|(\varphi_i)_{i=1}^m\|_{w,p'}$$

para todos $m \in \mathbb{N}$, $x_i^{(j)} \in E_j$, $\varphi_i \in F'$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n+1$. Assim, dado $a_1 \in E_1$, então

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m} \left|\varphi_i\left(T_{a_1}\left(x_i^{(2)}, \ldots, x_i^{(n+1)}\right)\right)\right| \\
&\quad= \sum_{i=1}^{m} \left|\varphi_i\left(T\left(a_1, x_i^{(2)}, \ldots, x_i^{(n+1)}\right)\right)\right| \\
&\quad\leq \|T\|_{Coh,p} \left(\sum_{i=1}^{m} \|a_1\|^p \cdot \left\|x_i^{(2)}\right\|^p \cdots \left\|x_i^{(n+1)}\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \|(\varphi_i)_{i=1}^m\|_{w,p'} \\
&\quad= \|T\|_{Coh,p} \cdot \|a_1\| \left(\sum_{i=1}^{m} \left\|x_i^{(2)}\right\|^p \cdots \left\|x_i^{(n+1)}\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \|(\varphi_i)_{i=1}^m\|_{w,p'},
\end{aligned}$$

o que mostra que $T_{a_1}$ pertence a $\mathcal{L}_{Coh,p}(E_2, \ldots, E_{n+1}; F)$ e $\|T_{a_1}\|_{Coh,p} \leq \|T\|_{Coh,p} \cdot \|a_1\|$. De forma análoga, obtemos que

$$T_{a_j} \in \mathcal{L}_{Coh,p}(E_1, \ldots, E_{j-1}, E_{j+1}, \ldots, E_{n+1}; F)$$

para $j = 2, \ldots, n+1$, e

$$\|T_{a_j}\|_{Coh,p} \leq \beta_1 \|T\|_{Coh,p} \cdot \|a_j\|,$$

onde $\beta_1 = 1$.

(**CH2**) Dados $a \in E$ e $P \in \mathcal{P}_{Coh,p}(^{n+1}E; F)$, por definição, $P_a(x) = \check{P}(a, x, \ldots, x)$. Assim, dados $x_i \in E$, $\varphi_i \in F'$, com $i = 1, .., m$, então

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i(P_a(x_i))| &= \sum_{i=1}^{\infty} \left|\varphi_i\left(\check{P}\left(a, x_i, \ldots, x_i\right)\right)\right| \\
&\leq C \left( \sum_{i=1}^{\infty} \|a\|^p \cdot \|x_i\|^{((n+1)-1)p} \right)^{\frac{1}{p}} \|(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p'} \\
&= C\|a\| \left( \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^{np} \right)^{\frac{1}{p}} \|(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p'}.
\end{aligned}$$

Desta forma, $P_a \in \mathcal{P}_{Coh,p}(^{n}E; F)$ e $\|P_a\|_{Coh,p} \leq \beta_2 \left\|\check{P}\right\|_{Coh,p} \|a\|$, onde $\beta_2 = 1$.

(**CH3**) Sejam $T \in \mathcal{L}_{Coh,p}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $\gamma \in E'_{n+1}$. Assim, para todo $m \in \mathbb{N}$ e todos $x_i^{(j)} \in E_j$, $\varphi_i \in F'$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n+1$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m} \left|\varphi_i\left(\gamma T\left(x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(n+1)}\right)\right)\right| \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left|\varphi_i\left(T\left(x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(n)}\right)\gamma\left(x_i^{(n+1)}\right)\right)\right| \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left|\varphi_i\left(T\left(x_i^{(1)}, \ldots, \left(\gamma\left(x_i^{(n+1)}\right)\right)x_i^{(n)}\right)\right)\right| \\
&\leq C \left( \sum_{i=1}^{m} \left\|x_i^{(1)}\right\|^p \cdots \left\|x_i^{(n-1)}\right\|^p \cdot \left\|\left(\gamma\left(x_i^{(n+1)}\right)\right)x_i^{(n)}\right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \|(\varphi_i)_{i=1}^{m}\|_{w,p'} \\
&\leq C \left( \sum_{i=1}^{m} \left\|x_i^{(1)}\right\|^p \cdots \left\|x_i^{(n)}\right\|^p \cdot \left|\gamma\left(x_i^{(n+1)}\right)\right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \|(\varphi_i)_{i=1}^{m}\|_{w,p'} \\
&\leq C\|\gamma\| \left( \sum_{i=1}^{m} \left\|x_i^{(1)}\right\|^p \cdots \left\|x_i^{(n)}\right\|^p \cdot \left\|x_i^{(n+1)}\right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \|(\varphi_i)_{i=1}^{m}\|_{w,p'}.
\end{aligned}$$

Assim, $\gamma T \in \mathcal{L}_{Coh,p}(E_1, \ldots, E_{n+1}; F)$ e $\|\gamma T\|_{Coh,p} \leq \beta_3 \|T\|_{Coh,p} \cdot \|\gamma\|$, com $\beta_3 = 1$.

(**CH4**) Sejam $P \in \mathcal{P}_{Coh,p}(^{n}E; F)$ e $\gamma \in E'$. Para todo inteiro positivo $m$ e todos $x_i \in E$, $\varphi_i \in F'$, $i = 1, \ldots, m$, então

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} |\varphi_i((\gamma P)(x_i))| &= \sum_{i=1}^{m} |\varphi_i(\gamma(x_i)P(x_i))| \\
&= \sum_{i=1}^{m} |\gamma(x_i)| \cdot |\varphi_i(P(x_i))| \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left|\varphi_i\left(\check{P}\left(|\gamma(x_i)|^{\frac{1}{n}} x_i, \ldots, |\gamma(x_i)|^{\frac{1}{n}} x_i\right)\right)\right| \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left|\varphi_i\left(P\left(|\gamma(x_i)|^{\frac{1}{n}}\, x_i\right)\right)\right| \\
&\leq C\left(\sum_{i=1}^{m}\left(\left\||\gamma(x_i)|^{\frac{1}{n}}\, x_i\right\|\right)^{np}\right)^{\frac{1}{p}} \|(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p'} \\
&\leq C\left(\sum_{i=1}^{m} \|\gamma\|^p \cdot \|x_i\|^p \cdot \|x_i\|^{np}\right)^{\frac{1}{p}} \|(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p'} \\
&= C\|\gamma\|\left(\sum_{i=1}^{m} \|x_i\|^{(n+1)p}\right)^{\frac{1}{p}} \|(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\|_{w,p'}
\end{aligned}$$

o que mostra que $\gamma P \in \mathcal{P}_{Coh,p}(^{n+1}E; F)$.

