



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



Sobre Decomposição Dominada Para Fluxos Singulares.

Felipe Fonseca dos Santos

Salvador-BA
Fevereiro/2014

Sobre Decomposição Dominada Para Fluxos Singulares.

Felipe Fonseca dos Santos

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientador: **Prof. Dr. Vítor D. Martins de Araújo**

Salvador-BA
Fevereiro/2014

SOBRE DECOMPOSIÇÃO DOMINADA PARA FLUXOS SINGULARES.

FELIPE FONSECA DOS SANTOS
ORIENTADOR: VÍTOR D. MARTINS DE ARAÚJO

Dissertação de Mestrado submetida ao Colegiado de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal da Bahia - UFBA, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Profa. Dr. Luciana Silva Salgado-IM/UFBA

Profa. Dr. Maria José Pacífico - IM/UFRJ

Prof. Dr. Vítor D. Martins de Araújo - IM/UFBA

Salvador-BA
Fevereiro/2014

Santos, Felipe Fonseca dos.

Sobre decomposição denominada para fluxos singulares /
Felipe Fonseca dos Santos. - 2014. 71 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Vitor D. Martins de Araújo.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal da Bahia,
Instituto de Matemática, Salvador, 2014.

1. Método de decomposição. 2. Análise de sistemas. 3. Teoria
dos sistemas. 4. Hiperbolicidade. I. Araújo, Vitor D. Martins de.
II. Universidade Federal da Bahia. Instituto de Matemática. III.
Título.

CDD - 519.72

CDU - 519.85

Dedico este trabalho
aos meus pais, meus irmãos
e à Milena,
por tudo que fizeram por mim
para a realização deste sonho.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pela sua fidelidade comigo em todos os momentos de minha vida e por estar sempre me protegendo e me dando força.

Ao meu pai Joel e minha mãe Rosely, aos meus irmãos Willian e Liz e minha avó Terezinha. Cujo amor e carinho transmitido durante todo esse tempo não podem ser medidos.

A minha amada Milena, companheira de todas as horas, pelo seu amor, compreensão, confiança e por sempre me fazer acreditar que posso ir mais longe.

Aos amigos de Amargosa e da UFRB que mesmo longe sempre estiveram presentes e aos que tive a felicidade de conhecer durante esse tempo na UFBA.

A todos os meus familiares e aqueles que ao longo do tempo tornaram-se parte da minha família como, Seu João, D. Noêmia, Loi e tia Roque que sempre torceram por mim, transmitindo confiança e alegria.

Não posso aqui deixar de citar minhas tias Dinah, Sarah, Conceição, Sueli e Margarida, meu primo Rafael aos grandes amigos Juracy e tia Lene, cujo apoio foi tão importante nesse período em Salvador.

Ao exemplo de professor e pesquisador a quem tive a honra e a satisfação de ter sido orientado, Vítor Araújo meu muito obrigado pelo incentivo, paciência, dedicação, compromisso, por ter acreditado em mim e pelas grandes oportunidades de aprendizagem a que me proporcionou. A todos os professores da pós-graduação do Instituto de Matemática (IM) da UFBA que tive a oportunidade de ser aluno e aprender algo importante para minha formação.

A todos os funcionários da pós-graduação do IM da UFBA que de alguma forma contribuíram para a conclusão desta dissertação.

Aos professores membros da banca examinadora pela disponibilidade e atenção dispensada ao trabalho, bem como por suas valiosas sugestões.

Agradeço também aos meus professores da UFRB que sempre me incentivaram mesmo quando tudo não passava de um sonho, em especial ao professor Antonio Andrade do Espírito Santo, a quem devo muito por estar aqui e cujo apoio e amizade foram fundamentais nessa trajetória.

Por fim, agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

“Tudo parece impossível até que seja feito.”
Nelson Mandela.

Resumo

Apresentamos resultados que dão condições suficientes para que uma dada decomposição invariante do fibrado tangente de um conjunto compacto invariante Λ de um fluxo C^1 com singularidades (ou não) seja dominada. Em particular, esses resultados reduzem os requisitos para obter hiperbolicidade seccional e hiperbolicidade. Além disso, usamos exemplos para ilustrar que alguns enfraquecimentos desses resultados não são possíveis. Por fim, fazemos uma aplicação dos resultados à situação de fluxos tridimensionais fracamente dissipativos.

Palavras-chave: Decomposição dominada, conjunto parcialmente hiperbólico, hiperbolicidade e hiperbolicidade seccional.

Abstract

We obtain sufficient conditions for an invariant splitting over a compact invariant subset of a C^1 flow X_t to be dominated. In particular, we reduce the requirements to obtain sectional hyperbolicity and hyperbolicity. We also present examples showing that the assumptions are minimal in a certain sense. Finally, we apply the results to weakly dissipative three-dimensional flows.

Keywords: Dominated splitting, partial hyperbolic set, hyperbolicity and sectional-hyperbolicity.

Sumário

Lista de Figuras	xiii
1 Introdução	1
1.1 Hiperbolicidade, hiperbolicidade parcial e dominação	1
1.1.1 Hiperbolicidade	1
1.1.2 Hiperbolicidade parcial e dominação	2
1.1.3 Expansão seccional	3
1.1.4 Hiperbolicidade seccional	4
1.2 Dominação via contração e expansão seccional	4
1.2.1 Hiperbolicidade e expansão seccional	5
1.3 Organização do trabalho	8
2 Resultados Auxiliares	9
2.1 Ângulo entre subespaços	9
2.2 Decomposição dominada e ângulo afastado do zero	12
2.3 Topologia Fraca*	13
2.3.1 O dual e o Teorema de Riesz-Markov	14
2.3.2 Convergências fracas e o Teorema de Banach-Alaoglu	15
2.4 Medidas invariantes	17
2.5 Expoentes de Lyapunov e Teorema Ergódico Multiplicativo	27
3 Exemplos	31
3.1 O exemplo com conjunto invariante pontual	31
3.2 O exemplo com dupla conexão homoclínica	32
3.2.1 Perturbação do campo	34
3.2.2 Obter dupla conexão homoclínica	35
3.2.3 Expansão de área ao longo de W	38
3.2.4 A não dominação	40

4	Resultados Principais	43
4.1	Direção do fluxo na direção não contrativa	43
4.2	Prova do Teorema 1.1.5	45
4.2.1	O Fluxo linear de Poincaré e hiperbolicidade	45
4.2.2	Completude de $(\mathcal{L}, \ \cdot\)$	51
4.2.3	O Lema Hiperbólico	52
4.3	Os Teoremas Principais	54
5	Fluxos fracamente dissipativos e hiperbolicidade	59
5.1	Atrator fracamente dissipativo	59
5.2	Hiperbolicidade via dissipação fraca e contração	60
5.3	Considerações Finais	68
	Bibliografia	69

Lista de Figuras

1.1	Uma conexão de dupla sela homoclínica expandindo área . . .	7
2.1	Ângulo α formado entre a projeção de F sobre E	10
2.2	Cota inferior para o $\sin(E_x, F_x)$	12
3.1	Gráfico da função H	33
3.2	Curvas de nível zero ($H=0$)	33
3.3	Curvas de nível da solução do sistema 3.1	34
3.4	Órbita da $W^s(0,0)$ e da $W^u(0,0)$ do campo $f_0(x,y)$	36
3.5	Órbita de $W^s(0,0)$ e da $W^u(0,0)$ do campo $f_\mu(x,y)$, $\mu \geq 2$. . .	37
3.6	O campo de vetores X	38
3.7	Conexão de dupla sela homoclínica multiplicado por E	40
4.1	Ação do $DX_s(x)$ em \mathcal{L}	49

Capítulo 1

Introdução

A teoria dos sistemas dinâmicos tem uma longa história que remonta às leis da mecânica clássica expressa em termos de equações diferenciais. Um exemplo relevante, nessa teoria, é o problema dos n -corpos: num campo gravitacional, este problema modela, por exemplo, o nosso sistema solar. É na busca da solução de problemas como esse que muitas ferramentas matemáticas foram desenvolvidas, aprofundando a teoria de sistemas dinâmicos.

Desde Poincaré, no final do século XIX, a ênfase ao desenvolvimento da teoria tem sido o estudo do comportamento assintótico das soluções das equações diferenciais, em vez de buscar explicitamente expressões para as soluções.

1.1 Hiperbolicidade, hiperbolicidade parcial e dominação

Seja M uma variedade compacta Riemanniana n -dimensional C^∞ sem bordo. Um campo de vetores X sobre M é uma correspondência associando a cada ponto x de M um vetor $X(x)$ em T_xM , o espaço de vetores tangentes a M no ponto x .

1.1.1 Hiperbolicidade

Destacaremos, dentre as possíveis linhas de pesquisa da teoria dos sistemas dinâmicos, a teoria de sistemas dinâmicos hiperbólicos, desenvolvida nos anos 60 e 70, após o trabalho de Smale, Sinai, Ruelle, Bowen [7, 8, 27, 26] entre outros. Essa teoria busca entender o comportamento

de conjuntos compactos invariantes Λ para fluxos e difeomorfismos em variedades compactas de dimensão finita tendo uma decomposição hiperbólica do espaço tangente. Isto é, se X é um campo de vetores e X_t é o fluxo gerado por X , então dizemos que um conjunto compacto invariante Λ (isto é, $X_t(\Lambda) = \Lambda$, para todo $t \in \mathbb{R}$) é hiperbólico para um fluxo X_t se existe uma decomposição contínua invariante do fibrado tangente $T_\Lambda M = E^s \oplus E^X \oplus E^u$ e existem constantes $C, \lambda > 0$ tais que

$$\|DX_t|_{E_x^s}\| \leq Ce^{-\lambda t}, \quad \|DX_{-t}|_{E_x^u}\| \leq Ce^{-\lambda t}, \quad x \in \Lambda \text{ e } t \in \mathbb{R},$$

ou seja, E^s é uniformemente contraído e E^u é uniformemente expandido por DX_t .

Na expressão acima E^X denota o subfibrado unidimensional gerado pela direção do campo e os subfibrados são DX_t – *invariante*, ou seja, são invariantes pela derivada DX_t do fluxo X_t , no seguinte sentido

$$DX_t(E_x^i) = E_{X_t(x)}^i, \quad x \in \Lambda, \quad t \in \mathbb{R}, \quad i = s, X, u.$$

As normas usadas são decorrentes de uma estrutura Rimaniana fixada na variedade M . Como esta tem dimensão finita são equivalentes, a definição de hiperbolicidade não depende da métrica Riemanniana escolhida.

1.1.2 Hiperbolicidade parcial e dominação

Na tentativa de ampliar o alcance da teoria hiperbólica, motivado, por exemplo, em entender as propriedades do atrator de Lorenz (que é um exemplo de dinâmica não-hiperbólica com singularidade) que surgem várias noções mais fracas de hiperbolicidade. Este é o caso do conceito de decomposição dominada, que será objetivo central deste trabalho. Ela foi introduzida inicialmente nos trabalhos de Mañé [15], Liao [13] e Pliss [22], na tentativa de provar a conjectura de estabilidade¹ de Palis-Smale [21].

Definição 1.1.1. *A decomposição dominada por um conjunto compacto invariante Λ de X é uma decomposição contínua do fibrado tangente sobre Λ , $T_\Lambda M = E \oplus F$ invariante por DX_t com E_x, F_x não triviais ($E_x \neq 0$ e $F_x \neq 0$) para todo $x \in \Lambda$, de tal forma que existem constantes positivas C, λ satisfazendo*

$$\|DX_t|_{E_x}\| \cdot \|DX_{-t}|_{F_{X_t(x)}}\| \leq Ce^{-\lambda t}, \quad \forall x \in \Lambda \text{ e } \forall t > 0. \quad (1.1)$$

¹Tal conjectura foi provada para difeomorfismos por Mañé em [14], e para fluxos, por Hayashi em [10].

Isto significa que a contração/expansão ao longo da direção E é mais forte que qualquer expansão/contração na direção F .

Note que para um operador linear contínuo invertível L , a norma mínima ou conorma é definida como $m(L) := \|L^{-1}\|^{-1} = \inf\{\|L(v)\|; \|v\| = 1\}$. Daí a condição (1.1) da definição (1.1.1) é equivalente a

$$\|DX_t|_{E_x}\| \leq Ce^{-\lambda t} m(DX_t|_{F_x}), \quad \forall x \in \Lambda \text{ e } \forall t > 0. \quad (1.2)$$

Temos ainda a noção de Hiperbolicidade Parcial que surgiu a partir do estudo dos sistemas que robustamente não são hiperbólicos. Veja por exemplo, o livro de Hirsch, Pugh e Shub [11] sobre variedades invariantes e a noção de hiperbolicidade seccional introduzidas em [17] por Metzger e Morales. Pode-se encontrar maiores detalhes em Bonatti-Díaz-Viana [6] e Araújo-Pacífico [1].

Definição 1.1.2. *Um conjunto compacto invariante Λ diz-se parcialmente hiperbólico se existe uma decomposição dominada $T_\Lambda M = E \oplus F$ tal que E é subfibrado uniformemente contraído, ou seja, existe constantes positivas C, λ tal que*

$$\|DX_t|_{E_x}\| \leq Ce^{-\lambda t}, \quad \forall t \geq 0 \quad (1.3)$$

Neste caso F é o subfibrado central de Λ .

Novamente, estas noções mais fracas de hiperbolicidade não dependem da norma Riemanniana fixada em M .

1.1.3 Expansão seccional

Seja M uma variedade compacta n -dimensional, $n \geq 3$, sem bordo e X um campo de vetores de classe pelo menos C^1 .

Motivado pelo Atrator de Lorenz temos a seguinte noção mais fraca que a de expansão uniforme.

Definição 1.1.3. *Um subfibrado DX_t – invariante, $F \subset T_\Lambda M$ é dito “seccionalmente expansor” se $\dim F_x \geq 2$ é constante para todo $x \in \Lambda$ e existem constantes positivas C, λ tais que para todo $x \in \Lambda$ e todo subespaço bidimensional $L_x \subset F_x$ tem-se*

$$|\det(DX_t|_{L_x})| > Ce^{\lambda t}, \quad \forall t > 0. \quad (1.4)$$

Noutras palavras, a expansão seccional é a expansão de área ao longo de todo subespaço bidimensional do subfibrado F . Notamos que um

subespaço invariante expansor com dimensão maior ou igual a 2 é sempre seccionalmente expansor, pois expansão de comprimento de vetores em todas as direções implica em particular expansão de área ao longo de todo plano bidimensional. Mas expansão de área não garante expansão de comprimento de qualquer vetor: tome por exemplo, a transformação linear $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $A(x, y) = (2x, y)$ que tem $\det A = 2$ e autovetor $e_2 = (0, 1)$ com autovalor $\lambda = 1$.

1.1.4 Hiperbolicidade seccional

Uma singularidade do campo vetorial X é um ponto $\sigma \in M$ tal que $X(\sigma) = 0$. O conjunto formado pelas singularidades é denotado por $\text{Sing}(X)$. Dizemos que uma singularidade é hiperbólica se os autovalores da derivada do campo vetorial na singularidade σ , $DX(\sigma)$, têm parte real diferente de zero.

A definição a seguir é uma extensão da noção de hiperbolicidade para fluxos abarcando conjuntos que podem ter singularidades acumuladas por órbitas regulares, que se fez necessária pelo estudo do atrator de Lorenz; ver Tucker [29], Morales-Pacífico-Pujals [18] para fluxos em dimensão três e Metzger-Morales [17] em dimensões maiores.

Definição 1.1.4. *Um conjunto compacto invariante Λ é dito seccionalmente hiperbólico, se Λ é um conjunto parcialmente hiperbólico cujas singularidades são hiperbólicas e o subfibrado central é seccionalmente expansor.*

Mais precisamente, temos que Λ é seccionalmente hiperbólico se existe decomposição contínua e DX_t -invariante $T_\Lambda M = E \oplus F$ que satisfaz (1.1), (1.3) e (1.4) para algumas constantes positivas C, λ .

A noção de hiperbolicidade seccional é uma extensão natural da noção de hiperbolicidade para conjuntos invariantes com singularidades, como mostra o teorema seguinte.

Teorema 1.1.5. *(Lema Hiperbólico). Todo subconjunto compacto invariante sem singularidade de um conjunto seccionalmente hiperbólico é um conjunto hiperbólico.*

1.2 Dominação via contração e expansão seccional e consequências

De posse dessas informações, podemos enunciar o principal resultado deste trabalho.

Teorema 1.2.1. [2, Teorema A] *Seja Λ um conjunto compacto invariante de X tal que cada singularidade neste conjunto seja hiperbólica. Suponha que existe uma decomposição contínua DX_t – invariante do fibrado tangente de Λ , $T_\Lambda M = E \oplus F$, em que E é uniformemente contraído, F é seccionalmente expansor e temos dominação sobre as singularidades de Λ , isto é, para algumas constantes $C, \lambda > 0$ temos*

$$\|DX_t|_{E_\sigma}\| \cdot \|DX_{-t}|_{F_\sigma}\| \leq Ce^{-\lambda t}, \quad \forall \sigma \in \Lambda \cap \text{Sing}(X) \text{ e } t \geq 0. \quad (1.5)$$

Então $T_\Lambda M = E \oplus F$ é uma decomposição dominada.

O Teorema 1.2.1 permite simplificar a verificação da dominação de uma dada decomposição invariante do fibrado tangente de um conjunto compacto invariante de um fluxo com singularidades; a verificação de hiperbolicidade de uma tal decomposição sobre um compacto invariante sem singularidades é o resultado do corolário que segue, usando o Teorema 1.1.5.

Corolário 1.2.2. *Seja Λ um conjunto compacto invariante sem singularidades para um campo de vetores X . Suponha que exista decomposição contínua DX_t – invariante do fibrado tangente de Λ , $T_\Lambda M = E \oplus F$, onde E é uniformemente contraído e F é seccionalmente expansor. Então Λ é um conjunto hiperbólico.*

De posse desses resultados, podemos observar que na Definição 1.1.1 é exigido dominação e, como consequência do Teorema 1.2.1, a suposição de dominação só é necessária para as singularidades, de modo que é possível obter a seguinte definição equivalente de hiperbolicidade seccional.

Definição 1.2.3. *Um conjunto $\Lambda \subset M$ compacto invariante é seccionalmente hiperbólico para o conjunto X se todas as singularidades de Λ são hiperbólicas, e existe uma decomposição contínua DX_t – invariante do fibrado tangente $T_\Lambda M = E \oplus F$, com constantes $C, \lambda > 0$ tal que, para todo $x \in \Lambda$ e todo $t > 0$, temos:*

1. $\|DX_t|_{E_x}\| \leq Ce^{-\lambda t}$;
2. $|\det(DX_t|_{L_x})| > Ce^{\lambda t}$; para todo subespaço linear bidimensional $L_x \subset F_x$;
3. $\|DX_t|_{E_\sigma}\| \cdot \|DX_{-t}|_{F_\sigma}\| \leq Ce^{-\lambda t}, \quad \forall \sigma \in \Lambda \cap \text{Sing}(X)$.

1.2.1 Hiperbolicidade e expansão seccional

Apresentamos aqui algumas motivações para o estudo do Teorema 1.2.1. Sabemos por exemplo, que para um conjunto hiperbólico, ambas as decomposições $(E^s \oplus E^X) \oplus E^u$ e $E^s \oplus (E^X \oplus E^u)$ são dominadas. Além

disso, um conjunto hiperbólico Λ não tem singularidades acumuladas por órbitas regulares, salvo se Λ é composto por um número finito de singularidades hiperbólicas. Na verdade, qualquer singularidade σ acumulada por órbitas regulares sobre um conjunto hiperbólico Λ seria um ponto de descontinuidade para a decomposição hiperbólica, devido à ausência da direção do fluxo no espaço tangente a σ .

O próximo resultado mostra que não podemos ter uma decomposição hiperbólica sem a direção do fluxo, a menos que o conjunto invariante se reduza a um número finito de singularidades isoladas.

Teorema 1.2.4. *Seja Λ um conjunto compacto invariante de X . Suponha que existe uma decomposição contínua DX_t – invariante do fibrado tangente de Λ , $T_\Lambda M = E \oplus F$ e existem constantes $C, \lambda > 0$, tal que para todo $x \in \Lambda$ e todo $t > 0$*

$$\|DX_t|_{E_x}\| \leq Ce^{-\lambda t} \quad e \quad \|DX_{-t}|_{F_{X_t(x)}}\| \leq Ce^{-\lambda t}.$$

Então, Λ é formado por um número finito de singularidades hiperbólicas.

Enfraquecendo as hipóteses e tentando obter apenas a condição mais fraca de dominação da decomposição $E \oplus F$, observamos que não podemos substituir as hipóteses do Teorema 1.2.4, por expansão seccional, nem contração seccional, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 1.2.5. *Considere uma singularidade tipo-Lorenz σ para um fluxo C^1 , $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$, sobre uma 3-variedade M , isto é, σ singularidade hiperbólica de tipo sela tal que os autovalores de $DX(\sigma)$ são reais e satisfazem*

$$\lambda_2 < \lambda_3 < 0 < -\lambda_3 < \lambda_1.$$

Imponha ainda uma condição extra: $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$.

Seja E_i o autoespaço associado ao autovalor λ_i , $i = 1, 2, 3$, e faça $E = E_3$ e $F = E_1 \oplus E_2$. Então, a decomposição é trivialmente contínua (pois $\Lambda = \{\sigma\}$ é apenas um ponto), não dominada (F admite vetores mais fortemente contraídos do que aqueles de E , bastando para isso tomar vetores sobre o eixo E_2) mas E contrai uniformemente comprimento de vetores e F expande área uniformemente, ou seja, F é seccionalmente expandido.

No exemplo acima, temos expansão seccional e contração uniforme ao longo dos subfibrados de uma decomposição contínua, mas a decomposição não é dominada, ver Capítulo 3.

Este exemplo envolve um conjunto invariante trivial: um ponto de equilíbrio. Mas há exemplos com conjuntos invariantes compactos com singularidades acumulados por órbitas regulares, como o exemplo que se segue.

Exemplo 1.2.6. Considere um campo de vetores sobre o plano \mathbb{R}^2 com uma conexão de dupla sela homoclínica que expande volume e multiplique este campo de vetores por uma contração ao longo da direção vertical, veja a Figura 1.1.

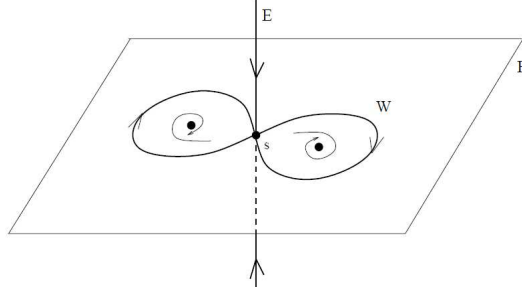


Figura 1.1: Uma conexão de dupla sela homoclínica expandindo área

O conjunto compacto invariante W , para o campo de vetores X , formado pelas conexões homoclínicas juntamente com a singularidade s , admite uma decomposição $E \oplus F$, onde E é a direção vertical e F é a direção do plano. Esta decomposição será contínua, com E uniformemente contraído e F expandindo uniformemente área.

No entanto, poderemos obter uma decomposição não-dominada, bastando para isso escolher a taxa de contração ao longo de E mais fraca do que a taxa de contração na direção estável da singularidade s . Desta maneira a decomposição de $T_s M$ não é dominada, ver maiores detalhes no Capítulo 3.

Isto sugere que o Teorema 1.2.4 pode ser generalizado se assumirmos dominação nas singularidades de Λ juntamente com expansão seccional ao longo de F e contração uniforme ao longo de E sobre órbitas regulares. Este é precisamente o conteúdo do Teorema 1.2.1.

Como aplicação do Teorema 1.2.1 temos os seguintes resultados para fluxos tridimensionais fracamente dissipativos.

Definição 1.2.7. Seja Λ um conjunto compacto invariante de X . Suponha que existe uma decomposição contínua DX_t -invariante do fibrado tangente de Λ . Dizemos que F é um campo contínuo unidimensional com propriedade de contração assintótica para o passado se, e só se, $x \in \Lambda \mapsto F_x$ é contínua e para cada $x \in \Lambda$, F_x é um subespaço unidimensional de $T_x M$ e também

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|DX_{-t}|_{F_x}\| < 0, \quad \forall x \in \Lambda.$$

Teorema 1.2.8. *Seja X um campo vetorial C^1 em uma variedade tridimensional M admitindo uma região armadilha U cujas singularidades (se houver) são hiperbólicas e C^1 -linearizável. Vamos supor que o subconjunto compacto invariante $\Lambda = \Lambda(U)$ seja fracamente dissipativo e dotado de um campo contínuo unidimensional F com propriedade de contração assintótica para o passado.*

Se em cada singularidade $\sigma \in U$ existe uma direção E_σ complementar DX_t -invariante tal que $E_\sigma \oplus F_\sigma = T_\sigma M$ é uma decomposição dominada, então Λ é um conjunto hiperbólico (em particular, Λ não tem singularidades).