Portanto, temos que sequência $\left(\mathcal{P}^n_{Coh,p}, \mathcal{L}^n_{Coh,p}\right)_{n=1}^{\infty}$ é coerente com o ideal $\mathcal{D}_p$ e pela Proposição 5.0.11 é também compatível, já que as constantes $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$. $\square$

## 5.2 Sequências múltiplo Cohen fortemente $p$-somantes

**Proposição 5.2.1.** *A sequência $\left(\mathcal{P}^n_{mCoh,p}, \mathcal{L}^n_{mCoh,p}\right)_{n=1}^{\infty}$ é coerente e compatível com o ideal $\mathcal{D}_p$ dos operadores lineares Cohen fortemente p-somantes.*

*Demonstração.* (**CH5**) Segue da Definição 4.3.6.

(**CH1**) Seja $a_{n+1} \in E_{n+1}$. Defina, para todo $m \in \mathbb{N}$, os funcionais $\varphi_{j_1,\ldots,j_n,j_{n+1}} \in F'$ da seguinte forma:

$$\varphi_{j_1,\ldots,j_n,j_{n+1}} = \begin{cases} \varphi_{j_1,\ldots,j_n}, & \text{se} \quad j_{n+1} = 1, \\ 0, & \text{se} \quad j_{n+1} = 2, \ldots, m, \end{cases}$$

com $j_1, \ldots, j_n, j_{n+1} = 1, \ldots, m$. Agora, note que

$$\begin{aligned}
&\left\|(\varphi_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m}\right\|_{w,p'} \\
&\quad = \left\|((\varphi_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m})_{j_{n+1}=1}^{1}\right\|_{w,p'} = \left\|(\varphi_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n,j_{n+1}=1}^{m}\right\|_{w,p'}.
\end{aligned}$$

Assim, se $T \in \mathcal{L}_{mCoh,p}(E_1, \ldots, E_{n+1}; F)$, para todos $\varphi_{j_1,\ldots,j_n} \in F'$ e $x_j^{(i)} \in E_i$, $i = 1, \ldots, n$, $j_i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, m$, então

$$
\begin{aligned}
& \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m} \left|\varphi_{j_1,\ldots,j_n}\left(T_{a_{n+1}}\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right| \\
= \quad & \sum_{j_1,\ldots,j_n,j_{n+1}=1}^{m} \left|\varphi_{j_1,\ldots,j_n,j_{n+1}}\left(T\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)},a_{n+1}\right)\right)\right| \\
\leq \quad & C\left\|\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_p \cdots \left\|\left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_p \cdot \|(a_{n+1},0,0,\ldots)\|_p \cdot \left\|(\varphi_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{m}\right\|_{w,p'} \\
= \quad & C\|a_{n+1}\| \left\|\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_p \cdots \left\|\left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_p \cdot \left\|(\varphi_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m}\right\|_{w,p'}
\end{aligned}
$$

mostrando que $T_{a_{n+1}} \in \mathcal{L}_{Coh,p}(E_1,\ldots,E_n;F)$. De forma análoga, temos que

$$T_{a_j} \in \mathcal{L}_{Coh,p}(E_1,\ldots,E_{j-1},E_{j+1},\ldots,E_{n+1};F),\ j=1,\ldots,n.$$

Além disso,

$$\|T_{a_j}\|_{mCoh,p} \leq \|T\|_{mCoh,p} \cdot \|a_j\|.$$

(**CH2**) Sejam $P \in \mathcal{P}_{mCoh,p}({}^{n+1}E;F)$ e $a \in E$. Por (CH5), temos que $\check{P} \in \mathcal{L}_{mCoh,p}({}^{n+1}E;F)$ e, por (CH1), temos que

$$\check{P}_a \in \mathcal{L}_{mCoh,p}({}^{n}E;F) \text{ e } \left\|\check{P}_a\right\|_{mCoh,p} \leq \left\|\check{P}\right\|_{mCoh,p} \cdot \|a\|.$$

Como $(P_a)^{\vee} = \check{P}_a$ (Lema 5.0.8), usando novamente a propriedade (CH5), segue que

$$P_a \in \mathcal{P}_{mCoh,p}({}^{n}E;F) \text{ e } \|P_a\|_{mCoh,p} \leq \|P\|_{mCoh,p} \cdot \|a\|.$$

(**CH3**) Sejam $T \in \mathcal{L}_{mCoh,p}(E_1,\ldots,E_n;F)$ e $\gamma \in E'_{n+1}$. Assim, para todo $m \in \mathbb{N}$ e todos $x_j^{(i)} \in E_i$ e $\varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}} \in F'$, $j=1,\ldots,m$, $j_i=1,\ldots,m$, $i=1,\ldots,n+1$,

$$
\begin{aligned}
& \sum_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{m} \left|\varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}}\left((\gamma T)\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)},x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)\right| \\
& \quad = \sum_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{m} \left|\varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}}\left(\gamma\left(x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)T\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right| \\
& \quad = \sum_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{m} \left|\varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}}\left(T\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\gamma\left(x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)\right)\right|.
\end{aligned}
$$

Estabelecendo as relações

$$
\begin{cases}
z_{j_i}^{(i)} & = x_{j_i}^{(i)}, j_i=1,\ldots,m,\ i=1,\ldots,n-1 \\
z_{j_n}^{(n)} & = x_{j_n}^{(n)}\gamma\left(x_{j_1}^{(n+1)}\right),\ j_n=1,\ldots,m \\
z_{m+j_n}^{(n)} & = x_{j_n}^{(n)}\gamma\left(x_{j_2}^{(n+1)}\right),\ j_n=1,\ldots,m \\
\quad\vdots & \\
z_{(m-1)m+j_n}^{(n)} & = x_{j_n}^{(n)}\gamma\left(x_{j_m}^{(n+1)}\right),\ j_n=1,\ldots,m
\end{cases}
$$

e

$$\begin{cases} \widetilde{\varphi}_{j_1,\ldots,j_n} = \varphi_{j_1,\ldots,j_n,1},\ j_n = 1,\ldots,m \\ \widetilde{\varphi}_{j_1,\ldots,m+j_n} = \varphi_{j_1,\ldots,j_n,2},\ j_n = 1,\ldots,m \\ \vdots \\ \widetilde{\varphi}_{j_1,\ldots,(m-1)m+j_n} = \varphi_{j_1,\ldots,j_n,m},\ j_n = 1,\ldots,m, \end{cases}$$

obtemos que

$$\begin{aligned}
&\sum_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{m} \left|\varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}}\left(T\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\gamma\left(x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)\right)\right| \\
&= \sum_{j_{n+1}=1}^{m}\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m} \left|\varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}}\left(T\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\gamma\left(x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)\right)\right| \\
&= \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m} \left|\varphi_{j_1,\ldots,j_n,1}\left(T\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\gamma\left(x_{1}^{(n+1)}\right)\right)\right)\right| \\
&+ \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m} \left|\varphi_{j_1,\ldots,j_n,2}\left(T\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\gamma\left(x_{2}^{(n+1)}\right)\right)\right)\right| \\
&+\cdots+ \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m} \left|\varphi_{j_1,\ldots,j_n,m}\left(T\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\gamma\left(x_{m}^{(n+1)}\right)\right)\right)\right| \\
&= \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m} \left|\widetilde{\varphi}_{j_1,\ldots,j_n}\left(T\left(z_{j_1}^{(1)},\ldots,z_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right| \\
&+ \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m} \left|\widetilde{\varphi}_{j_1,\ldots,m+j_n}\left(T\left(z_{j_1}^{(1)},\ldots,z_{m+j_n}^{(n)}\right)\right)\right| \\
&+\cdots+ \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m} \left|\widetilde{\varphi}_{j_1,\ldots,(m-1)m+j_n}\left(T\left(z_{j_1}^{(1)},\ldots,z_{(m-1)m+j_n}^{(n)}\right)\right)\right| \\
&= \sum_{j_n=1}^{m^2}\sum_{j_1,\ldots,j_{n-1}=1}^{m} \left|\widetilde{\varphi}_{j_1,\ldots,j_n}\left(T\left(z_{j_1}^{(1)},\ldots,z_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right| \\
&= \sum_{j_1,\ldots,j_{n-1},j_n=1}^{m,\ldots,m,m^2} \left|\widetilde{\varphi}_{j_1,\ldots,j_n}\left(T\left(z_{j_1}^{(1)},\ldots,z_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right|,
\end{aligned}$$

ou seja, com as escolhas estabelecidas acima,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j_1,\ldots,j_n,j_{n+1}=1}^{m} \left|\varphi_{j_1,\ldots,j_n,j_{n+1}}\left(T\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\gamma\left(x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)\right)\right| \\
&= \sum_{j_1,\ldots,j_{n-1},j_n=1}^{m,\ldots,m,m^2} \left|\widetilde{\varphi}_{j_1,\ldots,j_n}\left(T\left(z_{j_1}^{(1)},\ldots,z_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right|.
\end{aligned}$$

Agora, notando que a desigualdade (3.9) ainda é verdadeira para variações de índices $j_1 \in \{1,\ldots,m_1\}$, ... , $j_n \in \{1,\ldots,m_n\}$ distintas (basta tomar, naquela desigualdade

$m = \max\{m_1, \ldots, m_n\}$, $x_j^{(i)} = 0$, $j > m_i$ e $\varphi_{j_1,\ldots,j_n} = 0$, $j_i > m_i$), temos

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{m} \left|\varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}}\left(T\left(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_n}^{(n)}\gamma\left(x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)\right)\right| \\
= & \sum_{j_1,\ldots,j_{n-1},j_n=1}^{m,\ldots,m,m^2} \left|\widetilde{\varphi}_{j_1,\ldots,j_n}\left(T\left(z_{j_1}^{(1)}, \ldots, z_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right| \\
\leq & \ C\prod_{i=1}^{n-1}\left\|\left(z_{j_i}^{(i)}\right)_{j_i=1}^{m}\right\|_p \cdot \left\|\left(z_{j_n}^{(n)}\right)_{j_n=1}^{m^2}\right\|_p \cdot \left\|\left(\widetilde{\varphi}_{j_1,\ldots,j_n}\right)_{j_1,\ldots,j_{n-1},j_n=1}^{m,\ldots,m,m^2}\right\|_{w,p'} \\
= & \ C\prod_{i=1}^{n-1}\left\|\left(x_{j}^{(i)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_p \cdot \left\|\left(x_{j_n}^{(n)}\gamma\left(x_{j_n+1}^{(n+1)}\right)\right)_{j_n,j_n+1=1}^{m}\right\|_p \cdot \left\|\left(\varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}}\right)_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{m}\right\|_{w,p'} \\
\leq & \ C\|\gamma\|\prod_{i=1}^{n+1}\left\|\left(x_{j}^{(i)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_p \cdot \left\|\left(\varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}}\right)_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{m}\right\|_{w,p'},
\end{aligned}
$$

já que

$$
\begin{aligned}
\left\|\left(x_{j_n}^{(n)}\gamma\left(x_{j_n+1}^{(n+1)}\right)\right)_{j_n,j_n+1=1}^{m}\right\|_p &= \left(\sum_{j_n,j_{n+1}=1}^{m}\left|\gamma\left(x_{j_n+1}^{(n+1)}\right)\right|^p \cdot \left\|x_{j_n}^{(n)}\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left[\left(\sum_{j_{n+1}=1}^{m}\left|\gamma\left(x_{j_n+1}^{(n+1)}\right)\right|^p\right)\left(\sum_{j_n}^{m}\left\|x_{j_n}^{(n)}\right\|^p\right)\right]^{\frac{1}{p}} \\
&= \left\|\left(x_{j_n}^{(n)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_p \cdot \left\|\left(\gamma\left(x_{j}^{(n+1)}\right)\right)_{j=1}^{m}\right\|_p \\
&\leq \|\gamma\| \cdot \left\|\left(x_{j_n}^{(n)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_p \cdot \left\|\left(x_{j}^{(n+1)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_p.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\gamma T \in \mathcal{L}_{mCoh,p}(E_1, \ldots, E_{n+1}; F)$ e $\|\gamma T\|_{mCoh,p} \leq \|T\|_{mCoh,p} \cdot \|\gamma\|$.