Uma vez que a suposição de contração e decomposição dominada é apenas usada para provar a não existência de singularidades em Λ , como consequência da prova temos o seguinte.

Corolário 1.2.9. *Seja X um campo vetorial C^1 em uma variedade tridimensional M admitindo subconjunto compacto invariante Λ , sem singularidades, que é fracamente dissipativo e dotado de um campo contínuo unidimensional F de direções contrativas assintoticamente para o passado. Então Λ é um conjunto hiperbólico.*

1.3 Organização do trabalho

A dissertação está dividida em cinco capítulos, sendo o primeiro deles denominado Introdução, onde foram introduzidas grande parte das definições básicas e notações que necessitaremos ao longo do texto.

No capítulo 2 intitulado “Resultados Auxiliares” como o título sugere, apresentamos (e provamos na sua maioria) diversos resultados que auxiliarão as demonstrações dos principais resultados desse trabalho, como por exemplo os Teoremas 1.2.1, 1.2.4 e o Corolário 1.2.2.

No Capítulo 3 “Exemplos” além de justificar de maneira detalhada o fato de ser exigido a dominação nas singularidades nas hipóteses do Teorema 1.2.1 através dos exemplos 1.2.5 e 1.2.6, faremos a construção do campo de vetores no plano do exemplo 1.2.6, que possui uma conexão de dupla sela homoclínica que expande volume.

No Capítulo 4 “Resultados Principais” será apresentado a noção de Fluxo Linear de Poincaré além das demonstrações dos Teoremas 1.1.5, 1.2.4, 1.2.1 e o Corolário 1.2.2, onde a prova do Corolário será uma consequência imediata do Teorema 1.2.1 junto com o Teorema 1.1.5.

No Capítulo 5, “Fluxo fracamente dissipativos e hiperbolicidade” apresentamos uma aplicação do Teorema 1.2.1 para a situação de fluxos tridimensionais fracamente dissipativos, provando o Teorema 1.2.8 e o Corolário 1.2.9.

Capítulo 2

Resultado Auxiliares

Colocamos aqui alguns resultados técnicos que serão usados como ferramentas nos capítulos seguintes.

2.1 Ângulo entre subespaços

Essa seção será iniciada com a definição de ângulo entre os subespaços, essa definição é inspirada na noção de ângulo entre os subespaços unidimensionais.

Definição 2.1.1. *Dada uma decomposição do fibrado tangente $T_\Lambda M = E \oplus F$ sobre um conjunto compacto invariante Λ , o ângulo $\angle(E_x, F_x)$ entre os fibrados em x é definido por*

$$\sin \angle(E_x, F_x) = \frac{1}{\|\pi(E_x)\|}, \quad x \in \Lambda$$

onde $\pi(E_x) : T_x M \rightarrow E_x$ é a projeção sobre E_x paralela a F_x .

Faremos um breve comentário acerca desta definição.

Considere os subespaços unidimensionais E e F de um espaço normado $(V, \|\cdot\|)$ onde $V = E \oplus F$ e $\pi : V \rightarrow E$ a projeção sobre E paralela a F . Dizemos que

$$\|\pi(E/F)\| = \max\{\|\pi(E/F)v\|; \|v\| = 1, v \in E \oplus F\}.$$

Quando não houver dúvida sobre o subespaço que está projetando-se sobre E denotaremos $\pi(E/F) = \pi(E)$.

Note que podemos considerar o máximo na definição de $\|\pi(E/F)\|$, pois $f(v) = \|\pi(E)v\|$ é composta de funções contínuas, logo é contínua e

está definida num compacto (\mathbb{S}^1). Considere o ângulo α formado entre a projeção de F sobre E no ponto $v_0 \in \mathbb{S}^1$ onde o máximo de $\{\|\pi(E)v\|; \|v\| = 1\}$ é atingido conforme ilustrado na figura 2.1, ou seja, o ângulo α é o ângulo formado entre vetores não nulos de E e F .

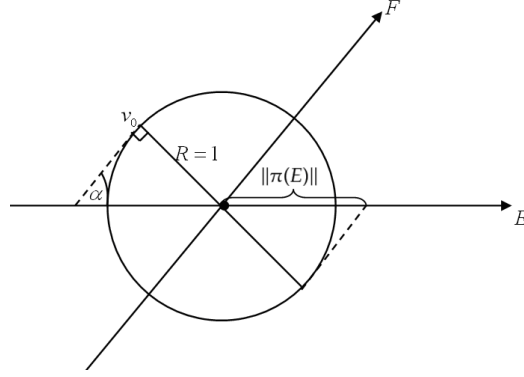


Figura 2.1: Ângulo α formado entre a projeção de F sobre E

Daí temos que $\sin \alpha = \frac{1}{\|\pi(E)\|}$. Se considerarmos E e F em dimensões maiores podemos sempre reduzir ao caso semelhante ao descrito acima. Considere então $\dim E = n$ e $\dim F = m$, ($n, m \geq 1$) e denote $\pi(E^1) = \pi(E^1/F^1)$, a projeção de $E^1 \subset E$ sobre $F^1 \subset F$ no espaço $V^1 = E^1 \oplus F^1$. Desta forma, diremos então que,

$$\begin{aligned}
 \sin \angle(E, F) &= \inf \left\{ \sin \angle(E^1, F^1); \text{com } E^1 \subset E, F^1 \subset F \text{ e } \dim E^1 = \dim F^1 = 1 \right\} \\
 &= \inf \left\{ \frac{1}{\|\pi(E^1/F^1)\|}; \text{com } E^1 \subset E, F^1 \subset F \text{ e } \dim E^1 = \dim F^1 = 1 \right\} \\
 &= \inf \left\{ \underbrace{\inf \left\{ \frac{1}{\|\pi(E^1/F^1)\|} : E^1 \subset E, \dim E^1 = 1 \right\}}_{= \frac{1}{\|\pi(E/F^1)\|}}; F^1 \subset F, \dim F^1 = 1 \right\} \\
 &= \inf \left\{ \frac{1}{\|\pi(E/F^1)\|}; F^1 \subset F, \dim F^1 = 1 \right\} = \frac{1}{\|\pi(E/F)\|} = \frac{1}{\|\pi(E)\|}.
 \end{aligned}$$

Usando a definição acima podemos provar o seguinte lema:

Lema 2.1.2. *Dada uma decomposição do fibrado tangente $T_\Lambda M = E \oplus F$ sobre um conjunto compacto Λ , o seno do ângulo entre os fibrados em x é minorado por*

$\frac{\sqrt{2}}{2} \inf\{\|u - v\| : u \in E_x, v \in F_x \text{ com } \|u\| = \|v\| = 1\}$. Ou seja, para cada $x \in \Lambda$ temos que

$$\sin \angle(E_x, F_x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \inf\{\|u - v\| : u \in E_x, v \in F_x \text{ com } \|u\| = \|v\| = 1\}. \quad (2.1)$$

Demonstração. Seja $x \in \Lambda$, usando a definição 2.1.1 podemos reescrever

$$\begin{aligned} \sin \angle(E_x, F_x) &= \frac{1}{\|\pi(E_x)\|} \\ &= \frac{1}{\sup\left\{\frac{\|\pi(E_x)(u - v)\|}{\|u - v\|}; u \in E_x, v \in F_x \text{ com } \|u - v\| \neq 0\right\}} \\ &= \inf\left\{\frac{\|u - v\|}{\|\pi(E_x)(u - v)\|}; u \in E_x, v \in F_x \text{ com } \|u - v\| \neq 0, \|u\| \neq 0\right\} \\ &= \inf\left\{\frac{\|u - v\|}{\|\pi(E_x)(u)\|}; u \in E_x, v \in F_x \text{ com } \|u - v\| \neq 0, \|u\| \neq 0\right\} \\ &= \inf\left\{\frac{\|u - v\|}{\|u\|}; u \in E_x, v \in F_x \text{ com } \|u - v\| \neq 0, \|u\| \neq 0\right\} \\ &= \inf\left\{\left\|\frac{u}{\|u\|} - \frac{v}{\|u\|}\right\|; u \in E_x, v \in F_x \text{ com } \|u - v\| \neq 0, \|u\| \neq 0\right\} \\ &= \inf\left\{\left\|w - \frac{v}{\|u\|}\right\|; w, u \in E_x, v \in F_x \text{ com } \|w\| = 1, \|u\| \neq 0\right\} \\ &= \inf\{\|w - v\|; w \in E_x, v \in F_x \text{ com } \|w\| = 1\} \\ &= \inf\{\|w - v\|; w \in E_x \cap \mathbb{S}^1, v \in F_x\} = d(E_x \cap \mathbb{S}^1, F_x) = d. \end{aligned}$$

Note que

$$d \leq \inf\{\|w - v\|; w \in E_x \cap \mathbb{S}^1, v \in F_x \cap \mathbb{S}^1\} = d(E_x \cap \mathbb{S}^1, F_x \cap \mathbb{S}^1) = \tilde{d}.$$

Assim podemos comparar os valores de $d = \sin \angle(E_x, F_x)$ e \tilde{d} .

Sabemos que existem $w_0 \in E_x \cap \mathbb{S}^1$ e $v_0 \in F_x$, vetores de $E_x \oplus F_x$ tais que $\|w_0 - v_0\| = d = \sin \angle(E_x, F_x)$. Considere agora $v_1 \in F_x \cap \mathbb{S}^1$ tal que $\inf\{\|w_0 - v\|; v \in F_x \cap \mathbb{S}^1\}$ seja atingido (isso é possível pois $F_x \cap \mathbb{S}^1$ é compacto). Denotemos $\hat{d} = \|w_0 - v_1\| \geq \tilde{d}$ e seja β o menor ângulo formado entre o vetor $(w_0 - v_1)$ e F_x , conforme a figura 2.2.

Note que quando $0 < \alpha \leq \pi/2$ temos que $\pi/4 \leq \beta \leq \pi/2$, pois quando α se aproxima de zero temos que β se aproxima de $\pi/2$, por outro lado quando α é $\pi/2$ temos que \hat{d} será a hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles,

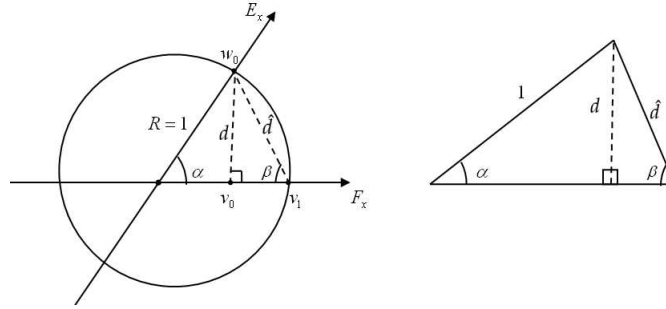


Figura 2.2: Cota inferior para o $\sin(E_x, F_x)$.

logo β medirá $\pi/4$. Para $\alpha \in (\pi/2, \pi)$ teremos a mesma configuração que a anterior.

Observe também que $\sin(\beta) = \frac{d}{\hat{d}}$ donde temos que $\hat{d} = \frac{d}{\sin(\beta)}$ e como $\hat{d} \geq \tilde{d} \geq d$ e $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin(\beta) \leq 1$, já que $\pi/4 \leq \beta \leq \pi/2$, concluímos que $\tilde{d} \leq \hat{d} = \frac{d}{\sin(\beta)} \leq \frac{2}{\sqrt{2}}d$. Ou ainda, $d \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{d}$ o que garante que,

$$\sin \angle(E_x, F_x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \inf\{\|u - v\| : u \in E_x, v \in F_x \text{ com } \|u\| = \|v\| = 1\}.$$

□

2.2 Decomposição dominada e ângulo afastado do zero

Mostraremos agora que se temos decomposição dominada de um dado fibrado tangente isso implica que o ângulo entre os subfibrados da decomposição é afastado do zero. Esse resultado será útil para a demonstração do Teorema 1.1.5 no Capítulo 4.

Lema 2.2.1. *Seja Λ um conjunto compacto invariante de X . Se $T_\Lambda M = E \oplus F$ é uma decomposição dominada do fibrado tangente então o ângulo entre E e F é afastado de zero uniformemente ao longo de Λ , isto é existe $\theta > 0$ tal que $\sin \angle(E_x, F_x) \geq \theta$ para todo x em Λ .*

Demonstração. Para provar esse Lema vamos mostrar que sob suas hipóteses, dados $x \in \Lambda$ e vetores unitários $u \in E_x$ e $v \in F_x$ sempre temos $\|u - v\| \geq \theta > 0$, daí usando o Lema (2.1.2) onde temos por (2.1) que $\sin \angle(E_x, F_x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \inf\{\|u - v\| : u \in E_x, v \in F_x \text{ com } \|u\| = \|v\| = 1\} \geq \theta > 0$

e portanto concluímos que o ângulo entre E_x e F_x é afastado do zero para todo $x \in \Lambda$.

Sejam $x_n \in \Lambda$, $n \in \mathbb{N}$ e considere a decomposição dominada $T_{x_n}M = E_{x_n} \oplus F_{x_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Suponha por absurdo que existam seqüências de vetores unitários $u_n \in E_{x_n}$ e $v_n \in F_{x_n}$ tais que $\|u_n - v_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Assim, temos que $\|DX_t(x_n)(u_n - v_n)\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, mas

$$\begin{aligned} \|DX_t(x_n)(u_n - v_n)\| &\geq \|DX_t(x_n)v_n\| - \|DX_t(x_n)u_n\| \\ &= \|DX_t(x_n)v_n\| \cdot \left| 1 - \frac{\|DX_t(x_n)u_n\|}{\|DX_t(x_n)v_n\|} \right| \\ &\geq m(DX_t|_{F_{x_n}}) \cdot \|v_n\| \cdot \left| 1 - \frac{\|DX_t(x_n)u_n\|}{\|DX_t(x_n)v_n\|} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

para todo $t > 0$ fixo.

Como $0 < m(DX_t|_{F_{x_n}}) < +\infty$ temos que $\left| 1 - \frac{\|DX_t(x_n)u_n\|}{\|DX_t(x_n)v_n\|} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Logo para n suficientemente grande $\frac{\|DX_t(x_n)u_n\|}{\|DX_t(x_n)v_n\|} \geq \frac{1}{2}$ seja qual for $t \geq 0$ fixado.

Usando agora que a decomposição é dominada temos (como vimos em 1.2) que

$$\frac{\|DX_t|_{E_{x_n}}\|}{m(DX_t|_{F_{x_n}})} \leq Ce^{-\lambda t}, \quad \forall x_n \in \Lambda \text{ e } \forall t > 0.$$

Assim, para todo $t \geq 0$ existem $x_n \in \Lambda$ e vetores unitários $u_n \in E_{x_n}$ e $v_n \in F_{x_n}$ tais que

$$Ce^{-\lambda t} \geq \frac{\|DX_t|_{E_{x_n}}\|}{m(DX_t|_{F_{x_n}})} \geq \frac{\|DX_t(x_n)u_n\|}{\|DX_t(x_n)v_n\|} \geq \frac{1}{2}.$$

Absurdo, basta tomar $t > \frac{\ln(2C)}{\lambda}$, já que assim $Ce^{-\lambda t} < \frac{1}{2}$. Portanto, mostramos que existe $\theta > 0$ independente da escolha do ponto $x \in \Lambda$ e das escolhas dos vetores unitários em $u \in E_x$ e $v \in F_x$ tal que $\|u - v\| \geq \theta > 0$, o que pelo Lema 2.1.2 nos permite concluir que $\sin(E_x, F_x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\theta > 0$ e assim provamos o Lema. \square

2.3 Topologia Fraca*

Nessa seção será preparado o terreno para a demonstração da proposição 2.4.5 que é usada para provar o Teorema 1.2.1.

Nela será introduzida a noção de convergência fraca, convergência fraca*, topologia fraca e topologia fraca*, serão também enunciados alguns

resultados clássicos da Análise Funcional, como os Teoremas de Riesz-Markov e Banach-Alaoglu, cujas demonstrações podem ser encontradas em [9, Capítulo 10, seção 2, p.150] e [19, Capítulo 15, seção 2, p.108] respectivamente.

2.3.1 O dual e o Teorema de Riesz-Markov

Definição 2.3.1. Uma aplicação $T : F_1 \longrightarrow F_2$, entre espaços de Banach, é dita linear se para todo $x, y \in F_1$ e $\alpha \in \mathbb{F}$, ($\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) temos $T(x + \alpha y) = T(x) + \alpha T(y)$. E T será contínua se existe $C > 0$ tal que $\|T(x)\|_{F_2} \leq C\|x\|_{F_1}$ para todo $x \in F_1$, onde $\|\cdot\|_i$ é a norma do espaço $i = F_1, F_2$.

Denotamos o espaço vetorial dos funcionais lineares contínuos de F_1 em F_2 por $B(F_1, F_2)$.

Definição 2.3.2. Se F é um espaço normado, então o espaço de Banach $B(F, \mathbb{F})$ será denotado por F^* e chamado de espaço dual de F , cujos elementos são funcionais lineares contínuos definidos em F e tomando valores em $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Definição 2.3.3. Uma medida μ definida em \mathcal{A} , σ -álgebra de X , é dita de probabilidade se $\mu(X) = 1$.

Seja X um espaço métrico compacto e considerem \mathcal{N} o conjunto de medidas de probabilidade de X e $C^0(X) = C^0(X, \mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções contínuas definidas em X e tomando valores em \mathbb{R} , dotado com a norma $\|f\|_0 = \sup_{x \in X, \|x\| \leq 1} |f(x)|$.

Defina para cada $\mu \in \mathcal{N}$, $G_\mu : C^0(X) \longrightarrow \mathbb{R}$, onde $G_\mu(\varphi) = \int_X \varphi d\mu$, que é um funcional linear contínuo na norma $\|\varphi\|_0 := \sup_{x \in X, \|x\| \leq 1} \|\varphi(x)\|$.

De fato, dados $\varphi, \psi \in C^0(X)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ temos, via linearidade da integral, que

$$\begin{aligned} G_\mu(\varphi + \alpha\psi) &= \int_X (\varphi + \alpha\psi) d\mu = \int_X \varphi d\mu + \int_X \alpha\psi d\mu \\ &= \int_X \varphi d\mu + \alpha \int_X \psi d\mu = G_\mu(\varphi) + \alpha G_\mu(\psi). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$|G_\mu(\varphi)| = \left| \int_X \varphi d\mu \right| \leq \int_X |\varphi| d\mu \leq \int_X \|\varphi\|_0 d\mu = \|\varphi\|_0 \int_X d\mu.$$

Como μ é medida de probabilidade de X , temos que $1 = \mu(X) = \int_X d\mu$. Assim $|G_\mu(\varphi)| \leq \|\varphi\|_0$, o que concluí o afirmado.

Podemos ainda observar que G_μ é normalizado, pois $|G_\mu(\varphi)| \leq \|\varphi\|_0$ então $\|G_\mu\| \leq 1$ e como vimos, $G_\mu(\mathbb{I}) = \int_X d\mu = 1$ então $\|G_\mu\| = 1$, onde $\mathbb{I} : X \rightarrow \mathbb{R}$ é dado por $\mathbb{I}(x) = 1$ e $\|\cdot\|$ é a norma do operador.

Note também que G_μ é positivo, já que dado $\varphi \in C^0(X)$, $\varphi \geq 0$ (isto é, $\varphi(x) \geq 0$ para todo $x \in X$) temos que $G_\mu(\varphi) = \int_X \varphi d\mu \geq 0$.

Com essas observações, temos que dada uma medida de probabilidade em um espaço métrico compacto, obtemos um funcional linear contínuo positivo e normalizado. Na verdade esse resultado é apenas uma das consequências do Teorema de Riesz-Markov, que entre outras coisas, caracteriza o dual do espaço dos funcionais lineares contínuos, como podemos ver a seguir.

Teorema 2.3.4. [19, Riesz-Markov] *Sejam X um espaço topológico compacto de Hausdorff e $\mathcal{N}(X)$ o conjunto de medidas complexas borelianas (finitas) sobre X com a norma $\|\mu\| = |\mu|(X)$, $\mu \in \mathcal{N}(X)$. Então, $C^0(X)^* = \mathcal{N}(X)$; mais especificamente, a aplicação $\mathcal{N}(X) \rightarrow C^0(X)^*$, $\mu \rightarrow G_\mu$ com*

$$G_\mu(\varphi) := \int_X \varphi d\mu, \forall \varphi \in C^0(X),$$

é uma isometria linear sobrejetiva. Destaca-se que qualquer elemento positivo $f \in C^0(X)^$ (se $\varphi \geq 0$ então $f(\varphi) \geq 0$) está associado uma única medida positiva boreliana finita μ sobre X .*

Demonstração. Veja [9], Capítulo 10, seção 2, p.150. □

2.3.2 Convergências fracas e o Teorema de Banach-Alaoglu

Serão definidas agora a convergência fraca, convergência fraca*, topologia fraca e topologia fraca*.

Definição 2.3.5. *Uma sequência $\{x_n\} \subset F$ converge fracamente a $x \in F$ se $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x)$ para todo $f \in F^*$.*

Definição 2.3.6. *Sejam $\{T_n\}$ uma sequência de operadores lineares contínuos em $B(F_1, F_2)$ e $T : F_1 \rightarrow F_2$ linear. Diz-se que T_n converge fracamente para T se $|f(T_n(x)) - f(T(x))| \rightarrow 0$ para todo $x \in F_1$ e $f \in F_2^*$.*

Como vimos a convergência fraca num espaço vetorial F é definida através de seu dual F^* . De modo análogo define-se convergência fraca*

em F^* via o bidual de F , F^{**} , onde identificamos os elementos de F com os elementos de F^{**} através da seguinte aplicação $\hat{\cdot} : F \rightarrow F^{**}$ que a cada $\xi \in F$ associa-se $\hat{\xi} \in F^{**}$ por

$$\hat{\xi}(f) := f(\xi), \quad f \in F^*.$$

Definição 2.3.7. Dado um espaço normado F , diz-se que uma sequência $\{f_n\} \subset F^*$ converge fracamente* a $f \in F^*$ se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{\xi}(f_n) = \hat{\xi}(f), \quad \forall \hat{\xi} \in \hat{F} := \hat{\cdot}(F) \subset F^{**}$$

onde denota-se $f_n \xrightarrow{w^*} f$ para indicar que $\{f_n\}$ converge fracamente* a f .

Definição 2.3.8. A topologia fraca em F é a topologia $\tau(F, F^*)$ gerada pelos funcionais lineares em F^* .

Definição 2.3.9. A topologia fraca* em F^* é a topologia $\tau(F^*, \hat{F})$, gerada pelos funcionais lineares em \hat{F} .

Um dos motivos para se introduzir a topologia fraca* é o Teorema de Banach-Alaoglu. É bem conhecido que se $\dim F$ não é finita então a bola unitária fechada não é compacta na topologia usual induzida com a norma de F . No entanto,

Teorema 2.3.10. [19, Capítulo 15, seção 2, p.108, Banach-Alaoglu] Se F é um espaço normado, então a bola fechada $\overline{B}_{F^*}(0; 1)$ é um espaço topológico Hausdorff compacto na topologia fraca*.

Usando os resultados até aqui obtidos, podemos observar que $\mathcal{N} = C^0(X)^*$ (via Teorema 2.3.4) tal que $\overline{B}_{C^0(X)^*}(0; 1)$ é compacta na topologia fraca* pelo Teorema 2.3.10. Como vimos no início desta subseção $\mathcal{N} \subset \overline{B}_{C^0(X)^*}(0; 1)$.

Além disso, \mathcal{N} é fechada na topologia fraca*, pois dados $\mu_n \in \mathcal{N}$ tal que $\mu_n \xrightarrow{w^*} \mu$, temos que

- Se $\mathbb{I} : X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\mathbb{I}(x) = 1$, temos que $G_{\mu_n}(\mathbb{I}) \rightarrow G_{\mu}(\mathbb{I})$, mas $G_{\mu_n}(\mathbb{I}) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $G_{\mu}(\mathbb{I}) = 1$.
- Se $\varphi \in C^0(X)$, $\varphi \geq 0$ com $G_{\mu_n}(\varphi) \rightarrow G_{\mu}(\varphi)$ temos que $G_{\mu_n}(\varphi) \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, logo $G_{\mu}(\varphi) \geq 0$. Assim, $\mu \in \mathcal{N}$ e portanto \mathcal{N} é compacto na topologia fraca*.

2.4 Medidas invariantes

Seja novamente M uma variedade Riemanniana n -dimensional e X um campo de vetores em M e $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ o fluxo gerado por X .

Definição 2.4.1. Dizemos que uma medida de probabilidade μ é invariante com respeito a $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ ou X - invariante se $\mu(X_t(A)) = \mu(A)$, para todo conjunto mensurável A e todo $t \in \mathbb{R}$.

Observação 2.4.2. É possível mostrar que na definição 2.4.1 a condição $\mu(X_t(A)) = \mu(A)$ é equivalente a $\int_X (g \circ X_s) ds = \int_{M(X)} g d\mu$, para todo $s \in \mathbb{R}$ e toda $g \in C^0(M(X), \mathbb{R})$. Para maiores detalhes ver [9, Capítulo 9].