(**CH4**) Sejam $P \in \mathcal{P}_{mCoh,p}(^nE; F)$ e $\gamma \in E'$. Considere a aplicação $(n+1)$-linear simétrica

$$
\begin{array}{rccl}
B: & E^{n+1} & \to & F \\
 & (x_1, \ldots, x_{n+1}) & \mapsto & \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\gamma(x_k)\check{P}(x_1, \overset{[k]}{\ldots}, x_{n+1})
\end{array},
$$

onde $\overset{[k]}{\cdots}$ indica a omissão da $k$-ésima coordenada. Para cada $x \in E$, temos que

$$
Bx^{n+1} = \gamma(x)\check{P}x^n = (\gamma\check{P})x^{n+1} = (\gamma P)^{\vee}(x) = (\gamma P)(x),
$$

ou seja, a aplicação $B$ restrita a diagonal coincide com $\gamma P$. Logo, pela Proposição 3.1.7, esta aplicação coincide com $(\gamma P)^{\vee}$ em todo o domínio. Daí, para todo $m \in \mathbb{N}$ e para todos $\varphi_{j_1,\ldots,j_n} \in F'$ e $x_j^{(i)} \in E_i$, $j_i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, m$, $i = 1, \ldots, n+1$, temos que

$$
\sum_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{m} \left|\varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}}\left((\gamma P)^{\vee}\left(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)\right|
$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{m} \left| \varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}} \left( \sum_{k=1}^{n+1} \gamma \left( x_{j_k}^{(k)} \right) \check{P} \left( x_{j_1}^{(1)}, \overset{[k]}{\ldots}, x_{j_{n+1}}^{(n+1)} \right) \right) \right|$$
$$\leq \frac{1}{n+1} \left( \sum_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{m} \left( \sum_{k=1}^{n+1} \left| \varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}} \left( \gamma \left( x_{j_k}^{(k)} \right) \check{P} \left( x_{j_1}^{(1)}, \overset{[k]}{\ldots}, x_{j_{n+1}}^{(n+1)} \right) \right) \right| \right) \right)$$
$$= \frac{1}{n+1} \left\| \left( \sum_{k=1}^{n+1} \left| \varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}} \left( \gamma \left( x_{j_k}^{(k)} \right) \check{P} \left( x_{j_1}^{(1)}, \overset{[k]}{\ldots}, x_{j_{n+1}}^{(n+1)} \right) \right) \right| \right)_{j_1,\ldots,j_{n+1}}^{m} \right\|_1$$
$$\leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \left\| \left( \left| \varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}} \left( \gamma \left( x_{j_k}^{(k)} \right) \check{P} \left( x_{j_1}^{(1)}, \overset{[k]}{\ldots}, x_{j_{n+1}}^{(n+1)} \right) \right) \right| \right)_{j_1,\ldots,j_{n+1}}^{m} \right\|_1$$
$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \left( \sum_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{m} \left| \varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}} \left( \gamma \left( x_{j_k}^{(k)} \right) \check{P} \left( x_{j_1}^{(1)}, \overset{[k]}{\ldots}, x_{j_{n+1}}^{(n+1)} \right) \right) \right| \right)$$
$$= \frac{1}{n+1} \left[ \left( \sum_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{m} \left| \varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}} \left( \check{P} \left( \gamma \left( x_{j_1}^{(1)} \right) x_{j_2}^{(2)}, \ldots, x_{j_{n+1}}^{(n+1)} \right) \right) \right| \right) + \right.$$
$$+ \left( \sum_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{m} \left| \varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}} \left( \check{P} \left( \gamma \left( x_{j_2}^{(2)} \right) x_{j_1}^{(1)}, x_{j_3}^{(3)}, \ldots, x_{j_{n+1}}^{(n+1)} \right) \right) \right| \right) + \ldots$$
$$\left. \cdots + \left( \sum_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{m} \left| \varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}} \left( \check{P} \left( \gamma \left( x_{j_{n+1}}^{(n+1)} \right) x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_n}^{(n)} \right) \right) \right| \right) \right],$$

ou seja,

$$\sum_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{m} \left| \varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}} \left( (\gamma P)^{\vee} \left( x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_{n+1}}^{(n+1)} \right) \right) \right| \tag{5.1}$$
$$= \frac{1}{n+1} \left[ \left( \sum_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{m} \left| \varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}} \left( \check{P} \left( \gamma \left( x_{j_1}^{(1)} \right) x_{j_2}^{(2)}, \ldots, x_{j_{n+1}}^{(n+1)} \right) \right) \right| \right) + \right.$$
$$\left. \cdots + \left( \sum_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{m} \left| \varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}} \left( \check{P} \left( \gamma \left( x_{j_{n+1}}^{(n+1)} \right) x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_n}^{(n)} \right) \right) \right| \right) \right].$$

Usando argumentos análogos aos usados na demonstração da propriedade (CH3), cada parcela de (5.1), por exemplo a primeira, pode ser escrita como

$$\sum_{j_2=1}^{m^2} \sum_{j_3,\ldots,j_{n+1}=1}^{m} \left| \widetilde{\varphi}_{j_2,\ldots,j_{n+1}} \left( \check{P} \left( z_{j_2}^{(2)}, \ldots, z_{j_{n+1}}^{(n+1)} \right) \right) \right|$$

com as escolhas convenientes dos $\widetilde{\varphi}_{j_2,\ldots,j_{n+1}}$ e $z_{j_k}^{(k)}$, com $k = 2, \ldots, n+1$. Daí, de forma análoga à feita em (CH3), temos que

$$\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m} \left| \varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}} \left( \check{P} \left( \gamma \left( x_{j_1}^{(1)} \right) x_{j_2}^{(2)}, \ldots, x_{j_{n+1}}^{(n+1)} \right) \right) \right|$$

$$\leq \left\|\check{P}\right\|_{mCoh,p} \cdot \|\gamma\| \prod_{i=1}^{n+1} \left\| \left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{m} \right\|_p \cdot \left\| \left(\varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}}\right)_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{m} \right\|_{w,p'}.$$

Assim, voltando para (5.1), temos que

$$\begin{aligned}
&\sum_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{m} \left|\varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}}\left((\gamma P)^{\vee}\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)\right| \\
&= \frac{1}{n+1}\left[\left(\sum_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{m} \left|\varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}}\left(\check{P}\left(\gamma\left(x_{j_1}^{(1)}\right)x_{j_2}^{(2)},\ldots,x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)\right|\right)+\right. \\
&\left.\cdots+\left(\sum_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{m} \left|\varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}}\left(\check{P}\left(\gamma\left(x_{j_{k+1}}^{(k+1)}\right)x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right|\right)\right] \\
&\leq \frac{1}{n+1}\left[\left\|\check{P}\right\|_{mCoh,p} \cdot \|\gamma\| \prod_{i=1}^{n+1} \left\| \left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{m} \right\|_p \cdot \left\| \left(\varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}}\right)_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{m} \right\|_{w,p'} + \cdots\right. \\
&\left.\cdots+\left\|\check{P}\right\|_{mCoh,p} \cdot \|\gamma\| \prod_{i=1}^{n+1} \left\| \left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{m} \right\|_p \cdot \left\| \left(\varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}}\right)_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{m} \right\|_{w,p'}\right] \\
&= \left\|\check{P}\right\|_{mCoh,p} \cdot \|\gamma\| \prod_{i=1}^{n+1} \left\| \left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{m} \right\|_p \cdot \left\| \left(\varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}}\right)_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{m} \right\|_{w,p'}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\gamma P \in \mathcal{P}_{mCoh,p}(^{n+1}E;F)$ e

$$\|\gamma P\|_{mCoh,p} \leq \left\|\check{P}\right\|_{mCoh,p} \cdot \|\gamma\| = \|P\|_{mCoh,p} \cdot \|\gamma\|.$$

Portanto, temos que a sequência $\left(\mathcal{P}_{mCoh,p}^{n}, \mathcal{L}_{mCoh,p}^{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ é coerente com o ideal $\mathcal{D}_p$ com constantes $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$ e, pela Proposição 5.0.11, esta sequência é compatível com $\mathcal{D}_p$. $\square$

# APÊNDICE A

## Alguns resultados de Análise Funcional

O objetivo deste capítulo é apresentar alguns resultados clássicos da Análise Funcional essenciais para o desenvolvimento da teoria dos operadores Cohen fortemente somantes.

**Definição A.0.1.** Seja $E$ um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, onde $\mathbb{K}$ denotará $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Uma *norma* em $E$ é uma aplicação $\|\cdot\| : E \to [0, +\infty)$ que satisfaz as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y \in \mathbb{E}$ e $\lambda$ escalar:

(N1) $\|x\|_E \geq 0$ e $\|x\|_E = 0$ se, e somente se, $x = 0$;

(N2) $\|\lambda x\|_E = |\lambda| \cdot \|x\|_E$;

(N2) $\|x + y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E$.

Um espaço vetorial normado é um par $(E, \|\cdot\|_E)$ onde $E$ é um espaço vetorial e $\|\cdot\|_E$ uma norma em $E$. Quando não houver perigo de ambiguidade, escreveremos apenas $\|\cdot\|$ para representar a norma em $E$.

Como temos uma norma em $E$, temos também a noção de distância entre dois elementos $x, y \in E$ dada por $d(x, y) = \|x - y\|$, que torna $E$ um espaço métrico. Em particular, uma sequência $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ em um espaço normado $E$ converge para $x \in E$ se

$$\lim_{i \to \infty} \|x_i - x\| = 0.$$

Um espaço normado que é completo na métrica definida por

$$x, y \in E \to d(x, y) = \|x - y\|,$$

é chamado de espaço de Banach.

**Definição A.0.2.** Sejam $E$ e $F$ espaços vetoriais normados sobre um corpo $\mathbb{K}$. Um *operador* linear contínuo $T : E \to F$ é uma função contínua tal que para quaisquer $x, y \in E$ e $\lambda$ escalar é linear, ou seja,

$$T(x+y) = T(x) + T(y) \text{ e } T(\lambda x) = \lambda T(x).$$

Se $E$ e $F$ forem espaços normados, denotaremos por $\mathcal{L}(E;F)$ o espaço vetorial de todos os operadores lineares contínuos de $E$ em $F$.

Temos a seguinte caracterização para os operadores lineares contínuos:

**Proposição A.0.3.** *Sejam $E$ e $F$ espaços vetoriais normados sobre um mesmo corpo e $T : E \to F$ linear. As seguintes afirmações são equivalentes:*

*(a) $T$ é lipschitziano;*

*(b) $T$ é uniformemente contínuo;*

*(c) $T$ é contínuo;*

*(d) $T$ é contínuo em algum ponto de $E$;*

*(e) $T$ é contínuo na origem;*

*(f) $\sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} < \infty$;*

*(g) Existe uma constante $C > 0$ tal que $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in E$.*

*Demonstração.* Veja ([BPT15], Teorema 2.1.1) □

Os itens $(f)$ e $(g)$ sugerem uma forma de definir uma norma em $\mathcal{L}(E;F)$. A proposição a seguir nos informa que isso é possivel e fornece resultados adicionais.

**Proposição A.0.4.** *Sejam $E$ e $F$ espaços normados.*

*(a) A expressão*

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\}$$

*define uma norma no espaço $\mathcal{L}(E;F)$.*

*(b) $\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$ para todos $T \in \mathcal{L}(E;F)$ e $x \in E$.*

*(c) Se $F$ for Banach, então $\mathcal{L}(E;F)$ também é Banach.*

*Demonstração.* Veja ([BPT15], Proposição 2.1.4) □

A seguir enunciaremos o Teorema de Hahn-Banach.

**Proposição A.0.5** (Teorema de Hahn-Banach)**.** *Sejam $E$ um espaço normado, $G$ um subespaço de $E$ e $\varphi : G \to \mathbb{K}$ um funcional linear contínuo. Então existe um funcional linear contínuo $\widetilde{\varphi} : E \to \mathbb{K}$ cuja restrição a $G$ coincide com $\varphi$ e $\|\widetilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$.*

*Demonstração.* Veja [BPT15, Corolário 3.1.3 ]. □

Vejamos algumas consequências do Teorema de Hahn-Banach.