Considere \mathcal{N}_X o conjunto de medidas de probabilidades X -invariantes. Note que para qualquer $\mu \in \mathcal{N}_X$, podemos definir a medida, $\eta_t(A) = \mu(X_t(A)) = \mu(A)$, para todo A μ -mensurável e todo $t \in \mathbb{R}$.

Assim $\eta_t = \mu$ e temos também que $\mathcal{N}_X \subset \mathcal{N}$ é fechado na topologia fraca* (conjunto de pontos fixos de um operador contínuo) portanto \mathcal{N}_X é compacto na topologia fraca*.

Dado um conjunto compacto Λ , X -invariante, dizemos que um subconjunto $Y \subset M_\Lambda$, é um subconjunto de probabilidade total de Λ se $\mu(Y) = 1$ para toda medida X -invariante μ no suporte de Λ .

O resultado mais importante dessa subseção para este trabalho é a proposição que vem a seguir, ela será utilizada para demonstrar o Teorema 1.2.1. Antes necessitamos da seguinte definição.

Definição 2.4.3. Uma família de funções $\{f_t : M \rightarrow \mathbb{R}\}_{t \in \mathbb{R}}$ é um cociclo subaditivo sobre o fluxo X_t em M se, para todo $x \in M$ e todo $t, s \in \mathbb{R}$ temos $f_{t+s}(x) \leq f_s(x) + f_t(X_s(x))$.

Lema 2.4.4. Seja $\phi : \mathbb{R} \times \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua subaditiva sobre X_t , com $\Gamma \subset M$ um conjunto compacto invariante pelo fluxo. Se existe $T_0 > 0$ tal que $\phi(T_0, x) < -\log 2$ para todo $x \in \Gamma$, então existem constantes $c \in \mathbb{R}$ e $0 < \lambda < 1$ tal que $\phi(t, x) < c + t \log \lambda$ para todo $x \in \Gamma$ e $t > 0$.

Demonstração. Demonstração Seja $K = \sup\{\exp(\phi(t, x)); 0 \leq t \leq T_0, x \in \Gamma\}$. Sabemos que K é finito, pois $\exp(\phi(t, x))$ é uma função contínua (composição de funções contínuas) definida num compacto $([0, T_0] \times \Gamma)$ logo atinge máximo. Escolha $\lambda \in (0, 1)$ tal que $2^{-1} > \lambda^{T_0}$ e $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\log K < c + r \log \lambda \quad \text{para } 0 < r < T_0.$$

Então, para todo $x \in \Lambda$ e $t > 0$, podemos escrever $t = nT_0 + r$ com $n = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq \frac{t}{T_0}\} = \left\lfloor \frac{t}{T_0} \right\rfloor$. Daí temos que $t - nT_0 = r < T_0$. Consequentemente,

$$\phi(t, x) = \phi(nT_0 + r, x) \leq \phi(r, X^{nT_0}(x)) + \phi(nT_0, x)$$

e como

$$\begin{aligned} \phi(nT_0, x) &= \underbrace{\phi(T_0 \circ \dots \circ T_0, x)}_{n \text{ fatores}} \\ &\leq \phi(T_0, X^{(n-1)T_0}(x)) + \phi(T_0, X^{(n-2)T_0}(x)) + \dots + \phi(T_0, x) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \phi(T_0, X^{iT_0}(x)) < -n \log 2 \end{aligned}$$

podemos escrever

$$\phi(t, x) \leq \phi(r, X^{nT_0}(x)) - n \log 2.$$

Como $K = \exp \phi(t_0, x_0)$ para algum $t_0 \in [0, T_0]$ e $x_0 \in \Gamma$, temos $\log K = \phi(t_0, x_0) \geq \phi(r, X^{nT_0}(x))$ pois $0 < r < T_0$ e $X^{nT_0}(x) \in \Gamma$. Dessa forma obtemos,

$$\phi(t, x) \leq \log K - n \log 2 < c + r \log \lambda - n \log 2$$

e sendo $2^{-1} < \lambda^{T_0}$, temos que $\log 2^{-1} < \log \lambda^{T_0} \iff -\log 2 < T_0 \log \lambda$. Logo,

$$\phi(t, x) < c + r \log \lambda + nT_0 \log \lambda = c + (r + nT_0) \log \lambda = c + t \log \lambda$$

□

Proposição 2.4.5. *Seja $\{f_t : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}\}_{t \in \mathbb{R}}$ uma família de funções contínuas subaditivas sobre X_t tais que $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{f_t(x)}{t} = \bar{f}(x) < 0$ em um subconjunto de probabilidade total de Λ . Então existem constantes $c > 0$ e $\lambda < 0$ tais que, para cada $x \in \Lambda$ e todo $t > 0$*

$$e^{f_t(x)} \leq c^{-1} e^{\frac{\lambda t}{2}}$$

Para provar essa proposição necessitamos dos seguintes resultados auxiliares.

Lema 2.4.6. *Seja $f : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\int f d\mu < \lambda$ para toda medida μ de probabilidade invariante, então para todo $x \in \Lambda$ existe $t(x) > 1$ tal que*

$$\frac{1}{t(x)} \int_0^{t(x)} f(X_s(x)) ds < \lambda$$

Demonstração. Suponha que o lema seja falso, então existe $x_0 \in \Lambda$ tal que

$$\frac{1}{t(x_0)} \int_0^{t(x_0)} f(X_s(x_0)) ds \geq \lambda, \text{ para todo } t > 0.$$

Defina $\mu_t : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\mu_t(A) = \frac{1}{t} \int_0^t \delta_{X_s(x_0)}(A) ds$, onde \mathcal{A} é a σ -álgebra Boreliana e δ_x é a medida de Dirac em x . Note que μ_t é medida σ -aditiva, pois $\mu_t(\emptyset) = \frac{1}{t} \int_0^t \delta_{X_s(x_0)}(\emptyset) ds = 0$ e dados $A_1, \dots, A_n, \dots \subset \mathcal{A}$ disjuntos dois a dois, tal que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset \mathcal{A}$ temos que

$$\begin{aligned} \mu_t\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \frac{1}{t} \int_0^t \delta_{X_s(x_0)}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) ds \\ &= \frac{1}{t} \int_0^t \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{X_s(x_0)}(A_i) ds, \quad (\text{já que, } \delta_{X_s(x_0)} \text{ é medida } \sigma\text{-aditiva}) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \delta_{X_s(x_0)}(A_i) ds = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_t(A_i). \end{aligned}$$

Além disso, temos que μ_t é medida de probabilidade já que, $\mu_t(\Lambda) = \frac{1}{t} \int_0^t \delta_{X_s(x_0)}(\Lambda) ds = \frac{1}{t} \int_0^t ds = 1$. Tome agora $\mu_{t_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{w^*} \mu$, um ponto de acumulação da sequência, com $t_k \rightarrow \infty$.

Temos que μ é invariante, já que, dado $g \in C^0(\Lambda, \mathbb{R})$ (logo, $g \circ X_s$ é contínua) e usando a definição de μ temos

$$\begin{aligned} \int (g \circ X_s) d\mu &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int (g \circ X_s) d\mu_k \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \int_0^{t_k} (g \circ X_s) \circ X_u du \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \int_0^{t_k} g(X_{s+u}) du \quad (2.3)$$

Note que a igualdade em (2.2) vem do fato de que

$$\int \chi_A d\mu_{t_k} = \mu_{t_k}(A) = \frac{1}{t_k} \int_0^{t_k} \delta_{X_s(x)}(A) ds = \frac{1}{t_k} \int_0^{t_k} \chi_A(X_s(x)) ds,$$

pois $\delta_{X_s(x)}(A) = \chi_A(X_s(x))$ onde $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$ é chamada de função característica de A .

Assim, sendo φ uma função mensurável, usaremos

Proposição 2.4.7. *Se $\varphi : X \rightarrow [0, +\infty]$ é mensurável, então existem $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{A}$ (não disjuntos em geral) e $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots \geq 0$ números reais tais que $\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \chi_{A_i}$.*

Demonstração da Proposição 2.4.7: Ver [9, Proposição 3.1.6] páginas 48 e 49. \square

Desse modo verificamos a validade da igualdade em (2.2), pois

$$\begin{aligned} \int \varphi d\mu_{t_k} &= \int \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \chi_{A_i} d\mu_{t_k} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \int \chi_{A_i} d\mu_{t_k} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \frac{1}{t_k} \int_0^{t_k} \chi_{A_i}(X_s(x)) ds \\ &= \frac{1}{t_k} \int_0^{t_k} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \chi_{A_i}(X_s(x)) ds = \frac{1}{t_k} \int_0^{t_k} \varphi(X_s(x)) ds. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Para $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ mensurável, usamos o fato de $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$, onde $\varphi^\pm : X \rightarrow [0, +\infty]$ são mensuráveis e definidas como $\varphi^+(x) = \max\{\varphi(x), 0\}$ e $\varphi^-(x) = \max\{-\varphi(x), 0\}$. Assim, usando a linearidade da integral e (2.4) obtemos que

$$\begin{aligned} \int \varphi d\mu_{t_k} &= \int \varphi^+ d\mu_{t_k} - \int \varphi^- d\mu_{t_k} = \frac{1}{t_k} \int_0^{t_k} \varphi^+(X_s(x)) ds - \frac{1}{t_k} \int_0^{t_k} \varphi^-(X_s(x)) ds \\ &= \frac{1}{t_k} \int_0^{t_k} (\varphi^+(X_s(x)) - \varphi^-(X_s(x))) ds = \frac{1}{t_k} \int_0^{t_k} \varphi(X_s(x)) ds. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Voltando para a equação (2.3), podemos escrever

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \int_0^{t_k} g(X_{s+u}) du &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \int_0^{t_k} [g(X_u) - g(X_u) + g(X_{s+u})] du \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \int_0^{t_k} g(X_u) du + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \int_0^{t_k} (-g(X_u) + g(X_{s+u})) du. \end{aligned}$$

Como $\int_0^{t_k} g(X_{s+u}) du = \int_s^{t_k} g(X_u) du$, podemos escrever

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \int_0^{t_k} (-g(X_u) + g(X_{s+u})) du = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \left(- \int_0^{t_k} g(X_u) du + \int_s^{t_k} g(X_u) du \right) = \\ & = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \left(- \int_0^s g(X_u) du - \int_s^{t_k} g(X_u) du + \int_s^{t_k} g(X_u) du + \int_{t_k}^{t_k+s} g(X_u) du \right) = \\ & = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \left(- \int_0^s g(X_u) du + \int_{t_k}^{t_k+s} g(X_u) du \right). \end{aligned}$$

Usando a norma $\|g \circ X_u\|_\infty := \sup_{x \in M(X)} |g \circ X_u(x)| \leq \|g\|_\infty$, lembrando que g é contínua e $M(X)$ é compacto, (logo $\|g\|_\infty$ é finito), s é constante e $t_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty$, ficamos com

$$\begin{aligned} \left| \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \int_0^{t_k} [-g(X_u) + g(X_{s+u})] du \right| &= \left| \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \left(- \int_0^s g(X_u) du + \int_{t_k}^{t_k+s} g(X_u) du \right) \right| \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|t_k|} \left(\left| \int_0^s g(X_u) du \right| + \left| \int_{t_k}^{t_k+s} g(X_u) du \right| \right) \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|t_k|} \left(\int_0^s |g(X_u)| du + \int_{t_k}^{t_k+s} |g(X_u)| du \right) \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|t_k|} \left(\|g\|_\infty \int_0^s du + \|g\|_\infty \int_0^s du \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2\|g\|_\infty \cdot s}{|t_k|} = 0. \end{aligned}$$

E assim, concluímos que μ é invariante, pois

$$\int (g \circ X_s) d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \int_0^{t_k} g(X_u) du \underbrace{=}_{\text{por (2.5)}} \lim_{k \rightarrow \infty} \int g d\mu_k = \int g d\mu.$$

Como f é contínua,

$$\int f d\mu = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int f d\mu_{t_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{t_k(x_0)} \int_0^{t_k(x_0)} f(X_s(x_0)) ds \geq \lambda.$$

Essa contradição com a suposição $\int f d\mu < \lambda$ finaliza a demonstração do lema. \square

Note que durante a demonstração do Lema 2.4.6 mostramos o Corolário a seguir, cujo resultado será útil nas demonstrações da Proposição 2.4.5 e do Teorema 1.2.1 sempre que utilizarmos os Teoremas Ergódicos Subaditivo 2.4.10 e Multiplicativo 2.5.2.

Corolário 2.4.8. *Seja $f : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ uma transformação contínua num espaço métrico compacto. Então existe pelo menos uma medida de probabilidade em Λ que é f -invariante.*

Preparando ainda as ferramentas para a demonstração da Proposição 2.4.5, temos o seguinte resultado:

Corolário 2.4.9. *Seja $f : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\int f d\mu < \lambda$ para toda medida μ de probabilidade invariante. Então existe $T > 0$ tal que, para todo $t \geq T$, temos*

$$\frac{1}{t} \int_0^t f(X_s(x)) ds < \lambda, \quad \forall x \in \Lambda.$$

Demonstração. Pelo lema 2.4.6 temos que para cada $x \in \Lambda$ existe $t(x) > 1$ e

$$\varepsilon(x) > 0 \text{ tal que } \int_0^{t(x)} f(X_s(x)) ds < t(x)(\lambda - \varepsilon(x)).$$

Como f é contínua e $\psi : [0, t(x)] \times \Lambda \rightarrow \Lambda$ definida por $\psi(s, y) = X_s(y)$ é uniformemente contínua então $(f \circ X_s)(y)$ varia continuamente com y . Assim existe U_x vizinhança de x tal que para todo $y \in U_x$ temos

$$\int_0^{t(x)} f(X_s(y)) ds < t(x)(\lambda - \varepsilon(x)).$$

Pela compacidade de M , podemos obter uma cobertura finita, digamos $U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}$ e defina $T_M = \max\{t(x_1), \dots, t(x_n)\}$ e $\varepsilon = \min\{\varepsilon(x_1), \dots, \varepsilon(x_n)\}$.

Considere agora $T_k : M(X) \rightarrow [0, \infty)$ definida por indução do seguinte modo

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 0 \\ T_1(x) &= \min\{t(x_i); x \in U_{x_i}, i = 1, \dots, n\} \\ T_{k+1}(x) &= T_k(x) + T_1(X_{T_k(x)}(x)). \end{aligned}$$

Assim para cada $x \in M$ e $t \geq 0$ existe k tal que $T_k(x) \leq t \leq T_{k+1}(x)$, pois $T_k(x) \nearrow +\infty$ quando $k \rightarrow +\infty$.

Vamos analisar inicialmente o que ocorre com $\int_0^{T_k(x)} f(X_s(x)) ds$. Pela definição de $T_k(x)$ podemos escrever $T_k(x) = T_1(X_{T_1(x)}(x)) + T_1(X_{T_2(x)}(x)) + \dots + T_1(X_{T_{k-1}(x)}(x))$, assim

$$\begin{aligned} \int_0^{T_k(x)} f(X_s(x)) ds &= \sum_{i=0}^{k-1} \int_{T_i(x)}^{T_{i+1}(x)} f(X_s(x)) ds = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{T_i(x)}^{T_i(x)+T_1(X_{T_i(x)}(x))} f(X_s(x)) ds \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \int_0^{T_1(X_{T_i(x)}(x))} \underbrace{f(X_{T_i(x)}(x) + u(x))}_{=s} du. \end{aligned}$$

Denotando $x_i = X_{T_i(x)}(x)$ ficamos com

$$\int_0^{T_k(x)} f(X_s(x)) ds = \sum_{i=0}^{k-1} \int_0^{T_1(x_i)} f(X_u(x_i)) du \leq \sum_{i=0}^{k-1} T_1(x_i)(\lambda - \varepsilon(x)) \leq T_k(x)(\lambda - \varepsilon).$$

Observe agora o que ocorre com $\int_0^t f(X_s(x)) ds$ onde $T_k(x) < t \leq T_{k+1}(x)$:

$$\int_0^t f(X_s(x)) ds = \int_0^{T_k(x)} f(X_s(x)) ds + \int_{T_k(x)}^t f(X_s(x)) ds.$$

Como vimos que $\int_0^{T_k(x)} f(X_s(x)) ds \leq T_k(x)(\lambda - \varepsilon)$, resta observar o que

ocorre com $\int_{T_k(x)}^t f(X_s(x)) ds$. Sabe-se que

$$\int_{T_k(x)}^t f(X_s(x)) ds \leq \sup_{T_k(x) \leq s \leq t} |f(X_s(x))|(t - T_k(x)) \leq \|f\|_0 \underbrace{(T_{k+1}(x) - T_k(x))}_{=T_1(X_{T_k(x)}(x))} \leq \|f\|_0 T_M$$

Deste modo temos que

$$\begin{aligned} \int_0^t f(X_s(x)) ds &\leq T_k(x)(\lambda - \varepsilon) + \|f\|_0 T_M \\ &= t \left(\frac{T_k(x)}{t} (\lambda - \varepsilon) + \frac{\|f\|_0 T_M}{t} \right) \\ &\leq t \left(\lambda - \varepsilon + \frac{\|f\|_0 T_M}{t} \right). \end{aligned}$$

Daí para $t > \frac{\|f\|_0 T_M}{\varepsilon}$ (ou seja, $\frac{\|f\|_0 T_M}{t} < \varepsilon$) temos,

$$\int_0^t f(X_s(x)) ds \leq t\lambda, \quad \forall x \in M(X).$$

□

Um resultado forte de que vamos precisar é o seguinte.

Teorema 2.4.10. [31, Teorema Ergódico Subaditivo] *Seja (M, \mathcal{A}, μ) um espaço de probabilidade e seja μ uma medida invariante por $T : M \rightarrow M$. Seja $\{f_n\}_{i=1}^\infty$ uma sequência de funções mensuráveis $f_n : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ que satisfazem as condições:*

- $f_1^+ \in L^1(\mu) := L^1(X, \mathcal{A}, \mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ é mensurável e } \int |f| d\mu < \infty\}$, onde $f_1^+ = \max\{0, f\}$;
- Para cada $k, n \geq 1$, $f_{k+n} \leq f_n + f_k \circ T^n$ (subaditividade com respeito a T).

Então existe uma função mensurável $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ tal que

$$\begin{aligned} f^+ \in L^1(\mu), \quad f \circ T = f, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} f_n = f \text{ e} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int f_n d\mu = \inf_n \frac{1}{n} \int f_n d\mu = \int f d\mu. \end{aligned}$$

Demonstração. Consultar apêndice A de [23].

□

Se $\{f_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ é família de funções mensurável subaditiva sobre o fluxo X_t e μ é medida de probabilidade X -invariante que satisfaz $\sup_{0 \leq t \leq 1} f_t^+ \in L^1(\mu)$, então na versão acima do Teorema Ergódico Subaditivo podemos substituir $n \in \mathbb{N}$ por $t \in [0, +\infty)$ e T por X_t para obter $\frac{1}{t}f_t \rightarrow f$ e $\frac{1}{t} \int f_t d\mu \rightarrow \int f d\mu = \inf\{\frac{1}{t} \int f_t d\mu, t > 0\}$.

Agora estamos prontos para provar a proposição 2.4.5.

Demonstração da Proposição 2.4.5: Temos por hipótese que $\bar{f}(x) < 0$ em $\mu - q.t.p$ (isto é, $\mu(\{x \in M(X); \bar{f}(x) \geq 0\}) = 0$) para qualquer medida μ -invariante em um conjunto de probabilidade total, pelo Teorema Ergódico Subaditivo sabemos que $\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{f_t(x)}{t} = \bar{f}(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f_t(x)}{t}$ em um conjunto de probabilidade total e $\int \bar{f} d\mu = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int \frac{f_t}{t} d\mu < 0$ para toda medida invariante μ . Portanto existe $t(\mu) \in \mathbb{R}^+$ tal que para $t \geq t(\mu)$

$$\int \frac{f_t}{t} d\mu < \frac{1}{2} \int \bar{f} d\mu < 0.$$

Como para a função contínua $\frac{f_t}{t} : M(X) \rightarrow \mathbb{R}$ temos que a função $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $G(\eta) := \int \frac{f_t}{t} d\eta$ é também contínua na topologia fraca*, como foi mostrado na seção 2.3.

Desse modo, existe U_μ vizinhança aberta de $\mu \in \mathcal{N}_X \subset \mathcal{N}$ tal que

$$G(\eta) = \int \frac{f_t}{t} d\eta < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \int \bar{f} d\mu \right)$$

Assim, para cada $\mu \in \mathcal{N}_X$, existem $t(\mu) \in \mathbb{R}^+$ e U_μ tais que

$$\int \frac{f_t}{t} d\eta < \frac{1}{4} \int \bar{f} d\mu, \quad \forall \eta \in U_\mu, \quad e \quad \forall t \geq t(\mu).$$

Deste modo temos que $\{U_\mu\}_{\mu \in \mathcal{N}_X}$ é uma cobertura aberta de \mathcal{N}_X e, como \mathcal{N}_X é compacto na topologia fraca*, \mathcal{N}_X admite subcobertura finita, digamos $U_{\mu_1}, \dots, U_{\mu_n}$.

Seja $t(i) = t(\mu_i)$ para $i = 1, \dots, n$ (podemos assumir sem perda de generalidade que $t(i) > 1$) e defina

$$\lambda = \max_{i=1, \dots, n} \left\{ \frac{1}{4} \int \bar{f} d\mu_i \right\} < 0.$$

Em particular, para toda medida invariante μ , existe algum i tal que $\mu \in U_{\mu_i}$ e $\int f_{t(i)} d\mu < \lambda t(i)$, (pois $\int \frac{f_{t(i)}}{t(i)} d\mu < \frac{1}{4} \int \bar{f} d\mu_i < \lambda$). Usando a subaditividade e o fato de que μ é invariante, obtemos para qualquer k inteiro positivo

$$\begin{aligned} \frac{1}{kt(i)} \int f_{kt(i)} d\mu &\leq \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{t(i)} \int f_{t(i)}(X_{j t(i)}(x)) d\mu = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{t(i)} \int f_{t(i)}(x) d\mu \\ &\leq \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{t(i)} \int f_{t(i)}(x) d\mu = \frac{1}{k} \cdot \frac{k}{t(i)} \int f_{t(i)}(x) d\mu \\ &= \frac{1}{t(i)} \int f_{t(i)}(x) d\mu < \frac{1}{t(i)} \cdot \lambda t(i) = \lambda. \end{aligned}$$

Assim, se $L = t(1)t(2)\cdots t(n)$ então $\int f_L d\mu < \lambda L$ e pelo Corolário 2.4.9 aplicado as funções contínuas $\frac{f_L}{L}$, temos que existe algum T tal que para todo $t > T$ e qualquer $x \in M(X)$, temos:

$$\frac{1}{t} \int_0^t \frac{1}{L} f_L(X_s(x)) ds < \lambda.$$

Como $f_{kL}(x) \leq \sum_{j=0}^{k-1} f_L(X_{jL}(x))$, então para todo $0 \leq s \leq L$ temos

$$\begin{aligned} f_{kL}(x) &= f_{s+kL-s}(x) \leq f_s(x) + f_{kL-s}(X_s(x)) = f_s(x) + f_{(k-1)L+L-s}(X_s(x)) \\ &\leq f_s(x) + f_{(k-1)L}(X_s(x)) + f_{L-s}(X_{(k-1)L}(X_s(x))) \\ &\leq f_s(x) + \left(\sum_{j=0}^{k-2} f_L(X_{jL+s}(x)) \right) + f_{L-s}(X_{(k-1)L+s}(x)). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Integrando (2.6) ficamos com

$$L f_{kL}(x) = \int_0^L f_{kL}(x) ds \leq \int_0^L \sum_{j=0}^{k-2} f_L(X_{jL+s}(x)) ds + \int_0^L (f_{L-s}(X_{(k-1)L+s}(x)) + f_s(x)) ds.$$

Sabendo que $\{f_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ é uma família de funções contínuas sobre uma variedade compacta, temos que $B = \sup_{t \in [0, L]} \sup_{x \in M(X)} |f_t(x)| < \infty$. Assim,

$$f_{kL}(x) \leq \int_0^{(k-1)L} \frac{1}{L} f_L(X_s(x)) ds + 2B.$$

Em particular, $f_{kL}(x) \leq L(k-1)\lambda + 2B$ se $(k-1)L > T$.