**Proposição A.0.6.** *Seja $E$ um espaço normado e $x_0 \in E, x_0 \neq 0$. Então existe $\varphi \in E'$ tal que $\|\varphi\| = 1$ e $\varphi(x_0) = \|x_0\|$.*

*Demonstração.* Veja [BPT15, Corolário 3.1.4 ]. □

**Corolário A.0.7.** *Sejam $E$ um espaço normado, $E \neq \{0\}$, e $x \in E$. Então*

$$\|x\| = \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in E' \text{ e } \|\varphi\| \leq 1\} = \max\{|\varphi(x)| : \varphi \in E' \text{ e } \|\varphi\| = 1\}.$$

*Demonstração.* Veja [BPT15, Corolário 3.1.5 ]. □

O teorema a seguir é a versão do Teorema do Gráfico Fechado para aplicações multilineares.

**Teorema A.0.8.** *Sejam $E_1$, $E_2, \ldots, E_n$ e $F$ espaços de Banach e $A : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ uma aplicação $n$-linear de gráfico fechado. Então $A$ é contínua.*

*Demonstração.* Veja ([Be08], Teorema 1.2.8) □

É possível definir continuidade de uma aplicação multilinear através de suas variáveis como mostra a proposição a seguir.

**Proposição A.0.9.** *Sejam $E_1, \ldots, E_n$ espaços de Banach e $F$ um espaço vetorial normado. Então a aplicação $A \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$ é contínua se, e somente se, é contínua em cada variável.*

*Demonstração.* Veja [Be08, Proposição 1.2.6]. □

**Proposição A.0.10** (Fórmula da Polarização)**.** *Sejam $E$ e $F$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Se $A \in L^s(^nE; F)$, então*

$$A(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n!2^n} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n A(x_0 + \varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n)^n,$$

*para quaisquer $x_0, x_1, \ldots, x_n \in E$.*

*Demonstração.* Veja [Mu10, Theorem 1.10]. □

O próximo resultado é a versão generalizada da desigualdade de Hölder.

**Proposição A.0.11** (Desigualdade de Hölder generalizado para sequências)**.** *Sejam* $r \in (0,\infty]$*,* $p_1,\ldots,p_N \in (0,\infty]$ *tal que* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_N}$*. Se cada* $a_k = (a_{k_i})_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_{p_k}$*, com* $k = 1,\ldots,N$*, então* $a_1\cdots a_N \in \ell_r$ *e, além disso,*

$$\|a_1\cdots a_N\|_r \leq \|a_1\|_{p_1}\cdots\|a_N\|_{p_N}.$$

*Demonstração.* Veja [Ar16, Teorema 1.1]. □

**Definição A.0.12.** Sejam $E$ e $F$ espaços normados. Dizemos que $E$ e $F$ são *topologicamente isomorfos*, ou simplesmente *isomorfos*, se existir um operador linear contínuo bijetor $T : E \to F$ cujo operador inverso $T^{-1} : F \to E$, que é sempre linear, é também contínuo. Tal operador é chamado de *isomorfismo*. Se, além disso, $T$ for uma *isometria*, isto é, $\|T(x)\| = \|x\|$, para todo $x \in E$, então dizemos que $E$ e $F$ são *isomorfos isometricamente*.

**Proposição A.0.13** (O dual topológico de $\ell_1(E)$)**.** *Se* $E$ *é um espaço normado sobre* $\mathbb{K}$*, então existe um isomorfismo isométrico entre* $(\ell_1(E))'$ *e* $\ell_\infty(E')$*.*

*Demonstração.* Veja [Ol12, Proposição 2.1.5]. □

**Proposição A.0.14** (O dual topológico de $c_0(E)$)**.** *Se* $E$ *é um espaço normado sobre* $\mathbb{K}$*, então* $(c_0(E))'$ *é isometricamente isomorfo a* $\ell_1(E')$*.*

*Demonstração.* Veja [Ol12, Proposição 2.1.6]. □

O dual de $\ell_p$ é isometricamente isomorfo a $\ell_{p'}$, para $1 \leq p < \infty$, e esta relação de dualidade é dada por

$$b = (b_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{p'} \mapsto \varphi_b \in (\ell_p)',\ \varphi_b((a_j)_{j=1}^\infty) = \sum_{j=1}^\infty a_j b_j \text{ para toda } (a_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p.$$

(ver [BPT15] Proposição 4.2.1). Vamos usar este fato para provar a proposição a seguir.

**Proposição A.0.15.** *Se* $1 < p < \infty$*, então o dual topológico do espaço* $\ell_p(E)$ *é isometricamente isomorfo ao espaço* $\ell_{p'}(E')$*, onde* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$*.*

*Demonstração.* Considere a aplicação linear

$$\begin{array}{rccccc} J: & l_{p'}(E') & \to & (l_p(E))' & & \\ & (\varphi_i)_{i=1}^\infty & \mapsto & J((\varphi_i)_{i=1}^\infty) & : & l_p(E) \to \mathbb{K} \\ & & & & & (x_i)_{i=1}^\infty \mapsto J((\varphi_i)_{i=1}^\infty)((x_i)_{i=1}^\infty) = \displaystyle\sum_{i=1}^\infty \varphi_i(x_i) \end{array}$$

para $(\varphi_i)_{i=1}^\infty \in l_{p'}(E')$ e $(x_i)_{i=1}^\infty \in l_p(E)$. Pela desigualdade de Hölder, temos que

$$|J((\varphi_i)_{i=1}^\infty)(x)| \leq \left(\sum_{i=1}^\infty \|\varphi_i\|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{i=1}^\infty \|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

o que mostra que $J$ está bem definida. Agora, note que $J$ é contínua e $\|J\| \leq 1$, pois

$$\begin{aligned}
\|J\|_\infty &= \sup_{\left\|(\varphi_i)_{i=1}^\infty\right\|_{p'} \leq 1} \|J((\varphi_i)_{i=1}^\infty)\| = \sup_{\left\|(\varphi_i)_{i=1}^\infty\right\|_{p'} \leq 1} \left( \sup_{\left\|(x_i)_{i=1}^\infty\right\|_p \leq 1} |J((\varphi_i)_{i=1}^\infty)((x_i)_{i=1}^\infty)| \right) \\
&\leq \sup_{\|(\varphi_i)_{i=1}^\infty\|_{p'} \leq 1} \left( \sup_{\left\|(x_i)_{i=1}^\infty\right\|_p \leq 1} \|(\varphi_i)_{i=1}^\infty\|_{p'} \cdot \|(x_i)_{i=1}^\infty\|_p \right) \leq \sup_{\|(\varphi_i)_{i=1}^\infty\|_{p'} \leq 1} \|(\varphi_i)_{i=1}^\infty\|_{p'} \leq 1.
\end{aligned}$$

Considere a aplicação linear $I_k : E \to \ell_p(E)$, dada por $I_k(x) = (0, \ldots, 0, x, 0, \ldots)$, com $x$ na $k$-ésima coordenada. Defina a aplicação linear

$$\begin{aligned}
I : \ (\ell_p(E))' &\to \ell_{p'}(E') \\
T &\mapsto (T \circ I_k)_{k=1}^\infty.
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que $I$ está bem definida e é contínua. Dados $\varepsilon > 0$ e $k \in \mathbb{N}$, existe $x_k \in E$, com $\|x_k\| \leq 1$, tal que

$$\|T \circ I_k\| \leq |T \circ I_k(x_k)| + \frac{\varepsilon}{2^{\frac{k}{p'}}}.$$

Paca cada $(\alpha_k)_{k=1}^\infty \in \ell_p$, temos que

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=1}^\infty \|T \circ I_k\| \alpha_k \right| &\leq \sum_{k=1}^\infty \left| \left( |T \circ I_k(x_k)| + \frac{\varepsilon}{2^{\frac{k}{p'}}} \right) \alpha_k \right| \\
&= \sum_{k=1}^\infty \left| |T \circ I_k(x_k)| \alpha_k + \frac{\varepsilon}{2^{\frac{k}{p'}}} \alpha_k \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^\infty \left( |T \circ I_k(x_k) \alpha_k| + \frac{\varepsilon}{2^{\frac{k}{p'}}} |\alpha_k| \right) \\
&= \sum_{k=1}^\infty |T \circ I_k(x_k) \alpha_k| + \sum_{k=1}^\infty \frac{\varepsilon}{2^{\frac{k}{p'}}} |\alpha_k| \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \sum_{k=1}^\infty |T \circ I_k(x_k) \alpha_k| + \left( \sum_{k=1}^\infty \left( \frac{\varepsilon}{2^{\frac{k}{p'}}} \right)^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left( \sum_{k=1}^\infty |\alpha_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sum_{k=1}^\infty |T \circ I_k(x_k) \alpha_k| + \varepsilon \|(\alpha_k)_{k=1}^\infty\|_p.
\end{aligned}$$

Para cada $p \in \mathbb{N}$, escolhendo $\beta_k \in \mathbb{K}$, com $\|\beta_k\| = 1$, tal que $T \circ I_k(x_k) \alpha_k \beta_k = |T \circ I_k(x_k) \alpha_k|$, então

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^\infty |T \circ I_k(x_k) \alpha_k| + \varepsilon \|(\alpha_k)_{k=1}^\infty\|_p &= \left| \sum_{k=1}^\infty T \circ I_k(x_k) \alpha_k \beta_k \right| + \varepsilon \|(\alpha_k)_{k=1}^\infty\|_p \\
&= \left| T \left( \sum_{k=1}^\infty I_k(x_k \alpha_k \beta_k) \right) \right| + \varepsilon \|(\alpha_k)_{k=1}^\infty\|_p \\
&= |T \, (x_k \alpha_k \beta_k)_{k=1}^\infty| + \varepsilon \|(\alpha_k)_{k=1}^\infty\|_p
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \|T\| \cdot \|(\alpha_k)_{k=1}^{\infty}\|_p + \varepsilon \|(\alpha_k)_{k=1}^{\infty}\|_p \\
&= (\|T\| + \varepsilon)\|(\alpha_k)_{k=1}^{\infty}\|_p,
\end{aligned}
$$

e fazendo $\varepsilon \to 0$, obtemos que

$$
\left| \sum_{k=1}^{\infty} \|T \circ I_k\| \alpha_k \right| \leq \|T\| \cdot \|(\alpha_k)_{k=1}^{\infty}\|_p \tag{A.1}
$$

Assim, a série $\sum_{k=1}^{\infty}(T \circ I_k)$ converge para toda $(\alpha_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_p$. Defina

$$
\begin{aligned}
\eta : \quad & \ell_p && \to \mathbb{K} \\
& (\alpha_k)_{k=1}^{\infty} && \longmapsto \eta((\alpha_k)_{k=1}^{\infty}) := \sum_{i=1}^{\infty}(\|T \circ I_k\|)\alpha_k
\end{aligned}
$$

Por (A.1), temos que $\eta$ está bem definida, é linear e contínua com $\|\eta\| \leq \|T\|$. Assim, $\eta \in (\ell_p)'$ e pela dualidade $(\|T \circ I_k\|)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{p'}$, para $(\|T \circ I_k\|)_{i=1}^{\infty}$ correspondente a $\eta$, e $\|(T \circ I_k)_{k=1}^{\infty}\|_p \leq \|T\|$. Portanto, a aplicação $I$ está bem definida, é contínua e $\|I\| \leq 1$. Como $I \circ J = id_{\ell_{p'}(E')}$ e $J \circ I = id_{(\ell_p(E))'}$, concluímos que $(\ell_p(E))'$ e $\ell_{p'}(E')$ são isomorfos isometricamente. □

Para todo espaço normado $E$, o operador linear

$$
J_E : E \to E'', \ J_E(x)(\varphi) = \varphi(x) \text{ para todo } x \in E \text{ e } \varphi \in E',
$$

é uma isometria linear. Como $E$ e $J_E(E)$ são isometricamente isomorfos, é comum identificar os dois espaços e a ambos se referir simplesmente como $E$. Assim, é comum abusar da notação e escrever $E$ onde deveriamos ter escrito $J_E(E)$ (veja Proposição 4.3.1 e Observação 4.3.2 em [BPT15]).