Considere agora $t \geq T + 2L$. Escrevendo $t = kL + s$, onde $s \in [0, L)$, temos $f_t(x) \leq f_{kL}(x) + f_s(X_{kL}(x))$. Assim, $f_t(x) \leq L(k-1)\lambda + 3B$. Uma vez que $t = kL + s > T + L + L$, então $kL > T + L$, ou seja $(k-1)L > T$ (e $t = kL + s > (k-1)L$), assim

$$\frac{f_t(x)}{t} \leq \frac{L(k-1)\lambda}{t} + \frac{3B}{t} \leq \lambda + \frac{3B}{t}.$$

Note que $\frac{3B}{t} \leq -\frac{\lambda}{2}$ se, e só se, $t \geq \frac{6B}{-\lambda}$. Portanto, tomando $K = \max\left\{T_0 + 2L, \frac{6B}{-\lambda}\right\}$ obtemos para todo $x \in M(X)$ e $t \geq K$,

$$\frac{f_t(x)}{t} \leq \lambda + \frac{3B}{t} \leq \lambda - \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2}, \text{ o que garante que } e^{f_t(x)} \leq e^{\frac{\lambda t}{2}}.$$

Por fim, defina $c^{-1} = \sup_{s \in [0, K], x \in M(x)} \left\{e^{f_s(x) - \frac{\lambda s}{2}}, 1\right\}$. Daí obtemos $e^{f_s(x) - \frac{\lambda s}{2}} \leq c^{-1}$, ou seja, $e^{f_t(x)} \leq c^{-1} e^{\frac{\lambda t}{2}}$ para todo $s \in [0, K]$ e todo $x \in M(X)$. Como $c^{-1} \geq 1$ então $e^{f_t(x)} \leq c^{-1} e^{\frac{\lambda t}{2}}$ para todo $t > 0$ e todo $x \in M(X)$, o que conclui a prova da proposição. \square

2.5 Expoentes de Lyapunov e Teorema Ergódico Multiplicativo

O seguinte Teorema é uma vasta generalização da idéia de diagonalização de um operador linear. Ele garante que o produto de uma sequência infinita de operadores lineares é assintoticamente próximo de um operador diagonalizável, se os operadores lineares forem escolhidos de maneira aleatória. Para formalizar esta idéia, consideremos uma função $A : M \rightarrow GL(\mathbb{R}^k)$, que associa a cada ponto x no espaço de probabilidade (M, \mathcal{A}, μ) o operador linear $A(x)$, e a transformação $T : M \rightarrow M$ que preserva μ (isto é, μ é medida de probabilidade T -invariante; $\mu(T^{-1}(E)) = \mu(E)$ para todo $E \in \mathcal{A}$).

Teorema 2.5.1. [16, Capítulo 4, Teorema Ergódico Multiplicativo] *Seja T uma transformação invertível mensurável invariante de um espaço de probabilidade (X, \mathcal{A}, μ) . Seja $A : X \rightarrow GL(\mathbb{R}^k)$ uma função mensurável com $\log^+ \|A(x)\| \in L^1(\mu)$ e $\log^+ \|(A(x))^{-1}\| \in L^1(\mu)$, onde $\log^+ = \max\{0, \log\}$ e $L^1(\mu)$ o conjunto das funções μ -integráveis em X . Então existe $R \in \mathcal{A}$ com $TR = R$ e $\mu(R) = 1$ tal que*

para cada $x \in R$ existe uma decomposição em soma direta de \mathbb{R}^k em subespaços $\mathbb{R}^k = W^{(1)}(x) \oplus W^{(2)}(x) \oplus \dots \oplus W^{(s(x))}(x)$ com

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log \|A(T^{n-1}x) \circ \dots \circ A(Tx) \circ A(x)(v)\| = \lambda^{(i)}(x)$$

e $\lim_{n \rightarrow \infty} \log \|(A(T^{-1}x) \circ \dots \circ A(T^{-n}x))^{-1}(v)\| = -\lambda^{(i)}(x)$ se $0 \neq v \in W^{(i)}(x)$.

A função $\lambda^{(1)}(x) \neq -\infty$ e $A(x)W^{(i)}(x) = W^{(i)}(Tx)$ se $i \leq s(x)$.

Demonstração. Consultar [23]. □

Vamos necessitar de uma versão deste resultado para fluxos. Para isso consideramos um “cociclo multiplicativo linear” como segue.

Seja $A : E \times \mathbb{R} \rightarrow E$ uma função mensurável de Borel dada pela coleção de bijeções linear.

$$A_t(x) : E_x \rightarrow E_{X_t(x)}, \quad x \in M, t \in \mathbb{R},$$

onde M é o espaço base (nós assumimos que é uma variedade) de E fibrado vetorial de dimensão finita. Supomos que $A_t(x)$ satisfaz as propriedades de cociclo sobre X_t

$$A_0(x) = Id, A_{t+s}(x) = A_t(X_s(x)) \circ A_s(x), \quad x \in M, t, s \in \mathbb{R},$$

com $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ o fluxo suave sobre M . Notamos que para cada $t > 0$ fixo a função $A_t : E \rightarrow E, v_x \in E_x \mapsto A_t(x) \cdot v_x \in E_{X_t(x)}$ é um isomorfismo.

Assumamos que em cada fibrado E_x está definido um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ que depende suavemente da fibra (análogo a uma métrica Riemanniana do fibrado tangente de uma variedade).

O exemplo natural de cociclo multiplicativo linear ao longo de um fluxo X_t em uma variedade é a derivada do fluxo, $A_t(x) = DX_t(x)$ sobre o fibrado tangente TM de uma variedade compacta de dimensão finita M , pois $A_0(x) = DX_0(x) = Id$ e $A_{t+s}(x) = DX_{t+s}(x) = D(X_t(X_s(x))) = DX_t(X_s(x)) \circ DX_s(x) = A_t(X_s(x)) \circ A_s(x), x \in M, t, s \in \mathbb{R}$.

Vamos utilizar um exemplo concreto dessa estrutura, o cociclo derivado $A_t(x) = DX_t|_{E_x}$ restrito a subfibrado contínuo e DX_t -invariante do fibrado tangente TM dado por E .

Teorema 2.5.2. [5, Capítulo 3, Teorema Ergódico Multiplicativo] *Sejam $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ um fluxo sobre M com probabilidade μ, X -invariante e A cociclo linear multiplicativo sobre X_t definido num fibrado vetorial E sobre M que satisfazem*

$$\sup_{-1 \leq t \leq 1} \log^+ \|A_t\| \in L^1(M, \mu).$$

Então existe decomposição $E_x = E_x^1 \oplus \cdots \oplus E_x^{s(x)}$ definidas para μ -quase todo ponto x tal que $s(x)$ e os expoentes de Lyapunov

$$X_i(x) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{|t|} \log \|A_t(x) \cdot v\|, \quad v \in E_x^i \setminus \{\vec{0}\}, \quad i = 1, \dots, s(x)$$

são funções mensuráveis, limitadas e X -invariantes. Além disto, dado subconjuntos disjuntos e não vazios $I, J \subset \{1, \dots, s(x)\}$ temos

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{|t|} \log \sin \angle((\oplus_{i \in I} E_x^i), (\oplus_{j \in J} E_x^j)) = 0.$$

De acordo com o Teorema Ergódico Multiplicativo de Oseledets [4, 5], no caso particular de $A_t(x) = DX_t|_{E_x}$ temos $\sup_{-1 \leq t \leq 1} \log \|A_t(x)\|$ função limitada de $x \in \Lambda$, logo existe um subconjunto R de Λ com probabilidade total de tal forma que para todo $x \in R$, existe uma decomposição

$$E_x = E_1(x) \oplus \cdots \oplus E_{s(x)}(x) \quad (2.7)$$

que é DX_t -invariante e os seguintes limites existem, e são conhecidos como os expoentes de Lyapunov em x ao longo de E

$$\lambda_i(x) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \log \|DX_t(x) \cdot v\|, \quad (2.8)$$

para todo $v \in E_i(x) \setminus \{0\}$, $i = 1, \dots, s(x)$. Ordenamos esses números de modo crescente, ou seja, $\lambda_1(x) < \cdots < \lambda_{s(x)}(x)$. Um destes subfibrados é dado pela direção do fluxo (em pontos não singulares do fluxo) e o correspondente expoente de Lyapunov é zero, já que $\|DX_t(X(x))\| = \|X(X_t(x))\|$ e portanto $\frac{1}{t} \log \|DX_t(X(x))\| = \frac{1}{t} \log \|X(X_t(x))\| \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 0$, para $x \in R$ não singular, pois $\|X(X_t(x))\|$ é limitado (função contínua definida num compacto).

As funções s e λ_i são mensuráveis e invariantes pelo fluxo, ou seja, $s(X_t(x)) = s(x)$ e $\lambda_i(X_t(x)) = \lambda_i(x)$ para todos os $x \in R$ e $t \in \mathbb{R}$. A decomposição (2.7) também depende mensuravelmente do ponto base $x \in R$.

Se F é um subfibrado invariante mensurável de TM então, por “expoentes de Lyapunov de F ” entenderemos os expoente de Lyapunov dos vetores não nulos em F .

Observemos que o Teorema Ergódico Multiplicativo Oseledets [4, 5] garante a existência de expoentes de Lyapunov em um subconjunto $R \subset \Lambda$ de probabilidade total e prevê a seguinte propriedade para os expoentes de Lyapunov e subespaços de Lyapunov.

Para qualquer par de subconjuntos disjuntos $I, J \subset \{1, \dots, s(x)\}$, o ângulo entre os espaços $E_I(x) = \bigoplus_{i \in I} E_i(x)$ e $E_J(x) = \bigoplus_{j \in J} E_j(x)$ cresce subexponencialmente ao longo da órbita de todo ponto regular x , isto é

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \log \sin \angle(E_I(X_t(x)), E_J(X_t(x))) = 0, \quad x \in R$$

o que implica, em particular, que para qualquer par $i, j \in \{1, \dots, s(x)\}$ com $i \neq j$ e $v_i \in E_i(x) \setminus \vec{0}$, $v_j \in E_j(x) \setminus \vec{0}$

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \log |\det(DX_t|_{\text{ger}\{v_i, v_j\}})| = \lambda_i(x) + \lambda_j(x)$$

onde $\text{ger}\{v_i, v_j\}$ é o espaço gerado entre os vetores v_i e v_j . De fato, como $|\det(DX_t|_{\text{ger}\{v_i, v_j\}})| = \|DX_t \cdot v_i\| \cdot \|DX_t \cdot v_j\| \sin \angle(v_i, v_j)$ temos que

$$\log |\det(DX_t|_{\text{ger}\{v_i, v_j\}})| = \log \|DX_t \cdot v_i\| + \log \|DX_t \cdot v_j\| + \log \sin \angle(v_i, v_j)$$

e esta expressão quando dividida por t , converge para $\lambda_i(x) + \lambda_j(x)$ quando t tende para $+\infty$ ou $-\infty$.

Capítulo 3

Exemplos

Apresentamos aqui a construção detalhada dos exemplos mencionados na Introdução.

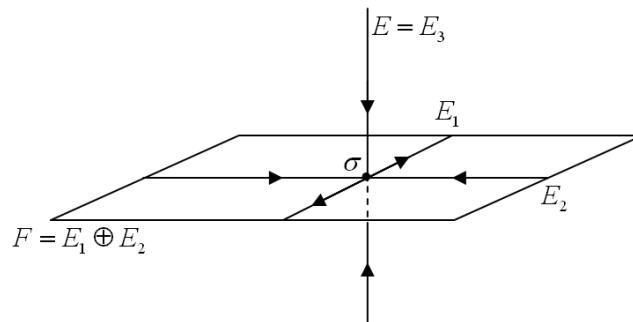
3.1 O exemplo com conjunto invariante pontual

Exemplo 3.1.1. Considere uma singularidade tipo-Lorenz σ para um fluxo C^1 , $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$, sobre uma 3-variedade M , isto é, σ singularidade hiperbólica de tipo sela tal que os autovalores de $DX(\sigma)$ são reais e satisfazem

$$\lambda_2 < \lambda_3 < 0 < -\lambda_3 < \lambda_1.$$

Imponha ainda uma condição extra: $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$.

Seja E_i o autoespaço associado ao autovalor λ_i , $i = 1, 2, 3$, e faça $E = E_3$ e $F = E_1 \oplus E_2$.



Então, a decomposição é trivialmente contínua, pois $\Lambda = \{\sigma\}$ é apenas um ponto, E contrai uniformemente comprimento de vetores e como E tem dimensão

1 concluímos que E é uniformemente contraído e F expande área uniformemente, ou seja, F é seccionalmente expandido, mas a decomposição não é dominada, pois podemos considerar sem perda

$$DX(\sigma) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

daí temos que $X_t(u) = e^{At}u$ onde $A = DX(\sigma)$ e $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$, logo

$$DX_t(\sigma) \cdot u = Ae^{At}u = \begin{pmatrix} \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}.$$

Tomando $v = (0, 0, v_3) \in E$ e $w = (0, w_2, 0) \in E_2$, ou seja, $w = 0 + w \in E_1 \oplus E_2 = F$ temos que

$$\|DX_t(\sigma) \cdot v\| \cdot \|DX_{-t}(\sigma) \cdot w\| = (|\lambda_3| \cdot \|v\| e^{\lambda_3 t}) \cdot (|\lambda_2| \cdot \|w\| e^{-\lambda_2 t}) = |\lambda_3| \cdot |\lambda_2| \cdot \|v\| \cdot \|w\| e^{(\lambda_3 - \lambda_2)t}$$

como $\lambda_3 - \lambda_2 > 0$ temos que a decomposição é não dominada e isso ocorre porque F admite vetores mais fortemente contraídos do que aqueles de E .

No exemplo acima, temos expansão seccional e contração uniforme ao longo dos subfibrados de uma decomposição contínua, mas a decomposição não é dominada.

Este exemplo envolve um conjunto invariante trivial: um ponto de equilíbrio. Mas como mencionamos na introdução, há situação de conjunto compacto invariante com singularidades acumuladas por órbitas regulares. Um exemplo disso é o campo de vetores que será construído abaixo.

3.2 O exemplo com dupla conexão homoclínica

Como passo inicial para a construção do campo de vetores sobre o plano \mathbb{R}^2 com uma conexão de dupla sela homoclínica que expande volume, considere inicialmente o seguinte sistema

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x - x^3 \end{cases} \quad (3.1)$$

Sendo o campo $f(x, y) = (y, x - x^3)$ temos que

$$f(x, y) = 0 \iff \begin{cases} y = 0 \\ x - x^3 = 0 \end{cases}$$

Logo as únicas singularidades do campo são $(-1, 0)$, $(0, 0)$ e $(1, 0)$, e sabendo que

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^2 & 0 \end{pmatrix} \implies Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

portanto $\det(Df(0, 0) - \lambda Id) = 0 \iff \lambda^2 - 1 = 0$, ou seja, $\lambda = \pm 1$ o que mostra que a origem é uma singularidade hiperbólica. Note também que $f(x, y) = \left(\frac{\partial H}{\partial y}, -\frac{\partial H}{\partial x}\right)$ se $H(x, y) = \frac{1}{2}(y^2 - x^2 + \frac{x^4}{2})$. Assim se $s(t) = (x(t), y(t))$ é solução de 3.1, então

$$\frac{d}{dt}(H \circ s)(t) = \frac{\partial H}{\partial x} \cdot x' + \frac{\partial H}{\partial y} \cdot y' = -(x - x^3)y + (x - x^3)y = 0.$$

Portanto, H é constante nas soluções de 3.1. Logo as soluções do sistema estão contidas nas curvas de nível de H . Tome então a curva de nível zero de H , ou seja, $W_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x^2 + \frac{x^4}{2} = 0\}$. Tomando $y = 0$ obtemos os pontos de interseção dessa órbita com o eixo dos xx : $(0, 0)$, $(-\sqrt{2}, 0)$ e $(\sqrt{2}, 0)$.

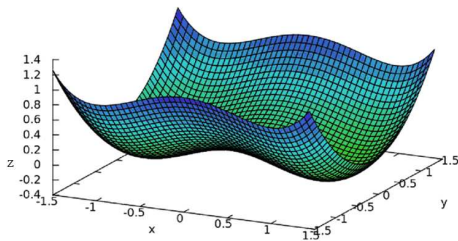


Figura 3.1: Gráfico da função H

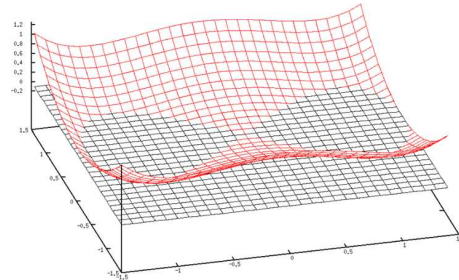


Figura 3.2: Curvas de nível zero ($H=0$)

Considere um ponto $P \neq (0, 0)$ à direita da origem, pertencente à curva W_0 . Como as únicas singularidades do campo são $(-1, 0)$, $(0, 0)$ e $(1, 0)$, temos que a velocidade da solução $s(t)$ do sistema, que passa por P , não se anula. Sendo esta solução uma curva contida em $W_0 \setminus \{(0, 0)\}$, vemos que para o passado ou para o futuro a trajetória de $s(t)$ converge para a origem que é uma sela. Desse modo temos pelo Teorema da Variedade Estável que $W^s(0, 0) = W^u(0, 0)$.

Observe que o campo f é simétrico pois, $f(-x, y) = f(-x, -y) = (-y, -x + x^3) = -(y, x - x^3) = -f(x, y)$. Logo os resultados obtidos à direita dos eixos dos xx podem ser obtidos também à esquerda deste eixo

simetricamente. Assim, a órbita que passa na origem, W_0 , é uma dupla conexão homoclínica, o “oitó” que podemos ver na Figura 3.3.

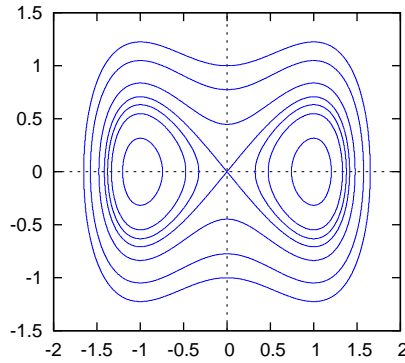


Figura 3.3: Curvas de nível da solução do sistema 3.1

3.2.1 Perturbação do campo

De posse dessas informações vamos perturbar o sistema 3.1 de modo a obter o campo desejado. Considere $\mu \in \mathbb{R}$ e tome

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x - x^3 + \mu y - yx^2 \end{cases} \quad (3.2)$$

Deste modo temos agora $f_\mu(x, y) = (y, x - x^3 + \mu y - yx^2)$, mas as únicas singularidades do campo ainda são $(-1, 0)$, $(0, 0)$ e $(1, 0)$ pois,

$$f_\mu(x, y) = 0 \iff \begin{cases} y = 0 \\ x - x^3 = 0 \end{cases}$$

e mais, a origem continua sendo singularidade hiperbólica, já que

$$Df_\mu(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^2 - 2xy & \mu - x^2 \end{pmatrix} \implies Df_\mu(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$$

portanto, $\det(Df_\mu(0, 0) - \lambda Id) = 0$ se, e só se, $-\lambda(\mu - \lambda) - 1 = 0$, ou seja, $-\lambda(\mu - \lambda) - 1 = \lambda^2 - \mu\lambda - 1 = 0$ logo, $\lambda = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 + 4}}{2}$ não intersecta o eixo imaginário. Além disso, temos que $(0, 0)$ continua sendo sela, já que,

$\sqrt{\mu^2 + 4} > \mu$ portanto, $\lambda_1 = \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 + 4}}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{\mu - \sqrt{\mu^2 + 4}}{2}$ têm sinais contrários.

Observe também que se $s(t)$ é solução de 3.2 temos que

$$\begin{aligned} \frac{d(H \circ s)}{dt} &= H_x \cdot x' + H_y \cdot y' \\ &= (-x + x^3)y + y(x - x^3 + \mu y - yx^2) \\ &= y^2(\mu - x^2). \end{aligned}$$

Caso $y \neq 0$ e $\mu - x^2 > 0$, $(H \circ s)(t)$ é crescente, e decresce caso $y \neq 0$ e $\mu - x^2 < 0$. Logo sobre as órbitas de 3.2 que pertencem a $W^u(0,0)$ vamos ter $(H \circ s) > 0$, pois $\frac{dH \circ s}{dt} > 0$ e $H(0,0) = 0$; e sobre as órbitas que pertencem a $W^s(0,0)$ vamos ter $(H \circ s) < 0$, pois $\frac{dH \circ s}{dt} < 0$ e $H(0,0) = 0$.

3.2.2 Obter dupla conexão homoclínica para singularidade na origem

Vamos agora assumir que $\mu \geq 0$. Considere inicialmente $\mu = 0$. Como $\frac{d(H \circ s)}{dt} = y^2(\mu - x^2) = -y^2x^2 < 0$ para todo x e todo y , tal que $xy \neq 0$, então a órbita da variedade instável deve estar no interior de W_0 onde o valor de H é menor que zero. Além disso, as órbitas devem cruzar o eixo dos xx , pois quando $y > 0$ temos $x' = y > 0$ e $y' = x - x^3 - yx^2 < 0$ para $y > 0$ e $x > 1$. Entretanto, sobre o eixo dos xx no intervalo $(0, 1)$ o campo é vertical apontando para a direção positiva do eixo dos yy , pois $y' = x - x^3 > 0$, para $0 < x < 1$ e no intervalo de $(1, +\infty)$ o campo é vertical apontando para parte negativa do eixo dos yy , pois o $y' = x - x^3 < 0$ para $1 < x < +\infty$.

Mais precisamente, considere t_1 o primeiro tempo que a órbita que passa por P intersecta o reta $x = 1$, assim $s(t_1) = (1, y(t_1))$ com $y(t_1) \geq 0$; veja a Figura 3.4. Se $y(t_1) = 0$ então $s(t_1)$ atinge o eixo dos xx . Se $y(t_1) > 0$, então $x'(t_1) = y(t_1) > 0$ e para $t > t_1 + \epsilon$, $\epsilon > 0$ pequeno, temos que $x(t) > 1 + a$ para algum $a > 0$ pequeno. Portanto,

$$y'(t) = x(t) - x^3(t) - y(t)x^2(t) \leq x(t) - x^3(t) \leq (1 + a) - (1 + a)^3 = -b < 0$$

para $t > t_1 + \epsilon$ e $y(t) > 0$. Logo $y(t) - y(t_1 + \epsilon) \leq -b(t - (t_1 + \epsilon))$ para $t > t_1 + \epsilon$ e $y(t) > 0$, assim existe $t_2 > t_1$ tal que $y(t_2) = 0$ e $s(t_2) = u(0)$ atinge o eixo dos xx . Observe que em qualquer um dos casos $x(t_2) < \sqrt{2}$, pois $\frac{d(H \circ s)}{dt} < 0$ o que obriga a órbita a permanecer no interior de W_0 .

Por outro lado as órbitas da variedade estável devem estar em curvas de nível de H com valor positivo. E fazendo uma análise similar ao que foi feito acima, só que agora considerando o tempo para o passado, isto é, t negativo e decrescente, teremos de forma análoga que a órbita intersecta o eixo dos xx (no ponto que chamaremos $v(0)$), onde $v(0)$ é um ponto com abscissa maior que $\sqrt{2}$, como na Figura 3.4

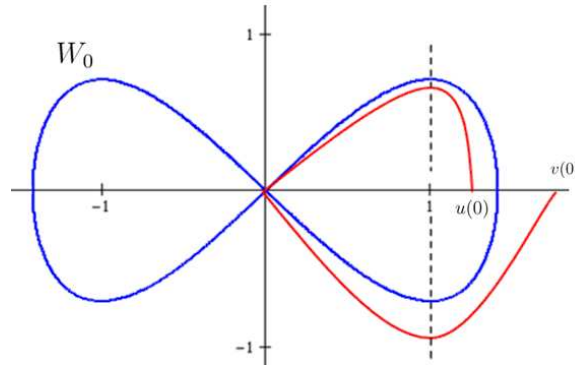


Figura 3.4: Órbita da $W^s(0,0)$ e da $W^u(0,0)$ do campo $f_0(x,y)$

Considere agora o caso $\mu = 2$. Daí temos que $\frac{d(Hos)}{dt} = y^2(\mu - x^2) > 0$ sempre que $2 > x^2$. Logo, a órbita da variedade instável deve estar na região onde $H > 0$ (parte exterior de W_0). Além disso, esta órbita cruza o eixo dos xx , pois ela é crescente quando $y > 0$ e $0 < x \leq 1$, já que temos $x' = y > 0$ e $y' = x - x^3 + 2y - yx^2 > 0$ e decresce para $x > \sqrt{2}$, pois $y' < 0$. Dessa forma, considere t_1^* o primeiro tempo que a órbita que passa por P intersecta o reta $x = \sqrt{2}$. Assim $s(t_1^*) = (\sqrt{2}, y(t_1^*))$ com $y(t_1^*) \geq 0$. Se $y(t_1^*) = 0$ então $s(t_1^*) = u(2)$ atinge o eixo dos xx . Se $y(t_1^*) > 0$, então $x'(t_1^*) = y(t_1^*) > 0$ e para $t > t_1^* + \epsilon$ temos que $x(t) > \sqrt{2} + a$ para algum $a > 0$ pequeno. Portanto,

$$\begin{aligned} y'(t) &= x(t) - x^3(t) + 2y(t) - y(t)x^2(t) \\ &= x(t) - x^3(t) + \underbrace{(2 - x^2(t))}_{<0} y(t) \\ &\leq x(t) - x^3(t) \\ &\leq (\sqrt{2} + a) - (\sqrt{2} + a)^3 = -c < 0 \end{aligned}$$

para $t > t_1^* + \epsilon$ e $y(t) > 0$. Logo, $y(t) - y(t_1^* + \epsilon) \leq -c(t - (t_1^* + \epsilon))$ para $t > t_1^* + \epsilon$ e $y(t) > 0$, e assim existe $t_2^* > t_1^*$ tal que $y(t_2^*) = 0$ e $s(t_2^*) = u(2)$ atinge o eixo dos xx .

Para este mesmo valor de μ , as órbitas da variedade estável devem estar no interior de W_0 e pelo mesmo raciocínio, considerando o tempo para o passado, concluímos que essas órbitas também intersectam o eixo dos xx (no ponto $v(2)$), como na Figura 3.5.

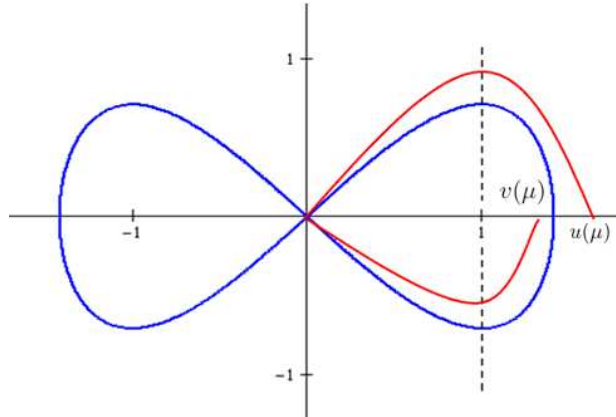


Figura 3.5: Órbita de $W^s(0,0)$ e da $W^u(0,0)$ do campo $f_\mu(x,y)$, $\mu \geq 2$

Assim entre $\mu = 0$ e $\mu = 2$ existe algum valor μ_0 , onde as órbitas das variedades estável e instável se intersectam sobre o eixo dos xx , pois sabemos que as variedades estável e instável variam continuamente com a equação diferencial; neste caso, variam continuamente com o parâmetro μ como consequência do Teorema da Variedade Estável para singularidades hiperbólicas de campos de vetores.

Para $\mu = 0$, temos que $u(0) - v(0) < 0$ e, para $\mu = 2$, temos que $u(2) - v(2) > 0$. Portanto, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe μ_0 tal que $u(\mu_0) = v(\mu_0)$ e, pelo Teorema de Existência e Unicidade de Soluções, as órbitas coincidem e temos que a variedade estável é igual à instável: uma órbita homoclínica W_{μ_0} , que denotaremos por simplicidade de W .

Uma vez que $f_\mu(-x, y) = (-y, -x + x^3 - \mu y + yx^2) = -(y, x - x^3 + \mu y - yx^2) = -f_\mu(x, y)$, temos que o campo é simétrico, logo as mesmas considerações podem ser feitas para $x \leq 0$, dessa forma obtemos o campo $X = f_{\mu_0}$ que tem um par de conexões homoclínicas.

Na verdade, já se sabe que o valor do parâmetro é $\mu_0 = \frac{4}{5}$ como pode ser visto com maiores detalhes no Capítulo 4, Seção 9, Exemplo 3, páginas 423-424 de [12].

3.2.3 Expansão de área ao longo de W

Vamos agora verificar que X expande área sobre W .

Lembrando que o divergente do campo f_μ é o traço da matriz jacobiana de f_μ , ou seja, $\operatorname{div}(f_\mu(x, y)) = \operatorname{tr}(Df_\mu(x, y))$. Daí temos que o campo X expande área numa vizinhança de $(0, 0)$, pois

$$\operatorname{div}X(x, y) = \mu_0 - x^2 \geq c_0, \quad (3.3)$$

se $|x| \leq \frac{\sqrt{\mu_0}}{2}$ (basta tomar $c_0 = \frac{\mu_0}{2}$). Escrevemos agora X_t para o fluxo de X no tempo $t \in \mathbb{R}$. Para a origem, que é a única singularidade em W , temos pela Fórmula de Liouville,

$$|\det DX_t(0, 0)| = \exp\left(\int_0^t \operatorname{div}X(X_s(0, 0)) ds\right) \geq \exp(tc_0), \quad t \geq 0.$$

Considere agora um ponto $P = (x_0, y_0) \in W$ com $|x_0| > \frac{\sqrt{\mu_0}}{2}$, e $s(t) = X_t(P)$ a solução que passa por P . Sabemos que a velocidade de P é uniformemente afastada do zero, pois não há singularidades. Esse resultado junto com o fato de que o comprimento do arco entre P_0 e P_1 é finito, onde P_0 e P_1 são os pontos de intersecção entre W e a reta $x = \frac{\sqrt{\mu_0}}{2}$, garante que, tanto para o passado quanto para o futuro, a trajetória de $s(t)$ leva um tempo finito, τ entre P_0 e P_1 , que não depende do ponto P escolhido. Logo, para $|t| > \tau$, temos $(\operatorname{div})(s(t)) \geq c_0$, já que a abscissa de $s(t)$ em módulo é menor ou igual a $\frac{\sqrt{\mu_0}}{2}$.

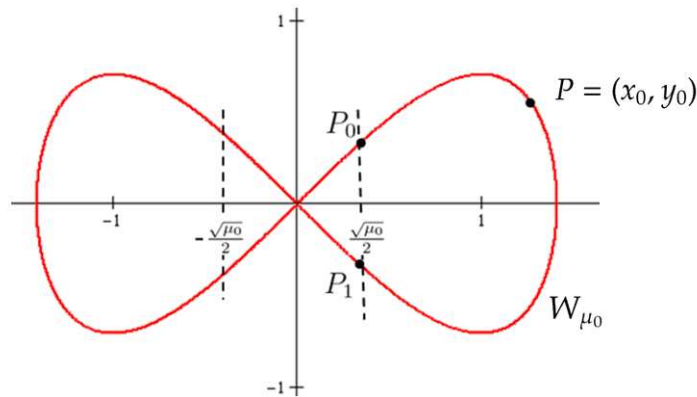


Figura 3.6: O campo de vetores X

Assim, como

$$|\det DX_t(P)| = \exp\left(\int_0^t \operatorname{tr}DX(s(u)) \, du\right) = \exp\left(\int_0^t \operatorname{div}X(s(u)) \, du\right)$$

temos, para um ponto $P = (x_0, y_0) \in W$ com $|x_0| > \frac{\sqrt{\mu_0}}{2}$, que

$$|\det DX_t(P)| = \exp\left(\int_0^\tau \operatorname{div}X(s(u)) \, du + \int_\tau^t \operatorname{div}X(s(u)) \, du\right) \quad (3.4)$$

Por um lado, uma vez que $L_0 = \max\{\operatorname{div}X(x, y); (x, y) \in W\}$ existe e é finito, pois W é fechado e limitado em \mathbb{R}^2 , temos $|\int_0^\tau \operatorname{div}X(s(u)) \, du| \leq \tau \cdot L_0$. Por outro lado, $\int_\tau^t \operatorname{div}X(s(u)) \, du \geq c_0(t - \tau)$, pois $\operatorname{div}X(s(u)) \geq c_0 > 0$ para u no intervalo entre τ e t , porque o módulo da abscissa de $s(u)$ é menor ou igual a $\frac{\sqrt{\mu_0}}{2}$. Vem então

$$\begin{aligned} |\det DX_t(P)| &= \exp\left(\int_0^\tau \operatorname{div}X(s(u)) \, du + \int_\tau^t \operatorname{div}X(s(u)) \, du\right) \\ &\geq \exp(c_0(t - \tau) - \tau \cdot L_0) \\ &= \exp(-\tau(c_0 + L_0)) \cdot \exp(tc_0) \\ &= Ke^{tc_0} \end{aligned}$$

onde $K = \exp(-\tau(c_0 + L_0)) > 0$.

Considere agora um ponto $P = (x, y) \in W$, $P(x, y) \neq (0, 0)$, com $|x| \leq \frac{\sqrt{\mu_0}}{2}$ e a solução $s(t)$ que passa por P . Neste caso temos para o tempo futuro (para o passado a órbita de P converge para a origem) expansão de área, do tempo $t = 0$ até o tempo t_0 , onde t_0 é o primeiro tempo onde $s(t)$ intersecta a reta vertical $x = \frac{\sqrt{\mu_0}}{2}$. Entre os tempos t_0 e $t_0 + \tau$ temos que $|\operatorname{div}X(s(u))|$ é limitado e voltemos a ter expansão de área entre $t_0 + \tau$ até t . Logo, o módulo do $\det(DX_t(P))$ é igual à:

$$\begin{aligned} &\exp\left(\int_0^{t_0} \operatorname{div}X(s(u)) \, du + \int_{t_0}^{t_0+\tau} \operatorname{div}X(s(u)) \, du + \int_{t_0+\tau}^t \operatorname{div}X(s(u)) \, du\right) \geq \\ &\geq \exp(c_0 \cdot t_0 - \tau \cdot L_0 + c_0(t - t_0 - \tau)) \\ &= \exp(-\tau(c_0 + L_0)) \cdot \exp(tc_0) = Ke^{tc_0} \end{aligned}$$

Dessa forma temos que $|\det DX_t(P)| \geq Ke^{tc_0}$ independente da escolha da condição inicial P em W . Isto mostra que o fluxo de X em W expande área uniformemente. Isso completa a construção do campo de vetores planar do exemplo 1.2.6 mencionado na introdução desta dissertação.

3.2.4 A não dominação

Recapitularemos a construção do exemplo 1.2.6 e verificaremos que podemos construí-lo de forma a não ter decomposição dominada.

Considere um campo de vetores X sobre o plano \mathbb{R}^2 como o que acabamos de construir, isto é, com uma conexão de dupla sela homoclínica que expande volume, e multiplique este campo de vetores por uma contração ao longo da direção vertical E ; veja a Figura 3.7.

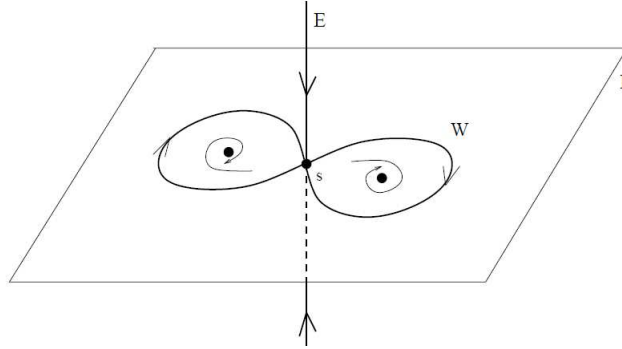


Figura 3.7: Conexão de dupla sela homoclínica multiplicado por E .

O conjunto compacto invariante W , para o campo de vetores X , formado pelas conexões homoclínicas juntamente com a singularidade s , admite uma decomposição $E \oplus F$, onde E é a direção vertical e F é a direção do plano. Esta decomposição é contínua, com E uniformemente contraído e a área em F uniformemente expandida por DX_t , como provado na subseção 3.2.3.

Como vimos na construção do campo X acima, os autovalores de $DX(0,0)$ são dados por $\lambda_1 = \frac{\mu_0 + \sqrt{\mu_0^2 + 4}}{2} > 0$ e $\lambda_2 = \frac{\mu_0 - \sqrt{\mu_0^2 + 4}}{2} < 0$, o que nos garante que a matriz $[DX(0,0)]$ é conjugada à matriz diagonal $D = \{\lambda_1, \lambda_2\}$. Como estamos multiplicando o campo pela direção vertical E temos, numa base de autovetores, que a matriz do novo sistema será conjugada à matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

onde λ_3 é a taxa de contração na direção vertical E . Observe que, neste caso, a singularidade s ilustrada da figura 3.7 do campo construído acima, multiplicado pela direção vertical E , é a origem de \mathbb{R}^3 e a direção estável

da singularidade s em F corresponde ao autoespaço gerado pelo autovetor associado ao autovalor λ_2 .

Assim, temos $DX_t(0, 0, 0) \cdot u = e^{At}u$, com $u \in \mathbb{R}^3$ e $t \in \mathbb{R}$. Tomando $w \in E$ e $v \in F$ autovetores unitários associados a λ_3 e λ_2 respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} \|DX_t(0, 0, 0)w\| \cdot \|DX_{-t}(0, 0, 0)v\| &= \|e^{\lambda_3 t}w\| \cdot \|e^{-\lambda_2 t}v\| \\ &= e^{(\lambda_3 - \lambda_2)t}. \end{aligned}$$

No entanto, poderemos obter uma decomposição não-dominada, bastando para isso escolher a taxa de contração ao longo de E mais fraca do que a taxa de contração na direção estável da singularidade s , ou seja, $0 > \lambda_3 > \lambda_2$. Desta maneira, a decomposição $E \oplus F$ de T_sM não é dominada, já que $\lambda_3 - \lambda_2 > 0$.

Capítulo 4

Resultados Principais

Esse capítulo é dividido em três subseções, na primeira subseção será provado o resultado técnico que garante que, sob determinadas condições, a direção de um fluxo está contido no subfibrado não contrator. A segunda subseção será dedicada a apresentação do fluxo linear de Poincaré e a prova do Teorema 1.1.5. Ambas as subseções serão usadas para provar os Teoremas 1.2.4 e 1.2.1, esses constituem os principais resultados dessa dissertação.

4.1 Direção do fluxo na direção não contrativa

Iniciamos a subseção com a definição de ângulo uniformemente afastado de zero. Em seguida será apresentado um lema que será de grande utilidades na prova do Teorema 1.2.4 mais adiante.

Definição 4.1.1. *A decomposição $T_\Lambda M = E \oplus F$ do fibrado tangente sobre um subconjunto compacto invariante Λ tem ângulo uniformemente afastado do zero se:*

1. *As dimensões dos fibrados E_x e F_x são constantes e não nula para todo $x \in \Lambda$ e*
2. *Existe $\theta_0 > 0$ tal que $\sin \angle(E_x, F_x) \geq \theta_0$ para todo $x \in \Lambda$.*

Lema 4.1.2. *Seja Λ um conjunto compacto invariante de X . Dada uma decomposição invariante do fibrado tangente $T_\Lambda M = E \oplus F$ com ângulo afastado do zero ao longo de Λ , onde E é uniformemente contraído então a direção do fluxo está contido no subfibrado F , para todo $x \in \Lambda$.*

Demonstração. Denote $\pi(E_x) : T_x M \rightarrow E_x$ a projeção de E_x paralelo a F_x em $T_x M$ e $\pi(F_x) : T_x M \rightarrow F_x$ a projeção de F_x paralelo a E_x em $T_x M$. Note que para $x \in \Lambda$

$$X(x) = \pi(E_x) \cdot X(x) + \pi(F_x) \cdot X(x)$$

e para $t \in \mathbb{R}$, temos pela linearidade de DX_t e a invariância da decomposição $T_\Lambda M = E \oplus F$ por DX_t que

$$\begin{aligned} DX_t \cdot X(x) &= DX_t \cdot (\pi(E_x) \cdot X(x) + \pi(F_x) \cdot X(x)) \\ &= DX_t \cdot (\pi(E_x) \cdot X(x)) + DX_t(\pi(F_x) \cdot X(x)) \\ &= \pi(E_{X_t(x)}) \cdot DX_t \cdot X(x) + \pi(F_{X_t(x)}) \cdot DX_t \cdot X(x) \end{aligned}$$

Considere agora z um ponto limite da órbita negativa de x . Isto é, estamos supondo sem perda de generalidade que Λ é compacto, e que há uma sequência estritamente crescente $t_n \rightarrow +\infty$ tal que $x_n = X_{-t_n}(x)$ satisfaz, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} X_{-t_n}(x) = z$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} DX_{-t_n} \cdot X(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} X(x_n) = X(z)$ para algum $z \in \Lambda$. Por outro lado temos que

$$\begin{aligned} \|\pi(E_x) \cdot X(x)\| &= \|DX_{t_n} \underbrace{(DX_{-t_n} \cdot \pi(E_x) \cdot X(x))}_{\in E_{X_{t_n}(x)}}\| \\ &\leq c e^{-\lambda t_n} \|DX_{-t_n} \cdot \pi(E_x) \cdot X(x)\| \end{aligned}$$

Daí temos que $\|DX_{-t_n} \cdot (\pi(E_x) \cdot X(x))\| \geq c^{-1} e^{\lambda t_n} \|\pi(E_x) \cdot X(x)\|$.

Supondo que $\pi(E_x) \cdot X(x)$ não é o vetor nulo, obtemos

$$\|DX_{-t_n} \cdot (\pi(E_x) \cdot X(x))\| \geq c^{-1} e^{\lambda t_n} \|\pi(E_x) \cdot X(x)\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \quad (4.1)$$

Mas isso só pode ocorrer se o ângulo entre E_{x_n} e F_{x_n} tende a zero quando $n \rightarrow +\infty$.

De fato, usando a metrica Riemanniana em $T_y M$ e as observações feitas na subseção 2.2, o ângulo $\alpha(y) = \angle(E_y, F_y)$ está relacionado com a norma de $\pi(E_y)$ como se segue:

$$\|\pi(E_y)\| = \frac{1}{\sin(\alpha(y))} \rightarrow +\infty \implies \sin(\alpha(y)) \rightarrow 0$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|DX_{-t_n} \cdot (\pi(E_x) \cdot X(x))\| &= \|\pi(E_{x_n}) \cdot DX_{-t_n} \cdot X(x)\| \\ &\leq \|\pi(E_{x_n})\| \cdot \|DX_{-t_n} \cdot X(x)\| \\ &= \frac{1}{\sin(\alpha(x_n))} \cdot \|X(x_n)\| \end{aligned}$$

para todo $n \geq 1$. Assim se a sequência 4.1 é ilimitada concluímos que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(\alpha(X_{-t_n}(x))) = 0$. No entanto, temos que $E \oplus F$ tem ângulo afastado do zero em Λ .

Esta contradição mostra que $\pi(E_x) \cdot X(x)$ é sempre o vetor nulo e assim $X(x) \in F_x, \forall x \in \Lambda$. \square

4.2 Prova do Teorema 1.1.5

Essa seção como o título sugere, será dedicada a demonstração do Teorema 1.1.5, ela será iniciada com a apresentação do fluxo linear de Poincaré, que além de auxiliar na prova do Teorema 1.1.5 também será de grande utilidade no Capítulo 5 na demonstração do Teorema 1.2.8 e do Corolário 1.2.9.

4.2.1 O Fluxo linear de Poincaré e hiperbolicidade

A seguinte noção pode ser definida para um fluxo em qualquer variedade de Riemann de dimensão finita. Se x é um ponto regular de X (isto é, $X(x) \neq 0$), denotemos por

$$N_x = \{v \in T_x M : v \cdot X(x) = 0\}$$

o complemento ortogonal de $X(x)$ em $T_x M$. Denote por $O_x : T_x M \rightarrow N_x$ a projeção ortogonal de $T_x M$ em N_x e defina para cada $t \in \mathbb{R}$

$$P_x^t : T_x M \rightarrow N_{X_t(x)} \quad \text{onde} \quad P_x^t = O_{X_t(x)} \circ DX_t(x).$$

Note que P_x^t satisfaz a relação de cociclo, já que $DX_t(x)$ preserva a direção do fluxo e dados $u \in T_x M, x \in \Lambda$ podemos decompor $u = O_x(u) + \lambda X(x)$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$ e $O_x(u) \in N_x$, temos também que $DX_s(x)u \in T_{X_s(x)} M$, pode ser decomposto como

$$DX_s(x)u = O_{X_s(x)}(DX_s(x)u) + \kappa X(X_s(x)),$$

onde $\kappa \in \mathbb{R}$ e $O_{X_s(x)}(DX_s(x)u) \in N_{X_s(x)}$. Do mesmo modo temos que $DX_t(X_s(x))(DX_s(x)u) = DX_{t+s}(x)(DX_s(x)u) \in T_{X_{t+s}(x)} M$, logo

$$DX_{t+s}(x)(DX_s(x)u) = O_{X_{t+s}(x)}(DX_{t+s}(x)(DX_s(x)u)) + \gamma X(X_{t+s}(x)),$$

onde $\gamma \in \mathbb{R}$ e $O_{X_{t+s}(x)}(DX_{t+s}(x)(DX_s(x)u)) \in N_{X_{t+s}(x)}$. Assim,

$$\begin{aligned}
O_{X_{t+s}(x)}(DX_{t+s}(x)(DX_s(x)u)) &= O_{X_{t+s}(x)}(DX_{t+s}(x)(O_{X_s(x)}(DX_s(x)u) + \kappa X(X_s(x)))) \\
&= O_{X_{t+s}(x)}(DX_{t+s}(x)(O_{X_s(x)}(DX_s(x)u))) \\
&= (O_{X_{t+s}(x)} \circ DX_{t+s}(x) \circ O_{X_s(x)} \circ DX_s(x))u \\
&= (O_{X_t(X_s(x))} \circ DX_t(X_s(x)) \circ O_{X_s(x)} \circ DX_s(x))u
\end{aligned}$$

e portanto $P_x^{t+s}u = (P_{X_s(x)}^t \circ P_x^s)u$ para todo $u \in T_xM$ e todo $t, s \in \mathbb{R}$.

A família $P = \{P_x^t : t \in \mathbb{R}, X(x) \neq 0\}$ é chamada de “Fluxo Linear de Poincaré para X ”.

Seja Λ um subconjunto compacto invariante não trivial sob o fluxo de $X \in \mathfrak{X}^1(M)$, (isto é, Λ contém uma órbita regular) onde $\mathfrak{X}^1(M)$ é o espaço dos campos de vetores de classe C^1 e M é uma variedade Riemanniana de dimensão finita. Suponha que Λ não tenha singularidades, então o espaço normal N_x é definido para todo $x \in \Lambda$. Assim, o fluxo linear de Poincaré está definido em todo ponto $x \in \Lambda$. A compacidade e a ausência de singularidades permitem obter a seguinte caracterização de subconjuntos hiperbólicos de fluxos. Antes definimos decomposição hiperbólica para o Fluxo Linear de Poincaré.

Definição 4.2.1. *Uma decomposição $N_\Lambda = N^s \oplus N^u$ é hiperbólica para P^t se N^s é uniformemente contraído e N^u é uniformemente expandido por P^t , ou seja, existem constantes $C, \lambda > 0$ tais que*

$$\|P^t|_{N_x^s}\| \leq Ce^{-\lambda t}, \quad \|P^{-t}|_{N_x^u}\| \leq Ce^{-\lambda t}, \quad x \in \Lambda \text{ e } t > 0.$$

Teorema 4.2.2. *Seja Λ um subconjunto compacto invariante para $X \in \mathfrak{X}^1(M)$. Então Λ é hiperbólico se, e só se, o fluxo linear de Poincaré está definido em todo Λ e $(P_x)_{x \in \Lambda} = P_\Lambda$ admite uma decomposição hiperbólica de N_Λ .*

Se Λ é um conjunto compacto invariante hiperbólico para X , então a decomposição $T_\Lambda M = E^s \oplus E^X \oplus E^u$, DX_t -invariante do fibrado tangente projeta em uma decomposição do fibrado normal $N_\Lambda = N^s \oplus N^u$ através da projeção ortogonal

$$N_x^s = O_x(E_x^s) \text{ e } N_x^u = O_x(E_x^u) \text{ para todo } x \in \Lambda.$$

Como Λ não contém singularidades, o fluxo linear de Poincaré está definido para todo $x \in \Lambda$ e a decomposição do fibrado normal está bem definida e é hiperbólica, pois a projeção ortogonal não aumenta normas. Assim,

- Para $v \in E_x^s$, podemos escrever $v = O_x(v) + \beta X(x)$, com $O_x(v) \in N_x^s$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Daí temos por um lado que,

$$\begin{aligned} DX_t(x)v &= DX_t(x)(O_x(v) + \beta X(x)) = DX_t(x)O_x(v) + \beta X(X_t(x)) \\ &= O_{X_t(x)}(DX_t(x)O_x(v)) + \alpha X(X_t(x)) + \beta X(X_t(x)) \\ &= O_{X_t(x)}(DX_t(x)O_x(v)) + (\alpha + \beta)X(X_t(x)) \end{aligned}$$

onde $O_{X_t(x)}(DX_t(x)O_x(v)) \in N_{X_t(x)}^s$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Por outro lado, $DX_t(x)v = O_{X_t(x)}(DX_t(x)v) + (DX_t(x)v - O_{X_t(x)}(DX_t(x)v))$ com $O_{X_t(x)}(DX_t(x)v) \in N_{X_t(x)}^s$ e $(DX_t(x)v - O_{X_t(x)}(DX_t(x)v)) \in E_{X_t(x)}^X$. Como a decomposição é única e a direção do fluxo é DX_t -invariante temos que

$$(\alpha + \beta)X(X_t(x)) = DX_t(x)v - O_{X_t(x)}(DX_t(x)v) = (Id - O_{X_t(x)})DX_t(x)v.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|DX_t(x)v\| &= \|P_x^t O_x(v) + (Id - O_{X_t(x)})DX_t(x)v\| \\ &\geq \|P_x^t O_x(v)\| - \|(Id - O_{X_t(x)})DX_t(x)v\| \\ &\geq \|P_x^t O_x(v)\| - \|Id - O_{X_t(x)}\| \cdot \|DX_t(x)v\| \\ &\geq \|P_x^t O_x(v)\| - \|DX_t(x)v\| \end{aligned}$$

onde a ultima desigualdade decorre do fato de $(Id - O_{X_t(x)})$ ser uma projeção e $\|Id - O_{X_t(x)}\| \leq 1$. Assim, temos que $\|P_x^t O_x(v)\| \leq 2\|DX_t(x)v\|$, logo $\|P_x^t O_x(v)\| \leq Ce^{-\lambda t}\|v\|$, para algumas constantes positivas C e λ , já que E_x^s é uniformemente contrator para $t > 0$.