**Teorema A.0.16** (Princípio da Reflexibilidade Local)**.** *Seja $X$ um espaço de Banach e sejam $E$ e $F$ subespaços de dimensão finita de $X''$ e $X'$, respectivamente. Então, para cada $\varepsilon > 0$, existe um operador injetivo $u : E \to X$ com as seguintes propriedades:*

*(i) $ux = x$ para todo $x \in E \cap X$;*

*(ii) $\|u\| \cdot \|u^{-1}\| \leq 1 + \varepsilon$;*

*(iii) $\langle ux'', x' \rangle = \langle x'', x' \rangle$ para todo $x' \in F$.*

*Demonstração.* Veja [DJT95, pág. 178]. □

Denotaremos por $F$ o espaço gerados por $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in X'$ e por $E$ o espaço gerado por $\psi_1, \dots, \psi_m \in X''$. Note que $F$ e $E$ tem ambos dimensão finita. Pela proposição anterior, existe um operador injetivo $u : E \to X$ com $u\psi = \psi$ para todo $x \in E \cap X$. Além disso, tomando $u\psi = y$ e $\varphi = x'$, então

$$\varphi(y) = \langle u\psi, \varphi\rangle = \langle \psi, \varphi\rangle = \psi(\varphi)$$

para todo $\varphi \in F$. Assim, usando o Princípio da Reflexibilidade Local, temos a seguinte

**Proposição A.0.17.** *Sejam $E$ um espaço de Banach, $\varphi_i \in E'$, $i = 1, \ldots, m$, e $p \geq 1$. Então*

$$\sup_{\psi \in B_{E''}} \left( \sum_{i=1}^{m} |\psi(\varphi_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{y \in B_E} \left( \sum_{i=1}^{m} |\varphi_i(y)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

# Referências Bibliográficas


[As72] R. Ash. Measure, Integration and Functional Analysis, Academic Press, (1972).

[Ar16] D. T. de Araújo. Desigualdade de Hölder generalizada com normas mistas e aplicações, Dissertação de Mestrado, UFPB, (2016).

[AM07] D. Achour, L. Mezrag. On the Cohen strongly $p$-summing multilinear operators, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **307** (2007), 550-563.

[Be08] A. T. L. Bernardino. Ideais de aplicações multilineares e polinômios entre espaços de Banach, Dissertação de mestrado, UFPB, (2008).

[BPT15] G. Botelho, D. Pellegrino, E. Teixeira. Fundamentos de Análise Funcional, Sociedade Brasileira de Matemática (2014).

[BPR07] G. Botelho, D. Pellegrino, P. Rueda. On composition ideals of multilinear mappings and homogeneous polynomials. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **43**, (2007), 1139-1155.

[Ca13] J. R. Campos. Cohen and multiple Cohen strongly summing multilinear operators, Linear and Multilinear Algebra Journal, Vol. 62, (2013), 322-346.

[CDM09] D. Carando, V. Dimant, S. Muro. Coherent sequences of polinomial ideals on Banach spaces. Math. Nachr. **282** (2009), 1111-1133.

[Co73] J. S. Cohen. Absolutely $p$-summing, $p$-nuclear operators and their conjugates, Mathematische Annalen, **201** (1973), 177-200.

[Di03] V. Dimant. Strongly p-summing multilinear operators. J. Math. Anal. Appl. **278**, (2003), 182-193.

[DJT95] J. Diestel, H. Jarshow, A. Tonge. Absolutely Summing Operators. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge, (1995).

[DR50] A. Dvoretzky, C. A. Rogers. Absolute and unconditional convergence in normed space, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **36** (1950), 192-197.

[Gr56] A. Grothendieck. Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques, Bol. Soc. Mat. São Paulo 8 (1956), 1-79.

[LP68] J. Lindenstrauss, A. Pełczyński. Absolutely summing operators in $L_p$ spaces and their applications, Studia Math. **29** (1968), 276-326.

[Ma03] M. C. Matos. Fully absolutely summing mappings and Hilbert Schmidt operators. Collect. Math. **54**, (2003), 111-136.

[MP66] B. Mitjagin, A. Pełczyński. Nuclear operators and approximative dimension, Proc. of ICM, Moscow, (1966), 366-372.

[Mo10] T. G. V. Moreira. O Teorema da Dominação de Pietsch Unificado, Dissertação de Mestrado, UFPB, (2010).

[Mu10] J. Mujica. Complex Analysis in Banach Spaces, Dover Publications, Mineola, New York, (2010).

[Ol12] F. R. Oliveira. O Teorema do Tipo Dvoretzky-Rogers para Sequências Misto Somáveis e Resultados de Espaçabilidade, Dissertação de Mestrado, UFU, (2012).

[PS11] D. Pellegrino, J. Santos. Absolutely summing multilinear operators: a panorama, Quaestiones Mathematicae, **34**, (2011), 447-478.

[Pe12] G. M. R. Pereira. O dual de um ideal de operadores e ideais de operadores simétricos entre espaços de Banach, Dissertação de mestrado, UFU, (2012).

[Pe05] A. F. Pereira. O Teorema de Dvoretzky-Rogers, Dissertação de Mestrado, UFRJ, (2005).

[Pi67] A. Pietsch. Absolut $p$-summierende Abbildungen in normierten Räumen. Studia Math. **28**, (1967), 333-353.

[Pi78] A. Pietsch. Operator ideals, Deustscher Verlag der Wiss, 1978 and North Holland, Amsterdam, (1980).

[Pi83] A. Pietsch. Ideals of multilinear functionals, Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals and Their Applications in Theoretical Physics, Teubner-Texte, Leipzig, (1983), 185-199.

[Ri11] J. O. Ribeiro. Ideais coerentes e compatíveis entre espaços de Banach, Tese de Doutorado, UFPE, (2011).

[PR14] J. O. Ribeiro, D. Pellegrino. On multi-ideals and polynomial ideals of Banach spaces: a new approach to coherence and compatibility. Monatshefte fur Mathematik, v. 173, (2014), 378-415.

[Sa08] J. S. Santos. Resultados de Coincidência para aplicações absolutamente somantes, Dissertação de mestrado, UFPB (2008).

[Si10] S. T. Silva. Cotipo e Operadores Lineares Absolutamente Somantes, Dissertação de Mestrado, UFPB (2010).

[To15] E. R. Torres. Hiper-ideais de aplicações multilineares e polinômios homogêneos em espaços de Banach, Tese de Doutorado, USP, (2015).