- Para $w \in E_x^u$ temos como antes, $w = O_x(w) + \kappa X(x)$, com $O_x(w) \in N_x^u$ e $\kappa \in \mathbb{R}$, assim podemos escrever, como fizemos acima, $DX_{-t}(x)w = P_x^{-t}O_x(w) + (Id - O_{X_{-t}(x)})DX_{-t}(x)w$, daí

$$\begin{aligned} \|DX_{-t}(x)w\| &= \|P_x^{-t}O_x(w) + (Id - O_{X_{-t}(x)})DX_{-t}(x)w\| \\ &\geq \|P_x^{-t}O_x(w)\| - \|(Id - O_{X_{-t}(x)})DX_{-t}(x)w\| \\ &\geq \|P_x^{-t}O_x(w)\| - \|Id - O_{X_{-t}(x)}\| \cdot \|DX_{-t}(x)w\| \\ &\geq \|P_x^{-t}O_x(w)\| - \|DX_{-t}(x)w\|. \end{aligned}$$

Logo $\|P_x^{-t}O_x(w)\| \leq 2\|DX_{-t}(x)w\|$ que também é uniformemente contrator para $t > 0$. Assim, para algumas constantes positivas C e λ temos $\|P_x^{-t}O_x(w)\| \leq Ce^{-\lambda t}\|w\|$.

Portanto concluímos a hiperbolicidade de P^t .

Suponhamos que exista uma decomposição hiperbólica $N_\Lambda = N^s \oplus N^u$ do fibrado normal sobre Λ P^t -invariante. Daí temos, em particular, que Λ não possui singularidade.

Considere o subfibrado $E^{cu} = E^X \oplus N^u$ em Λ . Cada vetor $v \in E_x^{cu}$ pode ser escrito como $v = \alpha X(x) + w$ para $w \in N_x^u$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Note que E^{cu} é subfibrado vetorial DX_t -invariante, pois $DX_t(x)v = \alpha X(X_t(x)) + DX_t(x)w$ e $DX_t(x)w = O_{X_t(x)}DX_t(x)w + \beta X(X_t(x))$, onde $O_{X_t(x)}DX_t(x)w \in N_{X_t(x)}^u$ e $\beta \in \mathbb{R}$, assim o vetor $DX_t(x)v = (\alpha + \beta)X(X_t(x)) + O_{X_t(x)}DX_t(x)w \in E_{X_t(x)}^X \oplus N_{X_t(x)}^u = E_{X_t(x)}^{cu}$, para todo $x \in \Lambda$ e $t \in \mathbb{R}$.

A expansão uniforme de vetores ao longo da direção N^u sob P^t garante que existem $k, \lambda > 0$ não dependendo de $x \in \Lambda$ e $t > 0$ tal que

$$m(P^t|N^u) \geq ke^{\lambda t}. \quad (4.2)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \left\| DX_t(x) \frac{X(x)}{\|X(x)\|} \right\| &= \frac{\|DX_t(x)X(x)\|}{\|X(x)\|} = \frac{\|X(X_t(x))\|}{\|X(x)\|} \\ &\leq \sup_{x \in \Lambda} \left\{ \frac{\|X(X_t(x))\|}{\|X(x)\|}, t \in \mathbb{R} \right\} = L < +\infty \end{aligned}$$

Assim, temos que $\|DX_t|_{E_x^X}\| \leq L$ logo

$$\begin{aligned} m(P_x^t|N_x^u)L &\geq ke^{\lambda t}\|DX_t|_{E_x^X}\|, \quad x \in \Lambda. \\ m(P_x^t|N_x^u) &\geq Ce^{\lambda t}\|DX_t|_{E_x^X}\|, \quad \text{onde } C = \frac{k}{L}. \end{aligned}$$

Deste modo, para todo $s \in \mathbb{R}$ suficientemente grande temos

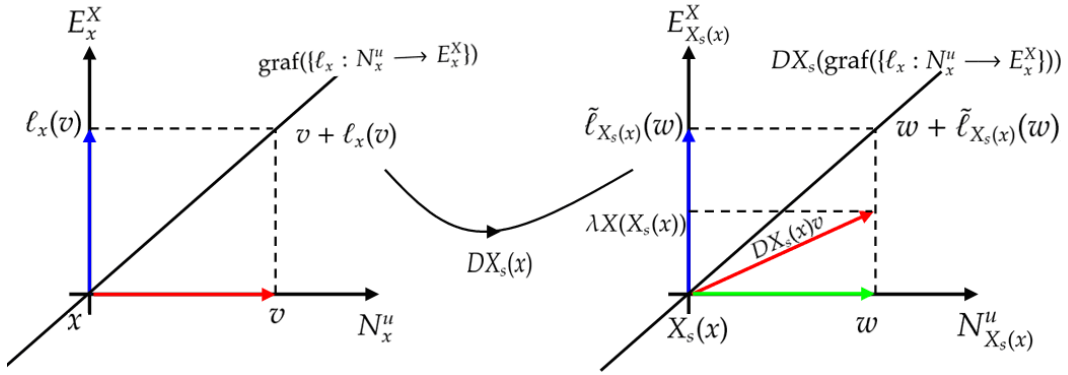
$$\frac{\|DX_s|_{E_x^X}\|}{m(P_x^s|N_x^u)} < \frac{1}{C}e^{-\lambda s} < 1. \quad (4.3)$$

Considere agora o espaço vetorial $\mathcal{L} = \mathcal{L}([x]_\Lambda, E_\Lambda^{cu})$ dado pela família de funções

$$\left\{ (\ell_x)_{x \in \Lambda}; \ell_x : N_x^u \longrightarrow E_x^X \text{ é linear para } x \in \Lambda \text{ e } \|\ell_x\| := \sup_{x \in \Lambda} \|\ell_x\| < +\infty \right\}.$$

A norma de cada função linear esta bem definida, pois os espaços têm dimensão finita e são dotados com a norma induzida pela estrutura da variedade de Riemann.

Vamos agora mostrar que a ação do DX_s em \mathcal{L} dado pela transformada do gráfico é uma contração para s como em (4.3). Para isto considere o graf($\{\ell_x : N_x^u \longrightarrow E_x^X\}$) = $v + \ell_x(v)$ para todo $x \in \Lambda$ e todo $v \in N_x^u$ conforme

Figura 4.1: Ação do $DX_s(x)$ em \mathcal{L} .

a figura 4.1. Desejamos saber qual é a aplicação linear $\tilde{\ell}_{X_s(x)}$, cujo gráfico coincida com $DX_s(\text{graf}(\{\ell_x : N_x^u \rightarrow E_x^X\}))$.

Para isso calculemos $DX_s(x)(v + \ell_x(v))$. Pela linearidade de $DX_s(x)$ temos

$$DX_s(x)(v + \ell_x(v)) = DX_s(x)(v) + DX_s(x)(\ell_x(v)),$$

decompondo $DX_s(x)(v) = O_{X_s(x)}(DX_s(x)(v)) + \lambda X(X_s(x))$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, obtemos

$$DX_s(x)(v + \ell_x(v)) = O_{X_s(x)}(DX_s(x)(v)) + \lambda X(X_s(x)) + DX_s(x)(\ell_x(v)).$$

Podemos ainda escrever $\lambda X(X_s(x)) = [(Id - O_{X_s(x)}) \circ DX_s(x)](v)$ e portanto

$$DX_s(x)(v + \ell_x(v)) = O_{X_s(x)}(DX_s(x)(v)) + [(Id - O_{X_s(x)}) \circ DX_s(x)](v) + DX_s(x)(\ell_x(v)).$$

Sabendo que $DX_s(x)(v + \ell_x(v))$ deve ser igual ao gráfico de uma aplicação linear $\tilde{\ell}_{X_s(x)} : N_{X_s(x)}^u \rightarrow E_{X_s(x)}^X$, temos que $DX_s(x)(v + \ell_x(v)) = w + \tilde{\ell}_{X_s(x)}(w)$, onde $w \in N_{X_s(x)}^u$ e $\tilde{\ell}_{X_s(x)}(w) \in E_{X_s(x)}^X$.

Usando o fato que $DX_s(x)$ preserva a direção do fluxo e que $\tilde{\ell}_{X_s(x)}(w) \in E_{X_s(x)}^X$, temos então que $w = O_{X_s(x)}(DX_s(x)(v)) = P_x^s(v)$ e que

$$\tilde{\ell}_{X_s(x)}(w) = [(Id - O_{X_s(x)}) \circ DX_s(x)](v) + DX_s(x)(\ell_x(v)).$$

Como P_x^s é invertível temos que $v = (P_x^s)^{-1}(w) = P_x^{-s}(w)$ e então

$$\begin{aligned} \tilde{\ell}_{X_s(x)}(w) &= [(Id - O_{X_s(x)}) \circ DX_s(x)](P_x^s)^{-1}(w) + DX_s(x)(\ell_x(P_x^s)^{-1}(w)) \\ &= [(Id - O_{X_s(x)}) \circ DX_s(x) + DX_s(x) \circ \ell_x](O_{X_s(x)}(DX_s(x)))^{-1}(w). \end{aligned}$$

Denotando $\mathcal{D}^s = \tilde{\ell}_{X_s(x)}$ temos que a imagem de um elemento $(\ell_x) \in \mathcal{L}$ é

$$\mathcal{D}^s((\ell_x)) = \{(Id - O_{X_s(x)}) \circ DX_s(x) + DX_s(x)|_{E_x^X} \circ \ell_x \circ (O_{X_s(x)} \circ DX_s(x))^{-1} : x \in \Lambda\}.$$

Para verificar que \mathcal{D}^s é contração em \mathcal{L} , estimamos para dois elementos $(\ell_x)_{x \in \Lambda}$ e $(\bar{\ell}_x)_{x \in \Lambda}$ de \mathcal{L}

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}^s((\ell_x)) - \mathcal{D}^s((\bar{\ell}_x))\| &= \|DX_s(x)(\ell_x - \bar{\ell}_x) \circ (P_x^s)^{-1}\| \\ &\leq \|DX_s(x)(\ell_x - \bar{\ell}_x)\| \cdot \|(P_x^s)^{-1}\| \\ &\leq \|DX_s(x)|_{E_x^X}\| \cdot \|(P_x^s)^{-1}\| \\ &\leq \sup_{x \in \Lambda} \left(\frac{\|DX_s|_{E_x^X}\|}{m(P_x^s|N_x^u)} \right) < 1, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade decorre de (4.3).

Temos então um elemento fixo ℓ para \mathcal{D}^s se mostrarmos que $(\mathcal{L}, \|\cdot\|)$ é espaço de Banach, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach. Isto corresponde a um subfibrado E_x^u de $N_x^u \oplus E_x^X$, dado pelo gráfico de ℓ_x . Por construção, $(E_x^X)_{x \in X}$ é DX_s -invariante para este valor particular de s .

De fato, ℓ não só não depende de s , mas ele é também \mathcal{D}^t -invariante para todo t . De fato, é fácil ver que as ações comutam

$$\mathcal{D}^s \mathcal{D}^r = \mathcal{D}^{s+r} = \mathcal{D}^r \mathcal{D}^s \quad r, s \in \mathbb{R}, \quad (4.4)$$

pois cada \mathcal{D}^s corresponde a aplicar DX_s a uma família de subespaços, e $\mathcal{D}^s \mathcal{D}^r$ corresponde a aplicar $DX_s \oplus DX_r = DX_{s+r}$ aos mesmos subespaços.

Notemos que (4.4) vale mesmo para s, r negativo, uma vez que o fluxo é completo, e para $s, r > 0$ suficientemente grande, temos que \mathcal{D}^r e \mathcal{D}^s são contrações. Assim, o ponto fixo é o mesmo: $\mathcal{D}^s \mathcal{D}^r(\ell) = \mathcal{D}^r \mathcal{D}^s(\ell) = \mathcal{D}^r(\ell)$. Então $\mathcal{D}^r(\ell) = \ell$, portanto dado qualquer $t \in \mathbb{R}$ podemos encontrar $s, r > 0$ grandes, com $s - r = t$ e obtemos

$$\mathcal{D}^t(\ell) = \mathcal{D}^{s-r}(\ell) = \mathcal{D}^s \mathcal{D}^{-r}(\ell) = \mathcal{D}^s(\ell) = \ell$$

Finalmente, note que o subfibrado E^u é expandido uniformemente por DX_t , já que, dado $v \in E_x^u$ podemos escrever $v = O_x(v) + \ell(O_x(v))$ onde $O_x(v) \in N_x^u$, $\ell(O_x(v)) = \alpha \cdot X(x) \in E_x^X$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $|\alpha| \cdot \|X(x)\| = \|\ell(O_x(v))\| \leq$

$|||\ell||| \cdot \|O_x(v)\| \leq K\|O_x(v)\|$ onde $0 < K = |||\ell||| < +\infty$ portanto,

$$\begin{aligned}
\|DX_t(x)v\| &= \|DX_t(x)(O_x(v) + \ell(O_x(v)))\| \\
&\geq \|DX_t(x)O_x(v)\| - \|DX_t(x)(\ell(O_x(v)))\| \\
&= \|DX_t(x)O_x(v)\| - \|\alpha \cdot X(X_t(x))\| \\
&\geq \|O_{X_t(x)}DX_t(x)(O_x(v))\| - |\alpha| \cdot \|X(X_t(x))\| \cdot \frac{\|X(x)\|}{\|X(x)\|} \\
&= \|O_{X_t(x)}DX_t(x)(O_x(v))\| - K\|O_x(v)\| \cdot \frac{\|X(X_t(x))\|}{\|X(x)\|} \\
&\geq \|P_x^t(O_x(v))\| - \tilde{K}\|O_x(v)\| \\
&\geq Ce^{\lambda t}\|O_x(v)\| - \tilde{K}\|O_x(v)\| \\
&= (C - \tilde{K}e^{-\lambda t})e^{\lambda t}\|O_x(v)\| \geq \bar{C}e^{\lambda t}\|O_x(v)\|,
\end{aligned}$$

onde $\tilde{K} = K \cdot \sup_{x \in \Lambda} \left\{ \frac{\|X(X_t(x))\|}{\|X(x)\|}, t \in \mathbb{R} \right\} < +\infty$ e $\bar{C} = \sup_{t>0} (C - \tilde{K}e^{-\lambda t})$. Note que $\bar{C} > 0$, já que $\tilde{K}e^{-\lambda t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.

Analogamente, obtemos contração na direção de E^s raciocinando com $E^{cs} = N^s \oplus E^X$ e a ação \mathcal{D}^{-s} para valores suficientemente grandes de $s > 0$.

Resta então verificar que $(\mathcal{L}, |||\cdot|||)$ é espaço de Banach.

4.2.2 Completude de $(\mathcal{L}, |||\cdot|||)$

Seja $(\ell_x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em \mathcal{L} , temos que para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 > 0$ tal que

$$\forall m, n > n_0 \implies |||\ell_x^n - \ell_x^m||| < \epsilon,$$

em particular $\|\ell_x^n(v) - \ell_x^m(v)\| \leq |||\ell_x^n - \ell_x^m||| \cdot |v|$ para todo $v \in N_x^u$. Assim temos que $(\ell_x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em E_x^X .

Note que como a decomposição $N^u \oplus E^X$ é contínua, tomando para cada $x \in \Lambda$ $\{v_1(x), \dots, v_k(x)\}$ uma base de N_x^u e $\left\{ \frac{X(x)}{\|X(x)\|} \right\}$ base de E_x^X , onde $k = \dim N_x^u$, conseguimos $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ matriz $[\ell_x]$ de ℓ_x na base $(v_1(x), \dots, v_k(x))$, onde $\alpha_i = \ell_x(v_i(x))$.

Assim, podemos obter uma família de bases que dependem continuamente de x , desta forma é possível identificar a família $(\ell_x)_{x \in \Lambda}$ com a aplicação $x \in \Lambda \rightarrow [\ell_x] \in \mathbb{R}^k$. Usando a completude do \mathbb{R}^k temos que $\ell_x^n(v) \rightarrow \hat{\ell}_x(v)$ para cada $x \in \Lambda$ e cada $v \in N_x^u$.

Resta agora mostrar que $(\hat{\ell}_x)_{x \in \Lambda} \in \mathcal{L}$. Para tanto observe que como ℓ_x^n é linear temos

$$\hat{\ell}_x(v + \lambda w) \xleftarrow{\infty \leftarrow n} \ell_x^n(v + \lambda w) = \ell_x^n(v) + \lambda \ell_x^n(w) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \hat{\ell}_x(v) + \lambda \hat{\ell}_x(w)$$

para cada $x \in \Lambda$, $v, w \in N_x^u$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, o que mostra que $\hat{\ell}_x$ é linear.

Sabendo ainda que para todo $m, n \geq n_0$ temos,

$$\|\|\ell_x^n - \ell_x^m\|\| = \sup_{x \in \Lambda} \|\ell_x^n - \ell_x^m\| < \epsilon,$$

assim $\|\ell_x^n(v) - \ell_x^{n_0}(v)\| \leq \epsilon \cdot |v|$ para todo $v \in N_x^u$ e todo $x \in \Lambda$. Fazendo $n \rightarrow +\infty$ obtemos, $\|\hat{\ell}_x(v) - \ell_x^{n_0}(v)\| \leq \epsilon \cdot |v|$ para todo $v \in N_x^u$ e todo $x \in \Lambda$. Mas

$$\|\|\hat{\ell}_x(v)\| - \|\ell_x^{n_0}(v)\|\| \leq \|\hat{\ell}_x^n(v) - \ell_x^{n_0}(v)\| \leq \epsilon \cdot |v|,$$

ou seja, $\|\|\hat{\ell}_x\|\| \leq \epsilon + \|\|\ell_x^{n_0}\|\| < +\infty$, pois $\|\|\ell_x^{n_0}\|\| < +\infty$, portanto $\|\|\hat{\ell}_x\|\| < +\infty$. Desta forma temos que $(\hat{\ell}_x)_{x \in \Lambda} \in \mathcal{L}$, donde concluímos que $(\mathcal{L}, \|\|\cdot\|\|)$ é espaço de Banach. Isto conclui a prova do Teorema 4.2.2.

4.2.3 O Lema Hiperbólico para conjuntos seccionalmente hiperbólicos

Usamos agora os resultados já provados para demonstrar o Teorema 1.1.5.

Demonstração do Teorema 1.1.5: Seja Λ o subconjunto compacto invariante de um conjunto seccionalmente hiperbólico sem singularidades. Então existem constantes $C, \lambda > 0$ e decomposição $T_\Lambda M = E \oplus F$ tal que

- $\|DX_t|_{E_x}\| \cdot \|DX_{-t}|_F\| \leq Ce^{-\lambda t}$; para todo $t > 0$ e para todo $x \in \Lambda$;
- $\|DX_t|_{E_x}\| \leq Ce^{-\lambda t}$; para todo $t > 0$;
- $|\det(DX_t|_{L_x})| > Ce^{\lambda t}$; para todo subespaço bidimensional $L_x \subset F_x$ e todo $t > 0$;

Como Λ não possui singularidade, então P^t está definido em Λ e mais,

$$N_x^E := O_x E_x \text{ e } N_x^F := O_x F_x$$

é uma decomposição hiperbólica para $(P_x^t)_{x \in \Lambda}$, pois a projeção ortogonal não aumenta norma. De fato, dado $v \in E_x$ podemos escrever $v = O_x(v) + \alpha X(x)$ onde $O_x(v) \in N_x^E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ portanto,

$$\begin{aligned} DX_t(x)v &= DX_t(x)(O_x(v) + \alpha X(x)) = DX_t(x)O_x(v) + \alpha X(X_t(x)) \\ &= O_{X_t(x)}(DX_t(x)O_x(v)) + \beta X(X_t(x)) + \alpha X(X_t(x)) \\ &= O_{X_t(x)}(DX_t(x)O_x(v)) + (\alpha + \beta)X(X_t(x)) \end{aligned}$$

onde $O_{X_t(x)}(DX_t(x)O_x(v)) \in N_{X_t(x)}^E$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Por outro lado, $DX_t(x)v = O_{X_t(x)}(DX_t(x)v) + (DX_t(x)v - O_{X_t(x)}(DX_t(x)v))$ com $O_{X_t(x)}(DX_t(x)v) \in N_{X_t(x)}^E$ e $(DX_t(x)v - O_{X_t(x)}(DX_t(x)v)) \in E_{X_t(x)}^X$. Como a decomposição é única e a direção do fluxo é DX_t -invariante temos que

$$(\alpha + \beta)X(X_t(x)) = DX_t(x)v - O_{X_t(x)}(DX_t(x)v) = (Id - O_{X_t(x)})DX_t(x)v.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|DX_t(x)v\| &= \|P_x^t O_x(v) + (Id - O_{X_t(x)})DX_t(x)v\| \\ &\geq \|P_x^t O_x(v)\| - \|(Id - O_{X_t(x)})DX_t(x)v\| \\ &\geq \|P_x^t O_x(v)\| - \|Id - O_{X_t(x)}\| \cdot \|DX_t(x)v\| \\ &\geq \|P_x^t O_x(v)\| - \|DX_t(x)v\|. \end{aligned}$$

Novamente estamos usando o fato de $(Id - O_{X_t(x)})$ ser uma projeção e portanto $\|Id - O_{X_t(x)}\| \leq 1$.

Assim, temos que $\|P_x^t O_x(v)\| \leq 2\|DX_t(x)v\|$, logo $\|P_x^t O_x(v)\| \leq Ce^{-\lambda t}\|v\|$, para algumas constantes positivas C e λ , ou seja, N_x^E é uniformemente contrator.

Por outro lado, sabemos que $F_x = E_x^X \oplus N_x^F$, pois $N_x^F \cap E_x^X = \{\vec{0}\}$ e pelo Lema 2.2.1 juntamente com a hipótese de que o subfibrado E é uniformemente contraído temos pelo Lema 4.1.2 que a direção do fluxo esta na direção não contrativa.

Considere os vetores linearmente independentes $v \in N_x^F \setminus \{\vec{0}\}$ e $X(x) \in E_x^X$. Tomando o espaço gerado por eles, $\text{ger}\{X(x), v\} \subset E_x^X \oplus N_x^F$, com base ortonormal $\left\{ \frac{X(x)}{\|X(x)\|}, \frac{v}{\|v\|} \right\}$, temos que a base $\left\{ \frac{X(X_t(x))}{\|X(X_t(x))\|}, \frac{P^t v}{\|P^t v\|} \right\}$ de $DX_t(\text{ger}\{X(x), v\})$ é ortonormal, pela definição P^t . Daí obtêm-se que a matriz de DX_t em relação a estas bases é

$$[DX_t] = \begin{pmatrix} \frac{\|X(X_t(x))\|}{\|X(x)\|} & * \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}$$

$$\text{pois, } DX_t \left(\frac{X(x)}{\|X(x)\|} \right) = \frac{X(X_t(x))}{\|X(x)\|} + 0 \cdot \frac{P^t v}{\|P^t v\|} \text{ e } DX_t \left(\frac{v}{\|v\|} \right) = * \cdot \frac{X(X_t(x))}{\|X(X_t(x))\|} + \Delta \cdot \frac{P^t v}{\|P^t v\|}.$$

Como F_x é seccionalmente expansor temos que

$$|\det[DX_t]| = \frac{\|X(X_t(x))\|}{\|X(x)\|} \cdot |\Delta| \geq Ce^{\lambda t},$$

e como

$$\begin{aligned} \|P^t v\| &= \|O_{X_t(x)}(DX_t(x)v)\| = \left\| O_{X_t(x)}\left(DX_t(x)\frac{v}{\|v\|}\right) \right\| \cdot \|v\| \\ &= |\Delta| \cdot \|v\| \geq Ce^{\lambda t} \frac{\|X(x)\|}{\|X(X_t(x))\|} \cdot \|v\| \geq KCe^{\lambda t} \|v\| \end{aligned}$$

obtemos, $\|P^t|_{N_x^F}\| \geq KCe^{\lambda t}$ para todo $t > 0$. Logo o fluxo linear de Poincaré está definido para todo Λ e P_Λ admite uma decomposição hiperbólica de $N_\Lambda = N^E \oplus N^F$, pelo Teorema 4.2.2 concluímos que Λ é hiperbólico. \square

4.3 Os Teoremas Principais

De posse de todos os resultados obtidos até aqui, concluímos essa subseção apresentando as demonstrações dos Teoremas 1.2.4 e 1.2.1.

Teorema 4.3.1. *Seja Λ um conjunto compacto invariante de X . Suponha que exista uma decomposição contínua DX_t -invariante não trivial do fibrado tangente de Λ , $T_\Lambda M = E \oplus F$ (isto é, $\dim E \neq 0$ e $\dim F \neq 0$) e existem constantes $C, \lambda > 0$, tal que para todo $t > 0$ e todo $x \in \Lambda$, tem-se*

$$\|DX_t|_{E_x}\| \leq Ce^{-\lambda t} \quad e \quad \|DX_{-t}|_{F_{X_t(x)}}\| \leq Ce^{-\lambda t}.$$

Então, Λ é formado por um número finito de singularidades hiperbólicas.

Demonstração. Assuma, argumentando por contradição, que existe $x \in \Lambda \setminus \text{Sing}(X)$, isto é, x é um ponto regular, $X(x) \neq \vec{0}$.

Como a decomposição $T_\Lambda M = E \oplus F$ possui ângulo afastado de zero ao longo de Λ , pois definindo $\psi : \Lambda \rightarrow [-1, 1]$ dada por $\psi(x) = \sin \angle(E_x, F_x)$, obtemos, usando o fato da decomposição $T_\Lambda M = E \oplus F$ ser contínua e não trivial, que $\psi(x) = \sin \angle(E_x, F_x) > 0$ e ψ é contínua para todo $x \in \Lambda$. Sendo Λ compacto, existe $\theta_0 > 0$ tal que $\psi(x) = \sin \angle(E_x, F_x) \geq \theta_0 > 0$ para todo $x \in \Lambda$. Assim pelo Lema 4.1.2 temos que $X(x) \in F_x$.

Aplicando novamente o Lema 4.1.2, só que agora ao fluxo reverso X_{-t} , gerado pelo campo $-X$ sobre o conjunto compacto invariante Λ , temos que $X(x) \in E_x$. Assim, $X(x) \in E_x \cap F_x = \{\vec{0}\}$. Esta contradição mostra que $\Lambda \subset \text{Sing}(X)$.

Porém, nas hipóteses sobre a decomposição, temos que cada $\sigma \in \Lambda$ é uma singularidade hiperbólica: os autovalores de $DX|_{E_\sigma}$ são negativos e os autovalores de $DX|_{F_\sigma}$ são positivos. Como as singularidades hiperbólicas são isoladas em uma variedade M (veja [20]) e usando o fato de Λ ser um conjunto compacto, concluí-se que Λ é formado por um número finito de singularidades hiperbólicas. \square

Agora provemos o resultado principal.

Teorema 4.3.2. [2, Teorema A] *Seja Λ um conjunto compacto invariante de X tal que cada singularidade neste conjunto seja hiperbólica. Suponha que existe uma decomposição contínua DX_t – invariante do fibrado tangente de Λ , $T_\Lambda M = E \oplus F$, em que E é uniformemente contraído, F é seccionalmente expandido e temos dominação sobre as singularidades de Λ , isto é, para algumas constantes $C, \lambda > 0$ temos*

- $\|DX_t|_{E_x}\| \leq Ce^{-\lambda t}$, $\forall x \in \Lambda$, e todo $t \geq 0$.
- $|\det(DX_t|_{L_x})| > Ce^{\lambda t}$, $\forall L_x \subset F_x$ subespaço bidimensional, todo $x \in \Lambda$ e $t > 0$.
- $\|DX_t|_{E_\sigma}\| \cdot \|DX_{-t}|_{F_\sigma}\| \leq Ce^{-\lambda t}$, $\forall \sigma \in \Lambda \cap \text{Sing}(X)$ e todo $t \geq 0$.

Então $T_\Lambda M = E \oplus F$ é uma decomposição dominada.

Demonstração. Seja $x \in R \subset \Lambda$ um ponto regular do fluxo de X . Do Lema 4.1.2 sabemos que $X(x) \in F_x$. Uma vez que F é um subespaço DX_t -invariante, considerando o cociclo linear multiplicativo $A_t(z) = DX_t|_{F_z}$ para $z \in \Lambda$ e $t \in \mathbb{R}$, pelo Teorema Ergódico Multiplicativo [4, 5] (Teorema 2.5.1), existe uma decomposição $F_x = \bigoplus_{j=1}^{s(x)} F_j(x)$, em soma direta de subespaços de Lyapunov. Um destes subespaços é E^X gerado por $X(x) \neq \vec{0}$, que renomeamos $F_1(x) = E_x^X$ no que se segue. Temos também os correspondentes expoentes de Lyapunov $\lambda_j^F(x)$, $j = 1, \dots, s(x)$ que estão associados aos subespaços de Lyapunov.

Fixando $i = 2, \dots, s(x)$ e $v \in F_i(x) \setminus \{\vec{0}\}$, consideramos o espaço gerado por $X(x)$ e v , que denotamos $\text{ger}\{X(x), v\}$. Pela expansão seccional temos que

$$\log |\det(DX_t|_{\text{ger}\{X(x), v\}})| > \log Ce^{\lambda t} = \log C + \lambda t,$$

desse modo,

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log |\det(DX_t|_{\text{ger}\{X(x), v\}})| > \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} (\log C + \lambda t) = \lambda. \quad (4.5)$$

De (4.5) e usando o controle subexponencial dos ângulos nos pontos regulares obtemos (via discussão feita no final da seção 2.5)

$$0 < \lambda \leq \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log |\det(DX_t|_{\text{ger}\{X(x), v\}})| = \lambda_1^F(x) + \lambda_i^F(x) = \lambda_i^F(x).$$

Daí $\lambda_i^F(x) \geq \lambda > 0$ para todo $i = 2, \dots, s(x)$, $x \in R$ e $X(x) \neq \vec{0}$.

Usando agora que E é uniformemente contrator temos

$$\log \|DX_t|_E\| \leq \log Ce^{-\lambda t} = \log C - \lambda t,$$

Deste modo,

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \log \|DX_t|_{E_x}\| \leq \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \log Ce^{-\lambda t} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} (\log C - \lambda t) = -\lambda < 0$$

para todo $x \in \Lambda$.

Defina $\phi_t(x) = \log \frac{\|DX_t|_{E_x}\|}{m(DX_t|_{F_x})}$. Note que $\phi_t(x)$ é uma família de funções contínuas subaditivas: a continuidade vem do fato de $\phi_t(x)$ ser composta das funções contínuas $\|DX_t|_{E_x}\|$ e $m(DX_t|_{F_x})$, e a subaditividade vem do fato de que

$$\begin{aligned} \phi_{t+s}(x) &= \log \frac{\|DX_{t+s}|_{E_x}\|}{m(DX_{t+s}|_{F_x})} = \log \frac{\|DX_t|_{E_{X_s(x)}} \circ DX_s|_{E_x}\|}{m(DX_t|_{F_{X_s(x)}} \circ DX_s|_{F_x})} \\ &= \log \|DX_t|_{E_{X_s(x)}} \cdot DX_s|_{E_x}\| - \log m(DX_t|_{F_{X_s(x)}} \cdot DX_s|_{F_x}) \\ &\leq \log(\|DX_t|_{E_{X_s(x)}}\| \cdot \|DX_s|_{E_x}\|) - \log(m(DX_t|_{F_{X_s(x)}}) \cdot m(DX_s|_{F_x})) \\ &= \log \|DX_t|_{E_{X_s(x)}}\| + \log \|DX_s|_{E_x}\| - \log m(DX_t|_{F_{X_s(x)}}) - \log m(DX_s|_{F_x}) \\ &= \log \frac{\|DX_t|_{E_{X_s(x)}}\|}{m(DX_t|_{F_{X_s(x)}})} + \log \frac{\|DX_s|_{E_x}\|}{m(DX_s|_{F_x})} = \phi_t(X_s(x)) + \phi_s(x). \end{aligned}$$

Além disso $\phi_t(x)$ satisfaz para $x \in R$ pelo Teorema Ergódico Subaditivo (Teorema 2.4.10)

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(x) &= \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{\phi_t(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \frac{\|DX_t|_{E_x}\|}{m(DX_t|_{F_x})} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|DX_t|_{E_x}\| - \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log m(DX_t|_{F_x}) \\ &\leq -\lambda - \min\{\lambda_i^F(x), 1 \leq i \leq s(x)\} \leq -\lambda - 0 = -\lambda \end{aligned}$$

para todo $x \in R$ tal que $X(x) \neq \vec{0}$, onde a desigualdade vem do fato da definição de norma e conorma e dos expoentes de Lyapunov ao longo de F .

Para $\sigma \in \text{Sing}(X) \subset \Lambda$, temos $\bar{\phi}(\sigma) \leq -\lambda$ pois, pela hipótese de dominação nas singularidades, temos que existe $C, \lambda > 0$ tal que,

$$Ce^{-\lambda t} \geq \|DX_t|_{E_\sigma}\| \cdot \|DX_{-t}|_{F_\sigma}\| = \frac{\|DX_t|_{E_\sigma}\|}{m(DX_t|_{F_\sigma})}.$$

Assim $\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \frac{\|DX_t|_{E_\sigma}\|}{m(DX_t|_{F_\sigma})} \leq \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log Ce^{-\lambda t} = -\lambda + \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log C = -\lambda$.

Temos assim que $\bar{\phi}(x) < 0$ para todo $x \in R$. Aplicando a Proposição 2.4.5, temos que existem $K, \tau > 0$ tal que $e^{\bar{\phi}_t(x)} \leq Ke^{-\frac{\tau t}{2}}$ para todo $x \in \Lambda$ e $t > 0$, o que equivale a $\frac{\|DX_t|_{E_x}\|}{m(DX_t|_{F_x})} \leq Ke^{-\frac{\tau t}{2}}$, ou seja, $\|DX_t|_{E_x}\| \cdot \|DX_{-t}|_{F_x}\| \leq Ke^{-\frac{\tau t}{2}}$, $\forall x \in \Lambda$ e $t \geq 0$. O que mostra que a decomposição é dominada e com isso conclui-se a prova do Teorema. \square

Agora que temos provado os Teoremas 1.2.1 e 1.1.5 concluímos a prova do Corolário 1.2.2.

Corolário 4.3.3. *Seja Λ um conjunto compacto invariante sem singularidades para um campo de vetores X . Suponha que exista decomposição contínua DX_t – invariante do fibrado tangente de Λ , $T_\Lambda M = E \oplus F$, onde E é uniformemente contraído e F é seccionalmente expansor. Então Λ é um conjunto hiperbólico.*

Demonstração. Temos pelo Teorema 1.2.1 que $T_\Lambda M = E \oplus F$ é uma decomposição dominada, logo Λ que é compacto invariante sem singularidades é parcialmente hiperbólico. Além disso, F é seccionalmente expansor o que implica Λ ser seccionalmente hiperbólico, e pelo Teorema 1.1.5 concluímos que Λ é um conjunto hiperbólico. \square

Capítulo 5

Fluxos fracamente dissipativos e hiperbolicidade

Vamos agora mencionar uma aplicação do principal resultado para a situação de fluxos tridimensionais fracamente dissipativos.

5.1 Atrator fracamente dissipativo

Lembramos que um subconjunto aberto U é uma *região armadilha* (ou *sumidouro*) se $\overline{X_t(U)} \subset U$, $t > 0$, onde \bar{A} denota o fecho ou aderência do conjunto A num espaço métrico ou topológico. O subconjunto compacto invariante Λ é um *atrator* se é o *subconjunto maximal invariante* $\Lambda(U) = \overline{\bigcap_{t \geq 0} X_t(U)}$ dentro da região armadilha U , neste caso U também é chamada de região isoladora de Λ . Dizemos que um subconjunto compacto invariante Λ para o fluxo gerado pelo campo de vetores X é *fracamente dissipativo* se $\text{div}(X)(x) \leq 0$ para todo $x \in \Lambda$, isto é, o fluxo próximo de Λ não expande volume.

Além disso, dizemos que uma singularidade hiperbólica σ de X é C^1 -linearizável se existe um C^1 -difeomorfismo $h : V_\sigma \rightarrow B$ de uma vizinhança aberta de $\sigma \in M$ para uma vizinhança aberta B da origem de \mathbb{R}^3 tal que $h(X_t(x)) = e^{tA} \cdot h(x)$, $X_s(x) \in V_\sigma$, para $|s| \leq t$ e $A = DX(\sigma)$. Para isso, é suficiente que o espectro de $DX(\sigma)$ satisfaça um número finito de condições de não ressonância, ver por exemplo, [28]. Assim, esta é uma condição que é satisfeita por singularidades hiperbólicas a menos de pequenas perturbações.

5.2 Hiperbolicidade via dissipação fraca e contração assintótica para o passado.

Teorema 5.2.1. *Seja X um campo vetorial C^1 em uma variedade tridimensional M admitindo uma região armadilha U cujas singularidades (se houver) são hiperbólicas e C^1 -linearizáveis. Vamos supor que o subconjunto compacto invariante $\Lambda = \Lambda(U)$ seja fracamente dissipativo e dotado de um campo contínuo unidimensional F com propriedade de contração assintótica para o passado, isto é, $x \in \Lambda \mapsto F_x$ é contínua e para cada $x \in \Lambda$, F_x é um subespaço unidimensional de $T_x M$, e também*

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|DX_{-t}|_{F_x}\| < 0, \quad \forall x \in \Lambda.$$

Se em cada singularidade $\sigma \in U$ existe uma direção E_σ complementar DX_t -invariante tal que $E_\sigma \oplus F_\sigma = T_\sigma M$ é uma decomposição dominada, então Λ é um conjunto hiperbólico (em particular, Λ não tem singularidades).

Uma vez que o conjunto é atrator e decomposição dominada nas singularidades é apenas usada para provar a não existência de singularidades em Λ , como consequência da prova obtemos o seguinte.

Corolário 5.2.2. *Seja X um campo vetorial C^1 em uma variedade tridimensional M admitindo subconjunto compacto invariante Λ , sem singularidades, que é fracamente dissipativo e dotado de um campo contínuo unidimensional F de direções contrativas assintoticamente para o passado. Então Λ é um conjunto hiperbólico.*

Estes resultados são versões extremamente fracas da seguinte conjectura de Viana, apresentada em [30].

Conjectura 5.2.3. *Se um atrator $\Lambda(U)$ tem um expoente de Lyapunov positivo, em Lebesgue quase todos os pontos de sua vizinhança isoladora U , isto é, tal que*

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|DX_t\| > 0, \quad \text{para Lebesgue quase todo } x \in U, \quad (5.1)$$

então $\Lambda(U)$ tem uma medida física: existe uma medida de probabilidade invariante μ suportada em $\Lambda(U)$ tal que, para todas as funções contínuas $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(X_s(x)) ds = \int \varphi d\mu \quad \text{para Lebesgue quase todo } x \in U.$$

Com efeito, se U é uma região armadilha e $\Lambda = \Lambda(U)$ satisfaz as hipóteses do Teorema 5.2.1, então Λ é um atrator hiperbólico, para o qual é bem

conhecido que (5.1) é verdadeira e existe alguma medida física; ver por exemplo [6, 7, 8].

Começamos mostrando que o subfibrado F unidimensional que contrai assintoticamente para o passado é, na verdade, um subfibrado uniformemente expansor. De fato, nota-se que $f_t(x) = \log \|DX_{-t}|_{F_x}\|$ é uma família subaditiva de funções contínuas com respeito a $(X_{-t})_{t \in \mathbb{R}}$, pois

$$\begin{aligned} f_{t+s}(x) &= \log \|DX_{-t-s}|_{F_x}\| = \log \|DX_{-t}|_{F_{X_{-s}(x)}} \cdot (DX_{-s}|_{F_x})\| \\ &= \log \left(\|DX_{-t}|_{F_{X_{-s}(x)}}\| \cdot \|DX_{-s}|_{F_x}\| \right) \\ &= \log \|DX_{-t}|_{F_{X_{-s}(x)}}\| + \log \|DX_{-s}|_{F_x}\| = f_t(X_{-s}(x)) + f_s(x) \end{aligned}$$

onde a terceira igualdade ocorre devido ao fato de que F é unidimensional (logo $DX_{-s}|_{F_x} : F_x \rightarrow F_{X_{-s}(x)}$ é apenas a multiplicação por um número real).

Além disso, $\bar{f}(x) = \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \cdot \log \|DX_{-t}|_{F_x}\| < 0$ para todo $x \in \Lambda$ por hipótese. Em particular, $\bar{f}(x) < 0$ em um conjunto de probabilidade total. Assim, pela Proposição 2.4.5 obtemos $e^{f_t(x)} \leq C^{-1} e^{-\frac{\lambda t}{2}}$, ou ainda que,

$$\|DX_{-t}|_{F_x}\| \leq C^{-1} e^{-\frac{\lambda t}{2}}, \quad \forall t > 0 \text{ e algumas constantes } \lambda, C > 0. \quad (5.2)$$

Isso implica que,

$$C e^{\frac{\lambda t}{2}} \leq \|DX_{-t}|_{F_x}\|^{-1} = m(DX_t|_{F_{X_t(x)}}) \leq \|DX_t|_{F_{X_t(x)}}\|$$

para todo $x \in \Lambda$, $t \geq 0$. Assim, considerando $y = X_{-t}(x) \in \Lambda$ temos que $\|DX_t|_{F_{X_t(y)}}\| = \|DX_t|_{F_{X_t(X_{-t}(x))}}\| = \|DX_t|_{F_x}\| \geq C e^{\frac{\lambda t}{2}}$ para todo $x \in \Lambda$, $t \geq 0$.

Como F é fibrado unidimensional, isto mostra que F é uma direção uniformemente expansora.

Agora vamos usar a suposição de que Λ é um conjunto atrator cuja possíveis singularidades σ são hiperbólicas e C^1 -linearizáveis, admitindo uma direção E_σ complementar DX_t -invariante tal que $E_\sigma \oplus F_\sigma = T_\sigma M$ é uma decomposição dominada.

Lema 5.2.4. *O conjunto atrator Λ não contém singularidades.*

Demonstração. Suponha por absurdo que Λ contém uma singularidade $\sigma \in \Lambda$ de X , isto é, σ é ponto fixo hiperbólico para o fluxo X_t .

Como para cada $t \in \mathbb{R}$, X_t é um difeomorfismo e F_σ é um subespaço unidimensional instável (F_σ é uniformemente expansor) de $DX_t(\sigma)$ temos, pelo Teorema da Variedade Instável, que existe uma subvariedade mergulhada $W_X^u(\sigma) = W_\sigma^u$ unidimensional (uma curva) tal que $F_\sigma = T_\sigma W_\sigma^u$ e $X_{-t}(z) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \sigma$ para todo $z \in W_\sigma^u$.

Além disso, $W_\sigma^u \subset \Lambda$ porque Λ é atrator. De fato, para $z \in W_\sigma^u$ temos $X_{-t}(z) \in U \forall t \geq T_0$ (já que, $X_{-t}(z)$ está tão próximo de σ quanto se queira para todo t maior ou igual a certo $T_0 > 0$ e como U é aberto que contém Λ e $\sigma \in \Lambda$, então $X_{-t}(z) \in U \forall t \geq T_0$). Assim, $z \in X_t(U), \forall t \geq T_0$, portanto $z \in \bigcap_{t \geq T_0} X_t(U) \subset \Lambda$.

Afirmção 5.2.5. Para todo $z \in W_\sigma^u$ temos $X(z) \in F_z$.

Prova da Afirmção. Note que para $z = \sigma$ temos $X(\sigma) = 0 \in F_\sigma$ (pois F_σ é subespaço vetorial). Vamos supor, por absurdo, que $X(z) \notin F_z$ para algum $z \in W_\sigma^u \setminus \{\sigma\}$. Por hipótese, existe um difeomorfismo $h : V_\sigma \rightarrow B$ de uma vizinhança aberta de $\sigma \in M$ para uma vizinhança aberta B da origem de \mathbb{R}^3 tal que $h(X_t(x)) = e^{tA} \cdot h(x)$, sempre que $X_s(x) \in V_\sigma$ para $|s| \leq t$ onde $A = DX(\sigma)$.

Denotemos por $W_{loc}^u(\sigma)$ a componente conexa de $W_\sigma^u \cap V_\sigma$ que contém σ , chamada de variedade instável local de σ em V_σ .

Através de uma mudança linear de coordenadas, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $Dh(\sigma) \cdot F_\sigma = \mathbb{R} \times 0^2$ e $Dh(\sigma) \cdot E_\sigma = 0 \times \mathbb{R}^2$. Seja $v : V_\sigma \cap \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^3$ o campo vetorial contínuo unitário tal que $\text{ger}(v_x) = Dh(x) \cdot F_x, x \in V_\sigma \cap \Lambda$.

Notemos que $h(W_{loc}^u(\sigma)) \subset F_0 = (\mathbb{R} \times 0^2) \cap B$, pois a imagem da variedade instável de σ por uma conjugação está contida na variedade instável de $h(\sigma) = 0 \in \mathbb{R}^3$, que é um subespaço, pois X é enviado por Dh num campo linear: $Dh_x \cdot X(x) = A \cdot h(x)$. De fato, como o campo é C^1

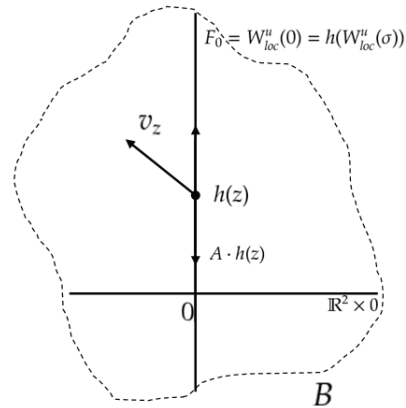
$$\begin{aligned} Dh_x \cdot X(x) &= Dh_x \cdot \frac{\partial}{\partial t} X_t(x)|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t} h(X_t(x))|_{t=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} e^{At} \cdot h(x)|_{t=0} = A e^{At} h(x)|_{t=0} = A \cdot h(x) \end{aligned}$$

Portanto, $Dh_x \cdot T_x W_{loc}^u(\sigma) = T_{h(x)} F_0 = \mathbb{R} \times 0^2$, $\forall x \in W_{loc}^u(\sigma)$. Segue que

$$Dh_z \cdot X(z) = A \cdot h(z) \in \mathbb{R} \times 0^2 = T_{h(z)} F_0,$$

ou seja, $Dh_z \cdot X(z) \in Dh_z \cdot T_z W_{loc}^u(\sigma)$ e assim $X(z) \in T_z W_{loc}^u(\sigma)$. Logo, $v_z \notin \mathbb{R} \times 0^2$ pois $X(z) \notin F_z$, por suposição (lembre-se que v_z é gerado por $Dh_z \cdot F_z$).

Pela invariância de F , vem que $DX_{-t} F_z = F_{X_{-t}(z)} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} F_\sigma$. Usando agora a invariância de $W_{loc}^u(\sigma)$, temos que $DX_{-t}(T_z W_{loc}^u(\sigma)) = T_{X_{-t}(z)} W_{loc}^u(\sigma) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} T_\sigma W_{loc}^u(\sigma) = F_\sigma$.



Assim, aplicando $Dh_{X_{-t}(z)}$ às expressões acima e usando que h é de classe C^1 (Dh é contínua), temos por um lado que

$$Dh_{X_{-t}(z)}(DX_{-t}F_z) = Dh_{X_{-t}(z)}(F_{X_{-t}(z)}) = v_{X_{-t}(z)} = Ae^{-tA}v_z$$

e, por outro lado,

$$Dh_{X_{-t}(z)}(DX_{-t}(T_z W_{loc}^u(\sigma))) = Dh_{X_{-t}(z)}(T_{X_{-t}(z)} W_{loc}^u(\sigma)) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \mathbb{R} \times 0^2.$$

Daí concluímos que $v_{X_{-t}(z)} = Ae^{-tA}v_z$ deve se aproximar de $\mathbb{R} \times 0^2 = F_0$ quando $t \rightarrow +\infty$.

Mas $v_z \notin \mathbb{R} \times 0^2$ e a decomposição $(0 \times \mathbb{R}^2) \oplus (\mathbb{R} \times 0^2)$ é dominada, pois $E_\sigma \oplus F_\sigma$ é dominada; portanto $e^{-tA} \cdot v_z$ vai ter uma componente em $0 \times \mathbb{R}^2$ cada vez maior em relação à componente em $\mathbb{R} \times 0^2$, quando t cresce. Então $v_{X_{-t}(z)}$ não pode se aproximar de $\mathbb{R} \times 0^2$. Esta contradição garante que $X(z) \in F_z$ e terminamos a prova da afirmação. \square

Usando agora a Afirmação 5.2.5 junto com a expansão ao longo de F , a continuidade do campo X e a compacidade de Λ temos que

$$\infty > \sup_{x \in \Lambda} \|X(x)\| \geq \|X(X_t(z))\| = \|DX_t \cdot X(z)\| \geq ce^{\frac{\lambda}{2}t} \|X(z)\|, \quad t \geq 0$$

que é uma contradição e completa a prova do lema. \square

A partir de agora vamos usar apenas as hipóteses do Corolário 5.2.2, isto é, que assumimos Λ é um subconjunto compacto invariante fracamente dissipativo, sem singularidades, com um campo contínuo unidimensional F de direções contrativas assintoticamente para o passado.

Como já vimos na subseção 4.2.1, o fluxo linear de Poincaré está bem definido sobre Λ (já que Λ não possui singularidades). Denotemos como antes $O_x : T_x M \rightarrow N_x$ a projeção ortogonal de $T_x M$ em N_x (complemento ortogonal da direção do campo em $x \in \Lambda$, ou seja, $N_x = \{v \in T_x M; v \cdot X(x) = 0\}$), com o fluxo linear de Poincaré dado por $P_x^t = O_{X_t(x)} \circ DX_t : T_x M \rightarrow N_{X_t(x)}$, $x \in \Lambda$, $t \in \mathbb{R}$.

Denote \tilde{F} a projeção de F no subfibrado normal dada por $\{\tilde{F}_x = O_x(F_x)\}_{x \in \Lambda}$ e considere o subfibrado unidimensional G_x de N_x ortogonal a \tilde{F}_x (note que N_x é bidimensional). Podemos então escrever $N_x = \tilde{F}_x \oplus G_x$.

Note que o subfibrado \tilde{F} é P^t -invariante. De fato, dado $w \in F_x$ podemos decompor w como soma de vetores $v \in \tilde{F}_x$ e $\alpha X(x) \in E_x^X$, para algum

$\alpha \in \mathbb{R}$. Daí temos que $DX_t(x)w = DX_t(x)(v + \alpha X(x)) = DX_t(x)v + \alpha X(X_t(x)) \in N_{X_t(x)} \oplus E_{X_t(x)}^X$ e também $DX_t(x)w \in F_{X_t(x)}$ pois F é DX_t -invariante. Portanto

$$\begin{aligned} O_{X_t(x)}(DX_t(x)w) &= O_{X_t(x)}(DX_t(x)v + \alpha X(X_t(x))) = O_{X_t(x)}(DX_t(x)v) \\ &= O_{X_t(x)} \circ DX_t(x)(O_x(w)) = P_x^t(O_x(w)), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Como $w \in F_x$ é qualquer e $O_x(w) \in \tilde{F}_x$ e $O_{X_t(x)}(DX_t(x)w) \in \tilde{F}_{X_t(x)}$, concluímos que \tilde{F} é P^t -invariante ($P_x^t(\tilde{F}_x) = \tilde{F}_{X_t(x)}$).

Desta forma, tomando vetores unitários não-nulos $v \in \tilde{F}_x$ e $v^\perp \in G_x$, podemos escrever a matriz $[P_x^{-t}]$ em relação à base $\left\{ \frac{P_x^{-t}(v)}{\|P_x^{-t}(v)\|}, \frac{P_x^{-t}(v^\perp)}{\|P_x^{-t}(v^\perp)\|} \right\}$ (similar ao que fizemos na subseção 4.2.3)

$$[P_x^{-t}] = \begin{pmatrix} a_t(x) & b_t(x) \\ 0 & c_t(x) \end{pmatrix}$$

onde $a_t(x) : \tilde{F}_x \rightarrow \tilde{F}_{X_{-t}(x)}$, $b_t(x) : G_x \rightarrow \tilde{F}_{X_{-t}(x)}$ e $c_t(x) : G_x \rightarrow G_{X_{-t}(x)}$.

Lembre que a direção do fluxo é DX_{-t} -invariante. Daí, tomando a base ortonormal $\left\{ \frac{X(x)}{\|X(x)\|}, v, v^\perp \right\}$ de $T_x M = E_x^X \oplus \tilde{F}_x \oplus G_x$ temos que $\left\{ \frac{X(X_{-t}(x))}{\|X(X_{-t}(x))\|}, \frac{P_x^{-t}(v)}{\|P_x^{-t}(v)\|}, \frac{P_x^{-t}(v^\perp)}{\|P_x^{-t}(v^\perp)\|} \right\}$ é base normalizada de $DX_{-t}(E_x^X \oplus \tilde{F}_x \oplus G_x)$, pela definição de P^{-t} . Desta forma, podemos escrever a matriz de DX_{-t} em relação às bases consideradas acima,

$$[DX_{-t}] = \begin{pmatrix} \frac{\|X(X_{-t}(x))\|}{\|X(x)\|} & \star & * \\ 0 & a_t(x) & b_t(x) \\ 0 & 0 & c_t(x) \end{pmatrix}$$

já que $DX_{-t} \left(\frac{X(x)}{\|X(x)\|} \right) = \frac{X(X_{-t}(x))}{\|X(x)\|} = \frac{\|X(X_{-t}(x))\|}{\|X(x)\|} \cdot \frac{X(X_{-t}(x))}{\|X(X_{-t}(x))\|}$ e \tilde{F}_x é P_x^{-t} -invariante.

Usando o fato de que o campo é fracamente dissipativo ($\text{div}X(x) \leq 0$, $\forall x \in \Lambda$) temos, pela fórmula de Liouville, que

$$|\det[DX_t]| = \exp \left(\int_0^t \text{div}X(X_s(x)) ds \right) \leq 1, \quad t \geq 0,$$

logo $|\det[DX_{-t}]| = |\det[DX_t]|^{-1} \geq 1$ e como

$$|\det[DX_{-t}]| = \frac{\|X(X_{-t}(x))\|}{\|X(x)\|} \cdot |a_t(x)c_t(x)| = \frac{\|X(X_{-t}(x))\|}{\|X(x)\|} \cdot |\det[P_x^{-t}]| \geq 1,$$

concluímos que $|\det[P_x^{-t}]| \geq m_0 = \min_{x \in \Lambda} \left(\frac{\|X(x)\|}{\|X(X_{-t}(x))\|} \right) > 0$, uma vez que Λ não contém singularidades, pelo Lema 5.2.4.

Afirmção 5.2.6. O subfibrado \tilde{F} é uniformemente contraído por P^{-t} para o passado.

Prova da Afirmção. Pela continuidade do subfibrado F , temos que $\angle(F_x, X(x))$ é afastado de zero, assim existe $k > 0$ tal que $F_x = \{u = \beta X(x) + v : v \in \tilde{F}_x \text{ e } |\beta| \leq k\|v\|\}$. Daí, ficamos com

$$\begin{aligned}
\|P_x^{-t}(v)\| &= \|(O_{X_{-t}(x)} \circ DX_{-t})(x)(v)\| \\
&= \|(O_{X_{-t}(x)} \circ DX_{-t})(x)(u - \beta X(x))\| \\
&= \|O_{X_{-t}(x)}(DX_{-t}(x)u - \beta X(X_{-t}(x)))\| \\
&= \|(O_{X_{-t}(x)} \circ DX_{-t})(x)(u)\| \leq \|DX_{-t}(x)(u)\| \leq (\text{por 5.2}) \\
&\leq C^{-1}e^{-\frac{\lambda t}{2}}\|u\| = C^{-1}e^{-\frac{\lambda t}{2}}\|\beta X(x) + v\| \leq C^{-1}e^{-\frac{\lambda t}{2}}(\beta\|X(x)\| + \|v\|) \\
&\leq C^{-1}e^{-\frac{\lambda t}{2}}(k\|v\| \cdot \|X(x)\| + \|v\|) \leq C^{-1}e^{-\frac{\lambda t}{2}}\|v\|(1 + k \sup_{x \in \Lambda} \|X(x)\|) \\
&\leq \tilde{k}C^{-1}e^{-\frac{\lambda t}{2}}\|v\| = ke^{-\frac{\lambda t}{2}}\|v\|
\end{aligned} \tag{5.3}$$

onde $\lambda > 0$, $\tilde{k} = (1 + k \sup_{x \in \Lambda} \|X(x)\|) < \infty$ (já que o campo é contínuo e Λ é compacto) e $k = \tilde{k}C^{-1} > 0$, o que prova a afirmção 5.2.6. \square

Agora já temos o necessário para garantir a existência de um subfibrado complementar P^{-t} -invariante e expansor através da transformada do gráfico.

Pela afirmção 5.2.6 e pelo fato de que \tilde{F}_x é P_x^{-t} -invariante, temos $|a_t(x)| \leq ke^{-\frac{\lambda t}{2}}$ e sabendo que $0 < m_0 \leq |\det[P_x^{-t}]| = |a_t(x)| \cdot |c_t(x)|$, obtemos $|c_t(x)| \geq \frac{m_0 e^{\frac{\lambda t}{2}}}{k}$, $x \in \Lambda$, $t > 0$. Fixemos $T > 0$ tal que $|c_t(x)| \geq \frac{m_0 e^{\frac{\lambda T}{2}}}{k} \geq 2$ e $ke^{-\frac{\lambda t}{2}} \leq 1$ para todo $t \geq T$.

Vamos agora considerar a família de subespaços unidimensionais complementares para \tilde{F}_x em N_x dados pelo gráfico da função linear $\ell_x : G_x \rightarrow \tilde{F}_x$, isto é, consideraremos o espaço vetorial $\mathcal{L} = \mathcal{L}([x]_\Lambda, \tilde{F}_x)$ dado pela família de funções

$$\left\{ (\ell_x)_{x \in \Lambda}; \ell_x : G_x \rightarrow \tilde{F}_x \text{ é linear para } x \in \Lambda \text{ e } \|\ell_x\| := \sup_{x \in \Lambda} \|\ell_x\| < +\infty \right\}.$$

Já vimos nas subseções 4.2.1 e 4.2.2 que a norma de cada função linear está bem definida e que $(\mathcal{L}, \|\cdot\|)$ é espaço de Banach.

Vamos agora mostrar que a ação do Fluxo Linear de Poincaré- P^{-t} em \mathcal{L} , dado pela transformada do gráfico, é uma contração para $-T$. Para isto considere o gráfico $\text{graf}(\{\ell_x : G_x \rightarrow \tilde{F}_x\}) = v + \ell_x(v)$ para todo $x \in \Lambda$ e

todo $v \in G_x$, conforme fizemos na subseção 4.2.1. Desejamos saber qual é a aplicação linear $\tilde{\ell}_{X_{-t}(x)}$, cujo gráfico coincida com $P_x^{-t}(\text{graf}(\{\ell_x : G_x \longrightarrow \tilde{F}_x\}))$.

Para isso calculemos $P_x^{-t}(v + \ell_x(v))$. Pela linearidade de P_x^{-t} temos

$$P_x^{-t}(v + \ell_x(v)) = P_x^{-t}(v) + P_x^{-t}(\ell_x(v)), \quad v \in G_x.$$

Usando a projeção ortogonal $\pi_x : N_x \longrightarrow \tilde{F}_x$ decomponamos $P_x^{-t}(v) = \lambda g + \pi_{X_{-t}(x)}(P_x^{-t}(v))$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ e algum $g \in G_{X_{-t}(x)}$ e obtemos

$$P_x^{-t}(v + \ell_x(v)) = \lambda g + \pi_{X_{-t}(x)}(P_x^{-t}(v)) + P_x^{-t}(\ell_x(v)).$$

Podemos ainda escrever

$$\lambda g = P_x^{-t}(v) - \pi_{X_{-t}(x)}(P_x^{-t}(v)) = [(Id - \pi_{X_{-t}(x)}) \circ P_x^{-t}](v)$$

e portanto

$$P_x^{-t}(v + \ell_x(v)) = [(Id - \pi_{X_{-t}(x)}) \circ P_x^{-t}](v) + (\pi_{X_{-t}(x)} \circ P_x^{-t})(v) + (P_x^{-t} \circ \ell_x)(v).$$

Notemos que $[(Id - \pi_{X_{-t}(x)}) \circ P_x^{-t}](v) = c_t(x) \cdot v$ por $[P_x^{-t}]$, já que $Id - \pi_{X_{-t}(x)}$ é a projeção ortogonal em $N_{X_{-t}(x)}$ sobre $G_{X_{-t}(x)}$, pois $v = (0, v_1) \in N_x = \tilde{F}_x \oplus G_x$ e $[P_x^{-t}] \cdot v = (b_t(x)v_1 \ c_t(x)v_1)^T$, logo $[(Id - \pi_{X_{-t}(x)}) \circ P_x^{-t}](v) = c_t(x)v_1$.

Sabendo que $P_x^{-t}(v + \ell_x(v))$ deve ser igual ao gráfico de uma aplicação linear $\tilde{\ell}_{X_{-t}(x)} : G_{X_{-t}(x)} \longrightarrow \tilde{F}_{X_{-t}(x)}$, temos que $P_x^{-t}(v + \ell_x(v)) = w + \tilde{\ell}_{X_{-t}(x)}(w)$, onde $w \in G_{X_{-t}(x)}$ e $\tilde{\ell}_{X_{-t}(x)}(w) \in \tilde{F}_{X_{-t}(x)}$.

Usando o fato de que \tilde{F}_x é P_x^{-t} -invariante e que $\tilde{\ell}_{X_{-t}(x)}(w) \in \tilde{F}_{X_{-t}(x)}$, temos então que $w = [(Id - \pi_{X_{-t}(x)}) \circ P_x^{-t}](v)$, logo $v = [(Id - \pi_{X_{-t}(x)}) \circ P_x^{-t}]^{-1}(w)$ e portanto

$$\tilde{\ell}_{X_{-t}(x)}(w) = [P_x^{-t} \cdot \ell_x + \pi_{X_{-t}(x)} \cdot P_x^{-t}] \circ [(Id - \pi_{X_{-t}(x)}) \circ P_x^{-t}]^{-1}(w).$$

Denotando $\mathcal{D}^{-t} = \tilde{\ell}_{X_{-t}(x)}$, vem que a imagem de um elemento $(\ell_x) \in \mathcal{L}$ é dada por

$$\mathcal{D}^{-t}((\ell_x)) = \{[P_x^{-t} \cdot \ell_x + \pi_{X_{-t}(x)} \cdot P_x^{-t}] \circ [(Id - \pi_{X_{-t}(x)}) \circ P_x^{-t}]^{-1} : x \in \Lambda\}.$$

Para verificar que \mathcal{D}^{-T} é contração em \mathcal{L} , estimamos para dois elemen-

tos $(\ell_x)_{x \in \Lambda}$ e $(\bar{\ell}_x)_{x \in \Lambda}$ de \mathcal{L}

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{D}^{-T}((\ell_x)) - \mathcal{D}^{-T}((\bar{\ell}_x))\| &= \sup_{x \in \Lambda} \{\|P_x^{-T} \cdot (\ell_x - \bar{\ell}_x) \circ [(Id - \pi_{X_{-T}(x)}) \circ P_x^{-T}]^{-1}\|\} \\
&\leq \sup_{x \in \Lambda} \{\|P_x^{-T}|_{\bar{F}_x}\| \cdot \|(\ell_x - \bar{\ell}_x)[(Id - \pi_{X_{-T}(x)}) \circ P_x^{-T}]^{-1}\|\} \\
&\leq (\text{Por 5.3}) \\
&\leq \underbrace{ke^{-\frac{\lambda T}{2}}}_{\leq 1} \sup_{x \in \Lambda} \{\|(\ell_x - \bar{\ell}_x)[(Id - \pi_{X_{-T}(x)}) \circ P_x^{-T}]^{-1}\|\} \\
&\leq \sup_{x \in \Lambda} \{\|\ell_x - \bar{\ell}_x\| \cdot |c_T(x)|^{-1}\} \leq \frac{1}{2} \sup_{x \in \Lambda} \{\|\ell_x - \bar{\ell}_x\|\} \\
&= \frac{1}{2} \|(\ell_x)_{x \in \Lambda} - (\bar{\ell}_x)_{x \in \Lambda}\|
\end{aligned}$$

Temos então um elemento fixo ℓ_x^0 para \mathcal{D}^{-T} pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach. Isto corresponde a um subfibrado $\tilde{E} = \{\tilde{E}_x = \{(u, \ell_x^0(u)) : u \in G_x\}_{x \in \Lambda}\}$ P^{-T} -invariante para o fibrado normal. Sabendo que P^{-T} comuta com cada P^s para todo $s \in \mathbb{R}$, temos que \tilde{E} é P^s -invariante para todo $s \in \mathbb{R}$.

Afirmção 5.2.7. *O subfibrado $E = \tilde{E} \oplus E^X$ é DX_{-t} -invariante.*

De fato, para qualquer $v = u + \beta X(x) \in E_x$ onde $u \in \tilde{E}$ e $\beta \in \mathbb{R}$, obtemos que $DX_t(x)v = DX_t(x)u + \beta X(X_t(x))$ e $DX_t(x)u = P_x^t(u) + \gamma X(X_t(x))$ para algum $\gamma \in \mathbb{R}$, assim $DX_t(x)v = P_x^t(u) + \gamma X(X_t(x)) + \beta X(X_t(x)) = P_x^t(u) + (\gamma + \beta)X(X_t(x))$, com $P_x^t(u) \in \tilde{E}_{X_t(x)}$ e portanto $DX_t(x)v \in E_{X_t(x)}$ o que prova a afirmação 5.2.7.

Neste ponto, temos uma decomposição contínua DX_{-t} - invariante, $T_x M = E_x \oplus F_x$, $x \in \Lambda$. Usando essa decomposição invariante podemos escrever

$$[DX_{-t}] = \begin{pmatrix} A_t(x) & 0 \\ 0 & B_t(x) \end{pmatrix}$$

onde $A_t(x)$ é a matriz de ordem 2 da aplicação $DX_{-t}|_{E_x}$ e $B_t(x)$ é a matriz de ordem 1 da aplicação $DX_{-t}|_{F_x}$.

A continuidade da decomposição garante que $\angle(E_x, F_x)$ é uniformemente afastado do zero, isto assegura que $1 \leq |\det DX_{-t}| = |\det A_t(x)| \cdot |B_t(x)| \cdot \sin \angle(E_x, F_x) \leq |\det A_t(x)| \cdot |B_t(x)|$ e como $B_t(x) = DX_{-t}|_{F_x}$ temos $|B_t(x)| \leq C^{-1}e^{-\lambda t/2}$ (por 5.2) e portanto $|\det A_t(x)| \geq Ce^{\lambda t/2}$ (cresce exponencialmente rápido).

Isso mostra que Λ possui uma decomposição contínua invariante $E \oplus F$ com F uniformemente contrator e E expandindo área para o fluxo no passado. Como estamos tratando de uma variedade tridimensional, isso

implica que E é seccionalmente expansor para $-X$. Pelo Corolário 4.3.3 temos que Λ é um conjunto hiperbólico para $-X$, portanto Λ é um conjunto hiperbólico, o que prova o Teorema 5.2.1 e Corolário 5.2.2.

5.3 Considerações Finais

Neste ponto já vimos através do Teorema 1.2.1 condições suficientes para dominação de uma decomposição invariante sobre um subconjunto compacto invariante de um fluxo diferenciável, X_t .

O Teorema 1.2.1 diz que se pode obter uma decomposição dominada, a partir de uma decomposição contínua em dois subfibrados invariantes $E \oplus F$ do fibrado tangente de um subconjunto compacto invariante Λ , como consequência de

- dominação nas singularidades de X sobre Λ , se existirem;
- invariância da decomposição;
- contração uniforme ao longo de E e expansão seccional ao longo de F .

Como vimos, o Teorema 1.2.1 é obtido através de um enfraquecimento das hipóteses do Teorema 1.2.4. Seguindo esse caminho de enfraquecer hipóteses para obter condições mais gerais, surgem questões a serem respondidas, tais como:

1. Sob quais hipóteses pode-se retirar a condição de dominação nas singularidades no Teorema 1.2.1?
2. Existe alguma hipótese tal que a continuidade na decomposição do Teorema 1.2.1 é desnecessária?
3. Quais são as condições necessárias e/ou suficientes para um conjunto compacto invariante ser seccional hiperbólico para um fluxo?

Concluo assim a dissertação, destacando perspectivas positivas para um futuro trabalho, onde quem sabe essas perguntas sejam respondidas.

Bibliografia

- [1] Araújo, V., Pacifico, M. J., Three-dimensional flows, Vol. 53 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*, Springer, Heidelberg (2010), ISBN 978-3-642-11413-7. With a foreword by Marcelo Viana.
- [2] Araújo, V., Arbieto A., Salgado, L. S., Dominated Splittings for flows with singularities. *Nonlinearity* v. 26, p. 2391-2407, 2013.
- [3] Arbieto, A., Sectional Lyapunov Exponents, *Proc. of the American Mathematical Society*, 138, 3171–3178. 2010.
- [4] Arnold, L., Random dynamical systems, Springer-Verlag, Berlin (1998).
- [5] Barreira, L., Pesin, Y., Nonuniform hyperbolicity, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, Vol. 115, Cambridge University Press, Cambridge, ISBN 978-0-521-83258-8; 0-521-83258-6. Dynamics of systems with nonzero Lyapunov exponents. 2007.
- [6] Bonatti, C., Díaz, L. J., Viana, M., Dynamics beyond uniform hyperbolicity, volume 102 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 2005. A global geometric and probabilistic perspective, Mathematical Physics, III.
- [7] Bowen, R., Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms, volume 470 of *Lect. Notes in Math*. Springer Verlag, 1975.
- [8] Bowen, R., Ruelle, D., The ergodic theory of Axiom A flows, *Invent. Math.*, 29: 181-202. 1975.

- [9] Castro Jr., A. Armando. Curso de teoria da medida. 2ed. Rio de Janeiro: IMPA, ISBN 978-85-244-0217-3, 2008. 193p.; Projeto Euclides.
- [10] Hayashi, S., Connecting invariant manifolds and the solution of the C^1 stability and Ω -stability conjectures for flows, *Annals of Math.*, 145, no. 1, 81-137. 1997.
- [11] Hirsch, M., Pugh, C., Shub, M., Invariant manifolds, *Lectures Notes in Mathematics*, 543. 1977.
- [12] Lawrence Perko, Differential Equations and Dynamical Systems Springer-Verlag. Berlin. 3rd edition, 2006.
- [13] Liao, S., On the stability conjecture, *Chinese Ann. of Math.*, 1, 9-30. 1980.
- [14] Mañé, R., A proof of C^1 -stability conjecture, *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.*, 66, 161-210. 1988.
- [15] Mañé, R., Contributions to the stability conjecture, *Topology*, 17, 383-396. 1978.
- [16] Mañé, R., Introdução à teoria ergódica. Projeto Euclides. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 1983.
- [17] Metzger, R., Morales, C., Sectional-hyperbolic systems, *Ergodic Theory and Dynamical System*, 28 1587–1597. 2008.
- [18] Morales, C., Pacifico, M. J., Pujals, E. R., Robust transitive singular sets for 3-flows are partially hyperbolic attractors or repellers, *Ann. of Math.*, (2), 160, no. 2, 375–432. 2004.
- [19] Oliveira, César R. Introdução à Análise Funcional. Rio de Janeiro: IMPA, ISBN 978-85-244-0311-8, 2012. 257p.; Projeto Euclides.
- [20] Palis, J., de Melo, W., Geometric Theory of Dynamical Systems, *Springer Verlag*. 1982.
- [21] Palis, J., Smale, S., Structural stability theorems, *Proc. A. M. S. Symp. Pure Math.*, 14, 223-232. 1970.
- [22] Pliss, V., On a conjecture due to Smale, *Differ. Uravn.*, 8, 262–268. 1972.
- [23] Ruelle D., Ergodic theory of differentiable dynamical systems. *Publ. Math. IHES* 50, 275-305. 1979.

- [24] Salgado, L. S., Sobre hiperbolicidade fraca para fluxos singulares. Tese de doutorado em matemática. Rio de Janeiro UFRJ/PGPIM, 2012.
- [25] Sambarino, M., Hiperbolicidad y estabilidad, *XXII Escuela venezolana de matematicas*. Merida, Venezuela, 09/09/2009.
- [26] Sinai, Y. Markov partitions and C-diffeomorphisms, *Func. Anal. and Appl.*, 2, 64–89. 1968.
- [27] Smale, S., Differentiable dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, Vol. 73. 747-817. 1967.
- [28] Sternberg E., On the structure of local homeomorphisms of euclidean n -space-II. *Amer. J. Math.*, 80:623-631, 1958.
- [29] Tucker, W., The Lorenz attractor exists, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 328, Série I, 1197–1202. 1999.
- [30] Viana, Marcelo. Dynamics: a probabilistic and geometric perspective. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I (Berlin, 1998)*, number I in Extra Vol., pages 557-578 (electronic), 1998.
- [31] Walters, Peter. An introduction to ergodic theory. (Graduate texts in mathematics; 79). New York, Springer-Verlag, ISBN 0-387-95152-0, 1982.

Universidade Federal da Bahia-UFBA
Instituto de Matemática / Colegiado da Pós-Graduação em Matemática

Av. Adhemar de Barros, s/n, Campus de Ondina, Salvador-BA
CEP: 40170 -110
www.pgmat.ufba.br